LAPORAN TUGAS KECIL

IF5162/Metode Numerik Lanjut

Dipersiapkan oleh:

Gugy Lucky Khamdani / 23517041

Sekolah Teknik Elektro dan Informatika - Institut Teknologi Bandung

Jl. Ganesha 10, Bandung 40132

	Sekolah Teknik Elektro dan Informatika ITB	**Nomor Dokumen**		**Halaman**
		IF5162/23517041		*24*
		Revisi	*1*	*18 April 2018*

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

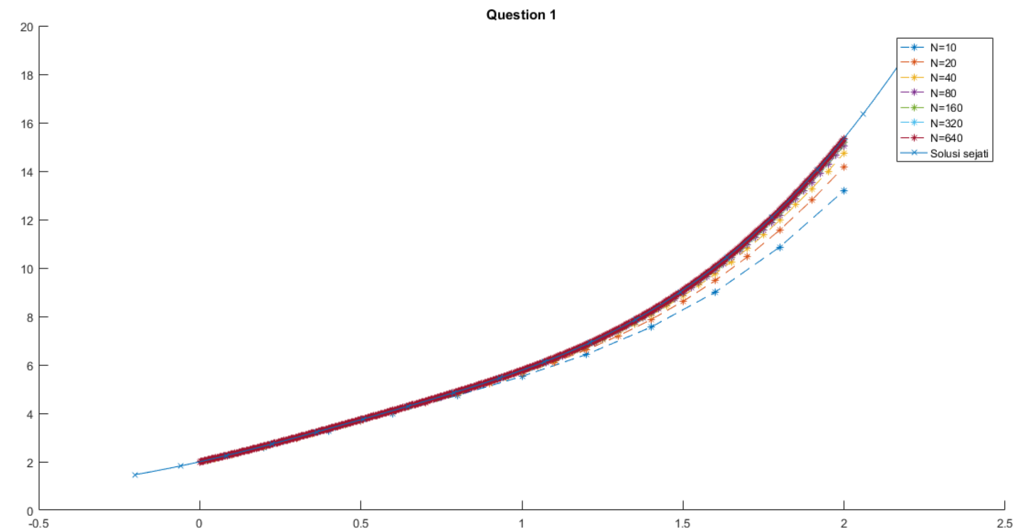
1. Secara umum, digunakan metode numerik untuk menghampiri solusi dari $u_t = f(t, u(t))$. Dengan menggunakan metode Euler, metode Runge-Kutta orde 2, metode Runge-Kutta orde 4, dan metode banyak-langkah Adams-Bashforth-Moulton untuk menghampiri persamaan diferensial
$$u_t = \cos(\pi t + u(t)$$
dengan kondisi awal
$$u(0) = 2.$$
persamaan diferensial tersebut diselesaikan dengan waktu t mencapai 2.0, dengan jumlah titik $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640.$
Solusi sejati dari persamaan diferensial tersebut adalah
$$u(t) = \frac{-e^{-x}(\cos(\pi t) - \pi \sin(\pi t)) + 2(\pi^2 + 1) + 1}{(\pi^2 + 1)e^{-x}}$$

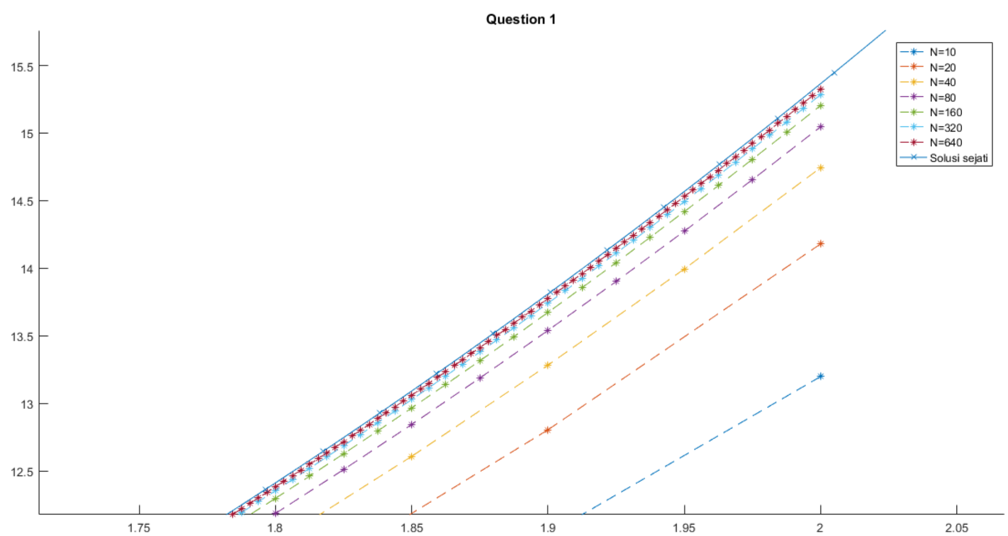
Table 1.1 galat dari hasil pendekatan menggunakan metode Euler, Runge-Kutta Orde 2, Runge-Kutta 4, dan Adams-Bashforth-Moulton

N	**Euler**	**Runge-Kutta orde 2**	**Runge-Kutta orde 4**	**Adams-Bashforth-Moulton**
10	2.16780485772888	0.168116170199903	0.000414507642171103	0.00338930652274172
20	1.18596688019685	0.0452148761098119	2.73632829763670e-05	0.000217154875313597
40	0.622253520635988	0.0117093652187119	1.75969036142476e-06	7.26498145198207e-06
80	0.318997148031420	0.00297833426775362	1.11591541340772e-07	1.21881623016407e-07
160	0.161541515460526	0.000750969069558849	7.02583058398432e-09	-5.04256902900124e-09
320	0.0812913388496440	0.000188540944016324	4.40696368286808e-10	-7.47194306427446e-10
640	0.0407770734612680	4.72350938469646e-05	2.75175437991493e-11	-6.07940364716342e-11

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041
Grafik solusi numerik:

