Математика в основной школе

С чего началась математика? Может быть, с того момента, когда в древние времена охотник добыл для своего племени второй трофей и возникла возможность добычу пересчитать.

Если бы первый человек, который к единице прибавил единицу знал, как много придется знать девятиклассникам на ОГЭ по математике, то он сильно подумал, а нужно ли ему это? Это, конечно, шутка. Математика проникла во все сферы жизни человека, без нее нам уже не обойтись.

Мы попытались кратко изложить все то, что долгие годы изучалось в школе.

Педантичный читатель может упрекнуть нас в том, что что-то пропущено, что-то не в той последовательности изложено. Может быть, он посоветует перечитать все учебники по математике, которые изучены в школе к окончанию 9 класса. Но девятиклассники вряд ли нуждаются в таком быстродействующем снотворном средстве.

Поэтому мы попытались придать динамичность изложению материала, привести не только сухие теоремы, но и яркие примеры.

Попробуйте просто почитать этот раздел книги. Обратитесь, прежде всего, к нужным частям теории, если возникли проблемы при выполнении задания.

1. Натуральные и целые числа

Сколько будет предметов, если к 3 добавить 2 предмета? На этот непростой для малыша вопрос можно ответить, если положить рядом 3 игрушки и 2 игрушки и пересчитать их все вместе. Мы докажем при этом, что $3 + 2 = 5$. Так можно создать известную всем таблицу сложения. А вот если трем детям дать по 2 конфеты и посчитать число конфет, то мы получим выражение $3 \cdot 2 = 6$. В итоге появляется таблица умножения.

Рассмотрим множество N натуральных чисел. Для этих чисел операции сложения и умножения дают в результате натуральные числа. Нам знакомы свойства этих операций: $a+b=b+a$, $a+b+c=a+(b+c)$, $ab = ba$, $abc=a\cdot(bc)$, $a(b+c)=ab+ac$, $0 + a = a$, $1 \cdot a = a$. Также для этих чисел можно ввести операцию возведения в натуральную степень $a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ раз}$, при этом справедливы соотношения $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$.

А как записать натуральное число? Чему равно, например, число, если его первая цифра равна 3, вторая равна 4, а третья равна 5? Мы немедленно скажем, что это число «триста сорок пять». Не задумываемся мы потому, что тут же представили себе десятичную запись этого числа: 345. За этим скрывается то, что в записи натуральных чисел используется десятичная позиционная система счисления. Первая цифра справа определяет число единиц числа, вторая цифра справа определяет число десятков, третья цифра – число сотен и т.д. Запись числа $\overline{ab}$ означает, что в этом числе a десятков и b единиц. Тем самым справедливы равенства $\overline{ab}=10a+b$, $\overline{abc}=100a+10b+c$ и т. д. В общем случае n-значное число можно записать в виде $\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_2 a_1}$ и оно равно $a_n \cdot 10^{n-1} + a_{n-1} \cdot 10^{n-2} + a_{n-2} \cdot 10^{n-3} + \ldots a_2 \cdot 10 + a_1$.

Такая форма записи чисел наиболее популярна, хотя до сих иногда используется, например на циферблатах часов, римская нумерация. Запишем несколько натуральных чисел, используя десятичную и римскую нумерацию: 3 = III, 12 = XII, 24 = XXIV.

Натуральное число m делится без остатка на натуральное число n (остаток равен 0), тогда и только тогда, когда $\frac{m}{n}$ является натуральным числом. Если натуральное число m не делится без остатка на натуральное число n, то существует натуральное число $r < n$, обладающее тем свойством, что $n - r$ делится без остатка на n. Число r называется остатком при этом делении.

В последовательности натуральных чисел: 1, 2, 3,..., n,... каждое из них, начиная со второго, делится без остатка как минимум на 2 натуральных числа: на 1 и на само это число. Числа 2, 3, 5, 7 имеют только два таких натуральных делителя; числа 4, 6, 8 имеют и другие делители.

Простым числом называется натуральное число, большее 1, которое делится без остатка только на 1 и на само себя.

Составным числом называется натуральное число, большее 1, которое делится без остатка как минимум на три натуральных числа.

Несложно убедиться в том, что простых чисел бесконечно много. Доказательство проведем «от противного». Предположим, что простых чисел конечное число. Перемножим все эти числа и к результату прибавим 1. Ясно, что полученное число не будет делиться без остатка ни на один из сомножителей. Но тогда оно либо само является простым числом, либо разлагается на произведение других простых чисел. Отсюда следует, что простых чисел неограниченно много.

Любое натуральное число N разлагается на произведение простых чисел, среди которых могут быть и повторяющиеся множители. Это можно записать в виде $N = p_1^{n_1} \cdot p_2^{n_2} \cdot p_3^{n_3} \cdot \ldots \cdot p_r^{n_r}$. Здесь $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_r$ — простые делители числа N, $n_1, n_2, \ldots, n_r$ — кратность каждого простого делителя.

Четным называется натуральное число, которое делится на 2. Остальные натуральные числа называются нечетными.

Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или делится на 2.

Натуральное число делится на 3 или на 9 тогда и только тогда, когда сумма цифр числа делится соответственно на 3 или на 9.

Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 или 5.

Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0.

Натуральное число делится на 4 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, которое равно 0 или делится на 4.

Натуральное число делится на 25 тогда и только тогда, когда две его последние цифры образуют число, которое равно 0 или делится на 25.

Натуральное число делится на 100 тогда и только тогда, когда две его последние цифры являются нулями.

Некоторые признаки являются следствием вышеприведенных признаков делимости. Например, число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3. Делимость на 12 равносильна делимости на 3 и на 4, делимость на 15 равносильна делимости на 3 и на 5 и т.д.

Часто аналогичные определения относят и к целым числам, с которыми мы познакомимся чуть позже.

Пусть нам даны два натуральных числа a и b. Каждое из них делится на 1, но ни одно из них не делится без остатка на число, большее самого этого числа. Следовательно, существует наибольшее натуральное число, на которое делится без остатка каждое из заданных чисел. Это число называется наибольшим общим делителем заданных натуральных чисел, для него используется обозначение $НОД(a;\ b)$. Если $НОД(a;\ b) = 1$, то натуральные числа a и b называются взаимно простыми.

Снова рассмотрим два натуральных числа a и b. Произведение ab, очевидно, делится без остатка и на число a и на число b. Следовательно, существует наименьшее натуральное число, которое также делится на оба эти числа. Такое число называется наименьшим общим кратным заданных натуральных чисел, для него используется обозначение $НОК(a;\ b)$.

Как для заданных чисел a и b найти $НОД(a;\ b)$ и $НОК(a;\ b)$? Можно использовать такой вариант. Выполним разложение на простые множители каждого из чисел a и b. Произведение общих множителей равно $НОД(a;\ b)$, в то же время справедлива формула $НОК(a;b) = \dfrac{ab}{НОД(a;b)}$. Есть более простой способ найти наименьшее общее кратное. Надо взять наибольшее число и его умножить на недостающие множители второго числа. Проверьте, что $НОД(8;\ 12) = 4$, $НОК(8;\ 12) = 24$.

Попытка ввести обратные операции приводит к расширению понятия числа. При этом сформулированные свойства операций над числами сохраняются.

Обратной операции сложения чисел является операция вычитания.

Разностью чисел $a - b$ называется число c, обладающее тем свойством, что $b + c = c + b = a$. Для того, чтобы разность чисел всегда существовала, надо к натуральным числам прибавить 0 и отрицательные числа $-n$, которые определяются тем, что $n + (-n) = 0$.

Целыми называются числа $0,\ \pm1,\ \pm2,\ \pm3\ldots$, это множество обозначают символом Z.

А что такое модуль числа? В одном зарубежном фильме героиня объясняет школьному другу, что модуль числа — это число без знака. Это, конечно, верно, но мы привыкли к более строгому определению абсолютной величины числа в школьном учебнике: $|x| = \begin{cases} x \text{ при } x \geq 0, \\ -x \text{ при } x < 0. \end{cases}$ Итак, модуль положительного числа равен самому этому числу, модуль отрицательного числа равен этому числу, взятому со знаком «минус», модуль нуля равен 0.

2. Дроби, рациональные и действительные числа

Представьте себе ситуацию. Семеро друзей собираются на день рождения одного из них съесть торт. Для этого они разделили торт на 7 равных частей. При этом каждому досталась $\frac{1}{7}$ часть торта. Если сложить 7 раз $\frac{1}{7}$ часть торта, то получится целый торт. Это можно написать в виде равенства $\frac{1}{7} \cdot 7 = 1$.

Рассмотрим теперь общий случай.

Если задано натуральное число n, то числом $\frac{1}{n}$ называется число, обладающее тем свойством, что $\frac{1}{n} \cdot n = 1$.

Пусть теперь еще задано целое число m. Числа вида $\frac{m}{n}$, где $\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$, называются обыкновенными дробями. Число m называется числителем, число n — знаменателем дроби $\frac{m}{n}$. При $m = 0$ эта дробь равна 0.

Из определения следуют некоторые важные свойства дробей.

Свойство 1. Пусть заданы натуральные числа n, k и целое m. Тогда справедливо равенство $\frac{m}{n} = \frac{km}{kn}$.

Итак, умножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же натуральное число не меняет величину дроби.

Свойство 2. Пусть заданы натуральные числа n_1 и n_2. Тогда из условия $n_2 > n_1$ следует неравенство $\frac{1}{n_1} > \frac{1}{n_2}$.

Дробь $\frac{1}{n}$ с увеличением значения n уменьшается. Если в приведенном выше примере число друзей будет не 7, а 8, то доля каждого в праздничном торте уменьшится.

Свойство 3. Пусть заданы натуральное число n, целые числа m_1 и m_2. Тогда из условия $m_2 > m_1$ следует неравенство $\frac{m_2}{n} > \frac{m_1}{n}$.

Если натуральные знаменатели дробей одинаковы, то с увеличением числителя дробь увеличивается.

Свойство 4. Пусть заданы натуральные числа m, n_1 и n_2. Тогда из условия $n_2 > n_1$ следует неравенство $\frac{m}{n_1} > \frac{m}{n_2}$. При отрицательных целых m из условия $n_2 > n_1$ следует неравенство $\frac{m}{n_1} < \frac{m}{n_2}$.

Если числители дробей одинаковы и положительны, то с увеличением знаменателя дробь уменьшается. Если числители дробей одинаковы и отрицательны, то с увеличением знаменателя дробь увеличивается.

А как сравнить дроби, у которых и числители, и знаменатели разные?

Рассмотрим дроби $\frac{300}{853}$ и $\frac{150}{427}$. Умножим числитель и знаменатель второй дроби на 2. Дробь от такой операции не меняется, и мы приходим к равносильной задаче сравнения дробей $\frac{300}{853}$ и $\frac{300}{854}$. При равных числителях знаменатель первой дроби меньше знаменателя второй дроби, следовательно, первая больше второй дроби.

Для сравнения дробей мы привели дроби к общему числителю. Такое словосочетание редко встречается в школе. Обычно мы говорим о приведении дробей к общему знаменателю. Это связано с тем, что операции сложения и вычитания удобнее проводить для дробей с одинаковыми знаменателями.

Рассмотрим дроби $\frac{5}{12}$ и $\frac{7}{18}$. Умножим числитель и знаменатель первой дроби на 3, а числитель и знаменатель второй дроби на 2. Дроби от этих операций не меняются, и мы приходим к равносильной задаче сравнения дробей $\frac{15}{36}$ и $\frac{14}{36}$. При равных знаменателях числитель первой дроби больше знаменателя второй дроби, следовательно, первая больше второй дроби.

В данном случае для сравнения дробей мы привели дроби к общему знаменателю.

Как найти общий знаменатель двух или большего числа дробей? Конечно, существует много натуральных чисел, которые делятся без остатка на все знаменатели этих дробей. Разумно взять меньшее из них. Такое число называется наименьшим общим кратным (НОК) заданных чисел. Легко проверить, что НОК(12;18)=36.

Как мы помним, любые объекты становятся математическими, если над ними введены некоторые операции.

Суммой дробей $\frac{m_1}{n}$ и $\frac{m_2}{n}$ с одинаковыми знаменателями называется дробь $\frac{m_1+m_2}{n}$.

Итак, при сложении дробей с одинаковыми знаменателями числители дробей складываются, а знаменатель остается без изменения.

При сложении дробей с разными знаменателями дроби вначале приводятся к общему знаменателю, а затем складываются по правилу сложения дробей с одинаковыми знаменателями.

Например, $\frac{5}{12}+\frac{7}{18}=\frac{15}{36}+\frac{14}{36}=\frac{29}{36}$.

Вычитание является действием, обратным сложению, поэтому $\frac{m_1}{n}-\frac{m_2}{n}=\frac{m_1-m_2}{n}$. При вычитании дробей с одинаковыми знаменателями числители дробей вычитаются, а знаменатель остается без изменения. При вычитании дробей с разными знаменателями дроби вначале приводятся к общему знаменателю, затем вычитаются.

Произведением дробей $\frac{m_1}{n_1}$ и $\frac{m_2}{n_2}$ называется дробь $\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$.

Иными словами, $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1 \cdot m_2}{n_1 \cdot n_2}$. При умножении дробей их числители перемножаются и записываются в числителе, а знаменателям перемножаются и записываются в знаменателе.

Например, $\frac{5}{12}\cdot\frac{7}{18}=\frac{5\cdot7}{12\cdot18}=\frac{35}{216}$.

Результатом деления дроби $\frac{m_1}{n_1}$ на отличную от 0 дробь $\frac{m_2}{n_2}$ называется дробь $\frac{m_1\cdot n_2}{n_1\cdot m_2}$. Иными словами, $\frac{m_1}{n_1}:\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1\cdot n_2}{n_1\cdot m_2}$.

При делении дробей числитель первой дроби умножается на знаменатель второй дроби и записывается в числителе, а знаменатель первой дроби умножается на числитель второй дроби и записывается в знаменателе.

Например, $\frac{5}{12}:\frac{7}{18}=\frac{5\cdot18}{12\cdot7}=\frac{5\cdot3}{2\cdot7}=\frac{15}{14}$. Заметим, что по ходу вычислений мы числитель и знаменатель разделили на 6. По свойству 1 (правая часть равна левой) такая операция не меняет значение дроби.

