# Avaliação de Desempenho

Probabilidade Condicional

# Probabilidade condicional

- Para eventos são dependentes, a ocorrência de um afeta o espaço de amostras e a probabilidades do outro
- O modelo de probabilidade condicional define as equações para calcular as probabilidades levando em conta as alterações no espaço de amostras

# Exemplo 1

- Dados sobre revendedoras de motocicletas
- Dois eventos:

    A - Marca líder: sim ou não

    B – Qualidade do serviço: bom ou deficiente

| | Serviço bom | Serviço deficiente | Total |
|---|---|---|---|
| Marca líder | 64 | 16 | 80 |
| Outras marcas | 42 | 78 | 120 |
| Total | 106 | 94 | 200 |

# Exemplo 1

- Qual a probabilidade de ser uma revendedora da marca líder?
  - O espaço amostral é o conjunto de revendedoras (200)
  - $A$ = revendedora da marca líder
  - $A^c$ = revendedora de outra marca
  - $P[A] = 80/200 = 0,4$

| | Serviço bom | Serviço deficiente | Total |
|---|---|---|---|
| Marca líder | 64 | 16 | 80 |
| Outras as marcas | 42 | 78 | 120 |
| Total | 106 | 94 | 200 |

# Exemplo 1

- Qual a probabilidade de uma revendedora prestar um bom serviço?
  - O espaço amostral é o conjunto de revendedoras (200)
  - $B$ = revendedora presta bom serviço
  - $B^c$ = revendedora presta serviço deficiente
  - $P[B] = 106/200 = 0{,}53$

| | Serviço bom | Serviço deficiente | Total |
|---|---|---|---|
| Marca líder | 64 | 16 | 80 |
| Outras as marcas | 42 | 78 | 120 |
| Total | 106 | 94 | 200 |

# Exemplo 1

- Qual a probabilidade de uma revendedora da marca líder prestar um bom serviço?
  - O espaço amostral é o conjunto de revendedoras (200)
  - $C$ = revendedora da marca líder e presta bom serviço
  - $C = A \cap B$
  - $P[C] = 64/200 = 0{,}32$

| | Serviço bom | Serviço deficiente | Total |
|---|---|---|---|
| Marca líder | 64 | 16 | 80 |
| Outras as marcas | 42 | 78 | 120 |
| Total | 106 | 94 | 200 |

# Exemplo 1

- Sabendo que a revendedora é da marca líder, qual a probabilidade de ela prestar um bom serviço?
  - O espaço amostral é o conjunto de revendedoras da marca líder (80)
  - $D$ = uma revendedora da marca líder que presta um bom serviço
  - $P[D] = 64/80 = 0{,}80$
  - C = revendedora da marca líder e presta um bom serviço = 0,32
  - $P[C] \neq P[D]$!

| | Serviço bom | Serviço deficiente | Total |
|---|---|---|---|
| Marca líder | 64 | 16 | 80 |
| Outras as marcas | 42 | 78 | 120 |
| Total | 106 | 94 | 200 |

# Probabilidade condicional

- Probabilidade condicional do evento $B$ dada a ocorrência do evento $A$ é a proporção de vezes que $A$ e $B$ ocorrem juntos, dividido pela proporção de vezes que $A$ ocorre sozinho
- A ocorrência do evento $A$ define um novo espaço amostral

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

- $P[A]$ no denominador normaliza a probabilidade condicional no novo espaço de amostra
- O evento $A \cap B$ é chamado de evento conjunto

# Probabilidade condicional

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}$$

A expressão só faz sentido para $P[A] > 0$

Quando $P[A] = 0$, definimos $P[B \mid A] = P[B]$

# Eventos independentes

- Se $P[B] \neq 0$ e $P[A|B] = P[A]$ então o evento $A$ é independente do evento $B$
- Se $A$ é independente de $B$, $B$ também é independente de $A$
- Os eventos são independentes

# Regra da multiplicação

- A partir da fórmula de probabilidade condicional temos a seguinte fórmula geral:
- $P[A \cap B] = P[B \mid A] \cdot P[A] = P[A \mid B] \cdot P[B]$

