Conjuntos

Relações

Aula 2

Gregory Moro Puppi Wanderley

Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)

Bacharelado em Ciência da Computação – 3º Período

gregory.puppi@pucpr.br

Conjuntos (Aula Anterior)

- *Estrutura discreta* mais fundamental.
  - Estruturas discretas são utilizadas para representar objetos discretos.

- São usados para agrupar objetos, **normalmente** com alguma propriedade semelhante.
  - Ex.: Os estudantes de Ciência da Computação formam um conjunto.
  - Ex.: O conjunto formado pelas cidades do Brasil que são capitais.
  - Ex.: Os jogos de RPG (Role-Playing Game) formam um conjunto.

Conjuntos (Aula Anterior)

- Definição
  - **"***Um conjunto é uma coleção,* ***sem*** *repetições e* ***sem*** *qualquer ordenação, de zero ou mais objetos denominados elementos".*
    - Elemento: objeto concreto ou abstrato.

Conjuntos (Aula Anterior)

- Notação por extensão (enumerando todos os elementos)
  - $A = \{0, 1, 2, 3\}$
    - representa o conjunto *A* com seus quatro elementos 0, 1, 2 e 3.
  - $B = \{0, 1\}$
    - representa o conjunto *B* composto pelos algarismos que formam os números binários.
  - Vogais = {a, e, i, o, u}
    - representa o conjunto *Vogais* com seus elementos sendo todas as vogais.

Conjuntos (Aula Anterior)

- Notação pela(s) propriedade(s) dos elementos
  - $S = \{x \mid P(x)\}$
    - todo o elemento de *S* tem a propriedade *P* e tudo o que tem a propriedade *P* é um elemento de *S*.
    - Ex.: Ímpares = $\{x \mid x$ é um número ímpar$\}$
    - Ex.: $A = \{x \mid x$ é par e $x < 6\}$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Pertinência
  - Se x é um elemento do conjunto A, então x pertence a A.
    - Notação: $x \in A$
    - Ex.: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $0 \in A$
  - Se x não é um elemento de A, então x não pertence a A.
    - Notação: $x \notin A$
    - Ex.: $A = \{0, 1, 2, 3\}$, $8 \notin A$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Conjuntos importantes ("padrões")
  - Conjunto Vazio: $\varnothing$ ou $\{\ \}$
    - Não possui elementos.

  - Conjunto Unitário:
    - Conjunto constituído por um único elemento.
      - Ex.: $A = \{x \mid x > 0 \text{ e } x < 2\}$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Conjuntos numéricos ("padrões")
  - $\mathbf{N}$ (Conjunto dos números naturais, {0, 1, 2, 3, …})
  - $\mathbf{Z}$ (Conjunto dos números inteiros {…, -2, -1, 0, 1, 2, …})
  - $\mathbf{Q}$ (Conjunto dos números racionais {…, -7/11, …, 1/3, …})
  - $\mathbf{I}$ (Conjunto dos números irracionais {…, $1+i\sqrt{3}$, …})
  - $\mathbf{R}$ (Conjuntos dos números reais {…, -1,33, …, 9,41, …})

Conjuntos (Aula Anterior)

- Conjuntos finitos e infinitos
  - **Conjunto finito**: pode ser denotado enumerando todos os seus elementos (extensão).
    - Ex.: $\varnothing$
    - Ex.: $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
    - Ex.: $S = \{x \mid x$ é cachorro$\}$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Conjuntos finitos e infinitos
  - **Conjunto infinito**: não é possível enumerar todos os seus elementos por extensão.
    - Ex.: $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$
    - Ex.: $\mathbf{N} = \{x \mid x \geq 0\}$
    - Ex.: Ímpares = $\{y \mid y = 2x + 1 \text{ e } x \in \mathbf{Z}\}$

Cardinalidade (Aula Anterior)

- A cardinalidade de um conjunto A (i.e., |A|) é o número de elementos de A.
  - Ex.: Se A = {1,8, 91, 15}, então |A| = 4.
  - Ex.: Se A = $\emptyset$, então |A| = 0.
  - Ex.: $|\mathbb{N}| = \infty$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Subconjuntos
  - A é dito um subconjunto de B se todo elemento de A é também elemento de B.

  - **Notação**: $A \subseteq B$ (A é um subconjunto de B, ou A está **contido** em B)
    - *Ou*, $B \supseteq A$ (B contém A)
      - Ex.: A = {3, 7} e B = {1, 2, 3, 5, 7, 8}

    - Analogamente, $A \not\subseteq B$ (A não está contido em B)
      - Ex.: A = {a, b, c} e B = {a, b, j, l, m}

Conjunto Potência (Aula Anterior)

- Seja A um conjunto, o conjunto potência ou conjunto das partes de A, **P(A)**, é o conjunto cujos elementos são todas as partes de A.
  - Ex.: A = {1, 2}
    - P(A) = {$\varnothing$, {1}, {2}, {1, 2}}

  - Se A é finito, então P(A) é finito contendo $\mathbf{2^n}$ elementos.
    - Ex.: A = {1}
      - P(A) = 2^1 elementos = {$\varnothing$, {1}}

Conjuntos (Aula Anterior)

- Conjunto universo ($\mathbf{U}$)
  - Contém todos os conjuntos considerados no contexto em questão.
  - Definido $\mathbf{U}$, para qualquer outro conjunto A:
    - $A \subseteq \mathbf{U}$
  - Ex.: Conjunto $\mathbf{N}$ como base num dado contexto, $\mathbf{U} = \mathbf{N}$
    - Então, outros conjuntos podem ser derivados:
      - ex.: conjunto dos Pares = $\{y \mid y = 2x \text{ e } x \in \mathbf{N}\}$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Igualdade de conjuntos
  - Dois conjuntos A e B são iguais ($A = B$) se, e somente se, todo o elemento de A pertencer a B e todo o elemento de B pertencer a A.
    - $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$
      - Ex.: Se $A = \{1, 2, 4, 7\}$ e $B = \{4, 7, 2, 1\}$, então $A = B$
      - Ex.: Se $A = \{1, 5, 3\}$ e $B = \{1, 3, 5\}$, então $A = B$