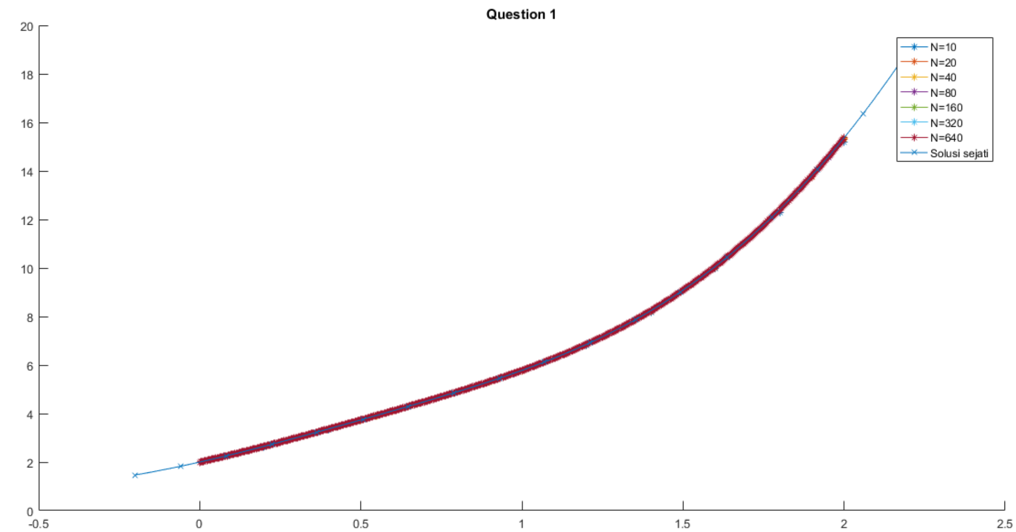
- Metode Euler

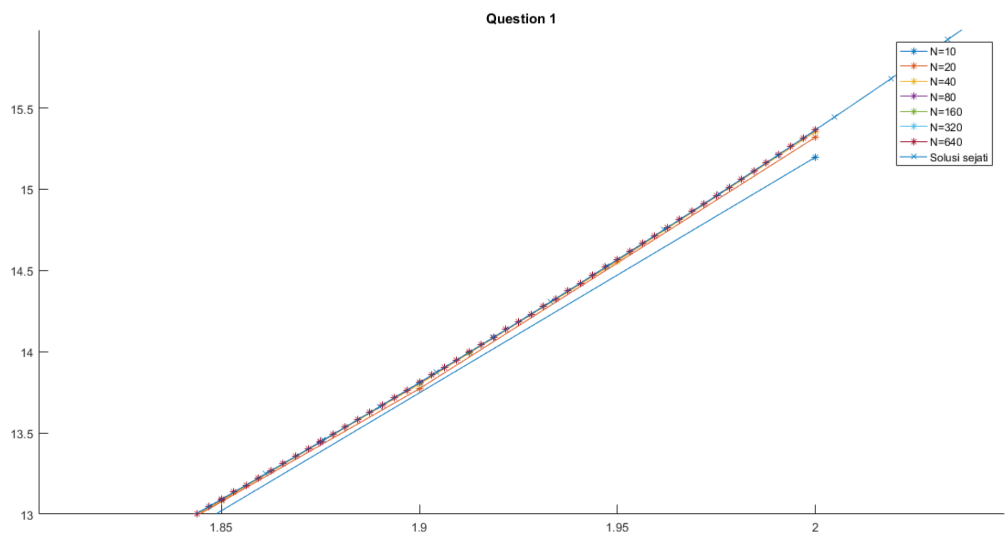




IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

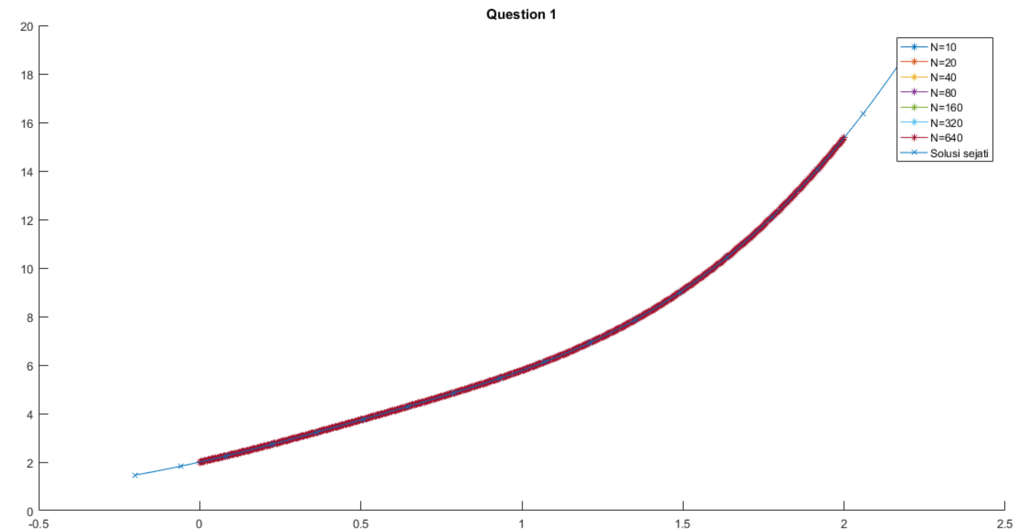
- Metode Runge-Kutta Order 2

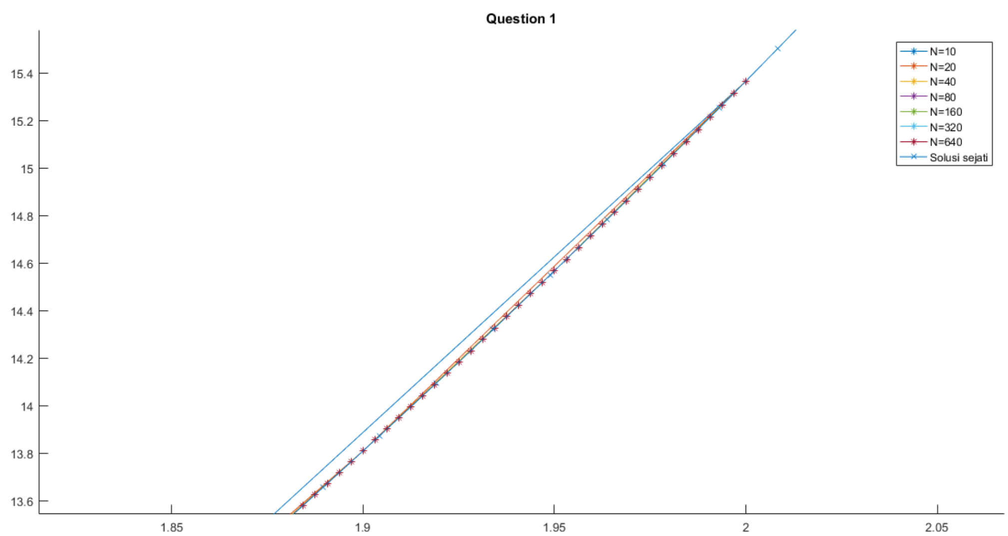




IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

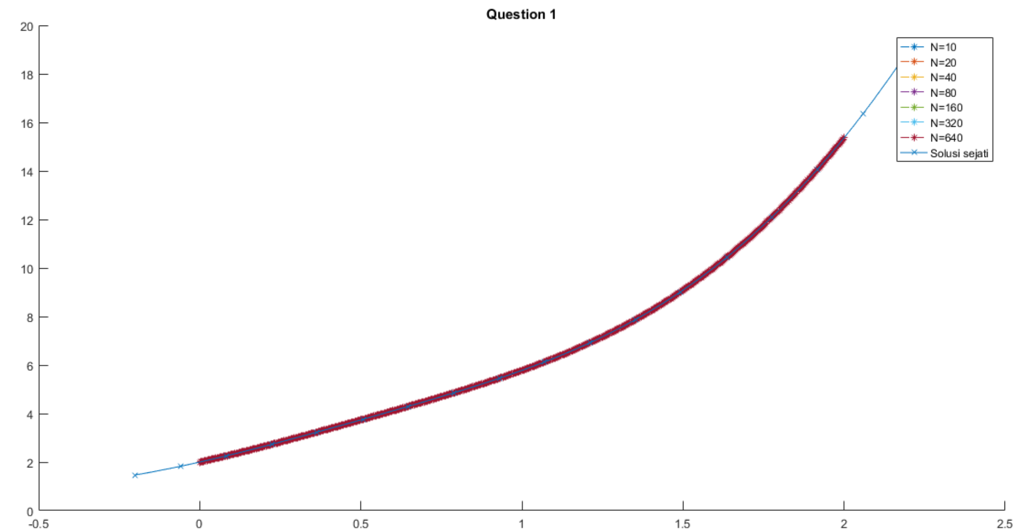
- Metode Runge-Kutta Orde 4

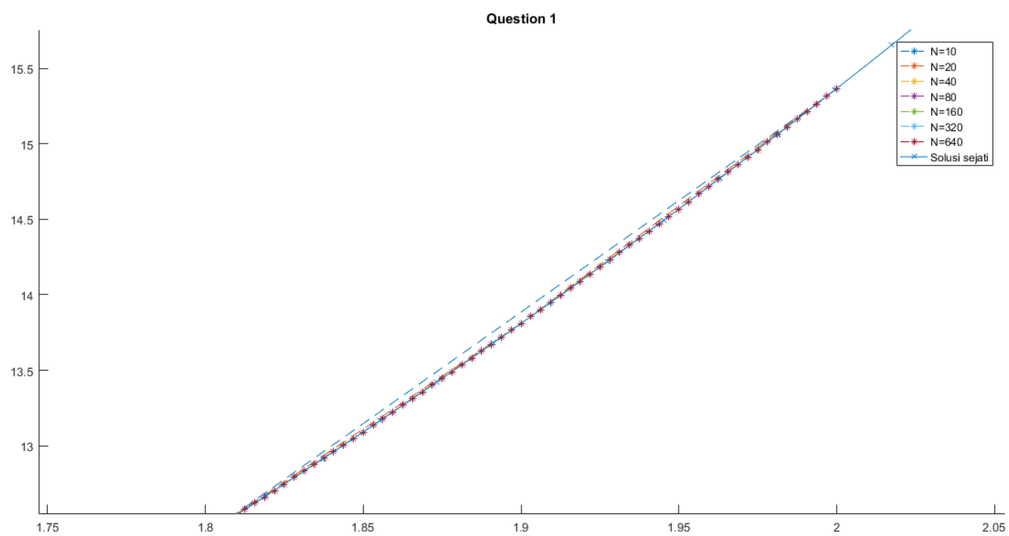




IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

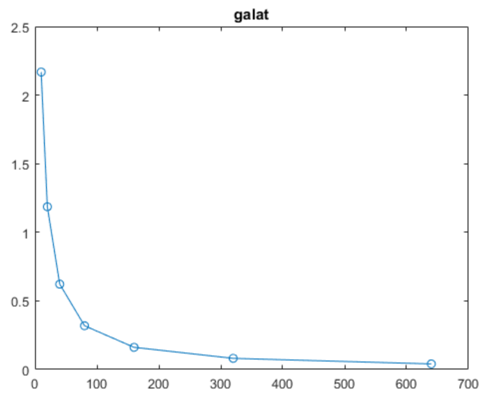
- Metode Adams-Bashforth-Moulton



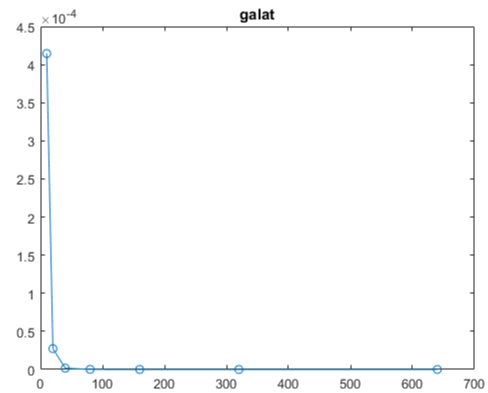


IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041
Grafik galat:

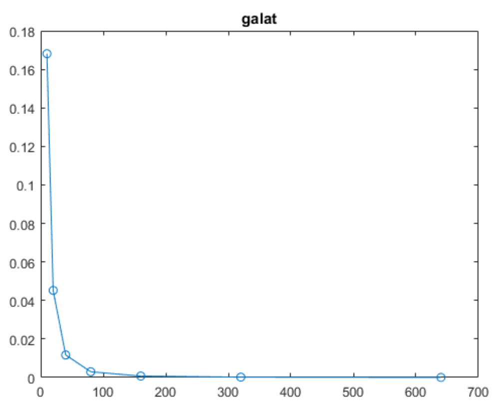
- Metode Euler



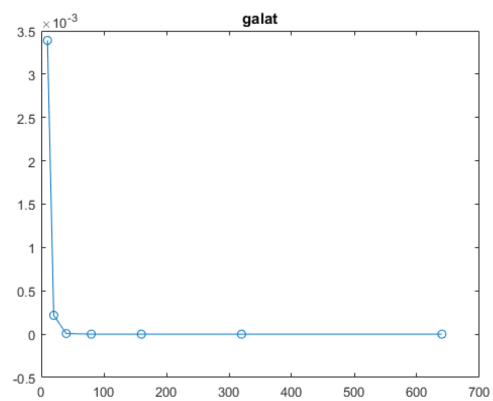
- Metode Runge-Kutta Orde 4



- Metode Runge-Kutta Orde 2



- Metode Adams-Bashforth-Moulton



Berdasarkan hasil perhitungan hampiran menggunakan berbagai jenis metode di atas, dapat dilihat pada tabel 1.1 bahwa metode banyak-langkah Runge-Kutta orde 4 memiliki galat yang paling kecil untuk persamaan diferensial nomor 1 di antara keempat metode yang digunakan, lalu yang terkecil berikutnya adalah metode Adams-Bashforth-Moulton yang memiliki orde galat yang hampir sama dengan metode Runge-Kutta orde 4. Akan tetapi metode Adams-Bashforth-Moulton membutuhkan komputasi yang lebih besar daripada metode Runge-Kutta orde 4 karena masih perlu menggunakan metode Runge-Kutta orde 3 untuk menentukan 3 titik awalnya.