Пусть числитель и знаменатель обыкновенной дроби являются натуральными числами. Такая дробь называется правильной, если числитель меньше знаменателя. Дроби $\frac{5}{12}$, $\frac{7}{18}$, $\frac{127}{128}$ являются правильными дробями. Дроби $\frac{15}{14}$, $\frac{35}{3}$ являются неправильными дробями. В этих дробях можно выделить целую и записать их в виде $1\frac{1}{14}$, $11\frac{2}{3}$. Такие дроби называются смешанными. При арифметических операциях со смешанными дробями их можно представлять в виде суммы целого числа и правильной дроби или в виде неправильной дроби. Обычно при умножении и делении смешанные дроби надо представлять в виде неправильной дроби, а при сложении и вычитании — в виде суммы целого числа и правильной дроби. Примеры таких операций можно посмотреть в обзоре задания № 1.

В общем случае конечная десятичная дробь записывается в виде $\overline{a_0,a_1a_2\ldots a_n}$. По определению десятичной дроби, это число равно $a_0+\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\ldots+\frac{a_n}{10^n}$. Например, $2,37=2+\frac{3}{10}+\frac{7}{10^2}$ или

$2{,}37 = 2 + \frac{37}{100}$. Таким образом, десятичная дробь всегда может быть переведена в смешанную или обыкновенную дробь. Обратное возможно только в том случае, когда знаменатель заданной дроби содержит среди простых делителей только числа 2 и 5. В этом случае числитель и знаменатель дроби мы умножаем на наименьшее натуральное число, при котором в знаменателе получается степень числа 10. Например, $2\frac{7}{20} = 2 + \frac{7 \cdot 5}{20 \cdot 5} = 2 + \frac{35}{100} = 2{,}35$. Возможны и другие способы перевода обыкновенной дроби в десятичную. Это можно, например, сделать путем деления числителя на знаменатель в столбик.

Продолжим знакомство с разными видами чисел. Вначале у нас были натуральные числа с операциями сложения, умножения и возведения в натуральную степень. Операция вычитания, обратная операции сложения, привела нас к необходимости рассмотрения целых чисел.

Введение операции деления, обратной операции умножения, приводит к дальнейшему развитию понятия числа, а именно, к рациональным числам.

Рациональными называются числа вида $\frac{m}{n}$, где m является целым числом ($m \in Z$), а n — натуральное число ($n \in N$). Множество рациональных чисел принято обозначать буквой Q. Рациональные числа содержат в себе целые числа, их можно понимать как корни уравнения $nx = m$.

Арифметические действия с рациональными числами сводятся к действиям с дробями.

Поговорим об операции возведения в степень. Если число a возводится в натуральную степень n, то, как мы уже знаем, это равносильно умножению его n раз само на себя. Если $a \neq 0$, то мы считаем по определению, что $a^0 = 1$, $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$. Тем самым мы научились возводить числа, отличные от 0, в целую степень.

Как определить результат возведения числа в рациональную степень? Вначале рассмотрим операцию извлечения квадратного корня. Квадратным корнем, или арифметическим квадратным корнем, из неотрицательного числа a называется неотрицательное число, обозначаемое символом $\sqrt{a}$, обладающее тем свойством, что $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Например, $\sqrt{4} = 2$, хотя уравнение $x^2 = 4$ имеет 2 корня 2 и -2.

Рассмотрим теперь операцию извлечения кубического корня. Кубическим корнем из числа a называется число, обозначаемое символом $\sqrt[3]{a}$, обладающее тем свойством, что $\left(\sqrt[3]{a}\right)^3 = a$. Например, $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{-64} = -4$. Аналогично можно ввести корень любой натуральной степени, при этом корень четной степени можно извлечь только из неотрицательного числа, и он равен неотрицательному числу, а вот корень нечетной степени можно извлекать из любых чисел.

И, наконец, рассмотрим теперь операцию возведения в степень $\frac{1}{n}$, где n — натуральное число. Рассмотрим неотрицательное число a, тогда $a^{\frac{1}{n}}$ — это неотрицательное число, обладающее тем свойством, что $\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = a$.

По определению, неотрицательное число a в рациональной степени $\frac{m}{n}$ определяется формулами $a^{\frac{m}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^m = \left(a^m\right)^{\frac{1}{n}}$.

Обратите внимание, что выражения $\sqrt[3]{a}$ и $a^{\frac{1}{3}}$ отличаются друг от друга. Первое определено для любых a, а второе — только для неотрицательных a. Заметим, что требование неотрицательности основания при возведении в рациональную степень является обязательным. Убедитесь в том, что величину $(-1)^{\frac{1}{3}} = (-1)^{\frac{2}{6}}$ определить невозможно, такая запись не имеет смысла.

Можно проверить, что свойства степени, сформулированные для возведения в натуральную степень, а именно, $a^{m+n} = a^m \cdot a^n$, $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$, $a^n \cdot b^n = (ab)^n$, остаются справедливыми и при возведении чисел в целую и в рациональную степень при сформулированных только что ограничениях.

Дальнейшее развитие понятия числа можно воспринимать как решение все более сложных уравнений. Например, можно доказать, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет решения среди рациональных чисел. Действительно, в уравнении $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ множитель 2 слева встречается четное число раз или не встречается, а справа находится единственный множитель 2. Конечные и бесконечные десятичные дроби (множество всех точек числовой оси) образуют множество действительных чисел R. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными числами. Как мы видим, иррациональные числа существуют, например, это положительный корень уравнения $x^2 = 2$ число $\sqrt{2}$.

Как определить, что данное число является рациональным или, наоборот, не является рациональным числом. Сумма иррационального числа с рациональным будет числом иррациональным. Иначе иррациональное число будет равно разности рациональных чисел, что невозможно. Аналогичной является ситуация и с другими арифметическими операциями.

Отметим еще одно понятие — трансцендентное число. Это иррациональные числа, которые не являются корнями алгебраического уравнения с целыми коэффициентами. Таких чисел подавляющее большинство на числовой оси. Поэтому все мировые константы являются трансцендентными числами.

3. Проценты, сложные проценты

Слово «проценты» часто встречается в обыденных разговорах, деловых переговорах, в средствах массовой информации. Поговорим о формальной стороне этого понятия.

По определению, один процент от положительного числа a — это сотая часть числа, т.е. число $\frac{a}{100}$, соответственно, $p\%$ от числа a равно числу $\frac{ap}{100}$. Чтобы найти 1 процент от числа a, надо число a поделить на 100. Чтобы найти p процентов от числа a, надо число a поделить на 100 и умножить на p.

Пусть задано число 480 и надо найти 7% от него. Для этого мы составим выражение $\frac{480 \cdot 7}{100}$, равное 33,6.

А если бы было известно, что 7% от искомого числа равно 33,6. Для нахождения искомого числа мы проделали бы обратные операции $\frac{33,6\cdot 100}{7}=480$. Если p% от неизвестного числа a равны числу b, то для нахождения числа a надо b разделить на p и умножить на 100, т.е. $a=\frac{b\cdot 100}{p}$

Что происходит с числом при изменении его на определенное число процентов?

При увеличении числа a на p% мы к заданному числу a прибавляем число $\frac{ap}{100}$. После этой операции получается число $a\left(1+\frac{p}{100}\right)$. Это означает, что для увеличения положительного числа на p% надо это число умножить на коэффициент $k_1=1+\frac{p}{100}$.

При уменьшении числа a на p% мы от заданного числа a отнимаем число $\frac{ap}{100}$. После этой операции получается число $a\left(1-\frac{p}{100}\right)$. Это означает, что для уменьшения положительного числа на p% надо это число умножить на коэффициент $k_2=1-\frac{p}{100}$.

Пример 1. С учетом скидки в 6 процентов от объявленной стоимости за диван было уплачено 9 212 рублей. Найдите объявленную стоимость дивана в рублях.

Для решения этой задачи заметим, что при уменьшении цены на 6% объявленная стоимость умножается на коэффициент $k_2=1-\frac{6}{100}=0,94$. Следовательно, для нахождения искомой величины надо сделать обратную операцию, т.е. вычислить величину $\frac{9212}{0,94}=9800$. Итак, объявленная цена в рублях равна 9 800.

Ответ. 9 800.

Если число несколько раз меняется на некоторое число процентов, то каждый раз оно умножается на число вида $1\pm\frac{p}{100}$. Это позволяет вычислять сложные проценты. Рассмотрим такой пример.

Пример 2. Цена на дизельное топливо сначала возросла на 40%, а затем снизилась на 50% от достигнутого уровня. Найдите, как изменилась цена в итоге.

Увеличение цены на 40% соответствует умножению ее на коэффициент $k_1 = 1 + \frac{40}{100} = 1,4$. Уменьшение цены на 50% соответствует умножению ее на коэффициент $k_2 = 1 - \frac{50}{100} = 0,5$. В итоге цена умножилась на коэффициент $k_1 \cdot k_2 = 1,4 \cdot 0,5 = 0,7$. Так как справедливо равенство $0,7 = 1 - \frac{30}{100}$, то мы делаем вывод, что в итоге цена уменьшилась на 30%.

Ответ. Цена уменьшилась на 30%.

4. Измерения, приближения, оценки

В ряде заданий основного государственно экзамена по математике, особенно в разделе «Реальная математика» девятиклассники должны проявить умение ориентироваться в результатах измерений, находить приближения искомых величин и их оценивать.

Поймем ли мы собеседника, если он скажет, что длина автомобиля равна 4. Наверное, можно догадаться, что длина автомобиля равна 4 метрам, краткая запись этой длины 4 м. Метр является основной единицей измерения, но в быту мы часто измеряем длину в дециметрах и сантиметрах, при этом 1м = 10 дм = 100 см. Например, в сантиметрах измеряют размеры портные. Длина ногтя, если его вовремя обрезают, около 1 см. А вот оператор фрезерного обрабатывающего комплекса будет измерять размеры детали в миллиметрах. Миллиметр — это десятая часть сантиметра, т.е. 1 см = 10 мм, 1 м = 1 000 мм.

В нашей обыденной жизни 1 мм является малой величиной. Но проникающим в тайны окружающего мира ученым приходится прибегать и к другим единицам измерения.

Отдельную бактерию простым глазом не увидишь. Для измерения бактерий удобно использовать микроны. Один микрон равен тысячной доле миллиметра или миллионной доле метра. Размер обычной бактерии колеблется около величины в два микрона.

Каковы же размеры вируса? Для того, чтобы измерить вирус, используют в качестве единицы измерения тысячную долю микрона. Эту величину, в миллиард раз меньшую метра, называют миллимикроном или нанометром. Один из самых больших вирусов — вирус гриппа — достигает в длину 120 нанометров, т.е. 120 нм.

Физики при исследовании атомов используют и более мелкие единицы длины — ангстремы (1 ангстрем равен 10^{-10} м или одна десятимиллиардная доля метра)) и пикометры (1 пикометр = $=10^{-12}$ м или одна триллионная часть метра).

Нам приходится иметь дело и с большими единицами измерения. Расстояние при поездках измеряют в километрах, при этом 1 км = 1000 м. Размеры в космосе потрясают наше воображение. Расстояние от Земли до Луна равно в среднем 340 000 км. А вот расстояния между звездами измеряют световыми годами и парсеками. Один парсек, это расстояние, с которого земной шар виден под очень маленьким углом в одну секунду (см. раздел углы, их измерение). Световой год примерно в 3 раза меньше парсека и равен расстоянию, которое проходит луч света за 1 год.

Единицы длины порождают единицы измерения площадей и объемов. Площадь квадрата со стороной 1 м равна 1 $м^2$, т.е. одному квадратному метру. Так как 1 метр равен 10 дециметрам, то в 1 $м^2$ поместится ровно 100 $дм^2$. Отметим некоторые из единиц площадей:

$$1\ м^2 = 100\ дм^2 = 10\,000\ см^2 = 10^{-6}\ км^2.$$

Рассмотрим куб со стороной 1 м, его объем равен 1 $м^3$. В нем поместится 1 000 кубиков со стороной 1дм, соответственно

$$1\ м^3 = 1000\ дм^3 = 1\,000\,000\ см^3 = 10^{-9}\ км^3.$$

Урок в школе обычно продолжается 45 минут. В жизни и в природе встречаются с разными характерными промежутками времени. Один час равен 60 минутам, одна минута равна 60 секундам. В сутках 24 часа, в году 365 или в високосный год 366 дней. В микромире характерными являются очень короткие временные промежутки. Здесь ученые измеряют время в наносекундах, это миллионная доля секунды.

Важной характеристикой, которую мы используем в жизни, является скорость. Если мы говорим, что автомобиль движется со скоростью 90 километров в час или 90 $\frac{км}{час}$, то речь идет о скорости движения материального тела. Если автомобиль движется равномерно с этой скоростью, то это означает, что каждый час (60 минут) он проезжает 90 километров и каждую минуту (60 секунд) соответственно 1,5 км. Можно сказать, что его скорость равна 1,5 километра в минуту, или 1,5 $\frac{\text{км}}{\text{мин}}$. Кстати, наш автомобиль каждую секунду проезжает 25 метров, так что его скорость одновременно равна 25 $\frac{\text{м}}{\text{с}}$.

Скорость тела может быть гораздо больше. Скорость пассажирского самолета составляет около 800 $\frac{\text{км}}{\text{час}}$, боевой истребитель может лететь со скоростью несколько тысяч километров в час. Чтобы космический корабль поднялся на околоземную орбиту, он должен достигнуть первой космической скорости 7,8 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$, а чтобы вырваться из земного тяготения, надо достичь второй космической скорости — 11,2 $\frac{\text{км}}{\text{с}}$.

Рекордсменом скорости материального тела является луч света, состоящий из фотонов. Каждую секунду он преодолевает почти 300 000 километров.

Иногда слово «скорость» используют не только для характеристики перемещения тел в пространстве. Нам знакомы выражения: скорость речи, скорость химической реакции, скорость работы или производительность труда. В каждом конкретном случае вводятся свои единицы измерения этих величин.

5. Алгебраические выражения

Мы рассматривали различные арифметические выражения, т.е. числа, связанные между собой операциями сложения, вычитания, умножения, деления, возведения в степень. Если все или часть чисел заменить буквами, то получится алгебраическое выражение.

Рассмотрим алгебраическое выражение $\sqrt{x}-\frac{2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}$. Если вместо аргумента x мы будем в это выражение подставлять различные числа, первое слагаемое не будет определено при $x<0$, а второе слагаемое не будет определено не только при $x=2$, но и при $x>2$, т.к. в дробную степень нельзя возводить отрицательные числа. Таким образом, выражение $\sqrt{x}-\frac{2}{(2-x)^{\frac{1}{3}}}$ определено только при $0 \le x < 2$, что можно записать в виде $x \in [0;2)$.