Conjuntos (Aula Anterior)

- Subconjunto vs. Pertinência
  - Distinguir entre subconjunto (contido) e pertinência.
  - Dado o conjunto A = {3, 4, 5, ∅, {a}, {b, c}}
    - $\{4\} \notin A$
    - $\emptyset \in A$
    - $\{a\} \in A$
    - $\{b, c\} \in A$
    - $\{1, 2, 3\} \notin A$
    - $\emptyset \subseteq A$
    - $\{3\} \subseteq A$
    - $\{3, 4, 5\} \subseteq A$

União (Aula Anterior)

- A união de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos x, tais que $x \in A$ **ou** $x \in B$.
  - $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$
    - Ex.: $A = \{a, b, e\}$, $B = \{b, c, d\}$
      - $A \cup B = \{a, b, c, d, e\}$
    - Ex.: $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$, $B = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$
      - $A \cup B = \mathbf{N}$

Interseção (Aula Anterior)

- A interseção de dois conjuntos A e B é o conjunto de todos os elementos x, tais que $x \in A$ **e** $x \in B$.
  - $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
    - Ex.: A = {1, 2}, B = {2, 3, 4, 5}, C = {4, 5}
      - $A \cap B = \{2\}$
      - $A \cap C = \varnothing$ (A e C são ditos **disjuntos**)
      - $B \cap C = \{4, 5\}$
      - $A \cap A = \{1, 2\} = A$

Complemento (Aula Anterior)

- Seja A uma parte de $\mathbf{U}$ (conjunto universo).
  - O complemento de A em relação a $\mathbf{U}$, dito $\mathbf{U} \setminus A$ ou A^c, é formado por todos os elementos x de $\mathbf{U}$, tais que $x \notin A$.
    - $\mathbf{U} \setminus A = A^C = \{x \in \mathbf{U} \mid x \notin A\}$
    - Ex.: $\mathbf{U} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{2, 3\}$
      - $A^c = \{1, 4, 5\}$
    - Ex.: $\mathbf{U} = \mathbf{N}$, $A = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é ímpar}\}$
      - $A^c = \{x \in \mathbf{N} \mid x \text{ é par}\}$

Diferença (Aula Anterior)

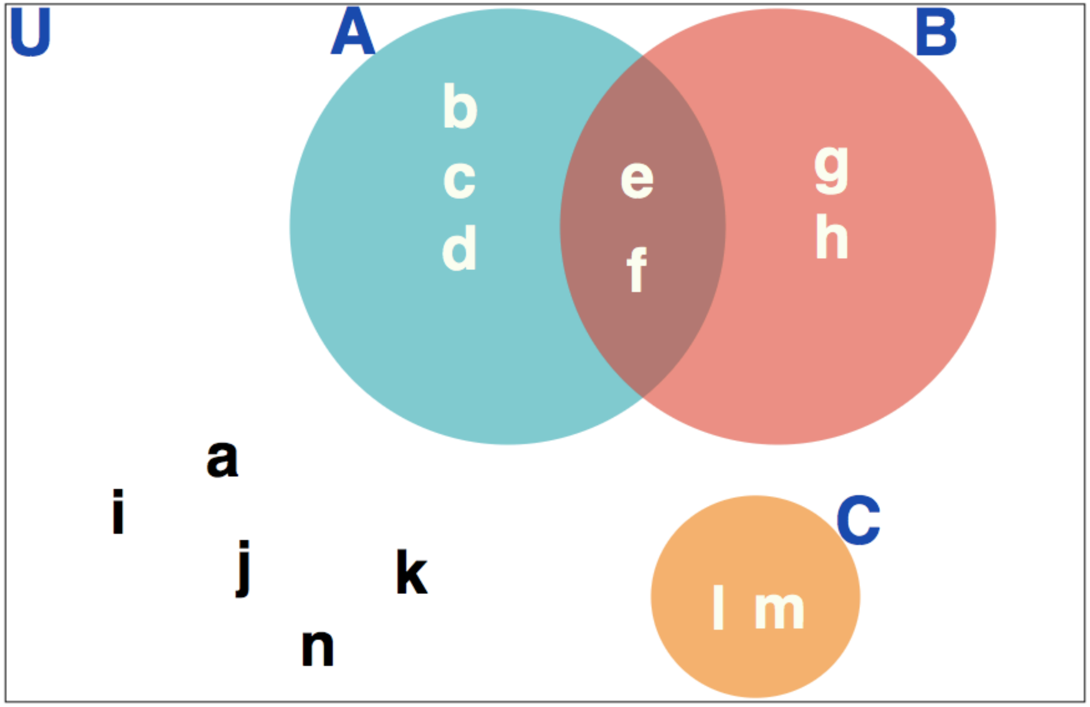
- Sejam A e B duas partes de $\mathbf{U}$ (conjunto universo).
  - A diferença entre A e B, dito A – B, é o conjunto dos elementos x tais que $x \in A$ e $x \notin B$.
    - $A - B = \{x \in \mathbf{U} \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$
    - Ex.: A = {1, 2, 3}, B = {3, 9}
      - A – B = {1, 2}
      - B – A = {9}
      - A – A = ∅

Produto cartesiano (Aula Anterior)