Selain itu, semakin besar jumlah iterasi (N) yang digunakan akan semakin kecil galat yang dihasilkan. Metode yang paling cepat mendekati nilai sejatinya adalah Metode Runge-Kutta orde 2 hanya dengan 10 iterasi sudah menghasilkan nilai galat yang cukup layak (<0.0001).

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

2. Dengan menggunakan:
   (a) Metode Euler
   (b) Metode Euler Implisit
   (c) Metode Runge-Kutta orde 2
   (d) Metode Runge-Kutta orde 4
   (e) Metode banyak-langkah Adam-Bashforth-Moulton
   (f) Metode Runge-Kutta implisit

   untuk menghampiri solusi dari persamaan diferensial

$$u_t = -400 * u(t)$$

dengan kondisi awal

$$u(0) = .2$$

Persamaan diferensial di atas diselesaikan dengan t mencapai 1.0 atau selama hasilnya masih layak, dengan jumlah titik $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640$.

Solusi sejati dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$u(t) = 0.2 \times e^{-400t}$$

Table 2.1 galat dari hasil pendekatan menggunakan metode Euler, Euler Implisit, dan Runge-Kutta orde 2

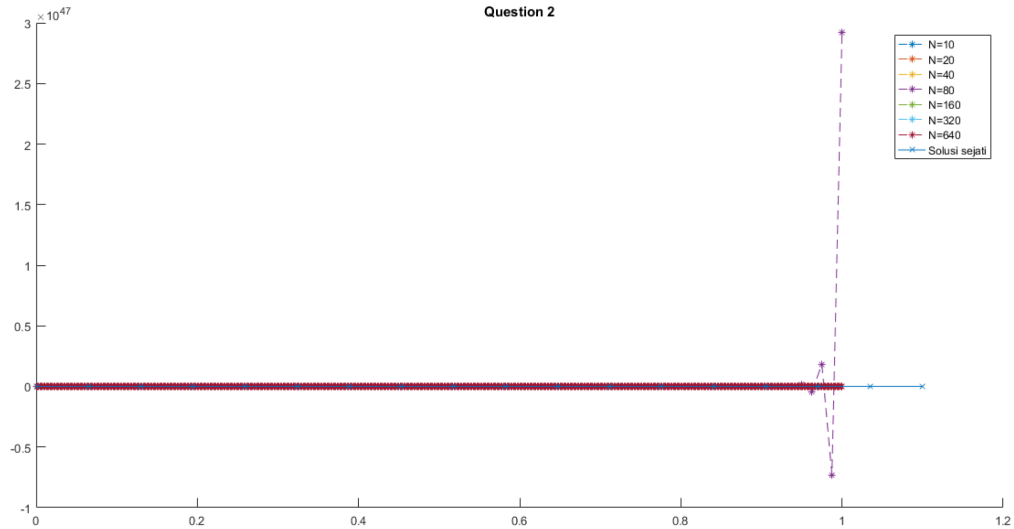
N	**Euler**	**Euler Implisit**	**Runge-Kutta Orde 2**
10	-1.62808121703832e+15	-1.49001770348688e-17	-1.30279644066346e+28
20	-7.51799469150920e+24	-7.18859639879228e-28	-2.84840338395411e+44
40	-2.95617658828692e+37	-4.41898563043600e-43	-6.49208600308643e+63
80	-2.92300327466181e+47	-1.11925737566628e-63	-4.51381809085076e+73
160	-2.98972638754465e+27	-1.77886462876446e-88	-1.09035632210524e+33
320	3.83033919342801e-175	-4.00519993115218e-114	-2.49282490174640e-89
640	3.83033919342801e-175	-2.26399880942307e-136	-1.63410477153124e-157