Те значения аргумента, при которых заданное выражение определено, называют его областью определения. В данном случае областью определения выражения является промежуток $[0;2)$.

При преобразовании алгебраических выражений надо обращать внимание на изменение области определения алгебраического выражения. Если область определения и значения для каждого аргумента не меняются, то такие преобразования называются тождественными преобразованиями.

Мы стараемся при решении задач делать тождественные преобразования. Если приходится делать преобразование, тождественное на некотором множестве, то это надо учитывать при решении задачи. В дальнейшем нам представятся случаи вспомнить об этом.

Рассмотрим важный частный случай алгебраических выражений – многочлены.

Многочленом степени n называется выражение вида

$$a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \text{ при } a_n \neq 0.$$

Отметим многочлен первой степени $a_1 x + a_0$, $a_1 \neq 0$ и многочлен второй степени $a_2 x^2 + a_1 x + a_0$, $a_2 \neq 0$. Многочлены можно обычным образом складывать, вычитать, умножать друг на друга.

Отметим формулы сокращенного умножения, которые полезно использовать при операциях с многочленами и в других случаях.

Разность квадратов двух чисел равна произведению разности чисел на их сумму или $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Квадрат суммы двух чисел равен сумме их квадратов и удвоенного произведения этих чисел $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Квадрат разности двух чисел равен сумме их квадратов минус удвоенное произведения этих чисел $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$.

Куб суммы двух чисел равен сумме их кубов и утроенного произведения суммы чисел на их произведение

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b).$$

Куб разности двух чисел равен разности их кубов минус утроенное произведение разности чисел на их произведение

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b).$$

Сумма кубов двух чисел может быть найдена по одной из формул: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$.

Разность кубов двух чисел может быть найдена по одной из формул: $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$.

6. Квадратный трехчлен

Запишем многочлен второй степени, или квадратный трехчлен, в виде $ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. Многие секреты квадратного трехчлена откроются, если в нем выделить полный квадрат. Итак, рассмотрим тождество

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a},$$

которое называется формулой выделения полного квадрата.

Запишем эту формулу следующим образом:

$$ax^2 + bx + c = a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right).$$

Мы видим, что возможность разложения на множители квадратного трехчлена, в частности, применения формулы для разности квадратов чисел, связана со значением величины $b^2 - 4ac$. Эту величину, которая так влияет на возможность разложения квадратного трехчлена на линейные множители, назвали дискриминантом, т.е. определителем. Итак, используем обозначение $D = b^2 - 4ac$, и при неотрицательном дискриминанте напишем разложение квадратного трехчлена

$$ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right)\left(x + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right).$$

Введем обозначения:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Числа x_1 и x_2 называются корнями квадратного трехчлена. Они обладают тем свойством, что при подстановке их в квадратный трехчлен обращают его в 0.

Отметим, что при отрицательном дискриминанте эти числа не существуют, квадратный трехчлен пропорционален сумме квадратов чисел и не разлагается на множители.

При положительном дискриминанте существуют 2 различных действительных корня квадратного трехчлена и квадратный трехчлен разлагается на произведение двух различных линейных множителей следующим образом:

$$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2).$$

А что будет, если дискриминант равен 0? В этом случае единственное число обращает в 0 квадратный трехчлен. Как правильно сказать, квадратный трехчлен имеет единственный корень или имеет 2 равных корня?

Давайте разберемся в этом вопросе. Здесь не должно быть путаницы в понятиях: корень уравнения и корень многочлена. Уравнения мы будем с вами изучать чуть позже, но отметим, что корнем уравнения называется число, при подстановке которого уравнение обращается в верное равенство. Ясно, что одно и то же число несколько раз подставлять в уравнение бессмысленно, и уравнение не может иметь равных корней. А вот под корнем многочлена очень часто понимают число x_i в разложении многочлена на множители вида $(x-x_i)$. Такие множители могут быть одинаковыми. Итак, при дискриминанте, равном 0, вполне можно сказать, что квадратный трехчлен имеет 2 одинаковых корня или один кратный корень.

Пусть корни квадратного трехчлена существуют и принимают значения $x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, $x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Тогда, как легко проверить, $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$, $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$.

Сформулированное утверждение называют теоремой Виета.

К этому же результату можно прийти, если в равенстве $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ раскрыть скобки, записать его в виде $ax^2+bx+c=ax^2-a(x_1+x_2)x+ax_1x_2$ и приравнять коэффициенты при соответствующих степенях.

Заметим в итоге, что при отрицательном дискриминанте квадратный трехчлен не разлагается на линейные множители с действительными коэффициентами, при положительном дискриминанте он разлагается на различные линейные множители, при дискриминанте, равном 0, для квадратного трехчлена справедлива формула $ax^2+bx+c=a(x-x_0)^2$.

7. Многочлены и алгебраические дроби

Рассмотрим общий вид многочлена степени n, т.е. выражение $a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots a_1x+a_0$ при $a_n\neq 0$. При сложении и вычитании многочленов их степень не увеличивается, а при умножении степень произведения многочленов равна сумме степеней множителей. Поэтому многочлены первой степени $ax+b$, $a\neq 0$ нельзя представить в виде произведения многочленов.

Многочлен второй степени ax^2+bx+c, $a\neq 0$ при неотрицательном дискриминанте $D=b^2-4ac$ гарантированно разлагается на произведение двух многочленов первой степени.

А разлагается ли на множители многочлен более высокой степени? Известно, что любой многочлен степени выше второй разлагается на линейные и квадратичные множители с отрицательным дискриминантом. Но конкретно найти это разложение в общем случае в принципе невозможно, тем более это не входит в программу не только основной, но и полной средней школы. В сложных задачах такая необходимость может встретиться только в том случае, когда разложить на множители многочлен степени выше второй легко, по крайней мере, не слишком сложно.

Рассмотрим несколько таких примеров.

Пример 1. Разложите на множители многочлен

$$2x^3+10x^2+3x+15.$$

Заданный многочлен можно разложить на множители после группировки и вынесения общего множителя. Действительно, $2x^3+10x^2+3x+15=2x^2(x+5)+3(x+5)=(x+5)(2x^2+3)$.

Ответ. $2x^3+10x^2+3x+15=(x+5)(2x^2+3)$.

Пример 2. Разложите на множители многочлен x^4+4.

Для многочлена x^4+4 применим искусственный прием. Мы прибавим к нему и вычтем $4x^2$, поэтому

$$x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x).$$

Ответ. $x^4+4=(x^2+2+2x)(x^2+2-2x)$.

Существуют и другие приемы разложения многочленов на множители.

Рассмотрим отношение двух многочленов степени m и n, т.е. алгебраическую дробь $\frac{a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1 x + b_0}$. С алгебраическими дробями можно проводить те же операции, что и с обычными дробями. Мы можем складывать, вычитать, умножать, делить дроби, проводить с ними тождественные преобразования. Особенность заключается в том, что с числовыми дробями нам хорошо видны «запрещенные» операции, и мы не будем, скажем, делить на 0.

При работе с алгебраическими дробями для отсечения запрещенных операций надо проводить дополнительные исследования, обычно связанные с поиском корней многочленов и разложением их на множители. Очень важно при проведении алгебраических преобразований проводить анализ, как меняется область определения выражений.

Пример 3. Упростить выражение $\frac{a-7}{a-2}\cdot\left(\frac{a^2-5a+33}{49-a^2}+\frac{3}{a-7}\right)$.

Преобразуем выражение в скобках $\frac{a^2-5a+33}{49-a^2}+\frac{3}{a-7}=$ $=\frac{a^2-5a+33+3\cdot(-a-7)}{49-a^2}=\frac{a^2-8a+12}{49-a^2}=\frac{(a-2)(a-6)}{(7-a)(7+a)}$. Найдем теперь искомое выражение $\frac{a-7}{a-2}\cdot\frac{(a-2)(a-6)}{(7-a)(7+a)}=\frac{6-a}{a+7}$.

Заметим, что первоначальная область определения выражения содержит условия $a \neq 2$, $a \neq 7$, $a \neq -7$. В ответе $\frac{6-a}{a+7}$ остается только одно условие $a \neq -7$. Это важно, если такое преобразование является решением уравнения или неравенства. Мы должны потом исключить из ответа неизвестные, не входящие в область определения.

Ответ. $\frac{6-a}{a+7}$ при $a \neq 2$, $a \neq 7$, $a \neq -7$.

8. Уравнение вида $ax = b$

Уравнением называется выражение, содержащее знак равенства и одну или несколько неизвестных величин. Решением уравнения называются те значения неизвестной или неизвестных, при подстановке которых в выражение уравнение превращается в верное равенство.

В школе в основном изучаются линейные, квадратные и сводящиеся к ним после преобразований или замены переменных уравнения и неравенства. При их решении наиболее удобными являются тождественные преобразования, не меняющие множества решений уравнений и неравенств. Преобразование может быть тождественным лишь на некотором множестве значений аргумента. В этом случае остальные значения аргумента исследуются другим способом на принадлежность их к решению поставленной задачи.

Рассмотрим простейшее уравнение — уравнение вида

$$ax = b. \qquad (1)$$

Если заданное уравнение свелось к этому уравнению после преобразований, надо проверить, при всех ли значениях неизвестного и величин, входящих в уравнение, преобразования были тождественными.

Очень часто уравнение вида (1) называют линейным уравнением. На самом деле уравнение (1) называется линейным уравнением при дополнительном условии $a \neq 0$. При $a = 0$ выражение (1) превращается в соотношение между числами, которое является либо верным, либо неверным.

Если уравнение (1) является линейным, то оно имеет единственное решение $x = \frac{b}{a}$, которое мы находим, сделав тождественное преобразование — разделив левую и правую часть уравнения на число $a \neq 0$.

При $a = 0$ запись (1) превращается в соотношение $0 = b$, которому формально удовлетворяют все значения x при $b = 0$ и не удовлетворяет ни одно из значений x при $b \neq 0$.

Пример 1. Решите уравнение $\frac{x}{2} + \frac{x}{6} + \frac{x}{12} = 7{,}5$.

Данное уравнение мы сможем решить, потому что его можно преобразовать в уравнение вида (1). Запишем его в виде

$\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)\cdot x=7{,}5$ или $\frac{3}{4}\cdot x=7{,}5$. Теперь уравнение преобразовано в вид (1) и имеет единственный корень $x=\frac{7{,}5}{0{,}75}=10$.

Ответ. $x = 10$.

Пример 2. Пусть задано уравнение $\frac{ax-2}{x-3}=\frac{16-x}{x-3}$. Найдите те значения параметра a, при которых это уравнение не имеет решений.

Видимо, большинство читателей воспримут это уравнение как нестандартное. Что делать в этой непростой ситуации? Надо вникнуть в суть задачи и постараться создать теорию ее решения. В данном случае это сделать несложно.

Когда две дроби равны, если выражения, стоящие в их знаменателях, совпадают?

Числители этих дробей должны быть равны, а знаменатели существовать и не быть равными 0.

В данном случае корень уравнения x должен удовлетворять условиям $\begin{cases} ax-2=16-x, \\ x\neq 3. \end{cases}$ Первое уравнение запишем в стандартном виде $(a+1)x=18$. При $a = -1$ это уравнение не является линейным и, как легко проверить, не имеет решений. Но в ответ пойдет не только это значение параметра. Пусть $a \neq -1$, тогда числители равны при $x=\frac{18}{a+1}$. Если при этом $\frac{18}{a+1}=3$, то первоначальное уравнение не будет иметь решений. Это равенство выполнимо при $a = 5$. Итак, в ответ пойдут 2 значения параметра.

Ответ. $a_1 = -1$, $a_2 = 5$.

9. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$

Перейдем к изучению уравнений вида

$$ax^2+bx+c=0. \qquad (1)$$

При $a = 0$ это уравнение сводится к изученному уравнению вида $ax = b$.

Квадратным уравнением называется уравнение (1) при $a \neq 0$. В этом случае левая часть квадратного уравнения (1) называется квадратным трехчленом, свойства которого были нами изучены в пункте 6. Мы можем сделать вывод, что важную роль в решении квадратного уравнения играет дискриминант квадратного трехчлена $D=b^2-4ac$. При $D<0$ квадратный трехчлен и квадратное уравнение не имеют корней. При $D>0$ квадратный трехчлен и квадратное уравнение имеют 2 корня

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \qquad (2)$$

Если в формуле числитель и знаменатель поделить на 2, то мы получим формулу, удобную для вычисления корней квадратного уравнения при четном коэффициенте b

$$x_{1,2}=\frac{-\frac{b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-ac}}{a}.$$

При $D=0$ квадратное уравнение имеет единственный корень $x_0=\frac{-b}{2a}$.

Так как в квадратном уравнении старший коэффициент отличен от 0, то на него можно поделить обе части уравнения. В этом случае квадратное уравнение называется приведенным и записывается в виде

$$x^2+px+q=0. \qquad (3)$$

Дискриминант приведенного квадратного уравнения (3) представляется в виде $D=p^2-4q$.

Сформулируем теорему Виета для приведенного квадратного уравнения.

Пусть x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения (3). Тогда $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$.

Квадратное уравнение (1) всегда может быть записано в виде (3), поэтому для него также справедлива теорема Виета, но с уточнением формулировки.

Пусть x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения (1). Тогда

$$x_1+x_2=-\frac{b}{a},\ x_1x_2=\frac{c}{a}.$$

Обратите внимание, что теорему Виета для квадратных уравнений школьники могут применять только в том случае, когда это уравнение имеет действительные, различные корни. Это выполнимо тогда и только тогда, когда соответствующий дискриминант положителен.

В поиске корней квадратного уравнения часто помогает обратная теорема Виета.

Числа x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения

$$x^2-(x_1+x_2)x+x_1x_2=0.$$

Пример 1. Найдите корни уравнения $x^2-28x+132=0$.

Данное уравнение мы сможем решить, потому что оно квадратное. Но очень важно на основном госэкзамене, содержащем 26 заданий, не только правильно выполнить простые задания, но и, по возможности, сделать это как можно быстрее, оставив больше времени на выполнение сложных заданий.

Способ 1. Применим общую формулу для нахождения корней квадратного уравнения:

$$x_{1,2}=\frac{-(-28)\pm\sqrt{(-28)^2-4\cdot 132}}{2}=$$

$$=\frac{28\pm\sqrt{784-528}}{2}=\frac{28\pm\sqrt{256}}{2}=\frac{28\pm 16}{2}.$$

В итоге $x_1=6$, $x_2=22$.