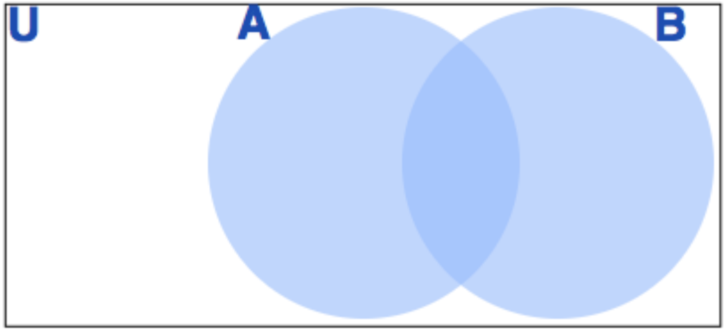
- O produto cartesiano de dois conjuntos A e B, denotado por $A \times B$:
  - É o conjunto de pares ordenados formados por um elemento de A e por um elemento de B de todas as maneiras possíveis.
    - $A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$
    - Ex.: $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b\}$
      - $A \times B = \{(1,a), (1,b), (2,a), (2,b), (3,a), (3,b)\}$
      - $B \times A = \{(a,1), (a,2), (a,3), (b,1), (b,2), (b,3)\}$
      - $A \times A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (3,3)\}$
      - $B \times B = \{(a,a), (a,b), (b,a), (b,b)\}$

Diagramas de Venn (Aula Anterior)

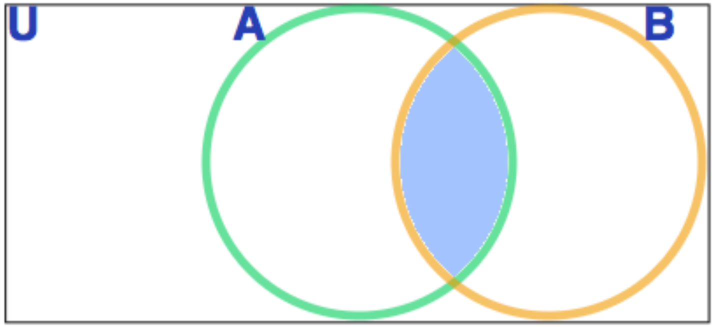
- Representação gráfica de conjuntos finitos.
  - Exemplo
    - U = {a, b, c, …, n}, A = {b, c, d, e, f}, B = {e, f, g, h}, C = {l, m}



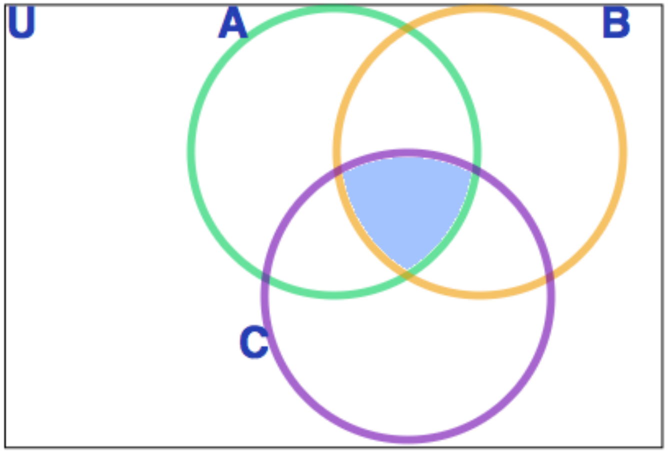
Diagramas de Venn (Aula Anterior)



União (A ∪ B)

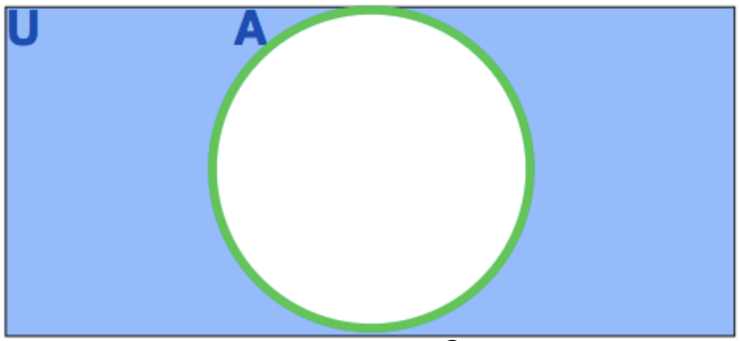


Interseção (A ∩ B)

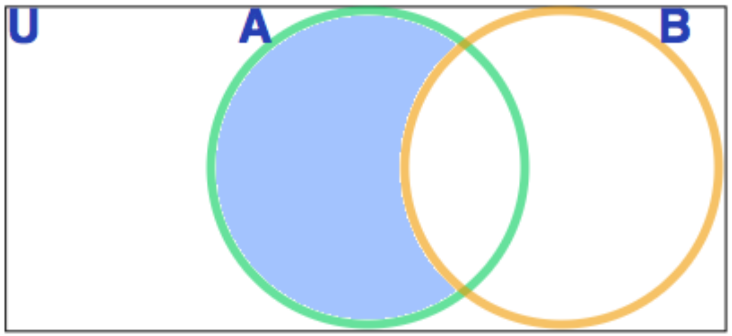


Interseção (A ∩ B)