Tabel 2. 2 galat dari hasil pendekatan menggunakan metode Runge-Kutta orde 4, Adam-Bashforth-Moulton, dan Runge-Kutta implisit

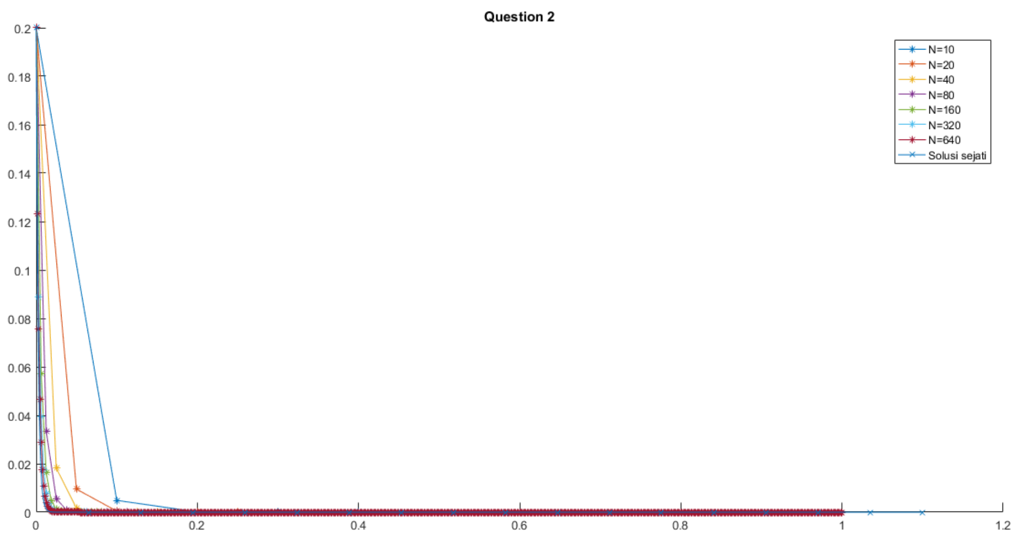
N	**Runge-Kutta Orde 4**	**Adam-Bashforth-Moulton**	**Runge-Kutta Implisit**
10	-1.43890948708335e+49	1.41906576551356e+33	-97.6074840801362
20	-1.35173106955599e+74	1.20712767733995e+51	-11175.0200641218
40	-7.19034212466235e+97	6.10303317650836e+74	-2211466.46418801
80	-1.81887349651419e+90	6.57446145688126e+93	-8717.37550607887
160	-1.58463641634757e-31	2.09607697627784e+25	-1.33791507365501e-29
320	-2.45963284082546e-165	1.32006683854052e-05	3.83033919342801e-175
640	-5.21116050021688e-175	3.81321473477289e-175	3.83033919342801e-175

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041
Grafik solusi numerik:

- Metode Euler

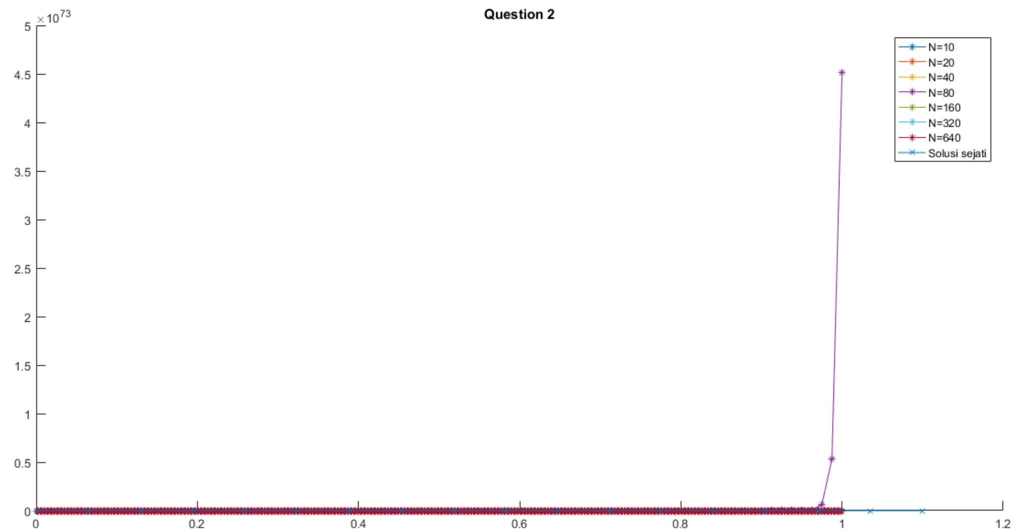


- Metode Euler implisit

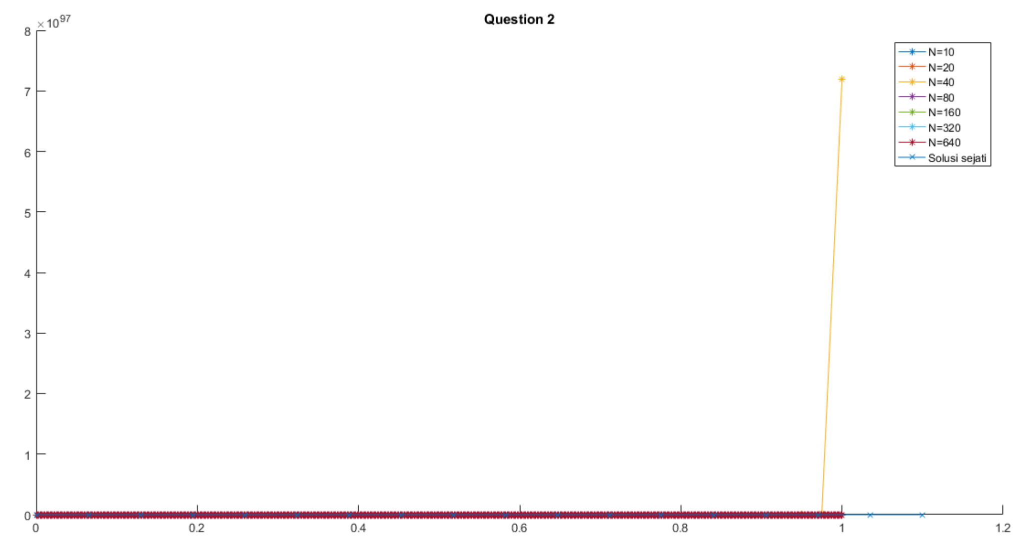


IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

- Metode Runge-Kutta orde 2

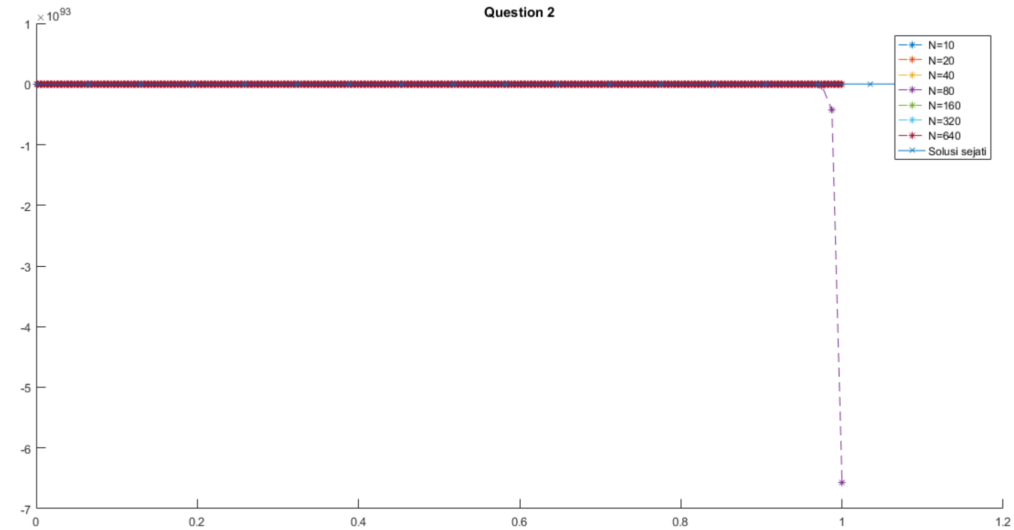


- Metode Runge-Kutta orde 4

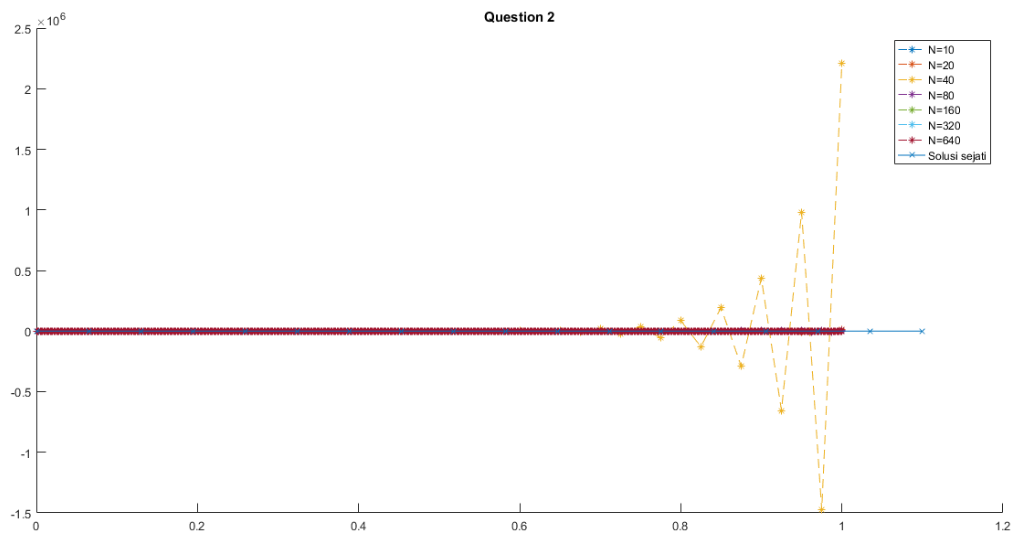


IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

- Metode Adams-Bashforth-Moulton

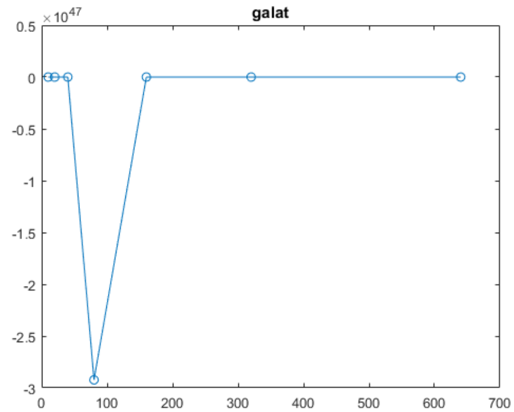


- Metode Runge-Kutta implisit

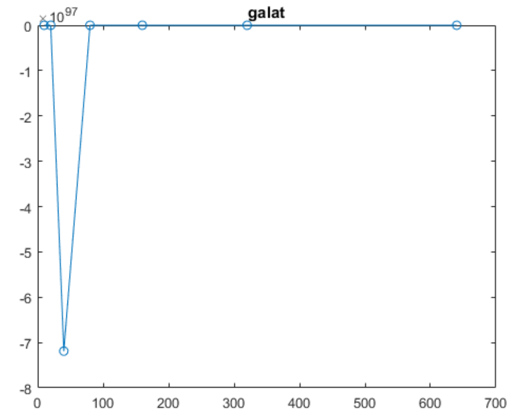


IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041
Grafik galat:

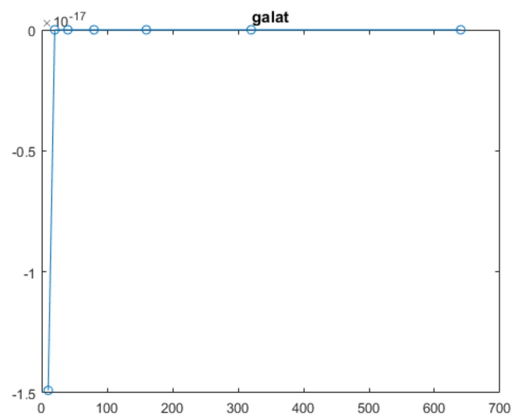
- Metode Euler



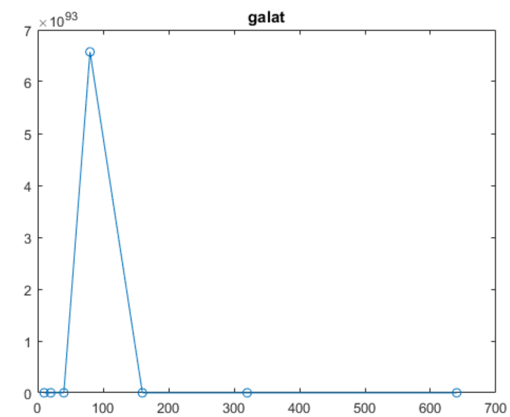
- Metode Runge-Kutta orde 4



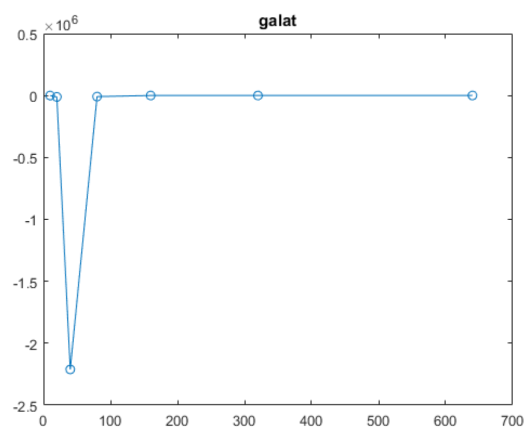
- Metode Euler implisit



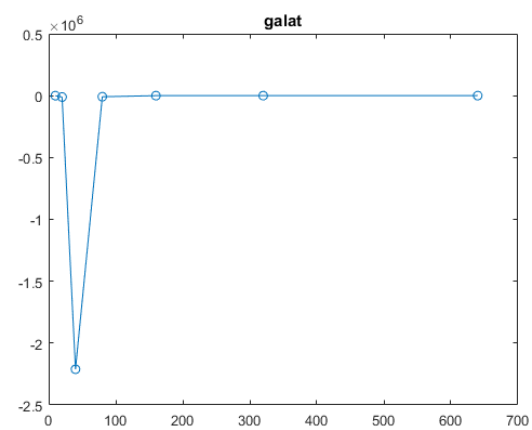
- Metode Adams-Bashforth-Moulton



- Metode Runge-Kutta orde 2



- Metode Runge-Kutta implisit



Jika dilihat dari tabel 2.1, dapat disimpulkan bahwa metode yang memiliki galat paling kecil dengan jumlah iterasi 640 untuk persamaan diferensial nomor 2 adalah metode banyak-langkah Adams-Bashforth-Moulton, tetapi memiliki orde galat yang mirip dengan metode Euler, Runge-Kutta orde 4, dan Runge-

Kutta implisit. Pada semua metode yang digunakan kecuali metode Euler implisit, terjadi osilasi pada jumlah iterasi antara 40 dan 80, dengan metode Runge-Kutta implisit yang mengalami osilasi paling besar sehingga memiliki nilai galat yang paling besar untuk jumlah iterasi tersebut.

