24. Suponha que você usou os passos do Exemplo 9 para tentar mostrar que $\sqrt{4}$ não é um número racional. Em qual passo a prova não seria válida?

25. Prove que $\sqrt{3}$ não é um número racional.

26. Prove que $\sqrt{5}$ não é um número racional.

27. Prove que $\sqrt[3]{2}$ não é um número racional.

★28. Prove ou apresente um contra-exemplo: O produto de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

29. Prove ou apresente um contra-exemplo: A soma de quaisquer três inteiros consecutivos é par.

30. Prove ou apresente um contra-exemplo: O produto de um inteiro pelo seu quadrado é par.

★31. Prove ou apresente um contra-exemplo: A soma de um inteiro com o seu cubo é par.

32. Prove ou apresente um contra-exemplo: Para um inteiro positivo x, $x + \frac{1}{x} \geq 2$.

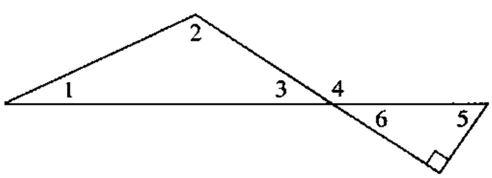
33. Prove ou apresente um contra-exemplo: Para todo número primo n, $n + 4$ é primo.

34. Prove ou apresente um contra-exemplo: O produto do dois números irracionais é irracional.

★35. Prove ou apresente um contra-exemplo: A soma de dois números racionais é racional.

Para os exercícios 36 a 38, use a figura abaixo e os seguintes fatos da geometria:

- A soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°.
- Ângulos opostos pelo vértice (ângulos opostos que são formados quando duas linhas se interceptam) têm a mesma medida.
- Um ângulo raso mede 180°.
- Um ângulo reto mede 90°.



36. Prove que a medida do ângulo 4 é a soma das medidas dos ângulos 1 e 2.

★37. Prove que a medida do ângulo 5 mais a medida do ângulo 3 é 90°.

38. Se o ângulo 1 e o ângulo 5 têm a mesma medida, então o ângulo 2 é um ângulo reto.

Seção 2.2 Indução

O Método

Existe uma última técnica de demonstração que se aplica a determinadas situações. Para ilustrar o uso desta técnica, imagine que você está subindo em uma escada sem fim. Como você pode saber se será capaz de alcançar um degrau arbitrariamente alto? Suponha que você faça as seguintes afirmações sobre as suas habilidades de subir escadas:

1. Você pode alcançar o primeiro degrau.
2. Se você alcançar um degrau, você pode sempre passar ao degrau seguinte. (Note que esta asserção é uma implicação.)

Tanto a sentença 1 como a implicação na sentença 2 são verdadeiras; então, pela sentença 1 você pode chegar ao primeiro degrau e pela sentença 2 você pode chegar ao segundo; novamente pela 2 você pode chegar ao terceiro; pela sentença 2 novamente você pode chegar ao quarto degrau, e assim sucessivamente. Você pode, então, subir tão alto quanto você queira. Neste caso, ambas as asserções são necessárias. Se apenas a sentença 1 é verdadeira, você não tem garantias de que poderá ir além do primeiro degrau, e se apenas a segunda sentença é verdadeira, você poderá não chegar ao primeiro degrau a fim de iniciar o processo de subida da escada. Vamos assumir que os degraus da escada são numerados com os números inteiros positivos — 1, 2, 3, e assim por diante. Agora vamos considerar uma propriedade específica que um número pode ter. Ao invés de "alcançarmos um degrau arbitrário" podemos mencionar que um inteiro positivo arbitrário tem essa propriedade. Usaremos a notação simplificada $P(n)$ para denotar que o inteiro positivo n tem a propriedade P. Como podemos usar a técnica de subir escadas para provar que para todos inteiros positivos n nós temos $P(n)$? As duas afirmações de que precisamos para a demonstração são:

1. P(1)	(1 tem a propriedade P.)
2. Para qualquer inteiro positivo k, $P(k) \rightarrow P(k+1)$	(Se algum número tem a propriedade P, então o número seguinte também a tem.)

Se pudermos demonstrar as sentenças 1 e 2, então $P(n)$ vale para qualquer inteiro positivo n, da mesma maneira que nós podemos subir até um degrau arbitrário na escada.

O fundamento deste tipo de argumentação é chamado **princípio de indução matemática,** que pode ser enunciado como

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{1. } P(1) \text{ verdadeira} \\ \textbf{2. } (\forall k)[P(k) \text{ verdadeira} \rightarrow P(k+1) \text{verdadeira}]\end{array}\right\} \rightarrow P(n) \text{ verdadeira para todos os } n \text{ inteiros positivos}$$

O princípio da indução matemática é uma implicação. A tese desta implicação é uma sentença da forma "P(n) é verdadeira para todos os n inteiros positivos". Portanto, sempre que desejamos demonstrar que alguma propriedade é válida para todo inteiro positivo n, uma tentativa é o uso da indução matemática como técnica de demonstração.

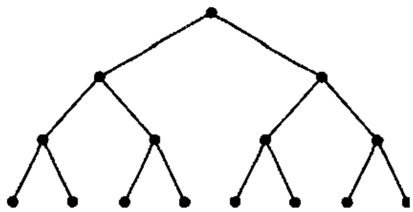
Para averiguarmos que a tese desta implicação é verdadeira, mostramos que as duas hipóteses, ou seja, as afirmações 1 e 2 são verdadeiras. Para demonstrar a afirmação 1, precisamos apenas mostrar que a propriedade P vale para o número 1, o que é normalmente uma tarefa trivial. Para demonstrar a afirmação 2, uma implicação que deve valer para todo k, assumimos que $P(k)$ é verdadeira para um inteiro arbitrário k, e baseados nesta hipótese mostramos que $P(k+1)$ é verdadeira. Você deve convencer a si próprio que assumir a propriedade P como válida para o número k não é a mesma coisa que assumir o que desejamos demonstrar (uma freqüente fonte de confusão, quando nos deparamos pela primeira vez com este tipo de demonstração). Assumi-la como verdadeira é simplesmente o caminho para elaborar a prova de que a implicação $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira.