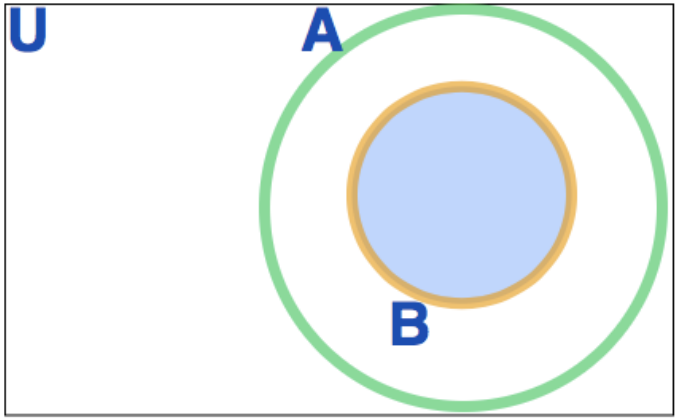
Diagramas de Venn (Aula Anterior)



Complemento ($A^C = U \setminus A$)



Diferença (A - B)



Subconjunto ($B \subseteq A$)

Plano de Aula

- Relações Binárias em Conjuntos
- Relações de Equivalência
- Ordenações Parciais
- Relações n-árias

Relação Binária

- Distinguir determinados pares ordenados
  - Seus elementos satisfazem alguma relação que os componentes dos demais pares, em geral, não satisfazem.

Relação Binária

- Distinguir determinados pares ordenados
  - Seus elementos satisfazem alguma relação que os componentes dos demais pares, em geral, não satisfazem.
  - Ex.: Sejam A = {1, 4} e B = {4, 5}
    - $A \times B = \{(1, 4), (1, 5), (4, 4), (4, 5)\}$
      - $R_1 = \{(x, y) \mid x = y\} = \{(4, 4)\}$
      - $R_2 = \{(x, y) \mid x \text{ for par}\} = \{(4, 4), (4, 5)\}$
      - $R_3 = \{(x, y) \mid x \leq y\} = \{(1, 4), (1, 5), (4, 4), (4, 5)\}$
      - …

Relação Binária

- Definição
  - Dados os conjuntos A e B, uma **relação binária** R em A e B é um subconjunto de $A \times B$.
    - $x \; R \; y \leftrightarrow (x, y) \in R$

Relação Binária

- Definição
  - Dados os conjuntos A e B, uma **relação binária** R em A e B é um subconjunto de $A \times B$.
    - $x \, R \, y \leftrightarrow (x, y) \in R$
    - Exemplo
      - Alunos = {João, Maria, Ana, …}
      - Disciplinas = {Res-Probl-ND, Constr-Interpretadores, …}
      - R = {(x, y) | x está matriculado em y} =
        - {(João, Res-Probl-ND), (João, Constr-Interpretadores), (Maria, Constr-Interpretadores), …}

Relação Binária

- Para cada uma das relações binárias R em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados pertencem a R.
  - $R = \{(x, y) \mid x = y*3\}$
    - (1, 5), (3, 1), (9, 3), (4, 2)

Relação Binária

- Para cada uma das relações binárias R em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados pertencem a R.
  - R = {(x, y) | x = y*3}
    - (1, 5), (3, 1), (9, 3), (4, 2)

Relação Binária

- Para cada uma das relações binárias R em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados pertencem a R.
  - $R = \{(x, y) \mid x = y*3\}$
    - (1, 5), (3, 1), (9, 3), (4, 2)
  - $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$
    - (2, 4), (1, 8), (0, 9), (2, 5)

Relação Binária

- Para cada uma das relações binárias R em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados pertencem a R.
  - R = {(x, y) | x = y*3}
    - (1, 5), (3, 1), (9, 3), (4, 2)
  - R = {(x, y) | x divide y}
    - (2, 4), (1, 8), (0, 9), (2, 5)

Relação Binária

- Para cada uma das relações binárias R em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados pertencem a R.
  - $R = \{(x, y) \mid x = y*3\}$
    - (1, 5), (3, 1), (9, 3), (4, 2)
  - $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$
    - (2, 4), (1, 8), (0, 9), (2, 5)
  - $R = \{(x, y) \mid x > y^2\}$
    - (1, 2), (2, 1), (5, 2)

Relação Binária

- Para cada uma das relações binárias R em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, determine quais dos pares ordenados pertencem a R.
  - $R = \{(x, y) \mid x = y*3\}$
    - (1, 5), (3, 1), (9, 3), (4, 2)
  - $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$
    - (2, 4), (1, 8), (0, 9), (2, 5)
  - $R = \{(x, y) \mid x > y^2\}$
    - (1, 2), (2, 1), (5, 2)

Relação em um Conjunto

- Definição
  - Uma relação binária num conjunto A é um subconjunto de A^2 $(A \times A)$.
    - Ex.: $A = \{1, 2, 3\}$
      - $R = \{(x, y) \mid x < y\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$
      - $R = \{(x, y) \mid x \geq y\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
      - $R = \{(x, y) \mid x+y \leq 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Relação em um Conjunto

- Definição
  - Uma relação binária num conjunto A é um subconjunto de A^2 $(A \times A)$.
    - Ex.: $A = \{1, 2, 3\}$
      - $R = \{(x, y) \mid x < y\} = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$
      - $R = \{(x, y) \mid x \geq y\} = \{(1, 1), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (3, 2), (3, 3)\}$
      - $R = \{(x, y) \mid x+y \leq 3\} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$
    - Ex.: Alunos = {José, Maria, Ana, Antônio}
      - R = {(x, y) | x estuda com y} = {(Maria, Antônio), (José, Ana)}

Propriedades das Relações

- Usadas para classificar as relações num conjunto.

- Relação **reflexiva**
  - Uma relação R é reflexiva se ela contém todos os pares da forma (x, x)
    - $\forall x \, ((x, x) \in R)$

Propriedades das Relações

- Usadas para classificar as relações num conjunto.