# Regra especial da multiplicação

- Regra especial da multiplicação para eventos independentes
- Se $A$ e $B$ são independentes
- $P[A \mid B] = P[A]$
- $P[B \mid A] = P[B]$
- $P[A \cap B] = P[A] \cdot P[B]$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

$$P[A \cap B] = P[A|B]P[B]$$

$$P[B|A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]}$$

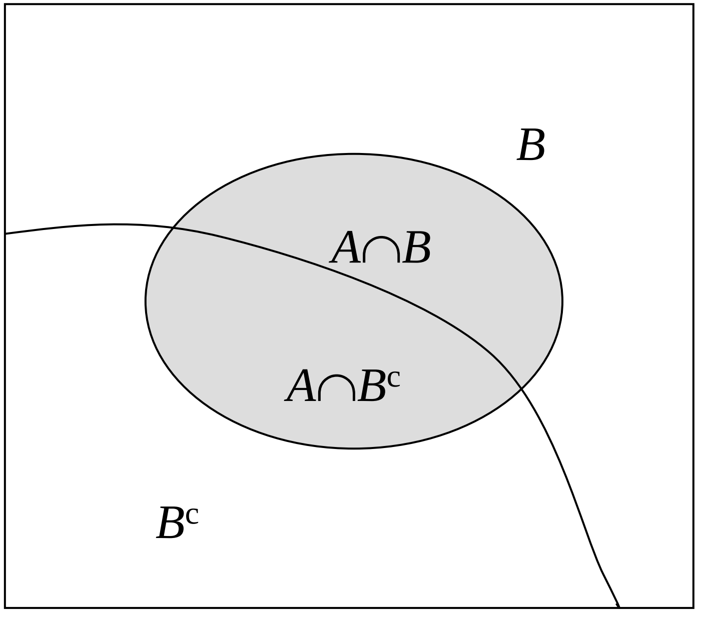
$$P[B \cap A] = P[B|A]P[A]$$

$$P[B|A]P[A] = P[A|B]P[B]$$

$$P[B|A] = \frac{P[B]P[A|B]}{P[A]}$$

# Regra da probabilidade total

- Sejam os eventos $A$ e $B$
- Podemos expressar $A$ como $A = A \cap B \cup A \cap B^c$
- Claramente $A \cap B$ e $A \cap B^c$ são disjuntos, portanto:




- $P[A] = P[A \cap B] + P[A \cap B^c]$

$$= P[A|B]\, P[B] + P[A|B^c]\, P[B^c]$$

# Exemplo 3

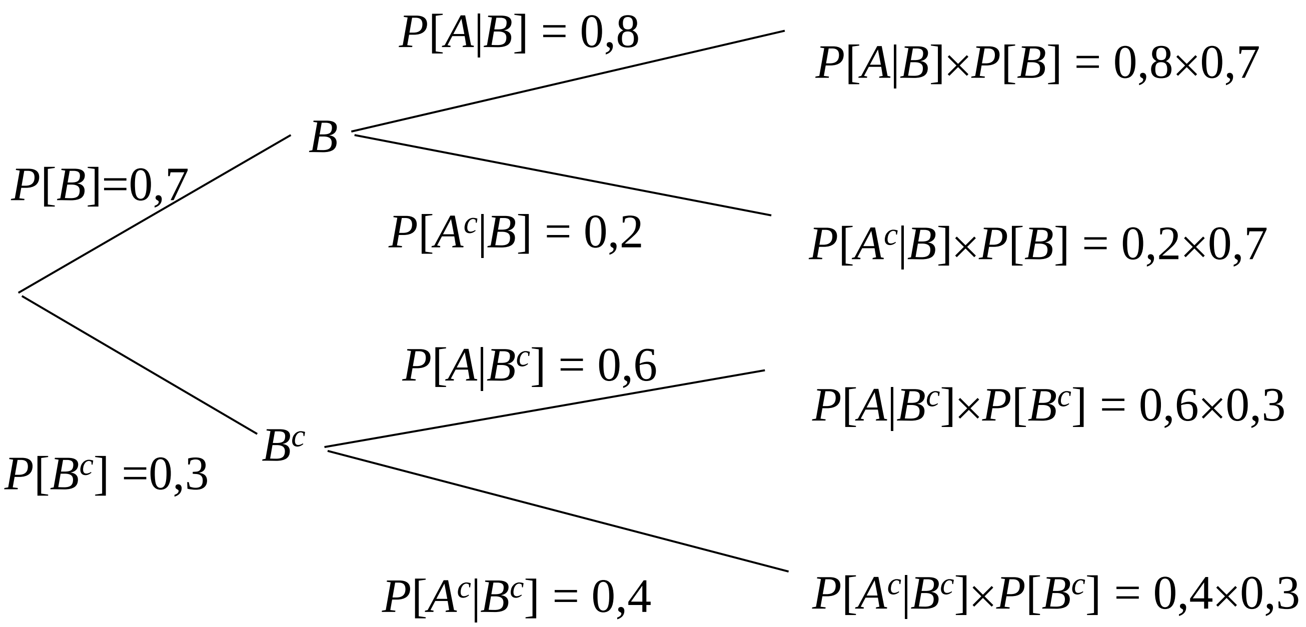
- Um meteorologista prevê corretamente o tempo de certa localidade em 80% dos dias de sol (a probabilidade de o meteorologista prever corretamente o tempo dado que o dia é ensolarado é 0,8), e em 60% dos dias nublados (probabilidade de o meteorologista prever corretamente o tempo dado que o dia **não** é ensolarado é 0,6).
- Dado que os dias são ensolarados na localidade em questão em 70% dos dias (probabilidade do dia ser ensolarado = 0,7), qual a porcentagem de acerto total do meteorologista?
- Sejam os eventos:
  - $A$ = “meteorologista prevê corretamente o tempo”
  - $B$ = “o dia é ensolarado”
- As informações que temos são as seguintes:
  - $P[A|B] = 0{,}8$
  - $P[A|B^c] = 0{,}6$
  - $P[B] = 0{,}7$
- Da regra de probabilidade total temos
  - $P[A] = P[A|B]P[B] + P[A|B^c]P[B^c] = 0{,}8\times 0{,}7+0{,}6\times 0{,}3 = 0{,}56+0{,}18 = 0{,}74$