Способ 2. Применим формулу для нахождения корней квадратного уравнения с четным коэффициентом при x:

$$x_{1,2}=14\pm\sqrt{14^2-132}=14\pm\sqrt{196-132}=14\pm 8.$$

В итоге те же корни $x_1=6$, $x_2=22$.

Способ 3. Разделим обе части заданного уравнения на 4 и к полученному уравнению $\frac{1}{4}x^2-7x+33=0$ применим общую формулу: $x_{1,2}=\frac{7\pm\sqrt{49-33}}{0,5}=\frac{7\pm 4}{0,5}$ с тем же итогом $x_1=6$, $x_2=22$.

Способ 4. Для нахождения корней заданного квадратного уравнения применим обратную теорему Виета. Для этого надо подобрать 2 числа x_1 и x_2, обладающие тем свойством, что $x_1+x_2=28$, $x_1x_2=132$. В некоторых случаях такие корни подбираются сразу. В данном случае обратим внимание на 2 обстоятельства. Во-первых, сумма и произведение корней положительны, следовательно, оба корня являются положительными числами.

Во-вторых, произведение корней 132 содержит множитель 11, следовательно, если корни являются целыми числами, то один из корней делится без остатка на 11. Таким корнем может быть число 11 или 22. Числа 11 и 17 не являются корнями заданного уравнения, числа 22 и 6 таким корнями являются. Мы приходим к тому же ответу.

Какой способ решения выбрать? Тот, который вам понятен и быстрее приводит к цели.

Обратите внимание, что мы отдельно не вычисляли дискриминант квадратного трехчлена. Тем не менее наши действия были законными. Найдя корни квадратного уравнения, мы автоматически подтвердили положительность этого дискриминанта.

Тем не менее в других ситуациях проверка положительности дискриминанта может быть обязательным условием правильности решения.

Пример 2. Пусть x_1 и x_2 — действительные и различные корни уравнения $x^2-2x+a^2-4a-4=0$. Найдите значения, которые может принимать произведение корней этого уравнения $x_1 \cdot x_2$ при всех возможных значениях параметра a.

Казалось бы, ситуация простая. Если корни этого приведенного квадратного уравнения существуют, то по теореме Виета их произведение равно свободному члену, т.е. выполнено равенство $x_1x_2=a^2-4a-4$. После выделения полного квадрата мы запишем это соотношение в виде $x_1x_2=(a-2)^2-8$. Величина $(a-2)^2-8$ при всех значениях параметра a принимает значения, принадлежащие промежутку $[-8;\ +\infty)$. Но такой ответ будет неправильным. Мы еще не учли, что дискриминант квадратного трехчлена в левой части заданного уравнения должен быть по условию задачи положителен. Итак, дополнительным является условие $\frac{D}{4}=1-(a^2-4a-4)>0$ или $a^2-4a-5<0$. Это условие выполнено при $a\in(-1;\ 5)$.

Итак, ответ мы получим, ответив на вопрос: какие значения принимает величина $(a-2)^2-8$ при $a\in(-1;\ 5)$? Наименьшее значение мы уже отмечали, оно достигается в вершине параболы и равно -8. Верхняя граница значений определится, если подставить в $(a-2)^2-8$ значения –1 и 5. Это число 1. Итак, ответом является промежуток [–8; 1).

Ответ. $a\in[-8;\ 1)$.

10. Решение уравнений высших степеней

Что делать, если необходимо найти корни многочлена степени выше второй? Обязательным является умение решать алгебраические уравнения первой и второй степени, т.е. линейные и квадратные уравнения. Также могут встретиться уравнения, решение которых сводится к решению таких уравнений. Среди них могут быть уравнения, степень которых выше второй.

Пример 1. Решите уравнение $x^3-3x^2-4x+12=0$.

Формально задано алгебраическое уравнение третьей степени, но многочлен $x^3-3x^2-4x+12$ можно разложить на множители. После группировки первого слагаемого со вторым, а третьего с четвертым и вынесения общего множителя приходим к уравнению $(x^2-4)(x-3)=0$. Используя в первом множителе формулу разложения на множители разности квадратов окончательно запишем заданное уравнение в виде $(x-2)(x+2)(x-3)=0$. Произведение нескольких множителей равно 0 тогда, и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен 0 и выражение в целом имеет смысл. Следовательно, корни каждого множителя — –2; 2; 3 являются корнями заданного уравнения.

Ответ. $x_1=-2$, $x_2=2$, $x_3=3$.

Уравнение упрощается, если его можно представить как произведение нескольких множителей, равных 0.

Какие многочлены можно разложить на множители? Мы уже упоминали, что любой многочлен степени выше второй разлагается на линейные множители и квадратные с отрицательным дискриминантом. Такая задача не всегда является простой.

Пример 2. Решите уравнение $x^4-6x^2-7=0$.

Задано алгебраическое уравнение четвертой степени, но левая часть уравнения является квадратным трехчленом относительно x^2. Уравнения такого типа называются биквадратными. Для решения сделаем замену переменной $t=x^2$. Относительно новой переменной заданное биквадратное уравнение запишется в виде $t^2-6t-7=0$. Это квадратное уравнение имеет корни $t_1=-2$, $t_2=2$. Но ведь $t=x^2$, и мы возвращаемся к старой переменной. Поэтому корнями заданного уравнения являются корни уравнений $x^2=-1$ и $x^2=7$. Первое из этих уравнений не имеет корней среди действительных чисел. Второе уравнение имеет 2 корня, это числа $\pm\sqrt{7}$.

Ответ. $x_1=-\sqrt{7}$, $x_2=\sqrt{7}$.

У нас было уравнение четвертой степени. Сделав замену, мы вместо одного уравнения четвертой степени решили несколько уравнений второй степени. Итак, замена неизвестного позволяет понизить порядок алгебраического уравнения.

В чем смысл замены переменной? Представьте себе, что вам надо перенести тяжелый груз. За один раз перенести его невозможно, но можно разделить груз на несколько частей и за несколько раз его перенести. Так и с заменой переменной, сложная задача разбивается на несколько более простых. Вы решаете более простую задачу для новой переменной и несложную задачу возвращения к старой переменной.

Пример 3. Решите уравнение $2(x+1)^2+\left(x^2+2x\right)^2=17$.

Самое плохое, что можно сделать в этой ситуации, – это раскрыть все скобки. Вряд ли вы потом разгадаете секрет этого уравнения. Заметим, что выражения $(x+1)^2$ и x^2+2x отличаются друг от друга на 1. Поэтому сделаем замену неизвестной $x^2+2x=t$, при этом $(x+1)^2=t+1$. Теперь заданное уравнение преобразуется к виду $2(t+1)+t^2=17$ или $t^2+2t-15=0$. Посмотрев на произведение корней –15, мы легко, по обратной теореме Виета, подберем корни –5 и 3. Возвращаясь к старой неизвестной, получим для ее нахождения уравнения $x^2+2x=-5$ и $x^2+2x=3$. Первое из этих уравнений не имеет действительных корней, второе имеет корни 1 и –3.

Ответ. $x_1=-3, x_2=1$.

11. Системы уравнений

Большинство математических задач возникают из реальных проблем. Неизвестных величин может быть несколько, они зависят друг от друга. Поэтому при создании математических моделей реальных процессов возникает необходимость решения систем уравнений.

Эти системы могут быть очень сложными, не всегда существуют математические методы их решения. В этих случаях часто создаются приближенные модели, не в полной мере отражающие реальные явления. Как правило, именно такие, упрощенные модели изучаются в школе.

В этом разделе мы рассмотрим те типы систем уравнений, которые решаются стандартными методами и входят в программу основного среднего образования.

Рассмотрим систему, которая состоит из нескольких уравнений с произвольным числом неизвестных. Пока не будем писать формул, они в общем виде будут очень сложными и непонятными для девятиклассников. Решением системы называются те наборы неизвестных, при которых все уравнения, входящие в систему, обращаются в верное равенство. Далеко не все системы могут быть решены в общем виде, в некоторых случаях надо применять «хитрые» олимпиадные методы решения.

А вот гарантированно могут быть решены системы линейных уравнений и системы, в которых все уравнения линейные, кроме одного уравнения второй степени.

Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными, которая в общем виде может быть записана

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \tag{1}$$

В системе (1) величины x, y являются неизвестными, числа a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22} — коэффициентами при неизвестных, числа b_1, b_2 — правые части системы.

Рассмотрим одно из уравнений системы (1). Если хотя бы один из коэффициентов при неизвестных в уравнении отличен от нуля, это уравнение называется линейным. Если в этом уравнении все коэффициенты при неизвестных станут равными 0, уравнение превратится в соотношение между числами. Если это соотношение не выполнено, то система (1) не имеет решений, если оно верное, т.е. записывается в виде 0 = 0, то ему формально удовлетворяют все наборы неизвестных. В этом случае уравнение из системы можно убрать, множество решений системы от этого не изменится.

Наиболее интересен случай, когда система (1) является системой двух линейных уравнений с двумя неизвестными, т.е. в каждом ее уравнении хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от 0.

Для понимания качественного смысла решений системы линейных уравнений (1) удобно воспользоваться геометрическим смыслом этой системы. Рассмотрим плоскость с введенной декартовой системой координат. Школьники с этим уже знакомы, но для удобства пользования книгой материалы по геометрии изложены чуть далее.

Под решением системы (1) будем понимать те точки на плоскости, координаты которых x, y удовлетворяют уравнению (1). Если уравнение системы (1) — линейное, то ему удовлетворяют точки на прямой, лежащей на этой координатной плоскости.

Мы рассматриваем систему линейных уравнений, поэтому ее геометрическим смыслом является тот факт, что решением системы являются координаты общих точек двух прямых на координатной плоскости, соответствующих каждому линейному уравнению системы (1).

А сколько общих точек может быть у двух прямых на плоскости? Если прямые не совпадают и при этом параллельны, то они не имеют общих точек, соответственно система (1) не имеет решений. Если прямые пересекаются, то система имеет единственное решение. При совпадающих прямых система имеет бесконечное число решений, которые являются координатами точек этой общей прямой на плоскости.

Для каждой конкретной системы можно разобраться, какой из трех этих случаев ей соответствует. Если одна из этих прямых параллельна оси ординат, т.е. уравнение системы (1) записывается в виде $x = b$, то это сделать особенно просто.

Пусть система линейных уравнений (1) не содержит уравнений вида $x = b$, тогда ее можно записать в виде

$$\begin{cases} y = k_1 x + b_1, \\ y = k_2 x + b_2. \end{cases} \qquad (2)$$

Эта система всегда является линейной, и ей соответствуют две прямые $y = k_1 x + b_1$ и $y = k_2 x + b_2$, которые при $k_1 \neq k_2$ пересекаются и система (2) имеет единственное решение. При $k_1 = k_2$ и $b_1 \neq b_2$ прямые не совпадают и параллельны, система (2) не имеет решений. При $k_1 = k_2$ и $b_1 = b_2$ прямые совпадают, система (2) имеет бесконечно много решений.

Могут ли системы линейных уравнений содержать большее число уравнений и неизвестных? В научно-исследовательских работах могут встретиться случаи, когда система имеет десятки, сотни, тысячи и даже миллионы уравнений. Разработаны сложные методы решения таких систем, естественно, с применением компьютеров. Даже в нашем случае существуют разные способы решения систем. Для школьников вполне достаточно овладеть методом последовательного исключения неизвестных. Посмотрим на примере, как это происходит.

Пример. Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x - 2y = 12, \\ 4x - 3y = 7. \end{cases}$

1 способ. В первом уравнении выразим неизвестную x через другую неизвестную: $x = \dfrac{2y+12}{3}$. Это выражение подставим во второе уравнение и получим $4 \cdot \dfrac{2y+12}{3} - 3y = 7$. Отсюда $y = 27$, $x = 22$.

2 способ. В первом уравнении левую и правую части умножим на 3, во втором уравнении левую и правую части умножим на 2. После этого из полученного первого уравнения вычтем полученное второе. Получим $x = 22$, затем из любого уравнения найдем $y = 27$.

Ответ. $x = 22, y = 27$.

Аналогично методом последовательного исключения может быть решена система из трех уравнений с тремя неизвестными.

Рассмотрим систему, в которой одно уравнение линейное, а другое — второй степени. В общем случае система имеет такой вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1, \\ c_{11}x^2 + 2c_{12}xy + c_{22}y^2 + a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \qquad (3)$$

В первом уравнении одну неизвестную выражаем через другую и результат подставляем во второе уравнение системы (3). Второе уравнение превращается в квадратное, которое, в зависимости от дискриминанта, имеет 0, 1 или 2 корня. Соответственно, система (3) может не иметь решений, может иметь единственное решение, может иметь 2 решения.

12. Решение неравенств

Давайте вспомним, что школьник должен уметь решать уравнения линейные, квадратные и сводящиеся к ним. Бывают еще, обычно на олимпиадах по математике, нестандартные уравнения, для которых придумываются особые способы решения. Если во всех этих уравнениях поменять знак «равно» на какой-нибудь знак неравенства, то такие неравенства также можно решить.

При решении неравенств могут применяться различные методы. Универсальным является метод интервалов решения неравенств.

Обычно метод интервалов связывают с решением дробно-рациональных неравенств вида $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \le 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} \ge 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} < 0$, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} > 0$, где $P_n(x)$, $Q_m(x)$ — многочлены n и m соответственно.

Вначале рассмотрим пример.

Пример. Найдите сумму целых решений неравенства $\frac{(2-x)^2(x-4)}{x+4} \ge 0$, лежащих на промежутке $[-6; 6]$.

Отметим на числовой оси точки $x = 2$, $x = 4$, в которых числитель равен 0 и точку $x = -4$, в которой знаменатель равен 0. Мы видим на числовой оси 3 точки и 4 интервала. Почему мы отметили именно эти точки? Очевидно, что точки $x = 2$ и $x = 4$ являются решением заданного неравенства, а точка $x = -4$ не входит в область определения левой части неравенства и решением неравенства не является. Главным здесь является то, что на каждом из полученных промежутков: $(-\infty; -4)$, $(-4; 2)$, $(2; 4)$, $(4; +\infty)$ левая часть неравенства не меняет знак. Поэтому каждый из этих промежутков либо целиком является решением заданного неравенства, либо целиком не является его решением. Легко проверить, что только второй и третий интервалы являются решением неравенства, а первый и четвертый – не являются. Итак, решением неравенства является множество $(-\infty; -4) \cup \{2\} \cup [4; +\infty)$. Эту запись надо понимать так. Неравенству удовлетворяют значения неизвестной величины, удовлетворяющие одному из трех условий: $x < -4$, $x = 2$, $x \ge 4$. Теперь выделим целые значения решения, лежащие на заданном отрезке $[-6; 6]$: -6; -5; 2; 4; 5; 6. Их сумма равна 6.

