Avaliação de Desempenho

Propriedades das variáveis aleatórias exponenciais

Distribuição Gama

- Função de densidade
  - Uma variável aleatória X tem distribuição gama com parâmetros (α, β), $\alpha > 0$, $\beta > 0$, se sua função de densidade de probabilidade é dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta e^{-\beta x} (\beta x)^{\beta - 1}}{\Gamma(\alpha)} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

onde

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty \beta e^{-\lambda x} (\beta x)^{\alpha - 1} dx$$

É possível demonstrar que:

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha - 1)\Gamma(\alpha - 1)$$

Distribuição Gama

- Quando $\alpha = 1$
  - A distribuição gama reduz-se à distribuição exponencial com média $1/\lambda$
- Quando $\alpha = N$ (inteiro)
  - A distribuição gama reduz-se à distribuição de Erlang com parâmetros (N, L)

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{Le^{-Lx}(Lx)^{N-1}}{\Gamma(N)} = \dfrac{L^N x^{N-1}}{(N-1)!} e^{-Lx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} e^{-Lx} \frac{(Lx)^j}{j!}$$

Distribuição Gama

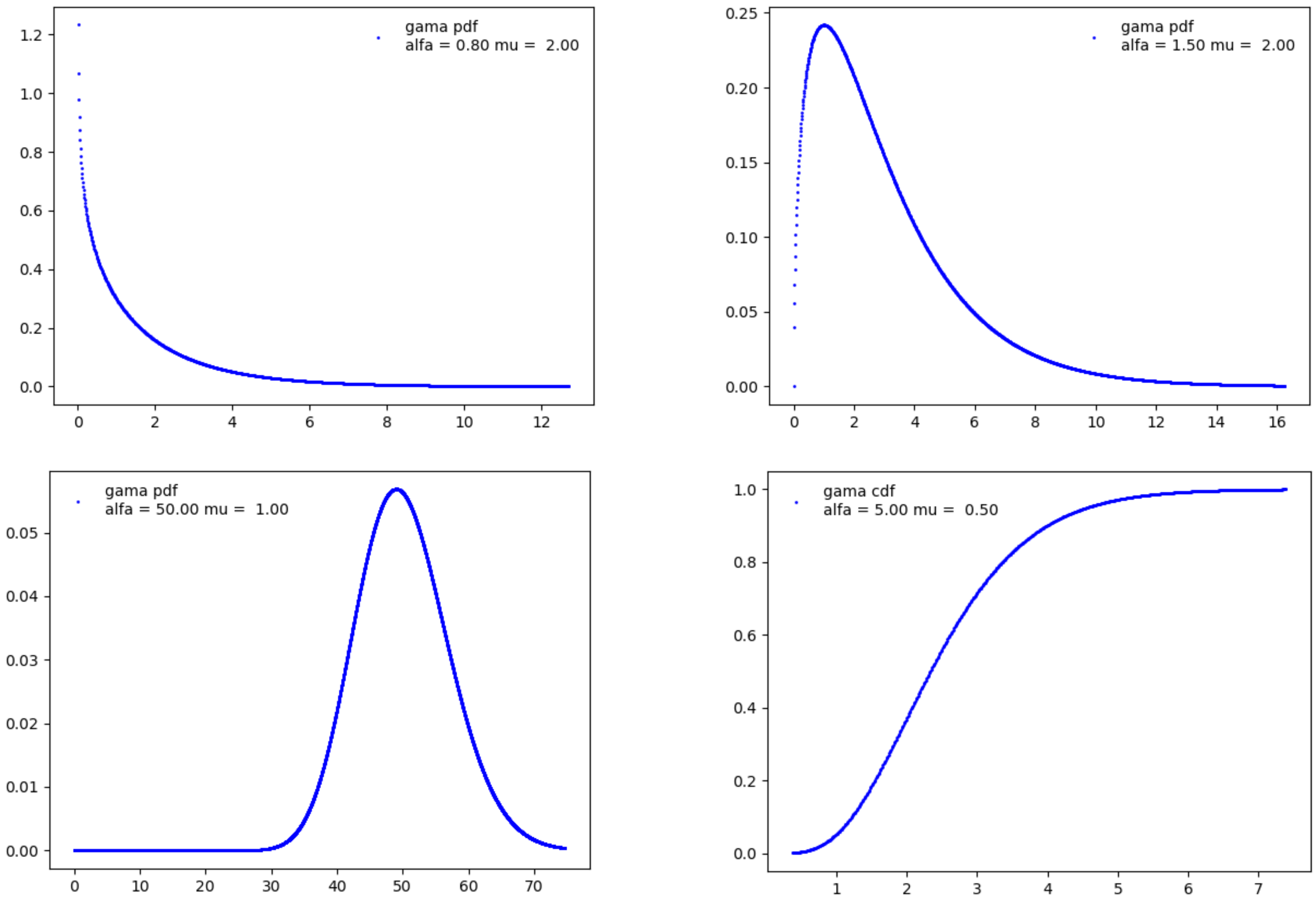
- Valor esperado

$$E[X] = \frac{\alpha}{\lambda}$$

- Variância

$$V[X] = \frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Distribuicão Gamma



Distribuição Gamma

- No Scipy
  - mu = 1/lambda
  - import scipy.stats as st
  - st.gamma.pdf(x, a=alfa, scale=mu)
  - st.gamma.cdf(x, a=alfa, scale=mu)
  - st.gamma.ppf(0.999, a=alfa, scale=mu)
  - st.gamma.rvs(a=alfa, scale=mu, size=10)

Soma de *N* exponenciais

- **Soma de *N* variáveis aleatórias exponenciais independentes**

$$f_{X_1+\cdots X_N}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} \dfrac{(\lambda x)^{N-1}}{(N-1)!} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

Esta é função de densidade de probabilidade da função gama com parâmetros $\alpha = N$ (inteiro) e λ

$$F_X(x) = 1 - \sum_{j=0}^{N-1} e^{-\lambda t} \frac{(\lambda x)^j}{j!}$$

Média $= \dfrac{N}{\lambda}$