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

3. Dengan menggunakan metode Euler, Runge-Kutta orde 2, dan Runge-Kutta orde 4 untuk menghampiri solusi dari persamaan diferensial

$$u_t = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} u$$

dengan kondisi awal

$$u(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Persamaan diferensial tersebut bisa dinyatakan sebagai

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \qquad dengan\ kondisi\ awal\ \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x' = y$$
$$y' = -6x + 5y$$

persamaan diferensial tersebut diselesaikan dengan waktu t mencapai 2.0, dengan jumlah titik $N = 10, 20, 40, 80, 160, 320, 640$.

Solusi sejati yang didapatkan dari persamaan diferensial tersebut adalah

$$x(t) = 2e^{2t} - e^{3t}$$
$$y(t) = 4e^{2t} - 3e^{3t}$$

Table 3.1 galat dari hasil pendekatan fungsi x menggunakan metode Euler, Runge-Kutta orde 2, dan Runge-Kutta orde 4

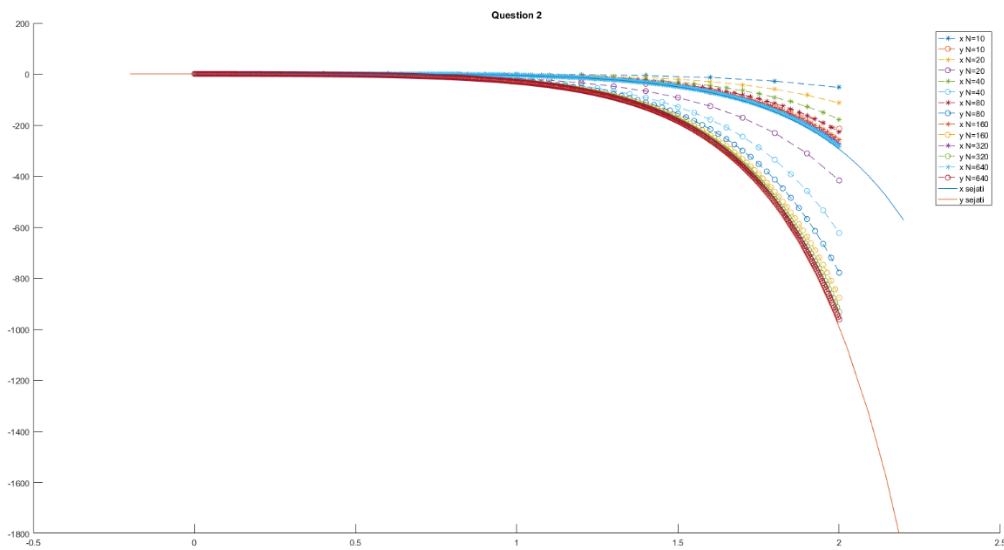
N	**Euler**	**Runge-Kutta Orde 2**	**Runge-Kutta Orde 4**
10	-242.132261644047	-254.249537399542	-252.999760179929
20	-180.858055526588	-203.537928617781	-202.735346333538
40	-116.887458328095	-141.542274443988	-141.168906522777
80	-67.7608155607873	-86.7374445975576	-86.6022691524673
160	-36.6977521147114	-48.6308764873269	-48.5894104992180
320	-19.1278288180220	-25.8448905862213	-25.8333430876077
640	-9.76902006470715	-13.3361922465001	-13.3331407782976

Table 3.2 galat dari hasil pendekatan fungsi y menggunakan metode Euler, Runge-Kutta orde 2, dan Runge-Kutta orde 4

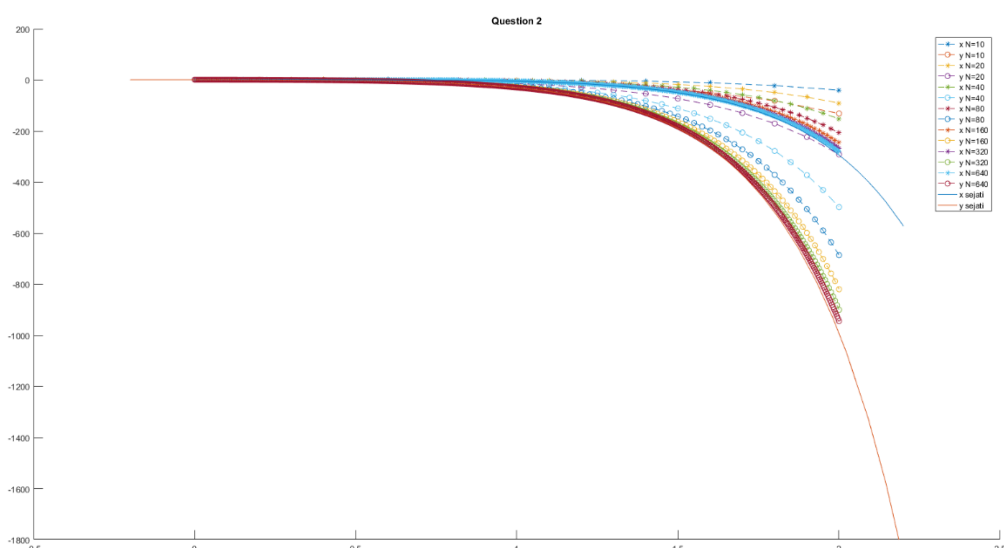
N	**Euler**	**Runge-Kutta Orde 2**	**Runge-Kutta Orde 4**
10	-777.742154003228	-860.489212140834	-856.916635966859
20	-575.095266797103	-700.394904848451	-698.035887215980
40	-369.340163914221	-493.952313182216	-492.813348587361
80	-213.355864614965	-305.553264941951	-305.130495905735
160	-115.333820216798	-172.254232998984	-172.122708110418
320	-60.0575688411446	-91.8158597195903	-91.7789594238840
640	-30.6579278126663	-47.4507698303976	-47.4409815626869

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041
Grafik solusi numerk:

- Metode Euler

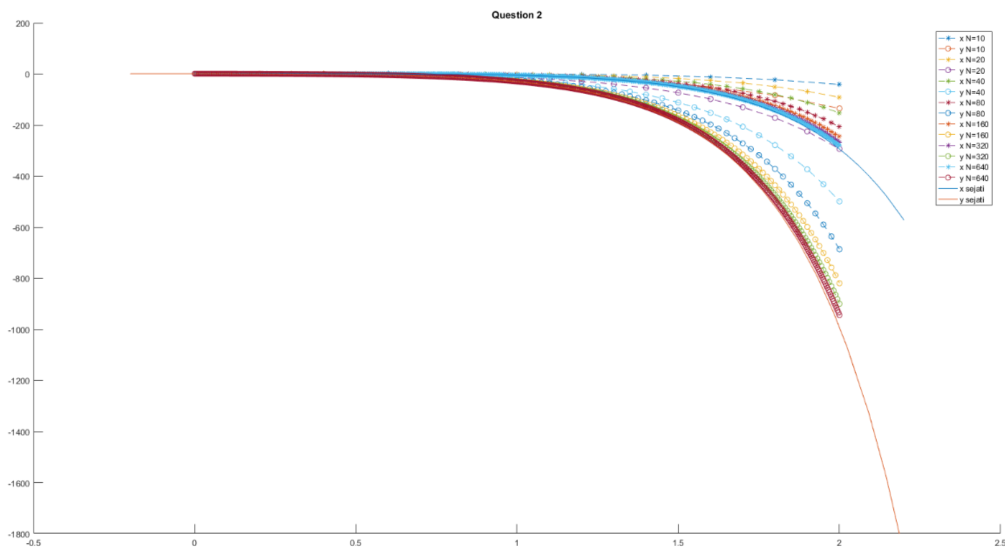


- Metode Runge-Kutta orde 2



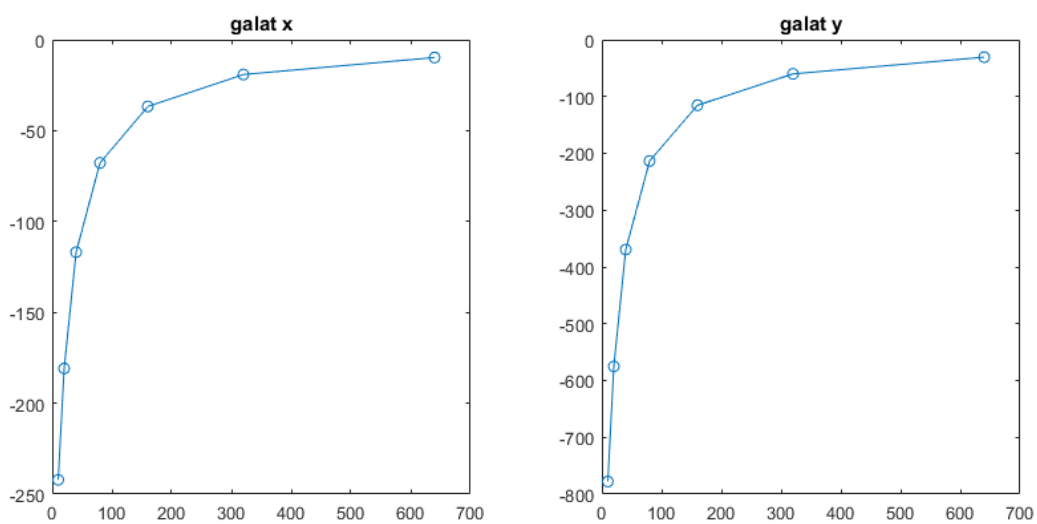
IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

- Metode Runge-Kutta orde 4



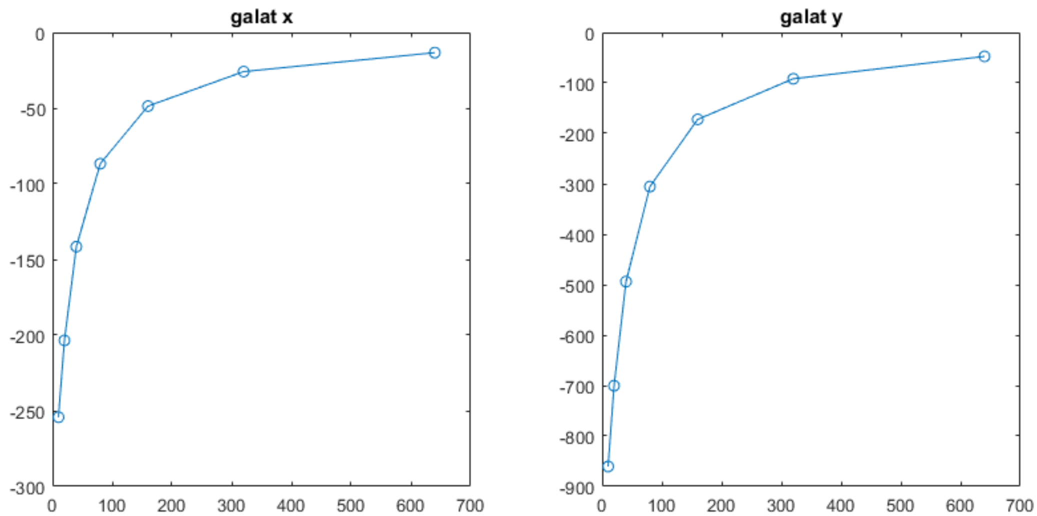
Grafik galat:

- Metode Euler

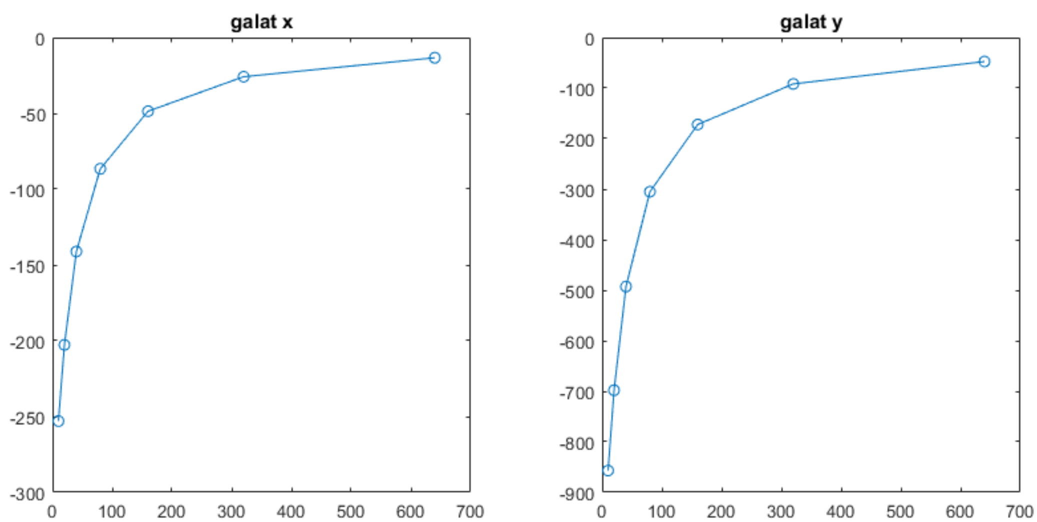


IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

- Metode Runge-Kutta orde 2



- Metode Runge-Kutta orde 4



Untuk permasalahan dengan persamaan diferensial di atas dengan dua persamaan, metode yang memiliki nilai galat paling rendah adalah metode Euler, berbeda dengan permasalahan sebelumnya yang hanya menggunakan satu persamaan saja. Sepertinya mungkin ada kesalahan pada implementasi karena mungkin ada salah dari pengertian saya dalam memahami penjelasan pada buku Metode Numerik. Namun jika jumlah iterasinya ditambahkan menjadi 81.920 maka hasil hampirannya baru mendekati dengan nilai sejatinya dengan nilai galat yang cukup kecil (< 0.01).