Ответ. 6.

В чем же заключается метод интервалов?

В методе интервалов на числовой оси отмечают точки таким образом, чтобы каждый из полученных интервалов либо целиком являлся решением неравенства, либо целиком не являлся его решением. После этого исследуются каждый интервал и каждая отмеченная точка. В ответ выписываются те интервалы и те точки, которые являются решением данного неравенства.

Самое главное в методе интервалов — правильно отметить точки на числовой оси. При решении дробно-рациональных неравенств указанного вида на числовой оси отмечаются нули числителя и нули знаменателя.

В общем случае надо отметить те точки, при которых неравенство обращается в равенство, и точки, которые являются границей области определения функций, входящих в неравенство.

Отметим важные частные случаи.

При решении неравенств вида $ax \le b$ с этим или другим знаком неравенства можно поступать следующим образом. При $a > 0$ после деления на a неравенство приводится к виду $x \le \frac{b}{a}$. При $a < 0$ после деления на a неравенство приводится к виду $x \ge \frac{b}{a}$. В этих случаях на оси абсцисс отмечается одна точка, разделяющая множества, удовлетворяющие и не удовлетворяющие данному неравенству. При $a = 0$ неравенство записывается в виде соотношения между числами $0 \le \frac{b}{a}$, которое либо всегда верное, либо всегда неверное. Соответственно, решением неравенства является вся числовая ось или пустое множество.

При решении квадратных неравенств вида $ax^2 + bx + c \le 0$ с этим или другим знаком неравенства важную роль играет дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства.

При отрицательном дискриминанте левая часть неравенства принимает значения одного знака. При $a > 0$ левая часть положительна и решением неравенства $ax^2 + bx + c \le 0$ является пустое множество. При $a < 0$ левая часть отрицательна и решением неравенства $ax^2 + bx + c \le 0$ является вся числовая ось.

При дискриминанте, равном 0, левая часть неравенства принимает значения одного знака, кроме единственной точки, где она равна 0. В зависимости от знака неравенства и знака a решением неравенства являютя единственная точка $((x - x_0)^2 \le 0)$,

числовая ось без точки $((x - x_0)^2 > 0)$,

вся числовая ось $((x - x_0)^2 \ge 0)$

или пустое множество $((x - x_0)^2 < 0)$.

При положительном дискриминанте на числовой оси отмечаются две точки, причем знаки левой части на соответствующих интервалах чередуются. Решением неравенства будут один средний или два крайних интервала. Отмеченные точки входят в решение при нестрогом неравенстве.

13. Текстовые задачи

Текстовые задачи будут предложены в заданиях № 16 и № 22. Можно сказать, что в этих заданиях проверяется умение строить и исследовать простейшие математические модели.

Обычно для решения подобных задач необходимо ввести неизвестную величину таким образом, чтобы, с одной стороны, все данные задачи выражались через эту величину. С другой стороны, надо, чтобы и ответ задачи легко выражался через эту неизвестную в начале решения величину. Само решение заключается в том, чтобы одно и то же значение записать с помощью разных выражений. В итоге мы приходим к уравнению, решение которого и дает ответ на поставленный вопрос.

Часто в качестве неизвестной величины берут именно то, что спрашивается в задаче. Но могут быть случаи, когда это нецелесообразно или невозможно. Также могут быть ситуации, когда в качестве неизвестных могут браться несколько величин. В этом случае мы в итоге должны получить систему уравнений для их определения и нахождения ответа задания.

Ну и, наконец, возможна ситуация, когда вы, рассуждая логически, выполните задание, не вводя неизвестных величин.

Пример 1. Из Пензы в Йошкар-Олу выехали одновременно 2 автомобиля. Первый проехал весь путь с постоянной скоростью. Второй автомобиль проехал половину пути до Ульяновска со скоростью, на 14 км/ч меньшей скорости первого автомобиля, а оставшийся путь со скоростью, на 22 км/ч большей скорости первого автомобиля. В конечный пункт оба автомобиля прибыли одновременно. Определите скорость в км/ч первого автомобиля.

Вполне разумно в качестве неизвестной величины x взять именно то, что спрашивается в условии задачи. Обозначим через $2S$ длину всего пути. Выразим через эти величины время в пути каждого автомобиля. Первый автомобиль затратит на весь путь $\frac{2S}{x}$ часов. Второй первую половину пути проедет за $\frac{S}{x-14}$ часов, а на вторую половину пути ему потребуется $\frac{S}{x+22}$ часов. Так как на весь путь они затратили одинаковое время, то мы приходим к уравнению $\frac{2S}{x}=\frac{S}{x-14}+\frac{S}{x+22}$. Величина S здесь является вспомогательной величиной, все выражения ей пропорциональны, и не случайно она сокращается. Уравнение $\frac{2}{x}=\frac{1}{x-14}+\frac{1}{x+22}$ после того как мы освободимся от знаменателя, сведется к равносильному линейному уравнению, которое имеет единственное решение $x = 77$.

Ответ. 77.

Пример 2. Первый насос заполняет резервуар за 3 часа 20 минут, а второй — за 50 минут. Найдите количество минут, которое потребуется для заполнения резервуара при работе двух насосов одновременно.

Здесь тот самый случай, когда неразумно за x брать то, что спрашивается в задаче. Крайне сложно время, необходимое для заполнения резервуара при работе двух насосов одновременно, увязать с данными задачи.

В задачах на работу в качестве неизвестных величин обычно берут производительность. Очень важно при этом понимать, в каких единицах измеряется производительность. Об этом может прямо говориться в задаче, например о количестве деталей, которые в час изготавливает рабочий. В данной задаче можно предположить, что вместимость резервуара столько-то литров, производительность измерять в количестве литров, которые насос качает в единицу времени, например в час.

Но лучше в подобных ситуациях воспользоваться универсальными единицами для измерения производительности. Например, за $x \frac{\text{част}}{\text{час}}$ взять ту часть резервуара, которую первый насос заполняет за час. Это тем более удобно, что тогда время работы первого насоса по заполнению резервуара будет равно $\frac{1}{x}$ часов.

Понимание этого позволяет нам решить данную задачу без введения неизвестных величин. В самом деле, если первый насос заполняет резервуар за 3 часа 20 минут, т.е. за $\frac{10}{3}$ часа, то производительность его равна $\frac{3}{10}\frac{\text{част}}{\text{час}}$. Аналогично производительность второго насоса равна $\frac{6}{5}\frac{\text{част}}{\text{час}}$. При их совместной работе производительности складываются, и общая производительность будет равна $\frac{3}{10}+\frac{6}{5}=\frac{3}{2}\frac{\text{част}}{\text{час}}$. Искомое время совместной работы является обратной величиной, т.е. равно $\frac{2}{3}$ часа. Для того, чтобы количество часов перевести в минуты, количество часов надо умножить на 60, тем самым мы приходим к ответу.

Ответ. 40.

14. Числовая последовательность, арифметическая и геометрическая прогрессии

Пусть нам дано некоторое множество действительных чисел и выполнены 3 условия. Во-первых, чисел бесконечно много, во-вторых, они расположены по порядку и, в-третьих, если эти числа считать от первого и по порядку, то мы обязательно дойдем до каждого из этих чисел. Такое множество действительных чисел может быть записано в виде $x_1, x_2, \dots x_n, \dots$, и оно называется числовой последовательностью, или счетным упорядоченным множеством действительных чисел. Величина x_n является общим членом этой последовательности.

Приведем примеры числовых последовательностей.

1) 1, 2, 3,..., n,.... Общим членом последовательности является величина $x_n = n$.

2) 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$,..., $\frac{1}{2^{n-1}}$,.... Общим членом последовательности является величина $x_n = \frac{1}{2^{n-1}}$.

3) 1, –1, 1,..., $(-1)^{n-1}$,.... Общим членом последовательности является величина $x_n = (-1)^{n-1}$.

4) 1, 1,5, 1,75,..., $\frac{1-(0,5)^n}{1-0,5}$,.... Общим членом последовательности является величина $x_n = \frac{1-(0,5)^n}{1-0,5} = 2-(0,5)^{n-1}$.

Числовая последовательность $x_1, x_2,\ldots x_n,\ldots$ называется бесконечно малой величиной (б.м.), если, начиная с некоторого номера, все члены последовательности лежат в любой, заранее заданной, окрестности точки 0, т.е. в сколь угодно малом интервале с центром в 0.

В указанных 4 примерах последовательность № 2 является бесконечно малой величиной.

Важным является понятие предела числовой последовательности. Предел числовой последовательности $x_1, x_2,\ldots x_n,\ldots$ равен a, если последовательность с общим членом $x_n - a$ является бесконечно малой.

Так как последовательность № 2 является б.м. величиной, то ее предел равен 0. Очевидно, что последовательности № 1 и № 3 не имеют предела.

Несложно проверить, что последовательность в примере 4 имеет предел, равный 2.

Пусть задано n чисел. Их средним арифметическим называется сумма этих n чисел, деленная на n.

Средним геометрическим n положительных чисел называется корень степени n из их произведения.

Средним арифметическим двух чисел a и b является число $\frac{a+b}{2}$.

Средним геометрическим двух положительных чисел a и b является число $\sqrt{ab}$.

Для этих двух положительных чисел справедливо неравенство $\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$. В самом деле, перенося все слагаемые в левую часть и приводя выражение к общему знаменателю, получим эквивалентное неравенство $\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2} \geq 0$, которое, очевидно, всегда справедливо.

Итак, среднее арифметическое двух положительных чисел больше или равно их среднего геометрического, причем равенство достигается только для двух равных чисел.

Можно доказать, что это свойство справедливо и для большего количества положительных чисел.

Арифметической прогрессией называется последовательность чисел a_1, a_2,... a_n,..., у которой каждый последующий член, начиная со второго, отличается от предыдущего на одно и то же слагаемое. Итак, $a_{i+1} = a_i + d$, где d — разность арифметической прогрессии.

Три числа a, b, c являются последовательными членами арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда $2b = a + c$. Можно сказать, что три числа являются последовательными членами арифметической прогрессии тогда и только тогда, когда среднее из них равно среднему арифметическому крайних.

Справедливы формулы для общего члена и суммы n членов арифметической прогрессии $a_n = a_1 + d(n-1)$, $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$. Здесь $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$.

Сумма нечетного числа подряд идущих членов арифметической прогрессии равна ее среднему члену, умноженному на число слагаемых.

Сумма четного числа подряд идущих членов арифметической прогрессии равна сумме ее крайних членов, умноженной на число пар слагаемых.

В примере 1 задана арифметическая прогрессия, при этом $a_n = n$, $S_n = \frac{1+n}{2} \cdot n = \frac{n^2+n}{2}$.

Геометрической прогрессией называется последовательность чисел b_1, b_2,... b_n,..., не равных 0, у которой каждый последующий член, начиная со второго, получается от предыдущего умножением на одно и то же число. Итак, $b_{i+1} = b_i \cdot q$, где q — знаменатель геометрической прогрессии.

Три числа a, b, c являются последовательными членами геометрической прогрессии тогда и только тогда, когда $b^2 = ac$. Можно сказать, что три положительных числа являются последовательными членами геометрической прогрессии если среднее из них равно среднему геометрическому крайних.

Справедливы формулы $b_n = b_1 q^{n-1}$, $S_n = \dfrac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}$, $(q \neq 1)$, где $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$.

Геометрическая прогрессия при условии $|q| < 1$ называется бесконечно убывающей. В этом случае сумма бесконечного числа ее слагаемых равна $\dfrac{b_1}{1-q}$.

В примере 4 заданы частичные суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии, при этом $b_n = \dfrac{1}{2^{n-1}}$, $S_n = \dfrac{1-(0{,}5)^n}{1-0{,}5} = 2-(0{,}5)^{n-1}$. Сумма всех ее членов равна 2, т.е. $S = 2$.

15. Координаты на прямой и плоскости

Рассмотрим ориентированную прямую, т.е. прямую, на которой выбрано направление, которое мы будем называть положительным. Отметим точку, которую будем называть началом координат, и отметим в положительном направлении неё точку, координату которой будем считать, равной 1.

Тем самым каждой точке координатной прямой будет взаимно однозначно поставлено в соответствие действительное число, которое мы будем называть координатой этой точки.

Пусть задана точка A на этой прямой, координата которой равна x, такую точку будем обозначать символом $A(x)$. Начало координат будем обозначать символом $O(0)$ или просто O. Заметим, что модуль числа x, т.е. величина $|x|$ является расстоянием от начала координат до точки $A(x)$. Этот факт называется геометрическим смыслом модуля числа, что записывается следующим образом $|x| = \rho\left(O(0), A(x)\right)$.

Пусть заданы две точки $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$ на этой прямой. Следствием из геометрического смысла модуля числа является тот факт, что расстояние между этими точками равно модулю разности координат этих точек, т.е. $\rho(A_1(x_1), A_2(x_2)) = |x_2 - x_1|$. Кроме того, отметим, что точка $A_0\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)$ является серединой отрезка, соединяющего точки $A_1(x_1)$ и $A_2(x_2)$.

На координатной прямой и на числовой оси можно рассматривать различные числовые промежутки. Мы будем использовать следующие обозначения. Множество всех действительных чисел мы будем обозначать символом $(-\infty;+\infty)$.

Пусть дано число a. Множество всех действительных чисел, больше или равных a, мы будем обозначать символом $[a;+\infty)$. Множество всех действительных чисел, меньше или равных a, мы будем обозначать символом $(-\infty;a]$. Множество всех действительных чисел, больших a, мы будем обозначать символом $(a;+\infty)$. Множество всех действительных чисел, меньших a, мы будем обозначать символом $(-\infty;a)$.

Промежутки чисел вида $[a;+\infty)$, $(-\infty;a]$ называют лучами, промежутки чисел вида $(-\infty;+\infty)$, $(a;+\infty)$, $(-\infty;a)$ называют бесконечными интервалами.

