实验名称：波耳共振仪

系别：工程物理系　　姓名：谷海桥　　学号：2017011878　　组别：46B

实验时间：2018 年 3 月 29 日

摘要

振动是自然界较普遍的运动形式之一，可分为简谐振动、阻尼振动和受迫振动，借助波耳共振仪可以研究阻尼振动和受迫振动的基本规律。本实验旨在学习测量振动系统基本参量的方法；研究波耳共振仪摆轮受迫振动的幅频特性和相频特性，观察现象，并观测不同粘滞阻尼情况对受迫振动的影响。实验测得了最小阻尼时摆轮振动的周期 T 与振幅 θ 的关系、各个阻尼档的阻尼比，绘制了受迫振动的幅频特性和相频特性曲线。

关键词：波耳共振仪　阻尼振动　阻尼比　受迫振动　幅频特性　相频特性

1　实验原理

1.1　有粘滞阻力的自由阻尼振动规律

在波耳共振仪中，摆轮与弹簧组成了一个扭转振动系统，我们设摆轮转动惯量为 J，弹簧劲度系数为 k，可得阻尼为零时的运动方程：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + k\theta = 0$$

如果转振系统只具有粘滞阻力矩，可得转角 θ 的运动方程：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k\theta = 0$$

记 ω_0 为无阻尼时自由振动的固有角频率，其值为:

$$\omega_0 = \sqrt{k/J}$$

定义临界阻尼系数 $\gamma_c = 2\sqrt{kJ} = 2J\omega_0$, 定义阻尼比 ξ 为阻尼力矩系数 γ 与 γ_c 之比

$$\xi \equiv \frac{\gamma}{\gamma_c} = \frac{\gamma}{2\sqrt{kJ}}$$

运动方程可改写为：

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}+2\xi\omega_0\frac{d\theta}{dt}+\omega_0^2\theta=0$$

当 ξ=1 或 ξ>1 时，分别为临界阻尼状态或过阻尼状态，系统不会发生震荡性运动，只有当 ξ<1 时才会产生震荡运动。当 ξ<1 时，自由阻尼振动运动方程的解为

$$\theta(t)=\theta_i e^{-\xi\omega_0 t}cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t+\varphi_i)$$

$\xi\neq 0$ 时上式是一个振幅不断衰减的振动。阻尼振动周期为：

$$T_d=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}\omega_0}=\frac{T_0}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

1.2 描述阻尼运动的常用参量

对数缩减与阻尼比之间的关系式：

$$\Lambda=\delta T_d=\frac{T_d}{\tau}=\frac{2\pi\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

时间常数：

$$\tau=2J/\gamma=(\xi\omega_0)^{-1}$$

品质因素：

$$Q\equiv 1/(2\xi)$$

1.3 周期外力矩作用下的受迫振动

在周期外力矩 Mcosωt 激励下的运动方程及其通解分别为：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2}+\gamma\frac{d\theta}{dt}+k\theta=Mcos\omega t$$

$$\theta(t)=\theta_i e^{-\xi\omega_0 t}cos(\sqrt{1-\xi^2}\omega_0 t+\varphi_i)+\theta_m cos(\omega t-\varphi)$$

通解可看作阻尼振动和频率同激励源的简谐振动的叠加。阻尼振动项表示一定初始条件后的过渡过程，t$\to\infty$ 则该项为 0。t$\gg\tau$=$(\xi\omega_0)^{-1}$ 如 t>5τ 后，就有稳态解

$$\theta(t)=\theta_m cos(\omega t-\varphi)$$

稳态解的振幅和相位差分别为

$$\theta_m=\frac{M/k}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+(2\xi\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\varphi=arctan\frac{2\xi(\omega/\omega_0)}{1-\omega^2/\omega_0^2}$$

其中相位差 φ 的取值范围为 0<φ<π, 反应摆轮振动总使滞后于激励源的振动。

1.4 弹簧支座角位置 α 周期性变化

当连杆 E 的长度和摇杆 M 的长度远大于偏心轮偏心半径 r 时，若偏心轮的电机以角速度 ω 匀速旋转，弹簧 B 的支座的偏转角的一阶近似式可以写成

$$\alpha(t) = \alpha_m cos\omega t = \frac{r}{R} cos\omega t$$

式中 α 是摇杆振幅，R 是连杆 E 于摇杆 M 的接点到转轴中心的距离。

1.5 支座运动时的受迫振动运动方程及解

将运动支座看成激励源，可写出弹簧总转角为 $\theta - \alpha(t) = \theta - \alpha_m cos\omega t$，从而可得固定坐标系中转角 θ 的运动方程为：