- Relação **reflexiva**
  - Uma relação R é reflexiva se ela contém todos os pares da forma (x, x)
    - $\forall x \, ((x, x) \in R)$

  - Ex.: A = {1, 2, 3}
    - R = {(x, y) | x ≤ y} = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}
  - Ex.: $\mathbb{N} > 0$
    - R = {(x, y) | x divide y} = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)}
  - Ex.: Pessoas = {pessoa_1, pessoa_2, …, pessoa_n}
    - R = {(x, y) | x possui o mesmo pai e a mesma mãe que y}

Propriedades das Relações

- Relação **simétrica**
  - Uma relação R em um conjunto A é simétrica se ela contém todos os pares da forma (x, y) e (y, x) para quaiquer x, y $\in$ A
    - $\forall x \, \forall y \, ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$

Propriedades das Relações

- Relação **simétrica**
  - Uma relação R em um conjunto A é simétrica se ela contém todos os pares da forma (x, y) e (y, x) para quaiquer $x, y \in A$
    - $\forall x \, \forall y \, ((x, y) \in R \rightarrow (y, x) \in R)$

  - Ex.: $A = \{1, 2, 3\}$
    - $R = \{(x, y) \mid x = y\}$
      - $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

    - $R = \{(x, y) \mid x+y \leq 3\}$
      - $R = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1)\}$

Propriedades das Relações

- Relação **anti-simétrica**
  - Uma relação R em um conjunto A é anti-simétrica, se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$.
    - $\forall x \forall y (((x, y) \in R \land (y, x) \in R) \rightarrow (x = y))$

Propriedades das Relações

- Relação **anti-simétrica**
  - Uma relação R em um conjunto A é anti-simétrica, se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$, então $x = y$.
    - $\forall x \forall y (((x, y) \in R \land (y, x) \in R) \rightarrow (x = y))$

  - Ex.: A = {1, 2, 3}
    - $R = \{(x, y) \mid x = y\}$
      - $R = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

    - $R = \{(x, y) \mid x > y\}$
      - $R = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2)\}$

Propriedades das Relações

- Relação **transitiva**
  - Uma relação R em um conjunto A é transitiva, sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$, para todo $x, y, z \in A$.
    - $\forall x\, \forall y\, \forall z\, (((x, y) \in R \land (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R)$

Propriedades das Relações

- Relação **transitiva**
  - Uma relação R em um conjunto A é transitiva, sempre que $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$, então $(x, z) \in R$, para todo $x, y, z \in A$.
    - $\forall x \, \forall y \, \forall z \, (((x, y) \in R \land (y, z) \in R) \rightarrow (x, z) \in R)$

  - Ex.: A = {1, 2, 3}
    - $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$
      - R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}

    - $R = \{(x, y) \mid x = y\}$
      - R = {(1, 1), (2, 2), (3, 3)}

Propriedades das Relações

- Reflexivas, simétricas, anti-simétricas, transitivas?
  - A = {1, 2, 3, 4}
    - R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}
    - R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)}
    - R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)}
    - R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)}
    - R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)}
    - R_6 = {(3, 4)}

Propriedades das Relações

- Reflexivas, simétricas, anti-simétricas, transitivas?
  - A = {1, 2, 3, 4}
    - R_1 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 4), (4, 1), (4, 4)}
    - R_2 = {(1, 1), (1, 2), (2, 1)} **Simétrica**
    - R_3 = {(1, 1), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 1), (4, 4)} **Reflexiva, Simétrica**
    - R_4 = {(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3)} **Anti-simétrica, transitiva**
    - R_5 = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 3), (3, 4), (4, 4)} **Reflexiva, anti-simétrica, transitiva**
    - R_6 = {(3, 4)} **Anti-simétrica, transitiva**

Plano de Aula

- Relações Binárias em Conjuntos
- Relações de Equivalência
- Ordenações Parciais
- Relações n-árias

Relações de Equivalência

- Definição
  - Relação binária num conjunto A, a qual é ao mesmo tempo:
    - **Reflexiva, simétrica e transitiva.**
  - Dois elementos x e y relacionados por uma relação de equivalência são ditos **equivalentes**.

Relações de Equivalência

- Definição
  - Relação binária num conjunto A, a qual é ao mesmo tempo:
    - **Reflexiva, simétrica e transitiva.**
  - Dois elementos x e y relacionados por uma relação de equivalência são ditos **equivalentes**.
  - Ex.: A = {0, 1, 2, 3, 4}
    - R = {(x, y) | x = y}
      - R = {(1, 1), (0, 0), (2, 2), (3, 3), (4, 4)}
    - R = {(x, y) | x + y é par}
      - R = {(0, 0), (0, 2), (0, 4), (1, 1), (1, 3), (2, 4), …}

Relações de Equivalência

- Classe de equivalência
  - Seja R uma relação de equivalência num conjunto A.
    - O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elemento x de A é denominado **classe de equivalência** de x.

