# Métodos Quantitativos para a Computação

Modelo de Probabilidade

# Modelo de Probabilidade

- Fundamentação matemática que suporta os modelos probabilísticos
- Conjunto de conceitos
- Fortemente fundado em teoria dos conjuntos e funções

# Principais conceitos

- Experimento aleatório
- Espaço amostral
- Evento
- Probabilidade

# Experimento aleatório

- Um fenômeno observado para o qual não existe uma equação determinística que nos forneça o resultado

# Espaço amostral

- É o conjunto não vazio que contém os resultados unitários possíveis de um experimento aleatório
- Exemplos
  - Lançamento de um dado equilibrado:

    $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
  - Lançamento de uma moeda equilibrada:

    $\Omega = \{ \text{cara}, \text{coroa} \}$
  - Lançamento de uma moeda equilibrada:

    $\Omega = \{ \text{cara}, \text{coroa} \}$
  - Número de vezes que temos que lançar uma moeda até obtermos a primeira cara:

    $\Omega = \{ 1, 2, 3, ... \}$
  - Medição do tempo de vida de um equipamento:

    $\Omega = [0, \infty)$

# Evento

- É um dos resultados possíveis (não necessariamente unitário) do experimento aleatório
- Dado um experimento aleatório com espaço amostral $\Omega$, e um subconjunto $A \subseteq \Omega$
- $A$ é um evento
- No contexto do experimento aleatório, o evento $A$ ocorre se o resultado do experimento (um elemento de $\Omega$) pertencer ao evento $A$

# Operações com eventos

- Como eventos são conjuntos, podem-se realizar as operações de conjuntos sobre eles
- Estas operações possuem uma interpretação

# Operações com eventos

- Intersecção
  - Dados dois eventos $A$ e $B$, a intersecção $A \cap B$ é um evento que corresponde à ocorrência simultânea de $A$ e $B$.

# Exemplo 1

- Seja o lançamento de duas moedas
  - Sejam os eventos
    - $A$ = “observação de cara no primeiro lançamento”
    - $B$ = “observação de coroa no segundo lançamento”
  - $A$ = { (cara, cara), (cara, coroa) }
  - $B$ = { (cara, coroa), (coroa, coroa) }
  - $A \cap B$ = { (cara, coroa) }

# Operações com eventos

- União
  - Dados dois eventos $A$ e $B$, a intersecção $A \cup B$ é um evento que corresponde à ocorrência alternativa de $A$ ou $B$, isto é, $A$ ocorre ou $B$ ocorre, ou ambos ocorrem

# Exemplo 2

- Sejam os eventos
  - $A$ = “observação de cara no primeiro lançamento”
  - $B$ = “observação de coroa no segundo lançamento”
  - $A$ = { (cara, cara), (cara, coroa) }
  - $B$ = { (cara, coroa), (coroa, coroa) }
  - $A \cup B$ = { (cara, coroa), (cara, coroa), (coroa, cara) }

# Operações com eventos

- Complementação
  - Dado um evento $A$, a complementação de $A$, isto é $A^c$ é um evento que corresponde à não ocorrência de $A$

# Exemplo 3

- Sejam os eventos
  - $A$ = “observação de cara no primeiro lançamento”
  - $B$ = “observação de coroa no segundo lançamento”
  - $A$ = { (cara, cara), (cara, coroa) }
  - $A^c$ = { (coroa, cara), (coroa, coroa) }

# Operações com eventos

- Diferença
  - Dados dois eventos $A$ e $B$, a diferença entre $A$ e $B$, isto é $A \backslash B$ é um evento que corresponde à ocorrência de $B$ sem a ocorrência de $B$
  - $A \backslash B$ é o conjunto dos elementos de $A$ que não pertencem a $B$

# Exemplo 4

- Sejam os eventos
  - $A$ = “observação de cara no primeiro lançamento”
  - $B$ = “observação de coroa no segundo lançamento”
  - $A$ = { (cara, cara), (cara, coroa) }
  - $B$ = { (cara, coroa), (coroa, coroa) }
  - $A \setminus B$ = { (cara, cara) }

# Operações com eventos

- Evento nulo
  - O evento nulo ∅ (conjunto vazio) corresponde a um evento cuja observação seja impossível

# Exemplo 5

- Seja o lançamento de duas moedas
  - $\Omega$ = { (cara, cara), (cara, coroa), (coroa, cara), (coroa, coroa) }
- Sejam os eventos
  - $A$ = "observação de cara no primeiro lançamento"
  - $C$ = "observação de coroa no primeiro lançamento"
- $A$ = { (cara, cara), (cara, coroa) }
- $C$ = { (coroa, cara), (coroa, coroa) }
- $A \cap C = \varnothing$

# Operações com eventos

- Evento certo
  - O evento certo é o espaço amostral $\Omega$

# Operações com eventos

- Eventos disjuntos ou mutuamente exclusivos
  - Dois eventos $A$ e $B$ são disjuntos ou mutuamente exclusivos quando $A \cap B = \varnothing$

# Operações com eventos

- $(A^c)^c = A$
- $A \cup A^c = \Omega, \quad A \cap A^c = \varnothing$
- $A \cup \varnothing = A, \quad A \cap \varnothing = \varnothing$
- $A \cup \Omega = \Omega, \quad A \cap \Omega = A$
- $A \setminus B = A \cap B^c$

# Operações com eventos

- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- $[\bigcap_{i=1}^{N} A_i]^c = \bigcup_{i=1}^{N} A_i^c$
- $[\bigcup_{i=1}^{N} A_i]^c = \bigcap_{i=1}^{N} A_i^c$