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k(\theta - \alpha_m cos\omega t) = 0$$

可改写为

$$J\frac{d^2\theta}{dt^2} + \gamma\frac{d\theta}{dt} + k\theta = k\alpha_m cos\omega t$$

其稳态解的振幅和相位差可表示为：

$$\theta_m = \frac{\alpha_m}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2 + (2\xi\omega/\omega_0)^2}}$$

$$\varphi = arctan\frac{2\xi(\omega/\omega_0)}{1-\omega^2/\omega_0^2}$$

于是可画出幅频、相频特性曲线，并分析曲线从而深入了解受迫振动的规律

2 实验仪器及实验步骤

2.1 实验仪器

本实验所用的仪器为波耳共振仪，结构如图所示

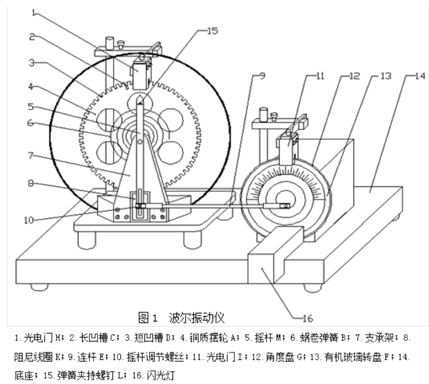


图 1: 波耳共振仪实验装置

振动系统装有光电门通过测定缺口移动的个数来记录振动的幅度与周期，激励装置也有光电门，测定振动周期，我们可以通过调节仪器选择是否打开电机，或者改变其振动周期，并在仪器面板相应位置将其读出，，还可通过调节旋钮改变阻尼大小，通过闪光灯的闪光读取有机玻璃上对应的相位角，完成实验数据的测量。

2.2 实验步骤

2.2.1 练习 1 最小阻尼时测量摆轮振动周期 T 与振幅 θ 的关系

将阻尼开关置于最小阻尼档，打开电源开关，关掉电机和闪光灯开关，将仪器的周期选择档置于“10”位置，调节有机玻璃转盘上的 0 标志线指向 0 度，然后用手拨动摆轮使它偏离平衡位置一个大的起始角（大于 120° 小于 180°），松开手后，每按一次复位键启动周期测量，就能读取 10 个周期的平均值，并记下这 10 个周期对应的首尾两次振幅值。

2.2.2 练习 2 测量最小阻尼比

将周期选择档置于“1”位置，准备过程同练习 1，然后用手拨动摆轮使它偏离平衡位置一个大的起始角，松手后对每 k 个周期读取一次振幅值 $\theta_j = \theta_1, \theta_2, ..., \theta_n$，要求 $\theta_{1max} > 120$，连测十个 θ_j。

要求：

1. 求出对数缩减 Λ，进而求阻尼比 ξ，直线拟合用最小二乘法。

2. 写明步骤计算不确定度 U_Λ 和 U_ξ，并计算出 τ 和 Q

3. 求 $\omega_{0j} = 2\pi/(T_{dj}\sqrt{1-\xi^2})$, 得 $\bar{\theta_j}$ 和 ω_{0j} 的关系

2.3 练习 3 测量其他阻尼档的阻尼比 ξ 等参数

再选 5、4、3 档中 2 到 3 种阻尼状态，测量振幅衰减以求 Λ，要求同练习 2。

2.4 练习 4 测定受迫振动的幅频特性和相频特性曲线

保持练习 3 所置阻尼状态不变，开启电机开关，调节强迫激励周期旋钮以改变 ω，当振动稳定后，读出摆轮的振幅与两者之间的相位差，其中相位差通过闪光灯读取，在 90 两位差两侧分别记录 8-9 组数据，并将测得的相位差与振幅和理论值比较、拟合，最后做出幅频特性曲线和相频特性曲线