Variância $= \dfrac{N}{\lambda^2}$

Exemplo 1

- O tempo que um caixa de banco leva para atender um cliente seja uma variável aleatória exponencial com média = 4 minutos. O caixa está ocupado com um cliente e você é o próximo na fila. Qual é a probabilidade que leve mais do que 12 minutos até você terminar de ser atendido?
  - Seja X a VA que calcula o tempo que você vai levar até ser atendido
  - X é a soma de duas exponenciais com média = 4
  - X tem distribuição gama com $N = 2$ e $\lambda = 1/4$
  - $P[X > 12]$ = 1 - st.gamma.cdf(12, a=2, scale=4) = 0,1991

Probabilidade de uma exponencial ser menor do que outra

- Sejam X_1 e X_2 variáveis aleatórias exponenciais independentes com média $1/\lambda_1$ e $1/\lambda_2$, então

$$P[X_1 < X_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

Exemplo 2

- Suponha que um sistema seja constituído de duas partes, o amplificador e o leitor de CDs. Se o tempo de vida do amplificador é exponencial com média igual a 1000 horas e o tempo de vida do leitor de CDs é exponencial com tempo de vida igual a 500 horas, qual a probabilidade de que a falha do sistema, quando ela ocorrer, seja causada pelo amplificador?

X_1 = tempo de vida do amplificador = exponencial com média = 1000
($\lambda 1 = 1/1000$)

X_2 = tempo de vida do leitor de CDs = exponencial com média = 500
($\lambda 2 = 1/500$)

$$P[X_1 < X_2] = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2} = \frac{1/1000}{1/1000 + 1/500} = \frac{1}{3}$$

Ausência de memória

- $P[X > s{+}t \mid X > t] = P[X > s]$, para todo s, $t \geq 0$

Exemplo 3

- O tempo de vida de um rádio é exponencialmente distribuído com média de 10 anos. Se João comprar um rádio de 10 anos, qual a probabilidade de ele funcionar por mais 10 anos?
- $1/\lambda = 10, \qquad \lambda = 1/10$
- Seja X uma variável aleatória que representa o tempo de vida do rádio.
- $P[X > 10 \mid X = 10] = P[X > 10]$
- $P[X > 10]$ = 1 - st.expon.cdf(10, 0, 10) = 0.3679

Avaliação de Desempenho

Propriedades das variáveis
aleatórias exponenciais