# Probabilidade

- Qual é o significado da probabilidade de um evento?
  - Dado um experimento aleatório qualquer e um seu evento $A$, a probabilidade de $A$ seria o limite da freqüência de ocorrência de $A$ em $n$ repetições do evento, quando $n \to \infty$, se tal limite existir
  - Se $N_n(A)$ denotar o número de vezes em que $A$ ocorre em $n$ repetições do experimento, então

$$P[A] = \lim_{n \to \infty} \frac{N_n(A)}{n}$$

# Espaço de eventos

- $\mathcal{E}$ = conjunto de todos os eventos para os quais vamos atribuir probabilidades
- $\mathcal{E}$ é um conjunto de subconjuntos em $\Omega$
- Deve preservar o resultado das operações com eventos
  - $\emptyset \in \mathcal{E}$
  - Dado um evento $A \in \mathcal{E}$, a complementação $A^c \in \mathcal{E}$
  - Dados infinitos eventos $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{E}$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{E}$

# Probabilidade

- Dados um espaço amostral $\Omega$ e uma classe de eventos $\mathcal{E}$, uma probabilidade é uma função ($P$) que associa valores numéricos do intervalo [0, 1] a eventos $A \in \mathcal{E}$ satisfazendo os seguintes axiomas:

1. $P: \mathcal{E} \rightarrow [0, 1]$, isto é, para todo $A \in \mathcal{E}$, $P[A] \in [0, 1]$
2. Probabilidade do evento certo:
3. $P[\Omega] = 1$ (o evento certo tem probabilidade 1).
4. Dados dois eventos $A$, e $B$ mutuamente disjuntos

   $P[A \cup \mathrm{B}] = P[A] + P[B]$

# Propriedades da probabilidade

- Complementaridade: dado $A \in \mathcal{E}$

  $P[A^c] = 1 - P[A]$

  $A \cap A^c = \varnothing$ (disjuntos)

  $A \cup A^c = \Omega$ (definição de evento complementar)

  $P[A \cup A^c] = P[\Omega]$

  $P[A] + P[A^c] = 1$

  $P[A^c] = 1 - P[A]$

# Propriedades da probabilidade

- Probabilidade do evento nulo:

  $P[\varnothing] = 1 - P[\Omega]$ (complementares)

  $P[\varnothing] = 0$

# Propriedades da probabilidade

- Probabilidade da diferença de conjuntos

  Dados $A$, $B \in \mathcal{E}$ tais que $A \subset B$, então:

  $P[B \backslash A] = P[B] - P[A]$

  $B = A \cup (B \backslash A)$ (definição de $B \backslash A$)

  $A \cap (B \setminus A) = \varnothing$ (disjuntos)

  $P[B] = P[A \cup (B \backslash A)] = P[A] + P[B \backslash A]$

  $P[B \backslash A] = P[B] - P[A]$

# Propriedades da probabilidade

- Regra da soma: dados $A, B \in \mathcal{E}$ quaisquer (possivelmente não disjuntos), então:

$$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$$

$A \cup B = A \cup (B \backslash A)$

$A \cap (B \backslash A) = \varnothing$

$P[A \cup B] = P[A \cup (B \backslash A)] = P[A] + P[B \backslash A]$

$B \backslash A = B \backslash (A \cap B)$

$P[B \backslash A] = P[B \backslash (A \cap B)] = P[B] - P[A \cap B]$ (da propriedade anterior)

$P[A \cup B] = P[A] + P[B] - P[A \cap B]$

# Propriedades da probabilidade

- Regra da multiplicação: Dados $A$, $B \in \mathcal{E}$ tais que $A$ e $B$ são independentes

  $$P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$$

- Observações:
  - Dois eventos são independentes quando a ocorrência de um não afeta a probabilidade do outro
  - Essa demonstração será fornecida mais tarde quando estudarmos probabilidade condicional

# Propriedades da probabilidade

- Dados $A_1, A_2, ..., A_n \in \mathcal{E}$ disjuntos $(A_i \cap A_j) = \emptyset$, para qualquer $i$ e $j$, então:

$$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

# Propriedades da probabilidade

- Dados $A_1, A_2, ..., A_\mathrm{n} \in \mathcal{E}$ disjuntos $(A_i \cap A_j) = \varnothing$, para qualquer $i$ e $j$, então:

$$P[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i] = \sum_{i=1}^{\infty} P[A_i]$$

# Propriedades da probabilidade

- Espaço discreto
  - É suficiente atribuir probabilidades para os conjuntos unitários, sendo que as demais probabilidades são obtidas pela propriedade anterior
- Espaço contínuo
  - Vamos ver na sequência da disciplina

# Exemplo 6

- Suponha o lançamento de uma moeda honesta até sair a primeira cara. Calcular a probabilidade de o número de lançamentos necessários ser par.
- $\Omega = \{1, 2, ...\}$
- Probabilidade dos conjuntos unitários:
  - $P[\{i\}]$ é a probabilidade de que $i$ lançamentos sejam necessários
  - Para isso, devem ocorrer ($i$ -1) coroas e 1 cara.
  - $P[\{i\}] = (1/2)^{i-1} \times 1/2 = (1/2)^i$
- Probabilidade do número de lançamentos ser par: $P[\{2, 4, ...\}]$
  - $\frac{1}{2}^2 + \frac{1}{2}^4 + \frac{1}{2}^6 + ... = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + ... = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i$
  - Progressão geométrica com $a_1 = 1/4$ e $r = 1/4$
  - $\sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^i = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1/4}{1-1/4} = 1/3$

# Métodos Quantitativos para a Computação

Modelo de Probabilidade