3 数据处理

3.1 练习 1

原始数据		1	2	3	4	5	6
	θ_1	174	161	149	146	137	121
	θ_{10}	100	110	130	118	128	94
	10T	15.150	15.144	15.135	15.141	15.386	15.153

数据处理		1	2	3	4	5	6
	θ_{avg}	137	135.5	139.5	132	132.5	107.5
	T	1.515	1.5144	1.5135	1.5141	1.5386	1.5153
	ω	4.147317	4.148960	4.151427	4.149782	4.083703	4.146496

初步可得固有频率 $\omega_0 = 4.137948$。

3.2 练习 2

原始数据		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	θ	171	135	129	125	120	115	111	107	103	99

利用公式：$b_1 = -K\Lambda = -K\xi\omega 0 T_d = \frac{-2K\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}\xi\omega_0 = -2K\pi(\xi^{-2}-1)^{-0.5}$

最小二乘法拟合 $\ln\theta_i$ 与 i 得出 $b_1 = -0.049257818, \quad s_{b_1} = 0.006346937$

其中 K=5, 进而求出

$\Lambda = -\frac{b_1}{K} = -\frac{-0.049257818}{5} = 0.0098515636$

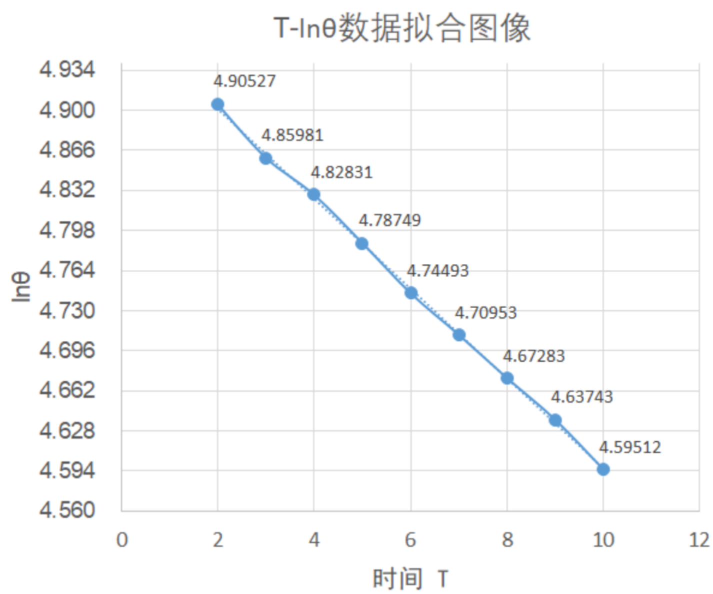
$\xi = [(\frac{b_1}{-2K\pi})^{-2}+1]^{-0.5} = [(\frac{-0.049257818}{-2*5\pi})^{-2}+1]^{-0.5} = 0.00156792$

$U_\Lambda = -\frac{1}{K}U_{b_1}\Lambda = -\frac{1}{K}t(p,v)s_{b_1}\Lambda = -\frac{1}{5}*2.26216*0.006346937*0.0098515636 = -2.828975*10^{-5}$

$U_\xi = \frac{4\pi^2}{4\pi^2+\Lambda^2}U_\Lambda\xi = \frac{4\pi^2}{4\pi^2+0.0098515636^2}*-2.828975*10^{-5}*0.00156792 = -4.434499884*10^{-8}$

$\tau = \frac{1}{\omega_0 \xi} = \frac{1}{4.137948*0.00156792} = 154.1313816$

$Q = \frac{1}{2\xi} = \frac{1}{2*0.00156792} = 318.8938211$



数据处理		1	2	3	4	5	6
	θ	137	135.5	139.5	132	132.5	107.5
	ω_{0j}	4.147317	4.148960	4.151427	4.149782	4.0833703	4.146496
	ω_0	4.147322	4.148965	4.151432	4.149787	4.083708	4.146501

利用 $\omega_{0j} = 2\pi/(T_{dj}\sqrt{1-\xi^2})$ 可求出 ω_{0j}, 对比可得 ω_{0j} 与 ω_0 几乎没有差别