Пусть даны числа a и b, причем для определенности будем считать, что $a < b$. Множество всех действительных чисел, больше или равных a и одновременно меньше или равных b, мы будем обозначать символом $[a; b]$. Множество всех действительных чисел, больше или равных a и одновременно меньших b, мы будем обозначать символом $[a; b)$. Множество всех действительных чисел, больших a и одновременно меньше или равных b, мы будем обозначать символом $(a; b]$. Множество всех действительных чисел, больших a и одновременно меньших b, мы будем обозначать символом $(a; b)$.

Промежутки чисел вида $[a; b]$ называются отрезками, промежутки чисел вида $[a; b)$, $(a; b]$ называют полуинтервалами, промежутки чисел вида $(a; b)$ называют интервалами.

Рассмотрим на плоскости две ориентированные, взаимно перпендикулярные координатные прямые. Точку пересечения этих прямых будем считать началом координат. Назовем эти прямые осью абсцисс и осью ординат таким образом, чтобы поворот в ближайшем направлении от положительного направления оси абсцисс к положительному направлению оси ординат происходил против часовой стрелки.

Пусть задана произвольная точка M на координатной плоскости, при этом проекцией точки M на ось абсцисс является точка $A(x)$, а проекцией точки M на ось ординат является точка $B(y)$. В этом случае мы будем говорить, что точка M имеет координаты x, y, и записывать это в виде $M(x; y)$.

Пусть на координатной плоскости заданы две точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$. Отметим, что точка $M_0\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$ является серединой отрезка, соединяющего точки $M_1(x_1; y_1)$ и $M_2(x_2; y_2)$, а расстояние между этими точками определяется формулой $\rho\left(M_1(x_1;y_1),M_2(x_2;y_2)\right)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

16. Функция, ее свойства и график

Под функцией мы понимаем отображение одного множества на другое. Функция может быть задана различными способами, например графически и аналитически. Функция $y = f(x)$, заданная аналитически в виде формулы, отображает множество на оси абсцисс на множество на оси ординат. При графическом задании функции на координатной плоскости изображается множество точек с координатами $(x; f(x))$, которое и называется графиком функции.

При решении задач важно использовать свойства функций, с которыми мы имеем дело.

Областью определения функции $y = f(x)$ называется множество тех значений аргумента x, при которых эта функция имеет смысл. Иногда для области определения функции $y = f(x)$ используется обозначение $D(f(x))$. Например, для функции $y=\frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$ областью определения является множество $D=(-\infty;1)\cup(1;2]$.

Множеством (или областью) значений функции $y = f(x)$ называется множество тех значений функции y, для которых существует $x \in D(f(x))$ такое, что $y = f(x)$. Для множества значений функции $y = f(x)$ можно использовать обозначение $E(y)$. Например, для функции $y = x^2$ множеством значений, очевидно, является промежуток $[0;+\infty)$. А вот найти множество значений для функции $y = \frac{\sqrt{2-x}}{x-1}$ будет не так просто. Попробуйте доказать, что $E\left(\frac{\sqrt{2-x}}{x-1}\right) = (-\infty; +\infty)$.

Функция $y = f(x)$ называется четной функцией, если для всех допустимых значений аргумента выполнено условие $f(-x) = f(x)$. В частности, отсюда следует, что область определения четной функции симметрична относительно начала координат.

Функция $y = f(x)$ называется нечетной функцией, если для всех допустимых значений аргумента выполнено условие $f(-x) = -f(x)$. В этом случае область определения функции также симметрична относительно начала координат.

Проверьте, что функции $y = x^2$, $y = \sqrt{1+x} + \sqrt{1-x}$ являются четными функциями, а функции $y = x^3$, $y = \sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x}$ являются нечетными функциями.

Число T называется периодом функции $y = f(x)$, если для всех допустимых значений аргумента выполнено условие $f(x + T) = f(x)$. В частности, это означает, что если один из двух аргументов x, $x + T$ входит в область определения функции $y = f(x)$, то и другой также входит в эту область определения. Легко проверить, что если T является периодом функции, то число nT при любом целом n также является периодом этой функции. Под основным, или главным значением периода функции, понимается наименьший положительный период этой функции. Иногда главное значение периода функции называют периодом функции, если это не вызывает разночтение.

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на промежутке, если большему значению аргумента из этого промежутка соответствует большее значение функции, т.е., из условия $x_2 > x_1$ следует, что $f(x_2) > f(x_1)$. Если при этих же обстоятельствах выполнено соотношение $f(x_2) < f(x_1)$, то функция $y = f(x)$ называется убывающей. Соответственно, при условии $f(x_2) \le f(x_1)$ функция $y = f(x)$ называется невозрастающей, а если $f(x_2) \ge f(x_1)$, то функция $y = f(x)$ называется неубывающей.

Точка c называется точкой минимума функции $y = f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки c и в этой точке c функция принимает наименьшее значение среди значений во всех точках этой окрестности.

Точка c называется точкой максимума функции $y = f(x)$, если функция определена в некоторой окрестности точки c и в этой точке c функция принимает наибольшее значение среди значений во всех точках этой окрестности.

Точки максимума и точки минимума называются точками экстремума функции $y = f(x)$.

Например, для функции $y = x^2$ промежуток $(-\infty;0]$ является промежутком убывания этой функции, промежуток $[0;+\infty)$ является промежутком возрастания этой функции, точка 0 является точкой минимума.

17. Углы, их измерение

Как измеряется угол? Пусть угол образован двумя противоположно направленными лучами, исходящими из одной точки. Считается, что такой угол равен 180°, а его $\frac{1}{180}$ часть называется углом, величина которого равна 1° (1 градус).

Итак, угол можно измерять в градусах. Если 2 луча в начале совпадают, один из них зафиксирован, а второй делает полный оборот, возвращаясь к первому лучу, то угол между лучами меняется от 0° до 360°. Можно измерять доли градусов. Считается, что в 1° угла содержится 60 минут. Можно измерять и более мелкие углы, в одной минуте содержится 60 секунд. Помните, если мы от земного шара удалимся к звездам на расстояние в 1 парсек, то земной шар будет виден под углом в одну угловую секунду. Давайте вспомним, как эти углы обозначаются. Если угол α равен 17 градусам, 12 минутам и 13 секундам, то это можно записать следующим образом: $\alpha = 17°12'13''$.

Угол в 360° называется полным углом, угол в 180° называется развернутым углом, угол в 90° называется прямым углом. Угол, меньший 90°, называется острым углом, угол, принадлежащий интервалу (90°; 180°), называется тупым углом. При пересечении двух прямых углы, имеющие общий луч, называются смежными углами, углы, не имеющие общего луча, называются вертикальными углами. Луч, делящий данный угол пополам, называются биссектрисой угла.

18. Прямая, перпендикуляр и наклонная к прямой

Пусть на плоскости даны две прямые a и b. Если эти прямые не имеют общих точек или совпадают, то угол между прямыми считается равным 0°. Такие прямые на плоскости называются параллельными прямыми.

Если прямые a и b пересекаются, то у них ровно одна общая точка.

Если прямые a и b взаимно перпендикулярны, то угол между прямыми считается равным 90°.

Если прямые a и b пересекаются и не перпендикулярны, то они образуют две пары вертикальных углов. Наименьший из этих углов называется углом между этими прямыми.

Итак, угол между прямыми принимает значения на промежутке $[0°; 90°]$.

Пусть на плоскости даны прямая a и вне прямой точка A. Проведем из точки A перпендикуляр к прямой a. Он имеет единственную общую точку B с прямой a. Отрезок AB является перпендикуляром, опущенным из точки A на прямую a. Пусть C — точка на прямой, не совпадающая с точкой B. Легко проверить, что длина отрезка AC больше длины отрезка AB.

Итак, перпендикуляр к прямой короче наклонной к этой прямой.

Множество точек, удовлетворяющих определенному условию, называется геометрическим местом точек, или ГМТ.

Пусть на плоскости дан отрезок AB и точка C является серединой этого отрезка. Проведем через точку C прямую a, перпендикулярную отрезку AB.

Прямая a является ГМТ, равноудаленных от концов отрезка AB. Пусть на плоскости даны прямая a и точка M вне прямой. Проведем из точки M перпендикуляр к прямой a до пересечения с точкой M_0 и продолжим за точку M_0. Точка N на этом продолжении, обладающая тем свойством, что $MM_0 = NM_0$, называется точкой, симметричной точке M относительно прямой a.

Пусть на плоскости даны точка A и точка M. Проведем прямую AM. Точка B на этой прямой, обладающая тем свойством, что $AM = BM$, называется точкой, симметричной точке A относительно точки M.

19. Треугольник, свойства треугольников

Замкнутая ломаная на плоскости, состоящая из трех звеньев, не лежащих на одной прямой, образует треугольник. Узлы ломаной называются вершинами треугольника.

Пусть вершинами треугольника являются точки A, B, C, тогда для самого треугольника используем обозначение ABC.

Из трех отрезков можно составить треугольник тогда и только тогда, когда сумма длин любых двух отрезков больше длины третьего отрезка. Это свойство называется неравенством треугольника.

Если все углы треугольника острые, треугольник называется остроугольным. Если один из углов равен 90°, то треугольник называется прямоугольным. Если в треугольнике есть тупой угол, то треугольник называется тупоугольным.

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны.

Все медианы треугольника пересекаются в одной точке и делятся в точке пересечения в отношении 2:1, считая от вершин треугольника. Точка пересечения медиан является центром тяжести однородного треугольника.

Биссектрисой угла A треугольника ABC называется отрезок AD, соединяющий A с точкой D противоположной стороны BC, причем выполнено условие $\angle BAD = \angle CAD$.

Биссектриса треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные боковым сторонам, т.е. $BD : DC = AB : AC$. Все биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке. Расстояния от точки пересечения биссектрис до сторон треугольника равны.

Высота AH треугольника ABC перпендикулярна стороне BC, причем точка H лежит на прямой BC.

Все высоты треугольника пересекаются в одной точке. Эта точка лежит внутри остроугольного треугольника, на прямоугольном треугольнике и вне тупоугольного треугольника.

Прямая, проходящая через середину стороны треугольника перпендикулярно этой стороне, называется ее серединным перпендикуляром.

Все серединные перпендикуляры треугольника пересекаются в одной точке, которая равноудалена от вершин треугольника. Эта точка лежит внутри остроугольного треугольника, на прямоугольном треугольнике и вне тупоугольного треугольника.

Отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника, называется средней линией треугольника.

Средняя линия MN треугольника ABC, соединяющая середины сторон AB и BC, параллельна третьей стороне AC и равна ее половине.

Треугольник, у которого все 3 стороны равны, называется равносторонним треугольником.

В равностороннем треугольнике медианы, высоты, биссектрисы и серединные перпендикуляры пересекаются в одной точке.

Треугольник, у которого 2 стороны равны, называется равнобедренным треугольником.

В равнобедренном треугольнике, не являющимся равносторонним, равные стороны называются боковыми сторонами, а третья сторона при этом называется основанием. Высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию равнобедренного треугольника, совпадают. Верно и обратное, если 2 из этих отрезков совпадают, то все они совпадают и треугольник является равнобедренным.

В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C стороны AC и BC называются катетами, а сторона AB — гипотенузой. Справедлива теорема Пифагора $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Рассмотрим острый угол A и при данных обозначениях введем тригонометрические функции острого угла в прямоугольном треугольнике.

Синусом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB, следовательно, $\sin\angle A = \frac{BC}{AB}$.

Косинусом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение прилежащего катета AC к гипотенузе AB, следовательно, $\cos\angle A = \frac{AC}{AB}$.

Тангенсом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC, следовательно, $\operatorname{tg}\angle A = \frac{BC}{AC}$.

Котангенсом острого угла A в прямоугольном треугольнике ABC называется отношение прилежащего катета AC к противолежащему катету BC, следовательно, $\operatorname{ctg}\angle A = \frac{AC}{BC}$.

Если записать соответствующие определения для острого угла B в этом прямоугольном треугольнике ABC, то легко заметить справедливость следующих соотношений: $\sin\angle A = \cos\angle B$, $\sin\angle B = \cos\angle A$, $\operatorname{tg}\angle A = \operatorname{ctg}\angle B$, $\operatorname{tg}\angle B = \operatorname{ctg}\angle A$.

В прямоугольном треугольнике справедлива теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы. Отсюда следует справедливость соотношения $\sin^2\angle A + \cos^2\angle A = 1$.

Пример. В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой $AB = 6{,}5$ тангенс угла B равен 2,4. Найдите длину катета AC.

Используя определение тангенса и условие задачи, запишем соотношение $\operatorname{tg}\angle B = \frac{AC}{BC} = 2{,}4 = \frac{12}{5}$.

Можно считать, что $AC = 12a$, $BC = 5a$. Теперь применим теорему Пифагора и запишем равенство

$$(12a)^2 + (5a)^2 = (6{,}5)^2, \text{ или } (13a)^2 = (6{,}5)^2.$$

Отсюда найдем $a = \frac{1}{2}$ и придем к ответу $AC = 12a = 6$.

Ответ. 6.

Тригонометрические функции острых углов, равных 30°, 45° и 60°, легко могут быть вычислены.

Если в прямоугольном треугольнике острый угол A равен 45°, то его катеты равны между собой. Пусть каждый из них равен a, тогда, с учетом теоремы Пифагора, гипотенуза треугольника равна $a\cdot\sqrt{2}$. Отсюда получим $\sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} 45^\circ = \operatorname{ctg} 45^\circ = 1$.

Если в прямоугольном треугольнике острый угол A равен 30°, то противолежащий катет равен половине гипотенузы. Отсюда $\sin 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, а с учетом теоремы Пифагора вычислим

$$\sin 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Кроме того, $\operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$, $\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$.

А что делать, если угол не является острым углом прямоугольного треугольника? Если это острый угол, то можно построить прямоугольный треугольник с этим острым углом.

Кроме того, полезно использовать следующие факты:
$\sin 0^\circ = 0$, $\cos 0^\circ = 1$, $\operatorname{tg} 0^\circ = 0$, $\operatorname{ctg} 0^\circ$ не существует,
$\sin 90^\circ = 1$, $\cos 90^\circ = 0$, $\operatorname{tg} 90^\circ = 0$ не существует, $\operatorname{ctg} 90^\circ = 0$,
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$,
$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}^\circ(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha$.

Обобщением теоремы Пифагора является теорема косинусов.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, γ — угол между сторонами a и b, тогда справедлива формула $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$.

Какие элементы треугольника полностью его определяют?

Ответ на этот вопрос дают признаки равенства треугольников.