# Árvore de probabilidades

- Uma forma simples de representar os eventos e probabilidades envolvidas na regra da probabilidade total é através de um diagrama chamado árvore de probabilidades
  - Possui uma raiz, a partir da qual partem ramos indicando os eventos de uma partição do primeiro estágio, a assim sucessivamente
  - Sobre cada ramo indica-se a probabilidade condicional do evento indicado dada a seqüência de eventos ocorridos até ali

# Exemplo 4

- Calcular a árvore de probabilidades para o exemplo 7

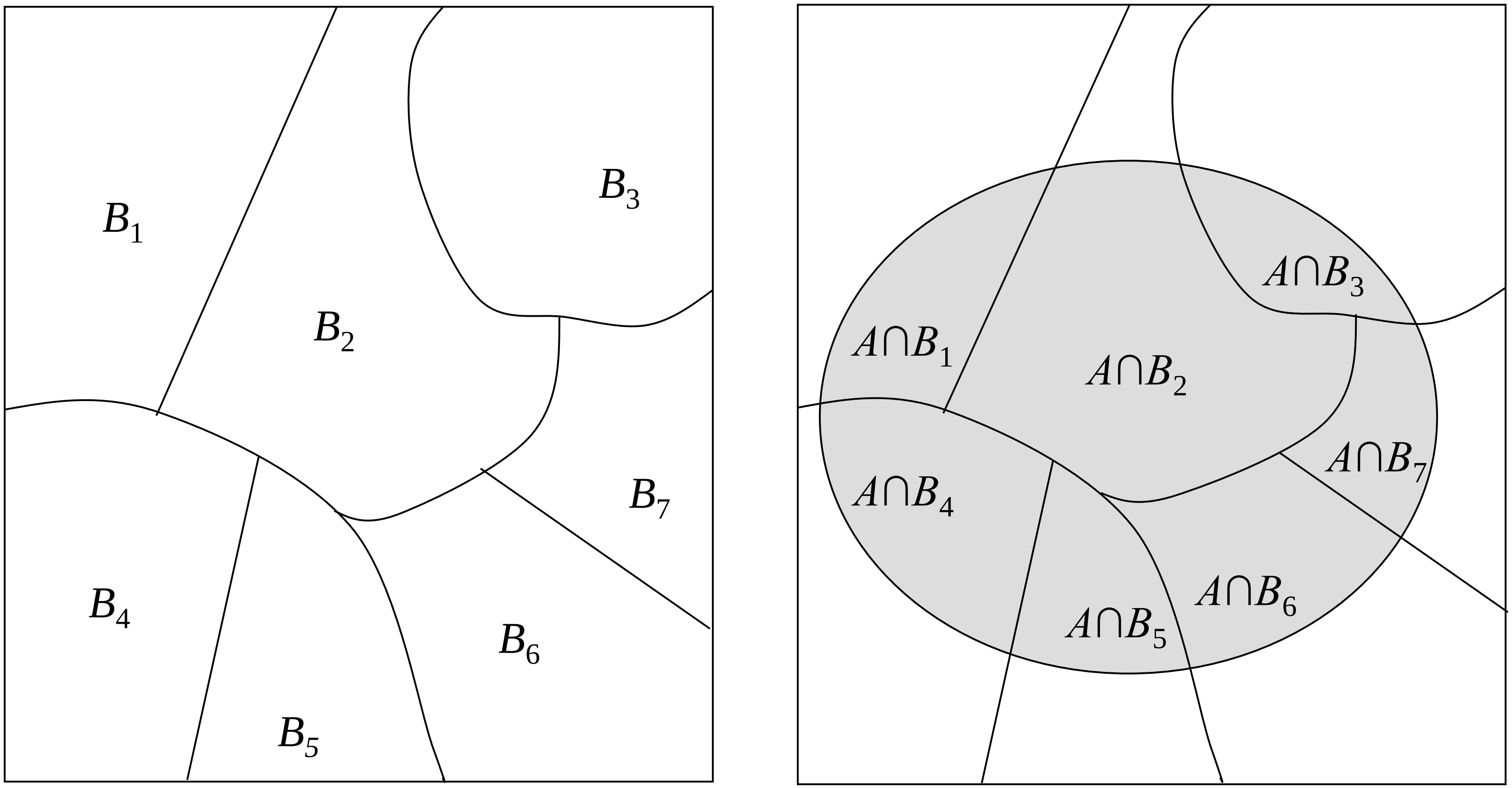



$$P[A] = P[A|B]\, P[B] + P[A|B^c]\, P[B^c] = 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}74$$

# Regra da probabilidade total

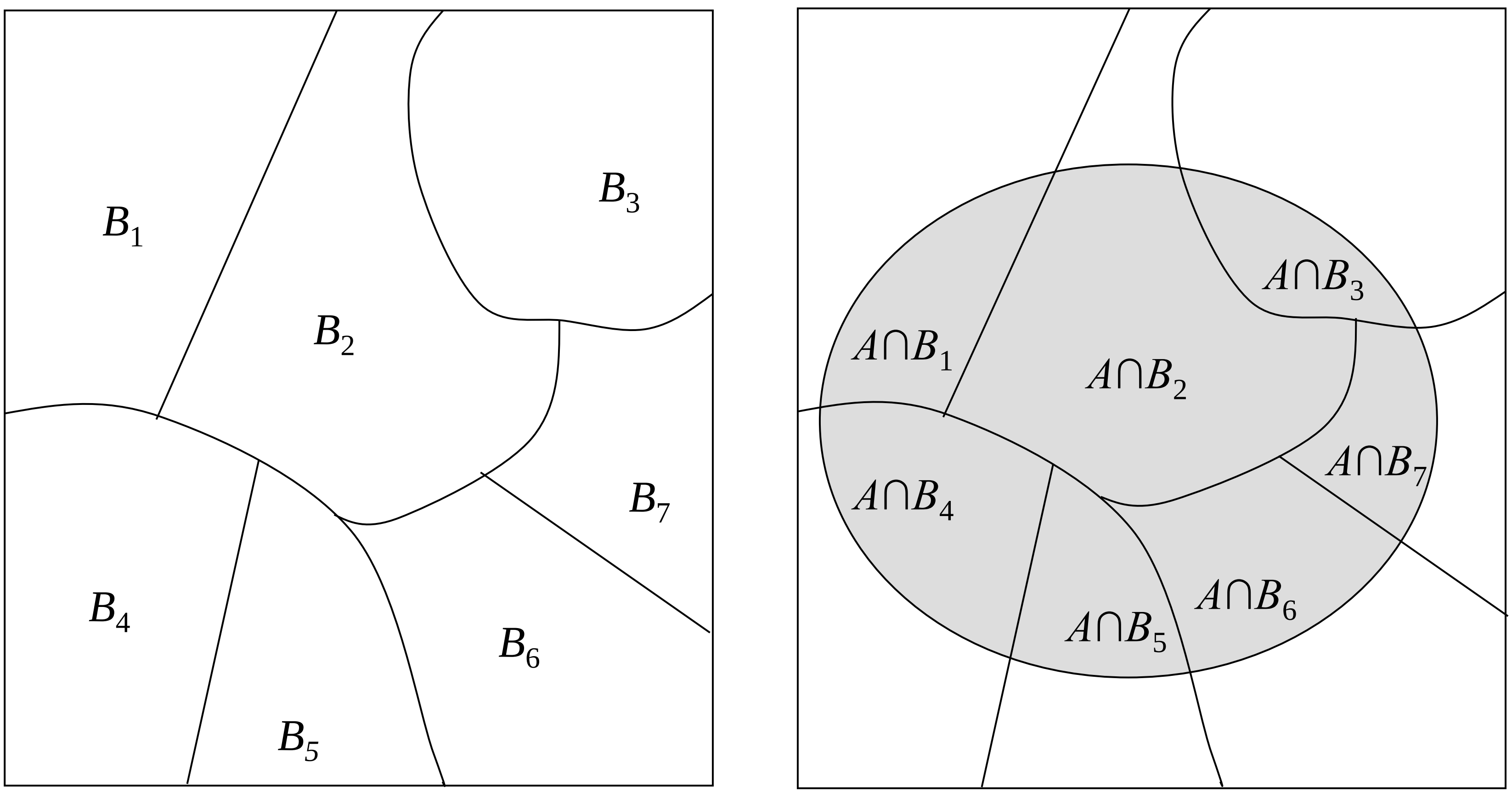
- Sejam $B_1$, $B_2$, ..., $B_n$ eventos disjuntos tais que $B_1 \cup B_2 \cup ... \cup B_n = \Omega$
- Dizemos que $\{B_1, B_2, ..., B_n\}$ formam uma partição de $\Omega$