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

Lampiran

```
function [ y_euler ] = euler( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% y'=f(x,y); y(x0)=y0
% dengan metode Euler
    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    y(1) = y0;
    x(1) = x0;

    for r = 1:n
        y(r+1) = y(r) + h * f(x(r),y(r));
        x(r+1) = x(r) + h;
    end

    y_euler = y(n+1);
    plot(x, y, '--*');
end


function [ y_RK2 ] = RK2( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% y'=f(x,y); y(x0)=y0
% dengan metode Runge-Kutta orde 2

    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    x(1) = x0;
    y(1) = y0;

    for r = 1:n
        k1 = h * f(x(r),y(r));
        k2 = h * f(x(r) + h, y(r) + k1);
        y(r+1) = y(r) + (k1+k2)/2;
        x(r+1) = x(r) + h;
    end

    y_RK2 = y(n+1);
    plot(x, y, '-*');
end


function [ y_RK3 ] = RK3( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% y'=f(x,y); y(x0)=y0
% dengan metode Runge-Kutta orde 3
```

```
    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, uint8(n));
    y = zeros(1, uint8(n));
    x(1) = x0;
    y(1) = y0;

    for r = 1:n
        k1 = h * f(x(r),y(r));
        k2 = h * f(x(r) + h/2, y(r) + k1/2);
        k3 = h * f(x(r) + h, y(r) - k1 + 2*k2);
        y(r+1) = y(r) + (k1+4*k2+k3)/6;
        x(r+1) = x(r) + h;
    end

    y_RK3 = y(n+1);
%     plot(x, y, '-*');
end


function [ y_RK4 ] = RK4( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% y'=f(x,y); y(x0)=y0
% dengan metode Runge-Kutta orde 4

    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    x(1) = x0;
    y(1) = y0;

    for r = 1:n
        k1 = h * f(x(r),y(r));
        k2 = h * f(x(r) + h/2, y(r) + k1/2);
        k3 = h * f(x(r) + h/2, y(r) + k2/2);
        k4 = h * f(x(r) + h, y(r) + k3);
        y(r+1) = y(r) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;
        x(r+1) = x(r) + h;
    end

    y_RK4 = y(n+1);
    plot(x, y, '-*');
end


function [ y_ABM ] = ABM( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% dengan menggunakan metode Adams-Bashforth-Moulton

    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);

    x(1) = x0;
```

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

```
    y(1) = y0;

    x(2) = x0 + h;
    y(2) = RK3(x0, y0, x(2), h, f);

    x(3) = x0 + 2*h;
    y(3) = RK3(x0, y0, x(3), h, f);

    x(4) = x0 + 3*h;
    y(4) = RK3(x0, y0, x(4), h, f);

    for r = 4:n
        % predictor
        y(r+1) = y(r) + h/24*(-9*f(x(r)-3*h, y(r-3)) +...
            37*f(x(r)-2*h, y(r-2)) - 59*f(x(r)-h, y(r-1)) +...
            55*f(x(r), y(r)));

        % corrector
        y(r+1) = y(r) + h/24*(f(x(r)-2*h, y(r-2)) - 5*f(x(r)-h, y(r-1))
+...
            19*f(x(r), y(r)) + 9*f(x(r)+h, y(r+1)));

        x(r+1) = x(r) + h;
    end

    y_ABM = y(n+1);
    plot(x, y, '--*');
end



function [ y_implicit_euler ] = implicit_euler( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% y'=f(x,y); y(x0)=y0
% dengan metode backward euler

    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    x(1) = x0;
    y(1) = y0;

    for r = 1:n
        x(r+1) = x(r) + h;
        % ini mah backward
        % y_temp = y(i) + h * f(x(i), y(i)); % harusnya pake newton
rhapson
        % y(i+1) = y(i) + h * f(x(i+1), y_temp);

        % ini baru implicit
        y(r+1) = y(r) / (1 + (400*h));
    end
```

```
    y_implicit_euler = y(n+1);
    plot(x, y, '-*');
end

function [ y_IRK ] = implicit_runge_kutta( x0, y0, b, h, f )
% menghitung nilai y(b) pada PDB
% dengan menggunakan metode runge-kutta implicit
    n = (b-x0)/h;
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    y(1) = y0;
    x(1) = x0;

    for r = 1:n
        k1 = f(x(r), y(r));
        y(r+1) = (y(r) + h*k1) / (1 + 200*h);
        x(r+1) = x(r) + h;
    end

    y_IRK = y(n+1);
    plot(x, y, '--*');
end


function [ x_euler, y_euler ] = two_euler( t0, x0, y0, b, h, f1, f2 )
% menghitung nilai x(b) dan y(b) pada PDB
% x'=f(t,x,y); x(t0)=x0
% y'=f(t,x,y); y(t0)=y0
% dengan metode Euler
    n = (b-t0)/h;
    t = zeros(1, n);
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    t(1) = t0;
    y(1) = y0;
    x(1) = x0;

    for r = 1:n
        x(r+1) = x(r) + h * f1(t(r), x(r), y(r));
        y(r+1) = y(r) + h * f2(t(r), x(r), y(r));
        t(r+1) = t(r) + h;
    end

    x_euler = x(n+1);
    y_euler = y(n+1);
    plot(t, x, '--*');
    plot(t, y, '--o');
end


function [ x_RK2, y_RK2 ] = two_RK2( t0, x0, y0, b, h, f1, f2 )
% menghitung nilai x(b) dan y(b) pada PDB
% x'=f(t,x,y); x(t0)=x0
```

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

```
% y'=f(t,x,y); y(t0)=y0
% dengan metode Runge-Kutta orde 2
    n = (b-t0)/h;
    t = zeros(1, n);
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    t(1) = t0;
    y(1) = y0;
    x(1) = x0;

    for r = 1:n
        k1 = h * f1(t(r),x(r),y(r));
        k2 = h * f1(t(r) + h, x(r) + k1, y(r) + k1);
        x(r+1) = x(r) + (k1+k2)/2;

        k1 = h * f2(t(r),x(r),y(r));
        k2 = h * f2(t(r) + h, x(r) + k1, y(r)+ k1);
        y(r+1) = y(r) + (k1+k2)/2;

        t(r+1) = t(r) + h;
    end

    x_RK2 = x(n+1);
    y_RK2 = y(n+1);
    plot(t, x, '--*');
    plot(t, y, '--o');
end


function [ x_RK4, y_RK4 ] = two_RK4( t0, x0, y0, b, h, f1, f2 )
% menghitung nilai x(b) dan y(b) pada PDB
% x'=f(t,x,y); x(t0)=x0
% y'=f(t,x,y); y(t0)=y0
% dengan metode Runge-Kutta orde 2
    n = (b-t0)/h;
    t = zeros(1, n);
    x = zeros(1, n);
    y = zeros(1, n);
    t(1) = t0;
    y(1) = y0;
    x(1) = x0;

    for r = 1:n
        k1 = h * f1(t(r),x(r),y(r));
        k2 = h * f1(t(r) + h/2, x(r) + k1/2, y(r) + k1/2);
        k3 = h * f1(t(r) + h/2, x(r) + k2/2, y(r) + k2/2);
        k4 = h * f1(t(r) + h, x(r) + k3, y(r) + k3);
        x(r+1) = x(r) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;

        k1 = h * f2(t(r),x(r),y(r));
        k2 = h * f2(t(r) + h/2, x(r) + k1/2, y(r) + k1/2);
        k3 = h * f2(t(r) + h/2, x(r) + k2/2, y(r) + k2/2);
```

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

```
        k4 = h * f2(t(r) + h, x(r) + k3, y(r) + k3);
        y(r+1) = y(r) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4) / 6;

        t(r+1) = t(r) + h;
    end

    x_RK4 = x(n+1);
    y_RK4 = y(n+1);
    plot(t, x, '--*');
    plot(t, y, '--o');
end
```

IF5162 - Metode Numerik Lanjut
Tugas Kecil
Gugy Lucky Khamdani
23517041

Referensi

1. Munir, Rinaldi. 2003. Metode Numerik. Bandung: Penerbit Informatika.