Если три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого, то такие треугольники равны.

Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны двум сторонам и углу между ними другого, то такие треугольники равны.

Если сторона и два прилегающих угла одного треугольника равны стороне и двум прилегающим угла другого, то такие треугольники равны.

Сумма внутренних углов треугольника равна 180°. Смежный угол внутреннего угла треугольника называется его внешним углом. Внешний угол треугольника равен сумме внутренних углов треугольника, не смежных с ним. В треугольнике против большего угла лежит большая сторона.

Треугольники называются подобными, если их углы равны и соответствующие стороны пропорциональны.

Пропорциональность сторон a_1, b_1, c_1 одного треугольника сторонам a_2, b_2, c_2 другого треугольника означает, что выполнено соотношение $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$.

Так как эти 3 величины равны между собой, то все они равны некоторому числу k. Итак, выполнено соотношение

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=\frac{c_1}{c_2}=k,$$

и это число k называется коэффициентом пропорциональности.

Для установления подобия треугольников используют признаки подобия.

Два треугольника подобны, если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника.

Два треугольника подобны, если у них есть равные углы и стороны одного треугольника, прилегающие к одному из этих углов, пропорциональны сторонам другого треугольника, прилегающим к равному углу.

Два треугольника подобны, если три стороны одного треугольника пропорциональны трем сторонам другого треугольника.

20. Четырехугольник

Замкнутая ломаная на плоскости, состоящая из четырех звеньев, образует четырехугольник, если они не пересекаются и соседние звенья не лежат на одной прямой. Узлы ломаной называются вершинами четырехугольника.

Пусть вершинами четырехугольника являются точки A, B, C, D, тогда для самого четырехугольника используем обозначение $ABCD$.

Параллелограммом называется четырехугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны.

В параллелограмме противоположные стороны равны, диагональ параллелограмма делит его на 2 равных треугольника. Диагонали в точке пересечения делятся пополам и делят параллелограмм на 4 равновеликих треугольника. Противоположные углы параллелограмма равны. Углы, прилегающие к одной стороне, в сумме равны 180°. Биссектриса внутреннего угла параллелограмма отсекает от него равнобедренный треугольник. Биссектрисы углов, прилегающих к одной стороне, пересекаются под прямым углом.

Четырехугольник является параллелограммом, если:

а) Противоположные стороны четырехугольника попарно равны.

б) Существует пара противоположных сторон, которые равны и параллельны.

в) Противоположные углы четырехугольника попарно равны.

Прямоугольником называется параллелограмм, если у него все углы прямые.

В прямоугольнике диагонали равны между собой и сумма квадратов двух перпендикулярных сторон равна квадрату диагонали.

Ромбом называется параллелограмм, у которого все стороны равны.

Квадратом называется прямоугольник, у которого все стороны равны.

Трапецией называется четырехугольник, две противоположные стороны которого параллельны, а две другие не параллельны.

Параллельные стороны называются основаниями трапеции, не параллельные стороны называются боковыми сторонами.

Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется равнобедренной трапецией. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон, называется средней линией трапеции. Средняя линия трапеции параллельна основаниям трапеции и равна их полусумме.

Часть вопросов, связанных с четырехугольниками, рассмотрены в теме «Многоугольники».

21. Окружность и круг

Окружностью называется геометрическое место точек, расстояние от которых до фиксированной точки, называемой центром окружности, есть величина постоянная. Отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром, а также длина этого отрезка называются радиусом окружности. Внутренность окружности называется кругом.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется хордой. Если этот отрезок проходит через центр окружности, он называется ее диаметром. Диаметр в 2 раза больше радиуса.

Угол, образованный двумя радиусами окружности, называется ее центральным углом. Дуга окружности измеряется этим центральным углом. Угол, образованный двумя хордами, исходящими из одной точки окружности, называется ее вписанным углом.

Отметим некоторые факты.

Вписанный угол равен половине центрального угла, который опирается на ту же дугу. Касательная к окружности перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания.

Если из точки A вне окружности проведены касательные AB и AC, то они равны между собой, а отрезок AO является биссектрисой угла BAC.

Если из точки A вне окружности проведена касательная AB и секущая, которая пересекает окружность вначале в точке C, а затем в точке D, то $AB^2 = AC \cdot AD$, т.е. квадрат касательной равен произведению длины секущей на ее внешнюю часть.

Центр окружности находится внутри остроугольного треугольника, вписанного в окружность. Центр окружности находится вне тупоугольного треугольника, вписанного в окружность. Центр окружности находится на середине гипотенузы прямоугольного треугольника, вписанного в окружность.

Пусть на окружности с центром в точке O расположены точки A, B и C. Угол ABC, опирающийся на дугу AC, является вписанным углом. Как связаны между собой указанный вписанный угол и центральный угол AOC? Если $\angle AOC = \alpha$, то при $\alpha \le 90°$ выполнено условие $\angle AOC = 2\alpha$, т.е. центральный угол в 2 раза больше вписанного угла. Обратите внимание, что это верно в том случае, когда центральный и вписанный углы опираются на одну и ту же дугу.

Если $\angle ABC = \alpha$ и $\alpha > 90°$, то $\angle AOC = 360° - 2\alpha$, т.к. в этом случае центральный и вписанный углы опираются на разные дуги.

Вокруг треугольника можно всегда описать окружность, и центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника. Это верно потому, что серединный перпендикуляр является геометрическим местом точек, равноудаленных от концов отрезка.

В треугольник можно всегда вписать окружность, и центром вписанной окружности будет точка пересечения биссектрис этого треугольника. Это верно потому, что биссектриса является геометрическим местом точек, равноудаленных от лучей угла.

Теорема синусов. Если на стороны треугольника a, b, c опираются соответственно углы α, β, γ, то справедлива формула $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$, где R — радиус описанной окружности. Иными словами, отношения длин сторон треугольника к синусам противолежащих углов одинаковы и равны удвоенному радиусу описанной окружности.

22. Многоугольники

Рассмотрим плоскую фигуру, ограниченную замкнутой ломаной. Если число сторон ломаной равно 3, эта фигура называется треугольником. При большем числе сторон ломаной такая фигура называется многоугольником. Все, что мы сейчас рассмотрим, справедливо для всех многоугольников, в том числе для четырехугольников, частично рассмотренных ранее.

Из каких сторон можно составить многоугольник? В треугольнике сумма двух любых сторон должна быть больше третьей стороны. В многоугольнике аналогично длина любой стороны должна быть меньше суммы длин остальных сторон. В этом и только в этом случае из отрезков можно составить многоугольник.

Что такое выпуклый многоугольник? Выпуклой называется фигура, которая наряду с любыми двумя точками содержит отрезок, их соединяющий. Треугольник всегда является выпуклой фигурой. Четырехугольник и любой многоугольник могут быть не выпуклыми.

Чему равна сумма внутренних углов многоугольника? Сумма углов треугольника равна 180°. В любом четырехугольнике, даже не выпуклом, найдется диагональ, целиком лежащая внутри этого четырехугольника. Она делит четырехугольник на 2 треугольника, и сумма углов четырехугольника равна сумме всех углов в этих треугольниках, т.е. равна 360°. Точно так же в любом многоугольнике найдется диагональ, отсекающая треугольник и уменьшающая число сторон на 1. Поэтому верно и обратное. Увеличение числа сторон на 1 увеличивает сумму внутренних углов многоугольника на 180°. Следовательно, сумма внутренних углов n-угольника равна $180° \cdot (n - 2)$. В школьном учебнике эта теорема доказывается гораздо тщательнее и только для выпуклого многоугольника.

Когда вокруг многоугольника можно описать окружность? Вокруг треугольника можно всегда описать окружность, и центром описанной окружности будет точка пересечения серединных перпендикуляров сторон треугольника. Вокруг многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры всех сторон многоугольника пересекаются в одной точке.

Когда в многоугольник можно вписать окружность? В треугольник можно всегда вписать окружность и центром вписанной окружности будет точка пересечения биссектрис этого треугольника. В многоугольник можно вписать окружность тогда и только тогда, когда биссектрисы всех углов многоугольника пересекаются в одной точке.

Многоугольник называется правильным, если все его стороны равны и, кроме того, все серединные перпендикуляры сторон и биссектрисы углов пересекаются в одной точке.

В правильном многоугольнике все внутренние углы равны $\frac{180^\circ \cdot (n-2)}{n}$.

23. Измерение геометрических величин

Изучение геометрических объектов невозможно без их измерения. Измеряются длины, площади, объемы объектов, расстояния между ними, величины углов, их тригонометрических функций.

Нельзя обойтись без измерения величин, поэтому некоторые из них уже нам встречались в этой книге. Вводя координатные прямые, мы научились находить расстояния между точками на прямой и плоскости.

Пусть есть 2 геометрических объекта. Если мы возьмем по одной точке каждого из них, то можно измерить расстояние между этими точками. Наибольшее действительное число, обладающее тем свойством, что расстояние между точками объектов не может быть меньше этого числа, называется расстоянием между геометрическими объектами.

Рассмотрим расстояние между точкой и прямой. Расстояние от точки до прямой равно 0, если точка находится на этой прямой. Расстояние от точки до прямой равно длине перпендикуляра, опущенного из точки на прямую, если точка не находится на этой прямой.

Конечно, общие правила и формулы еще не являются гарантией решения конкретной задачи. Может быть, для нахождения расстояния от точки до прямой, надо будет построить треугольник, в котором нужный перпендикуляр будет высотой, могут быть и другие решения такой задачи. Такая задача может являться фрагментом выполнения более сложного задания.

Как найти длину окружности или части окружности?

Много веков назад было установлено, что отношение длины окружности к ее диаметру является одним и тем же числом для всех окружностей Это трансцендентное число было названо числом π ($3{,}14 < \pi < 3{,}15$).

Если r — радиус окружности, d — диаметр, O — центр, то длина окружности L равна πd или $2\pi r$.

Пусть задана дуга окружности, на которую опирается центральный угол, градусная мера которого равна $n°$. Если мы $n°$ поделим на 360°, то узнаем, какую часть от всей окружности занимает дуга. Следовательно, длина дуги окружности l может быть вычислена по формуле $l = 2\pi r \cdot \frac{n}{360}$ или $l = \frac{\pi rn}{180}$.

Что такое площадь фигуры? Если площадь квадрата со стороной 1 при любой единице измерения длины считать единицей измерения площади в соответствующих квадратных единицах, то мы можем посчитать, сколько таких «квадратиков» составляют нашу фигуру. Площадь обладает свойством аддитивности, т.е. площадь фигуры, составленной из непересекающихся частей равна сумме площадей этих частей. На основании такого подхода можно получить различные формулы для вычисления площади.

Пусть сторона квадрата равна a, тогда его площадь равна квадрату стороны, т.е. вычисляется по формуле $S = a^2$.

Площадь прямоугольника со сторонами a и b равна произведению этих сторон и вычисляется по формуле $S = ab$.

При вычислении площади параллелограмма можно использовать разные формулы.

Площадь параллелограмма с основанием a и высотой к этому основанию h равна произведению основания на высоту, т.е. вычисляется по формуле $S = ah$.

Площадь параллелограмма со сторонами a, b и углу между ними φ равна произведению этих сторон на синус угла между ними, т.е. $S = ab\sin\varphi$.

Пусть основания трапеции равны a и b, высота трапеции равна h. Тогда ее площадь равна произведению полусуммы оснований (средней линии) на высоту, т.е. вычисляется по формуле $S = \frac{a+b}{2}h$.

Площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними. В частности, площадь ромба равна половине произведения диагоналей, а площадь квадрата равна не только квадрату его стороны, но и половине квадрата его диагонали.

Рассмотрим теперь несколько формул для вычисления площади треугольника.

Пусть сторона треугольника равна a и высота к ней равна h, тогда $S = \frac{ah}{2}$.

Пусть $p = \frac{a+b+c}{2}$ — полупериметр треугольника, r — радиус вписанной в него окружности, тогда $S = pr$.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, R — радиус его описанной окружности, тогда $S = \frac{abc}{4R}$.

Рассмотрим теперь формулы площади треугольника, связанные с признаками равенства треугольников.

Три стороны треугольника однозначно определяют треугольник и его площадь.

Пусть a, b, c — стороны треугольника, $p = \frac{a+b+c}{2}$ — его полупериметр, тогда площадь треугольника может быть найдена по формуле Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Две стороны треугольника и угол между ними однозначно определяют треугольник и его площадь.

Пусть заданы две стороны треугольника a, b и угол между ними φ, тогда $S = \frac{1}{2}ab\sin\varphi$.

Сторона треугольника и два прилегающих к ней угла однозначно определяют треугольник и его площадь.

Пусть заданы два угла треугольника α, β и сторона между ними c. Тогда площадь этого треугольника может быть найдена по формуле $S=\frac{c^2}{2(ctg\alpha+ctg\beta)}$.

Последняя формула не приведена в учебнике, но старательный ученик вполне может ее доказать. Отметим еще одну экзотическую формулу, которую несложно обосновать.

Пусть m_1 и m_2 — медианы треугольника, φ — угол между ними, тогда площадь треугольника по двум медианам и углу между ними может быть найдена по формуле $S=\frac{2}{3}\cdot m_1\cdot m_2\cdot\sin\varphi$.

Отметим еще некоторые факты.

Пусть задана окружность радиуса r. Тогда площадь круга вычисляется по формуле $S=\pi r^2$.

Пусть задана дуга окружности, на которую опирается центральный угол, градусная мера которого равна $n°$. Площадь сектора, ограниченного этой дугой длины $l=\frac{\pi rn}{180}$ и радиусами, проходящими через граничные точки дуги, равна $S=\frac{\pi r^2 n}{360}$ или $S=\frac{rl}{2}$.

Как найти объем тела? Объем куба со стороной 1 при любой единице измерения длины считается единицей измерения объема в соответствующих кубических единицах. Мы должны посчитать, сколько таких «кубиков» составляют наше тело.

Пусть сторона куба равна a, тогда его объем равен кубу стороны, т.е. вычисляется по формуле $V=a^3$.

Объем прямоугольного параллелепипеда со сторонами a, b и c равен произведению этих сторон и вычисляется по формуле $V=abc$.

Объем шара радиуса R вычисляется по формуле $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

24. Векторы на плоскости

Направленный отрезок на плоскости будем называть вектором. Вектор определяется длиной и направлением. Два вектора считаются равными, если они равны по длине и одинаково направлены. Вектор не изменяется при параллельном переносе.

