Elaborato Parte 1

Guglielmo Bartelloni
Ilaria Rocchi

1 aprile 2022

Esecizio 1. Per dimostrare la seguente:

$$\frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}=f'(x)+O(h^4).$$

Eseguiamo lo sviluppo di taylor delle:

$$f(x+2h)=f(x)+2hf'(x)+2h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f^3(x)+\frac{2}{3}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)+\frac{1}{6}h^3f^3(x)+\frac{1}{24}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

$$f(x-h)=f(x)-hf'(x)+\frac{1}{2}h^2f''(x)-\frac{1}{6}h^3f^3(x)+\frac{1}{24}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

$$f(x-2h)=f(x)-2hf'(x)+2h^2f''(x)-\frac{4}{3}h^3f^3(x)+\frac{2}{3}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

Moltiplicando per i coefficienti delle funzioni:

$$-f(x+2h)=-f(x)-2hf'(x)-2h^2f''(x)-\frac{4}{3}h^3f^3(x)-\frac{2}{3}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

$$8f(x+h)=8f(x)+8hf'(x)+4h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f^3(x)+\frac{1}{3}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

$$-8f(x-h)=-8f(x)+8hf'(x)-4h^2f''(x)+\frac{4}{3}h^3f^3(x)-\frac{1}{3}h^4f^4(x)+O(h^5).$$

Quindi:

$$\frac{-f(x+2h)+8f(x+h)-8f(x-h)+f(x-2h)}{12h}=\frac{12hf'(x)+O(h^5)}{12h}=f'(x)+O(h^4).$$

Pertanto l'espressione e' verificata.