Relações de Equivalência

- Classe de equivalência
  - Seja R uma relação de equivalência num conjunto A.
    - O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elemento x de A é denominado **classe de equivalência** de x.
      - Classe de equivalência de x relativa a R: $[x]_R$ ou $[x]$ (se apenas uma relação é considerada).
      - $[x] = \{y \mid y \in A \wedge (x, y) \in R\}$

Relações de Equivalência

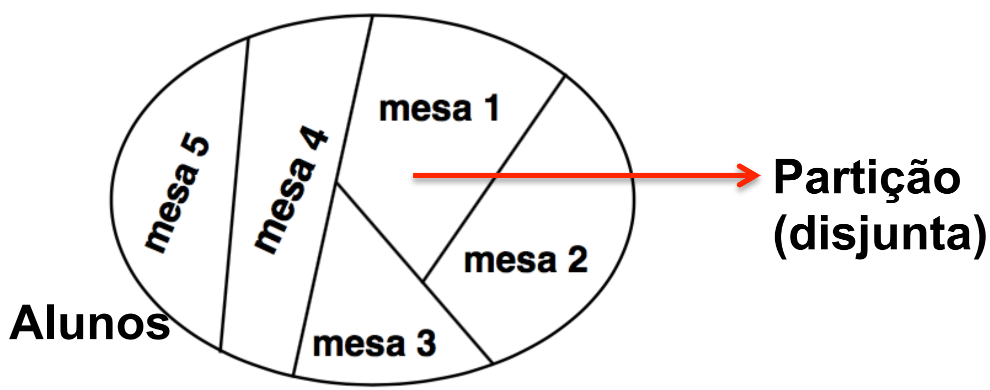
- Classe de equivalência
  - Seja R uma relação de equivalência num conjunto A.
    - O conjunto de todos os elementos que estão relacionados a um elemento x de A é denominado **classe de equivalência** de x.
      - Classe de equivalência de x relativa a R: $[x]_R$ ou $[x]$ (se apenas uma relação é considerada).
      - $[x] = \{y \mid y \in A \wedge (x, y) \in R\}$
    - Se $y \in [x]$ então y é dito **representante** dessa classe de equivalência.

Relações de Equivalência

- Exemplo
  - Conjunto Alunos ; R = {(x, y) | x senta na mesma mesa que y}
    - Se José, Maria, Cláudio, Ana, Paula sentam na mesa 1, então:
      - A classe de equivalência da mesa 1 é:
        - [José] = {José, Maria, Cláudio, Ana, Paula}

Relações de Equivalência

- Exemplo
  - Conjunto Alunos ; R = {(x, y) | x senta na mesma mesa que y}
    - Se José, Maria, Cláudio, Ana, Paula sentam na mesa 1, então:
      - A classe de equivalência da mesa 1 é:
        - [José] = {José, Maria, Cláudio, Ana, Paula}
        - → Se Maria é a representante da classe:
          - [Maria] = {José, Maria, Cláudio, Ana, Paula}



Plano de Aula

- Relações Binárias em Conjuntos
- Relações de Equivalência
- Ordenações Parciais
- Relações n-árias

Ordenação Parcial

- Objetivo: ordenar alguns ou todos os elementos de conjuntos.
- Definição
  - Relação binária R num conjunto A, a qual é ao mesmo tempo:
    - **Reflexiva, anti-simétrica e transitiva.**

Ordenação Parcial

- Objetivo: ordenar alguns ou todos os elementos de conjuntos.
- Definição
  - Relação binária R num conjunto A, a qual é ao mesmo tempo:
    - **Reflexiva, anti-simétrica e transitiva.**
    - O conjunto A junto com R é dito parcialmente ordenado ou poset, i.e., $(A, \preccurlyeq)$, onde $\preccurlyeq$ representa R.

Ordenação Parcial

- Objetivo: ordenar alguns ou todos os elementos de conjuntos.
- Definição
  - Relação binária R num conjunto A, a qual é ao mesmo tempo:
    - **Reflexiva, anti-simétrica e transitiva.**
    - O conjunto A junto com R é dito parcialmente ordenado ou poset, i.e., $(A, \preccurlyeq)$, onde $\preccurlyeq$ representa R.

- Ex.: A = {1, 2, 3}
  - $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$
    - R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)}

  - $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$
    - R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)}

Ordenação Parcial

- Objetivo: ordenar alguns ou todos os elementos de conjuntos.
- Definição
  - Relação binária R num conjunto A, a qual é ao mesmo tempo:
    - **Reflexiva, anti-simétrica e transitiva.**
    - O conjunto A junto com R é dito parcialmente ordenado ou poset, i.e., $(A, \preccurlyeq)$, onde $\preccurlyeq$ representa R.

- Ex.: $A = \{1, 2, 3\}$
  - $R = \{(x, y) \mid x \leq y\}$ → **R é uma Ordem parcial**
    - $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (2, 3), (3, 3)\}$
  - $R = \{(x, y) \mid x \text{ divide } y\}$ → **R é uma Ordem parcial**
    - $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$

Ordenação Parcial

- Os elementos x e y de um poset $(A, \preccurlyeq)$ são ditos **comparáveis**, se ou $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Caso contrário x e y são ditos **incomparáveis**.

Ordenação Parcial

- Os elementos x e y de um poset $(A, \preccurlyeq)$ são ditos **comparáveis**, se ou $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Caso contrário x e y são ditos **incomparáveis**.
  - Ex.: No poset ({1, 2, 3}, x divide y):
    - R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)}
    - Os naturais 1 e 2 são comparáveis?
    - Os naturais 2 e 3 são comparáveis?

Ordenação Parcial

- Os elementos x e y de um poset $(A, \preccurlyeq)$ são ditos **comparáveis**, se ou $x \preccurlyeq y$ ou $y \preccurlyeq x$. Caso contrário x e y são ditos **incomparáveis**.
  - Ex.: No poset ({1, 2, 3}, x divide y):
    - R = {(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)}
    - Os naturais 1 e 2 são comparáveis? → **Sim. 1 divide 2**
    - Os naturais 2 e 3 são comparáveis? → **Não. 2 não divide 3 e 3 não divide 2**

Ordenação Total

- Um poset (A, $\preccurlyeq$) é dito **totalmente ordenado** se quaisquer dois elementos x e y de A forem comparáveis.
  - $\preccurlyeq$ é chamada de ordem total.