Следовательно, чтобы задать вектор, надо задать его длину и направление. Для длины вектора $\vec{a}$ используется обозначение $|\vec{a}|$, читается: модуль вектора $\vec{a}$. Направление вектора может быть различным образом описано, формально его задает вектор единичной длины с тем же направлением.

Вектор можно задать, определив его начальную и конечную точки. Пусть A — начальная точка вектора $\vec{a}$, B — его конечная точка, тем самым $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$. При этом вектор $\overrightarrow{BA}$ мы будем считать противоположно направленным. Если начало и конец вектора совпадают, вектор считается нулевым, или равным $\vec{0}$, т.е. $\overrightarrow{AA} = \vec{0}$.

Суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, идущий из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$, если начало вектора $\vec{b}$ приставлено к концу вектора $\vec{a}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ и числа α называется вектор $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, для которого $|\vec{b}| = |\alpha| \cdot |\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ одинаково направлены, если $\alpha > 0$, и противоположно направлены, если $\alpha < 0$.

Разность векторов понимается как операция, обратная операции сложения векторов. Кроме этих линейных операций над векторами, в школе изучается и одна нелинейная операция.

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними, т.е. $\vec{a}\vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$.

Из определения скалярного произведения следуют свойства скалярного произведения:

$\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$, $\left(\vec{a} + \vec{b}, \vec{c}\right) = \left(\vec{a}, \vec{c}\right) + \left(\vec{b}, \vec{c}\right)$, $\left(\alpha\vec{a}, \vec{b}\right) = \alpha\left(\vec{a}, \vec{b}\right)$,

$\left(\vec{a}, \vec{a}\right) \geq 0$, $\left(\vec{a}, \vec{a}\right) = 0 \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$.

В некоторых случаях применение векторной алгебры позволяет решать сложные задачи. При этом надо иметь в виду следующее.

Два неколлинеарных (не параллельных) вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ на плоскости образуют базис. Это означает, что эти два вектора нельзя с помощью линейных операций выразить друг через друга, но в то же самое время каждый вектор $\vec{c}$ на плоскости является их линейной комбинацией, т.е. $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$. Коэффициенты x, y линейной комбинации при этом определяются однозначно и называются координатами вектора в данном базисе. Запись $\vec{c}(x;y)$ означает, что вектор $\vec{c}$ имеет координаты x, y.

Если базисные векторы имеют единичную длину и взаимно перпендикулярны, то соответствующая система координат называется декартовой. Не теряя общности, можно считать, что базисные векторы выходят из точки O — начала координат. В этом случае координаты вектора $\overrightarrow{OA}$ будут совпадать с координатами точки A на этой же координатной плоскости. Поэтому, чтобы найти координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, идущего из точки A в точку B, надо из координат точки B вычесть координаты точки A.

В любой системе координат на плоскости при линейных операциях над векторами те же самые операции происходят с их координатами. Это надо понимать следующим образом. Координаты суммы векторов равны сумме их соответствующих координат. Координаты разности векторов равны разности их соответствующих координат. При умножении вектора на число каждая координата вектора умножается на это число.

В декартовой системе координат скалярное произведение равно сумме попарных произведений координат векторов.

Пример 1. Даны векторы $\vec{a}(3;-5)$ и $\vec{b}(-1;2)$. Найдите координаты вектора $3\vec{a} - 2\vec{b}$ и скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Заметим, что $3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1) = 11$, $3 \cdot (-5) - 2 \cdot 2 = -19$. Эти числа и являются координатами искомого вектора. Найдем теперь скалярное произведения $\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot (-1) + (-5) \cdot 2 = -13$.

Ответ. (11; –19) и –13.

Отмеченные факты векторной алгебры могут быть использованы при решении планиметрических задач.

Пример 2. Длины двух сторон треугольника равны a и b, а проведенные к ним медианы перпендикулярны между собой. Найдите косинус угла γ, заключенного между этими сторонами треугольника.

Рассмотрим треугольник ABC и введем обозначения: $\overrightarrow{CA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{CB} = \vec{b}$. Очевидно, векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ образуют базис, при этом взаимно перпендикулярные к ним медианы линейно выражаются через векторы базиса и равны $\frac{\vec{a}}{2}-\vec{b}$ и $\frac{\vec{b}}{2}-\vec{a}$. Вычислим скалярное произведение этих векторов $\frac{5}{4}\vec{a}\vec{b}-\frac{a^2+b^2}{2}$ и приравняем его к нулю. С учетом определения скалярного произведения мы приходим к равенству $|a||b|\cdot\cos\gamma=\frac{2(a^2+b^2)}{5}$.

Ответ. $0{,}4\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$.

Отметим, что в примере перпендикулярность медиан возможна лишь в том случае, когда величина $0{,}4\cdot\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)$ меньше 1.

25. Теория вероятностей и статистика

События, которые происходят реально или в нашем воображении, можно разделить на 3 группы. Это достоверные события, которые обязательно произойдут, невозможные события, которых быть не может. С этими событиями все понятно, здесь нет вопросов. Наибольший интерес вызывают случайные события, т.е. события, которые могут произойти или не произойти.

Давайте несколько раз бросим монету. Каждый раз сверху может оказаться орел или решка. Предположим, что мы бросили монету 5 раз, при этом 2 раза выпал орел и 3 раза выпала решка. Можем ли мы отсюда сделать вывод, сколько раз выпадут орел и решка в следующих 10 бросках монеты?

Несмотря на кажущуюся простоту ситуации, ответить на этот вопрос очень сложно, а точный ответ дать просто невозможно.

Может быть, проницательный читатель скажет, что монета симметрична, поэтому орел и решка выпадут по 5 раз. Это вовсе не обязательно по двум причинам. Во-первых, абсолютно симметричных монет не бывает, а наша монета может быть,еще и немного погнута. А во-вторых, даже для идеально симметричной монеты число выпадений орла и решки не обязательно совпадает.

Исследованиями подобных ситуаций занимаются две близкие науки – теория вероятностей и математическая статистика.

Математическая статистика по результатам экспериментов делает выводы о законах, которым подчиняются случайные события. Сама по себе эта наука очень сложная. Задания на ОГЭ по математике по этой тематике связаны с описанием различных реальных зависимостей между величинами, интерпретации графиков реальных зависимостей. Для выполнения этих заданий достаточно внимательного их прочтения и понимания сути происходящего.

Теория вероятностей изучает случайные события, законы проявления которых известны. Исторически потребность исследования этих проблем возникла в XVII веке в связи с развитием и профессионализацией азартных игр и появлением казино. Это было реальное явление, которое требовало своего изучения и исследования. Игра в карты, кости, рулетку создавала ситуации, когда могло произойти любое из конечного числа равновозможных событий. Возникла необходимость дать числовые оценки возможности наступления того или иного события.

В двадцатом веке выяснилось, что эта, казалось бы, легкомысленная наука, играет важную роль в познании фундаментальных процессов, протекающих в микромире. Была создана современная теория вероятностей.

Объектом изучения теории вероятностей являются события и их вероятности. Если событие является сложным, то его можно разбить на простые составляющие, вероятности которых найти несложно.

Суммой событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произошло либо событие A, либо событие B, либо события A и B одновременно.

Произведением событий A и B называется событие C, заключающееся в том, что произошло и событие A и событие B.

События A и B называется несовместными, если они не могут произойти одновременно.

Событие A называется невозможным, если оно не может произойти. Такое событие обозначается символом $\varnothing$.

Событие A называется достоверным, если оно обязательно произойдет. Такое событие обозначается символом Ω.

Пусть каждому событию A поставлено в соответствие число $p(A)$. Это число $p(A)$ называется вероятностью события A, если при таком соответствии выполнены следующие условия:

1) Вероятность принимает значения на отрезке от 0 до 1, т.е. $0 \le p(A) \le 1$.

2) Вероятность невозможного события равна 0, т.е. $p(\varnothing) = 0$.

3) Вероятность достоверного события равна 1, т.е. $p(\Omega) = 1$.

4) Если события A и B несовместные, то вероятность их суммы равна сумме их вероятностей, т.е. $p(A+B) = p(A) + p(B)$.

Важным частным случаем является ситуация, когда имеется n равновероятных элементарных исходов, и произвольные k из этих исходов образуют события A. В этом случае вероятность можно ввести по формуле

$$p(A) = \frac{k}{n}. \qquad (1)$$

Вероятность, введенная таким образом, называется классической вероятностью. Можно доказать, что в этом случае свойства $1-4$ выполнены.

Задачи по теории вероятностей, которые встречаются на ОГЭ по математике, в основном связаны с классической вероятностью. Такие задачи могут быть очень простыми. Особенно простыми являются задачи по теории вероятностей в демонстрационных вариантах. Легко вычислить число благоприятных исходов k, если прямо в условии написано число всех исходов n. Ответ получаем по формуле (1).

Тем не менее обратим внимание читателя и на другие вопросы, изучаемые в теории вероятностей.

События A и B называется независимыми, если вероятность каждого из них не зависит от того, произошло ли другое событие.

Событие $\overline{A}$ состоит в том, что событие A не произошло, т.е. событие $\overline{A}$ является противоположным к событию A. Вероятность противоположного события равна единице минус вероятность прямого события, т.е. $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$.

Для произвольных событий A и B вероятность суммы этих событий равна сумме их вероятностей без вероятности их совместного события, т.е. $p(A+B) = p(A) + p(B) - p(AB)$.

Для независимых событий A и B вероятность произведения этих событий равна произведению их вероятностей, т.е. в этом случае $p(AB) = p(A) \cdot p(B)$.

Последние 2 утверждения называются теоремами сложения и умножения вероятностей.

Не всегда подсчет числа исходов является столь простым. В ряде случаев необходимо использовать формулы комбинаторики. При этом наиболее важным является подсчет числа событий, удовлетворяющих определенным условиям. Иногда такого рода подсчеты могут становиться самостоятельными заданиями.

Сколькими способами можно усадить 6 учеников на 6 свободных мест? Первый ученик займет любое из 6 мест. Каждому из этих вариантов соответствует 5 способов занять место второму ученику. Для третьего ученика остается 4 свободных места, для четвертого — 3, для пятого — 2, шестой займет единственное оставшееся место. Чтобы найти число всех вариантов, надо найти произведение $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6$, которое обозначается символом 6! и читается шесть факториал.

В общем случае ответ на этот вопрос дает формула для числа перестановок из n элементов $P_n = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n = n!$. В нашем случае $n = 6$.

Рассмотрим теперь другой случай с нашими учениками. Сколькими способами можно усадить 2 учеников на 6 свободных мест? Первый ученик займет любое из 6 мест. Каждому из этих вариантов соответствует 5 способов занять место второму ученику. Чтобы найти число всех вариантов, надо найти произведение $6 \cdot 5$.

В общем случае ответ на этот вопрос дает формула для числа размещений из n элементов по k элементам

$$A_n^k = n\cdot(n-1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1).$$

В нашем случае $n = 6$, $k = 2$.

И последний случай из этой серии. Сколькими способами можно выбрать трех учеников из 6? Первого ученика можно выбрать 6 способами, второго — 5 способами, третьего — четырьмя. Но среди этих вариантов 6 раз встречается одна и та же тройка учеников. Чтобы найти число всех вариантов, надо вычислить величину $\frac{6\cdot5\cdot4}{1\cdot2\cdot3} = 20$. В общем случае ответ на этот вопрос дает формула для числа сочетаний из n элементов по k элементам $C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot k}$. В нашем случае $n = 6$, $k = 3$.

Пример 1. На 8 карточках написаны названия планет Солнечной системы: Меркурий, Венера, Земля, Марс, Юпитер, Сатурн, Уран, Нептун. Наудачу выбирается одна из карточек. Найдите, какова вероятность того, что на этой карточке название планеты начинается на гласную букву.

Число всех возможных равновероятных исходов равно 8, т.е. равно числу карточек. Названия двух планет: Юпитера и Урана начинаются на гласную букву. Чтобы получить ответ, мы 2 делим на 8.

Ответ. 0,25.

Математические модели (вероятностные пространства) не ограничиваются классической вероятностью. Полезно иметь представление о геометрической вероятности.

Пример 2. На отрезке длины 8 наудачу выбирается одна точка, которая разбивает его на 2 отрезка. Найдите вероятность того, что один из отрезков не менее чем в 3 раза длиннее другого.

Множество всех возможных равновероятных исходов заполняет отрезок длины 8. Для того, чтобы выбранная точка удовлетворяла условию задачи, необходимо, чтобы она находилась на расстоянии не далее 2 от любого из концов отрезка. Следовательно, множество благоприятных исходов состоит из двух отрезков длины 2 каждый. По аналогии с классической вероятностью естественно предположить, что вероятность события, исследуемого в задаче, равна отношению суммы длин отрезков, соответствующих благоприятным исходам к длине отрезка, соответствующего множеству всех исходов. Чтобы получить ответ, мы 4 делим на 8.

Ответ. 0,5.

При решении задач с позиций геометрической вероятности множество равновероятных исходов соответствует геометрическому множеству. Это может быть множество точек на прямой, на плоскости или в пространстве. При этом часть такого множества образует множество благоприятных исходов. Если события разворачиваются на прямой, вероятность события равна отношению соответствующих длин. Речь идет о длине (или сумме длин) множества благоприятных исходов и длины множества всех исходов. Для множеств на плоскости при решении задач рассматривается отношение площадей, а для множеств в пространстве — отношение объемов. При профессиональном изучении теории вероятностей рассматривается обобщение всех этих понятий — мера множества.

Пример 3. В классе вместе с Петей присутствует 26 учеников, из них — 9 девочек. Для выполнения лабораторных работ ученики будут случайным образом разбиты на 13 пар. Найдите вероятность того, что Петя будет выполнять лабораторную работу с девочкой.

Это задача на классическую вероятность. В этом случае надо применить формулу (1), т.е. число благоприятных исходов поделить на число всех исходов. Начинать надо с поиска всех возможных, при этом равновероятных, исходов. Это можно сделать по-разному. Наиболее простым рассуждением будет следующее. Пусть Петя занял свое место. В качестве всех возможных вариантов возьмем того, кто будет в паре с Петей. Таким может быть любой из оставшихся 25 учеников. Следовательно, число всех возможных вариантов при нашем выборе равно 25. Из этих 25 учеников — 9 девочек. Число 9 и есть число благоприятных исходов в соответствии условием задания. Чтобы получить ответ, мы 9 делим на 25.

Ответ. 0,36.

Содержание