3.3 练习 3

原始数据	阻尼 2(K=2)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	θ	157	119	99	81	67	55	45	37	30	25	20
	阻尼 4(K=1)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	θ	149	119	101	86	73	62	53	45	37	32	27

3.3.1 对于阻尼比为 2

最小二乘法拟合 $\ln\theta_i$ 与 i 得出 $b_{1_2} = -0.200821818, \quad s_{b_{1_2}} = 0.01945217$

其中 K=2, 进而求出

$\Lambda_2 = -\frac{b_{1_2}}{K} = -\frac{-0.200821818}{5} = 0.0401643636$

$\xi_2 = [(\frac{b_{1_2}}{-2K\pi})^{-2} + 1]^{-0.5} = [(\frac{-0.200821818}{-2*2\pi})^{-2} + 1]^{-0.5} = 0.01597885$

$U_{\Lambda 2} = -\frac{1}{K}U_{b_{1_2}}\Lambda_2 = -\frac{1}{K}t(p,v)s_{b_{1_2}}\Lambda_2 = -\frac{1}{2}*2.228138852*0.01945217*0.0401643636 = -0.0008704046495$

$U_{\xi 2} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2+\Lambda_2^2}U_{\Lambda 2}\xi_2 = \frac{4\pi^2}{4\pi^2+0.0401643636^2} * -0.0008704046495 * 0.01597885 = -1.390749704 * 10^{-5}$

$\tau_2 = \frac{1}{\omega_0 \xi_2} = \frac{1}{4.137948*0.01597885} = 15.12409691$

$Q_2 = \frac{1}{2\xi_2} = \frac{1}{2*0.01597885} = 31.29136327$

3.3.2 对于阻尼比为 4

最小二乘法拟合 $\ln\theta_i$ 与 i 得出 $b_{1_4} = -0.167474545, \quad s_{b_{1_4}} = 0.001664623$

其中 K=1, 进而求出

$\Lambda_4 = -\frac{b_{1_4}}{K} = -\frac{-0.167474545}{1} = 0.167474545$

$\xi_4 = [(\frac{b_{1_4}}{-2K\pi})^{-2}+1]^{-0.5} = [(\frac{-0.167474545}{-2*1\pi})^{-2}+1]^{-0.5} = 0.026644938$

$U_{\Lambda 4} = -\frac{1}{K}U_{b_{1_4}}\Lambda_4 = -\frac{1}{K}t(p,v)s_{b_{1_4}}\Lambda_4 = -2.228138852 * 0.001664623 * 0.167474545 = -6.2116496 * 10^{-4}$

$U_{\xi 4} = \frac{4\pi^2}{4\pi^2+\Lambda_4^2}U_{\Lambda 4}\xi_4 = \frac{4\pi^2}{4\pi^2+0.167474545^2} * -6.211649598 * 10^{-4} * 0.026644938 = -1.653915148 * 10^{-5}$

$\tau_4 = \frac{1}{\omega_0 \xi_4} = \frac{1}{4.137948*0.026644938} = 9.069853187$

$Q_4 = \frac{1}{2\xi_4} = \frac{1}{2*0.026644938} = 18.76529043$

3.4 练习 4

	阻尼 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
原始数据	θ	43	51	59	74	94	110	126	136	136
	T	1.588	1.574	1.566	1.553	1.540	1.532	1.524	1.5135	1.5155
	φ	18	23	25	33	43.5	53.5	66.5	90	86
		10	11	12	13	14	15	16	17	18
	θ	137	136	135	133	101	66	47	34	27
	T	1.514	1.515	1.518	1.509	1.496	1.477	1.459	1.436	1.415
	φ	89	87.5	80	103	131.5	149.5	158.5	163	165.5

	阻尼 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9
原始数据	θ	51	55	40	47	67	75	78	79	79
	T	1.566	1.558	1.587	1.573	1.543	1.5325	1.523	1.5165	1.5155
	φ	38	42.5	29	34	56	67	80	90	91
		10	11	12	13	14	15	16	17	18
	θ	77	67	58	49	43	37	31	28	24
	T	1.509	1.492	1.482	1.471	1.461	1.449	1.434	1.424	1.411
	φ	100	122	132	140	145	150	154	156	158