Ordenação Total

- Um poset $(A, \preccurlyeq)$ é dito **totalmente ordenado** se quaisquer dois elementos x e y de A forem comparáveis.
  - $\preccurlyeq$ é chamada de ordem total.

- Ex.: O poset $(\mathbb{N}, \leq)$ **é totalmente ordenado**, pois $x \leq y$ ou $y \leq x$:
  - $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

Ordenação Total

- Um poset $(A, \preccurlyeq)$ é dito **totalmente ordenado** se quaisquer dois elementos x e y de A forem comparáveis.
  - $\preccurlyeq$ é chamada de ordem total.

- Ex.: O poset $(\mathbb{N}, \leq)$ **é totalmente ordenado**, pois $x \leq y$ ou $y \leq x$:
  - $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \ldots\}$

- Ex.: O poset ({1, 2, 3}, x divide y) **não é totalmente ordenado**, pois contém elementos incomparáveis (e.g., 2 e 3).

Ordenação Total

- **Ordem lexicográfica**
  - Ordem alfabética ou do dicionário.
  - Conjunto do alfabeto: $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$
  - $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, (c, a, s, a), \ldots\}$
  - $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, se:

Ordenação Total

- **Ordem lexicográfica**
  - Ordem alfabética ou do dicionário.
  - Conjunto do alfabeto: $A = \{a, b,c, \ldots, z\}$
  - $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, (c, a, s, a), \ldots\}$
  - $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, se:
    - $a_1 \preccurlyeq b_1$ ou se existir um $i > 0$, tal que $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$, e $a_{i+1} \preccurlyeq b_{i+1}$

Ordenação Total

- **Ordem lexicográfica**
  - Ordem alfabética ou do dicionário.
  - Conjunto do alfabeto: $A = \{a, b, c, \ldots, z\}$
  - $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, (c, a, s, a), \ldots\}$
  - $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, se:
    - $a_1 \preccurlyeq b_1$ ou se existir um $i > 0$, tal que $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$, e $a_{i+1} \preccurlyeq b_{i+1}$
      - Ex.: casa $\preccurlyeq$ casual
      - Ex.: casa $\preccurlyeq$ casamento

Ordenação Total

- **Ordem lexicográfica**
  - Ordem alfabética ou do dicionário.
  - Conjunto do alfabeto: A = {a, b,c, …, z}
  - $A_1 \times A_2 \times A_3 \ldots \times A_n = \{(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n), \ldots, (c, a, s, a), \ldots\}$
  - $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n) \preccurlyeq (b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n)$, se:
    - $a_1 \preccurlyeq b_1$ ou se existir um $i > 0$, tal que $a_1 = b_1, \ldots, a_i = b_i$, e $a_{i+1} \preccurlyeq b_{i+1}$
      - Ex.: casa $\preccurlyeq$ casual
      - Ex.: casa $\preccurlyeq$ casamento
    - Uma sequência *a* é menor do que uma *b*, se a primeira letra de *a* vem antes da letra de *b* nesta posição. Ou,
    - *a* e *b* coincidem em todas as posições, mas *b* tem mais letras.

Plano de Aula

- Relações Binárias em Conjuntos
- Relações de Equivalência
- Ordenações Parciais
- Relações n-árias

Relação n-ária

- Definição
  - Relação entre elementos de mais de dois conjuntos.
    - Sejam os conjuntos A_1, A_2, …, A_n. Uma relação n-ária R nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.

Relação n-ária

- Definição
  - Relação entre elementos de mais de dois conjuntos.
    - Sejam os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Uma relação n-ária R nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.
      - Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados de **domínios** da relação.

Relação n-ária

- Definição
  - Relação entre elementos de mais de dois conjuntos.
    - Sejam os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Uma relação n-ária R nesses conjuntos é um subconjunto de $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$.
      - Os conjuntos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ são chamados de **domínios** da relação.
    - Ex.: $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$
      - $R = \{(x, y, z) \mid x < y \land y < z\}$
        - $(1, 2, 3) \in R$; $(1, 5, 3) \notin R$

Relação n-ária

- Banco de Dados Relacional (Exemplo)
  - C = companhia aérea
  - N = número do vôo
  - P = local de partida
  - D = local de destino
  - H = horário de partida