# Regra da probabilidade total



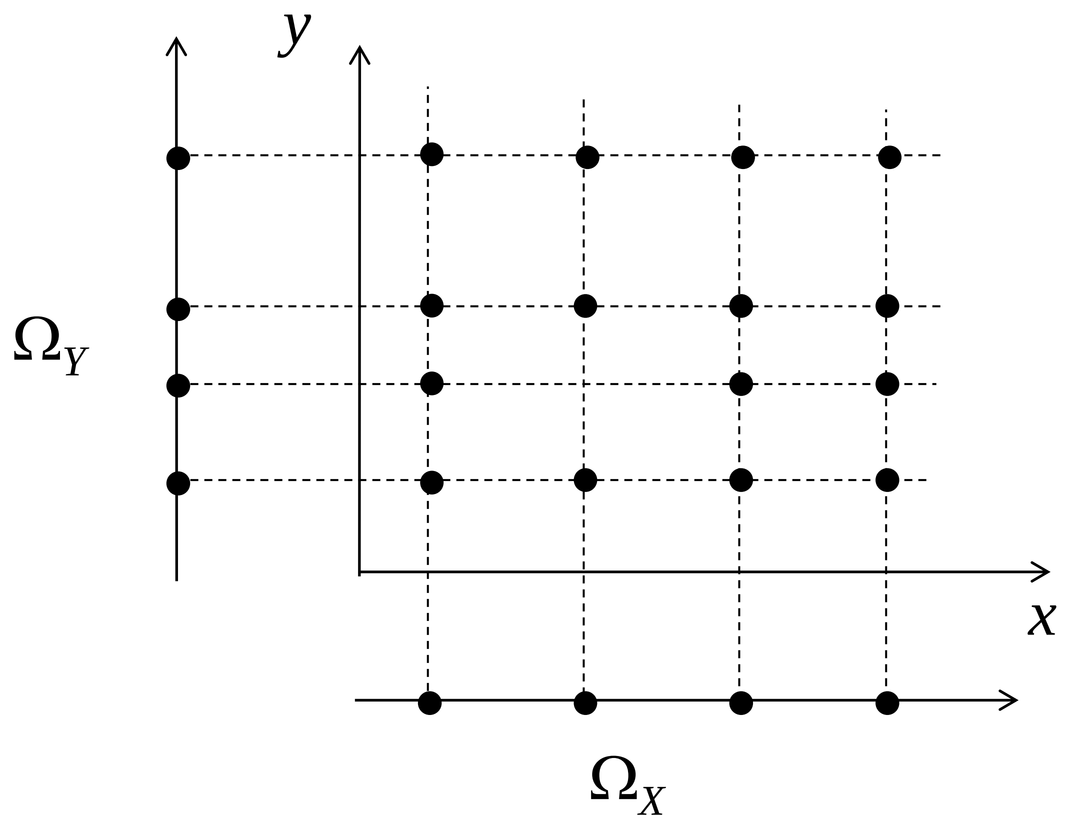

$$A = \{(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_7)\}$$
$$P[A] = P[\{(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_7)\}]$$
$$P[A] = P[\{(A \cap B_1)\}] + P[\{(A \cap B_2)\}] + \ldots + P[\{(A \cap B_7)\}]$$

# Regra da probabilidade total




$$P[A] = \sum_{i=1}^{n} P[A \cap B_i] = \sum_{i=1}^{n} P[A \mid B_i] P[B_i]$$

# Distribuição de probabilidade conjunta



# Função de probabilidade conjunta

- A variável aleatória $X,Y$ tem função de probabilidade $p_{\mathrm{X,Y}}(x, y)$ que determina a probabilidade de ocorrência conjunta dos eventos $X = x$ e $Y = y$ no experimento
- $p_{X,Y}(x, y) = P[X=x, Y=y]$, $x \in \Omega_X$ e $y \in \Omega_Y$

# Exemplo 6

- Seja o experimento de lançamento de duas moedas, uma de R$1,00 (variável $X$) e uma de R$0,50 (variável $Y$)
- As duas variáveis assumem valor 0 se a face sorteada for cara e o valor 1 se a face sorteada for coroa

| (0, 0) | $p_{X,Y}(x,y)$ |
|---|---|
| (0, 0) | 1/4 |
| (0, 1) | 1/4 |
| (1, 0) | 1/4 |
| (1, 1) | 1/4 |

| $X$ \ $Y$ | 0 | 1 |
|---|---|---|
| 0 | 1/14 | 1/14 |
| 1 | 1/14 | 1/14 |

# Função de probabilidade condicional

$$p_{X|Y}(x,y) = P[X = x|Y = y] = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