1) 由 $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}(\varphi = 90)$ 可得 $\omega_0 = 4.1514274$, 与练习 1 略有差别

2) 利用 $\varphi_0 = arctan\frac{2\xi(\omega/\omega_0)}{1-\omega^2/\omega_0^2}$ 逐点计算偏差

阻尼 2	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	18	23	25	33	43.5	53.5	66.5	90	86
φ_0	19.6244	23.9634	27.3802	35.3652	43.5625	55.8906	67.0939	88.2167	86.8928
$\Delta\varphi$	1.6244	0.9634	2.3802	2.3652	0.0625	2.3906	0.5939	-1.7833	0.8928
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
φ	89	87.5	80	103	131.5	149.5	158.5	163	165.5
φ_0	90.3626	88.0560	81.0159	101.3000	132.9658	149.9923	158.1933	164.0325	167.2482
$\Delta\varphi$	1.3626	0.5560	1.0159	-2.3000	1.4658	0.4923	-0.3067	1.0325	1.7482

阻尼 4	1	2	3	4	5	6	7	8	9
φ	38	42.5	29	34	56	67	80	90	91
φ_0	37.3802	41.8424	29.8827	34.3452	54.8687	65.0051	79.3491	90.4486	91.8928
$\Delta\varphi$	-0.6198	-0.6576	0.8827	1.3452	-1.1313	-1.9949	-0.6509	0.4486	0.8928
	10	11	12	13	14	15	16	17	18
φ	100	122	132	140	145	150	154	156	158
φ_0	101.3000	125.6999	132.6583	143.2779	147.4943	151.1563	154.4028	156.0343	157.7258
$\Delta\varphi$	1.3000	0.6999	0.6583	3.2779	2.4943	1.1563	0.4028	0.0343	-0.2742

3) 计算 $\theta_m = \frac{\alpha_m}{\sqrt{(1-\omega^2/\omega_0^2)^2+(2\xi\omega/\omega_0)^2}}$ 并绘图