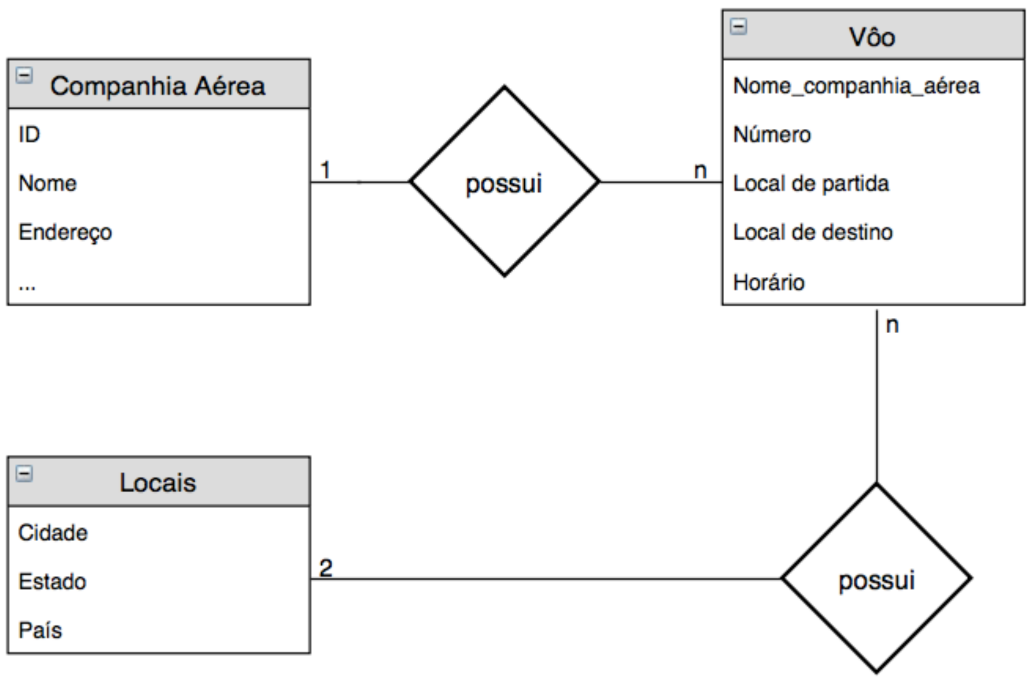
Relação n-ária

- Banco de Dados Relacional (Exemplo)
  - C = companhia aérea
  - N = número do vôo
  - P = local de partida
  - D = local de destino
  - H = horário de partida

  - Um vôo é uma relação R = (C, N, P, D, H)
    - Ex.: (FlyExpress, 1453, São Paulo, Barcelona, 16h32) $\in$ R

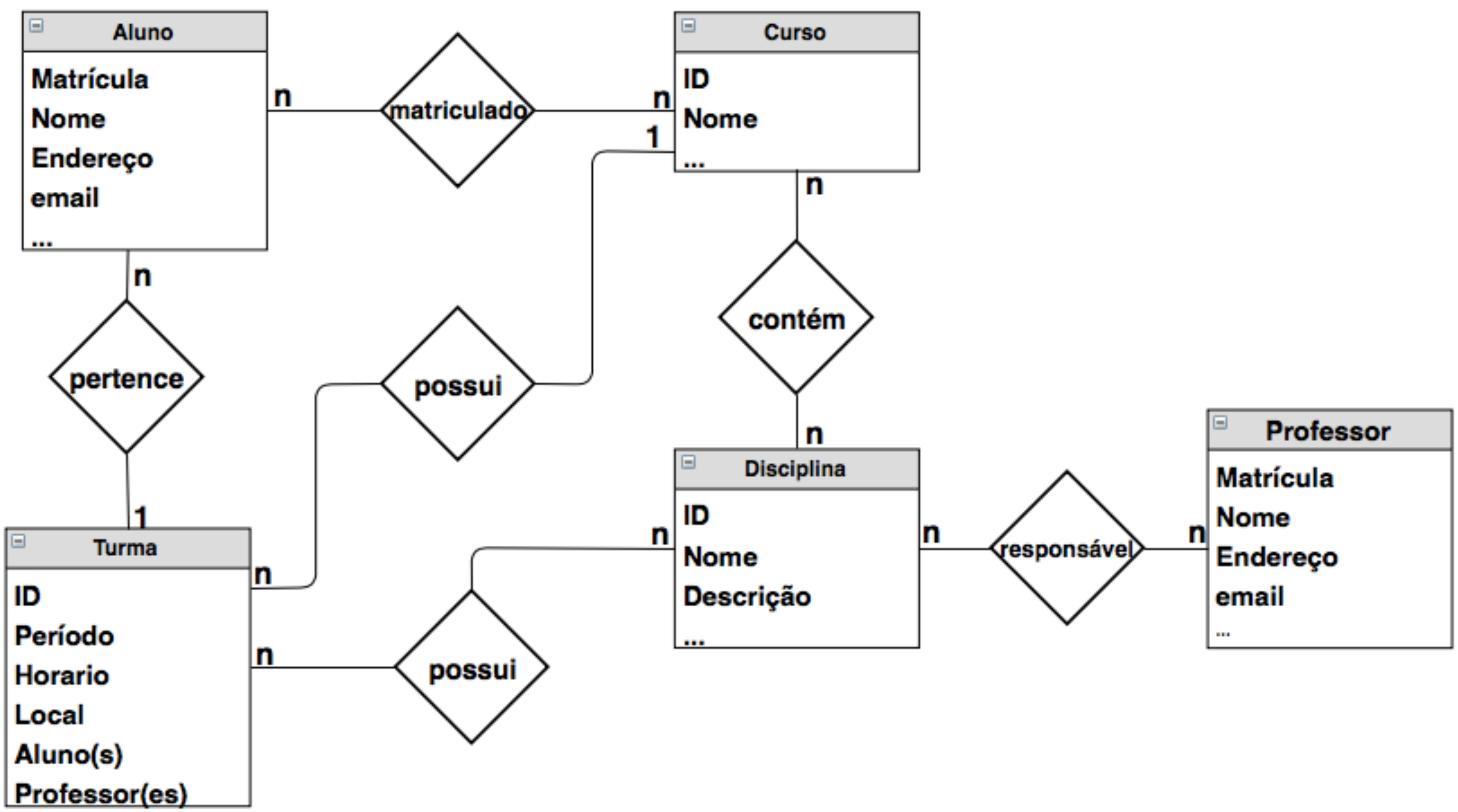
Relação n-ária

- Diagrama simples representando o exemplo
  - Um vôo é uma relação R = (C, N, P, D, H)
    - Ex.: (FlyExpress, 1453, São Paulo, Barcelona, 16h32)$\in$R



Relação n-ária

- Utilize como base o diagrama abaixo e implemente o banco de dados correspondente em Python.



Dúvidas?

Síntese da Aula

- Relação Binária
- Propriedades das Relações
  - Reflexiva
  - Simétrica
  - Transitiva
  - Anti-simétrica
- Relações de Equivalência
- Ordenação Parcial
- Relação N-ária

Próxima Aula

- **TDE01**
  - Funções em conjuntos.

- **Trabalho 1**