# Exemplo 7

- Um meteorologista prevê corretamente o tempo de certa localidade em 80% dos dias de sol (a probabilidade de o meteorologista prever corretamente o tempo dado que o dia é ensolarado é 0,8), e em 60% dos dias nublados (probabilidade de o meteorologista prever corretamente o tempo dado que o dia **não** é ensolarado é 0,6).
- Se 70% dos dias são ensolarados na localidade (probabilidade do dia ser ensolarado = 0,7)
- Qual a probabilidade do meteorologista acertar?
- Variáveis aleatórias:
  - $X = 1$ "meteorologista prevê corretamente o tempo"
  - $X = 0$ "meteorologista não prevê corretamente o tempo"
  - $Y = 1$ "o dia é ensolarado"
  - $Y = 0$ "o dia é ensolarado"

# Exemplo 7

- Probabilidade de o meteorologista prever corretamente o tempo dado que o dia é ensolarado é 0,8
  - $P[X = 1 \mid Y = 1] = 0{,}8$
- Probabilidade de o meteorologista prever corretamente o tempo dado que o dia **não** é ensolarado é 0,6
  - $P[X = 1 \mid Y = 0] = 0{,}6$
- Probabilidade do dia ser ensolarado é 0,7
  - $P[Y = 1] = 0{,}7$ $\qquad$ $P[Y = 0] = 0{,}3$
- Qual a probabilidade do meteorologista acertar?
  - $P[X = 1] = ?$
- Regra de probabilidade total
  - $P[X = 1] = P[X = 1 \mid Y = 1]\, P[Y = 1] + P[X = 1 \mid Y = 0]\, P[Y = 0]$
  - $P[X = 1] = 0{,}8 \cdot 0{,}7 + 0{,}6 \cdot 0{,}3 = 0{,}56 + 0{,}18 = 0{,}74$

# Avaliação de Desempenho

Probabilidade Condicional