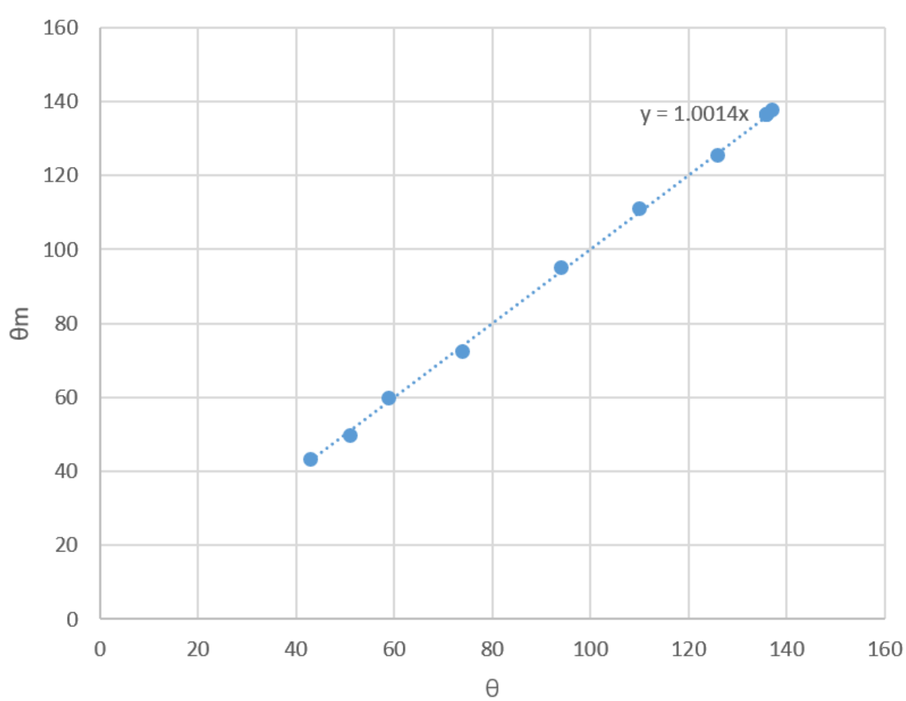


图 2: 阻尼 2

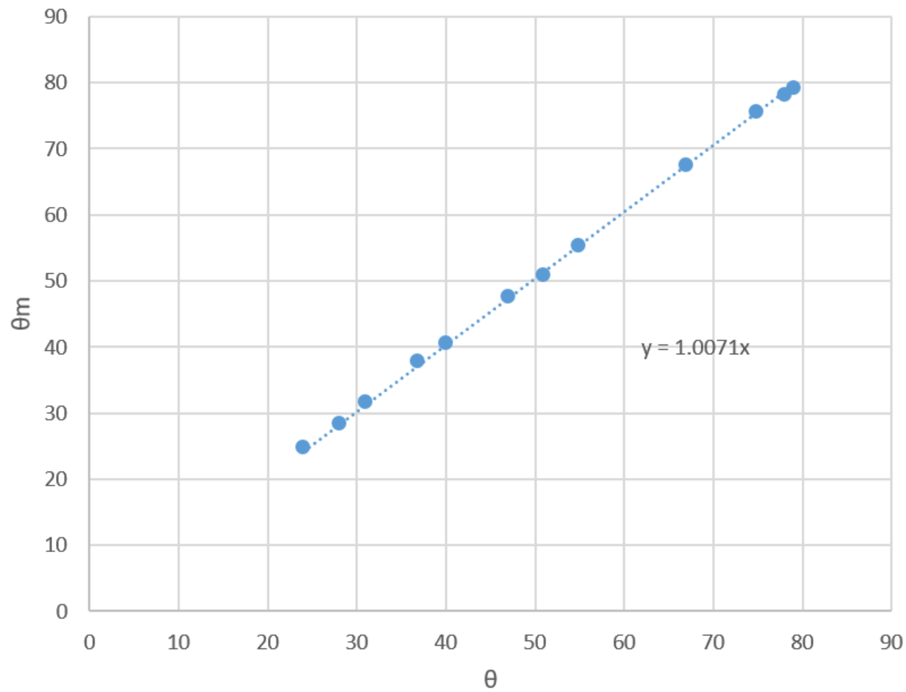
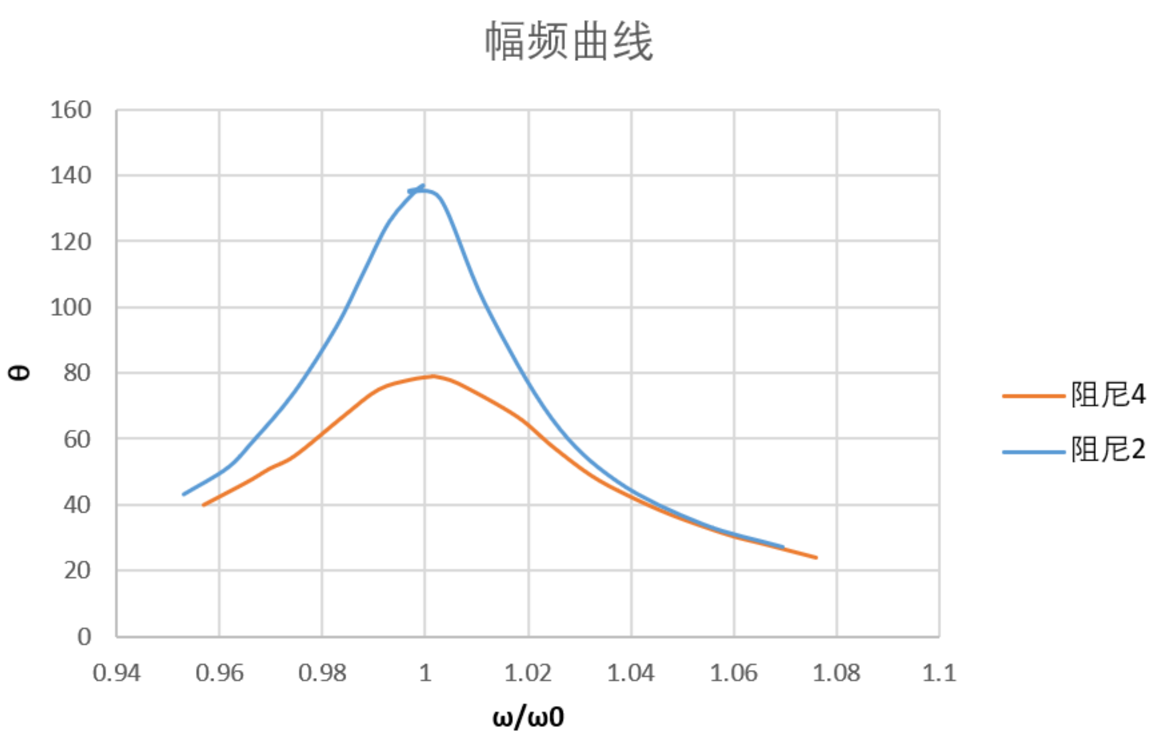
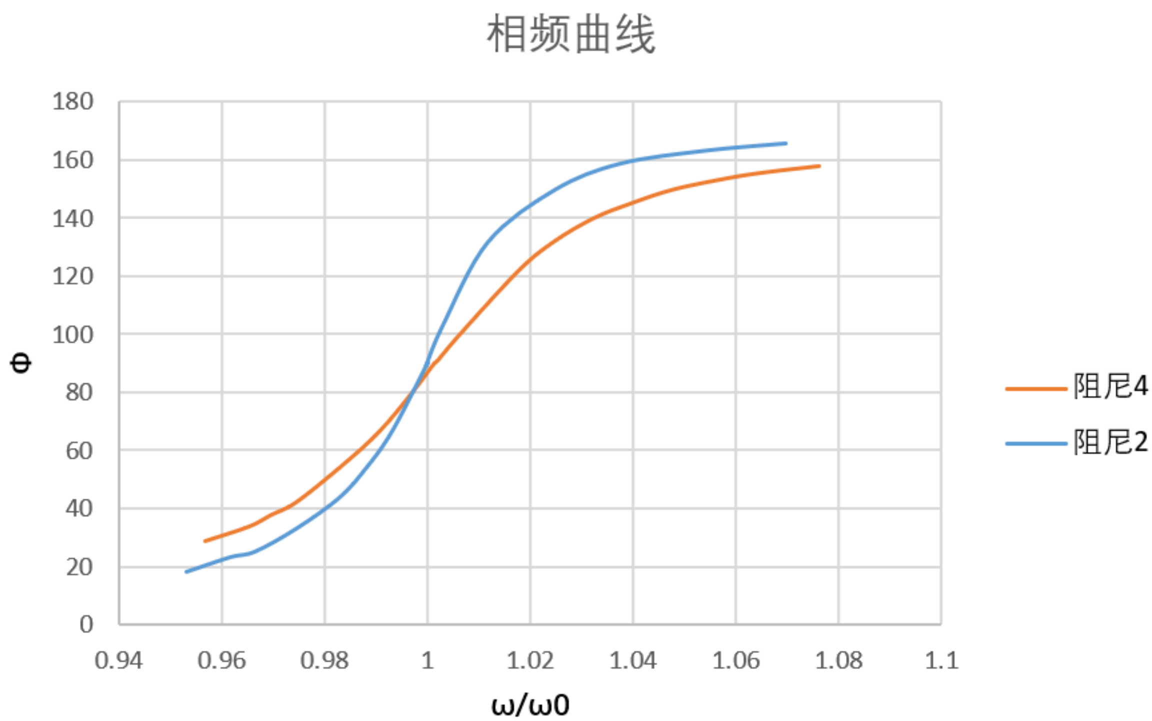


图 3: 阻尼 4

4) 绘制幅频、相频曲线





4 讨论

本实验易于操作，但数据繁杂，处理起来很不方便，记录原始数据之前，最好事先设计表格，便于记录实验数据。处理结果与预期基本符合，但绘制曲线时发现图像对称轴并不在中心位置，是由于对称轴右侧数据多于左侧，要注意选点均匀，并在 90 附近多测几组数据。寻找 90 相位差时，可依据练习 1 的结果调节周期，方便寻找。改变阻尼时，由于剩磁会对实验影响，应连续完成练习 3 和 4 再改变阻尼状态。同样，闪光灯的开启也需要注意，因为有时候闪光会对振幅与周期测量产生干扰。