Ao desenvolver uma demonstração por indução, estabelecemos inicialmente a veracidade da sentença 1, $P(1)$, que é chamada de **base da indução** ou **passo básico,** para a demonstração indutiva. Estabelecer que a sentença $P(k) \rightarrow P(k+1)$ é verdadeira constitui o **passo indutivo.** Quando assumimos que $P(k)$ é verdadeira com o intuito de demonstrar o passo indutivo, $P(k)$ *é* chamado de **suposição indutiva,** ou **hipótese indutiva.**

Todos os métodos de demonstração sobre os quais comentamos neste capítulo são técnicas de raciocínio dedutivo — formas de demonstrar uma conjectura que possivelmente foi formulada por um raciocínio indutivo. A indução matemática também é uma técnica *dedutiva,* e não um método para o raciocínio indutivo (procure não ficar confuso com a terminologia utilizada aqui). Para outras técnicas de demonstração, podemos começar com as hipóteses, e encadear fatos até que mais ou menos tropecemos em uma solução. De fato, mesmo que nossa conjectura seja ligeiramente incorreta, provavelmente acabamos por verificar a tese correta no decorrer do processo de demonstração. Na indução matemática, entretanto, devemos saber no princípio a forma exata da propriedade $P(n)$ que estamos tentando estabelecer. A indução matemática, portanto, não é uma técnica de demonstração exploratória — ela pode apenas confirmar uma conjectura correta.

Demonstrações Indutivas

Suponha que o Sr. Silva casou-se e teve dois filhos. Vamos chamar estes dois filhos de geração 1. Agora suponha que cada um desses dois filhos teve dois filhos; então na geração 2 temos quatro descendentes. Este processo continua de geração em geração. A árvore genealógica da família Silva é semelhante à Fig. 2.1. (Que é exatamente igual à Fig. 1.1b, onde buscamos os possíveis valores T-F para as n letras de afirmações.)



Geração	Descendentes
1	$2 = 2^1$
2	$4 = 2^2$
3	$8 = 2^1$

Figura 2.1

Aparentemente a geração *n* tem 2" descendentes. De maneira mais formal, se fizermos *P(n)* denotar o número de descendentes na geração *n,* então nossa suposição será

P(n) = 2"

Podemos usar a indução para *demonstrar* que nosso palpite para *P(n) está* correto.
A base da indução é estabelecer *P(*1), que resulta a equação

$$P(1) = 2^1 = 2$$

Que é verdadeira, posto que foi informado que o Sr. Silva tinha dois filhos. Agora vamos supor que nossa premissa é verdadeira para uma geração arbitrária *k,* ou seja, assumimos que

$$P(k) = 2^k$$

e tentaremos mostrar que

$$P(k+l) \quad = 2^{k+l}$$

Nesta família, cada descendente tem dois filhos; então o número de descendentes na geração $k + 1$ será o dobro do da geração índice *k,* ou seja, $P(k + 1) = 2\,P(k)$. Pela hipótese de indução, $P(k) = 2^k$, logo

$$P(k+ 1) = 2\,P(k) = 2(2^k) = 2^{k+1}$$

então, de fato,

$$P(k+ 1) = 2^{k+1}$$

Isto completa a nossa demonstração por indução. Agora que sabemos como resolver o problema simples do clã dos Silva, podemos aplicar a técnica de demonstração por indução em problemas menos óbvios.

EXEMPLO 10 Prove que a equação

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2 \tag{1}$$

é verdadeira para qualquer inteiro positivo *n*. Neste caso, a propriedade *P(n)* é que a equação (1) acima é verdadeira. O lado esquerdo desta equação é a soma de todos os inteiros ímpares de 1 até 2*n* — 1. Ainda que possamos verificar que a equação é verdadeira para um particular valor de *n* pela substituição deste valor na equação, nós não podemos substituir todos os possíveis valores inteiros positivos. Por isso, uma demonstração por exemplos não funciona. É mais apropriada uma demonstração por indução matemática.
O passo básico é estabelecer *P(1),* que é o valor da equação (1) quando n assume o valor 1, ou seja

$$1 = 1^2$$

Isto certamente é verdadeiro. Para a hipótese de indução, vamos assumir *P{k)* como verdadeira para um inteiro positivo arbitrário *k,* que é o valor da equação (1) quando *n* vale *k,* ou seja

$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2k-l) = k^2 \tag{2}$$

(Note que *P(k) não* é a equação *(2k—* 1) = k^2 *que* só é verdadeira quando *k* = 1.) Usando a hipótese de indução, queremos mostrar *P(k +* 1) que é o valor da equação (1) quando *n* assume o valor*k* + 1, ou seja:

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] = (k - 1)^2 \tag{3}$$

(O pequeno ponto de interrogação sobre o sinal de igualdade serve para nos lembrar que é este fato que desejamos provar, a partir de um outro fato já conhecido.)

A chave para uma demonstração por indução é encontrar uma forma de relacionar o que se deseja mostrar — *P(k* + 1), equação (3) — com o que assumimos como verdadeiro — *P(k),* equação (2). O lado esquerdo de *P(k* +1) pode ser reescrito a fim de destacar o penúltimo termo:

$$1 + 3 + 5 + - + (2k - 1) + [2(k + 1) - 1]$$

Esta expressão contém do lado esquerdo a equação (2) como subexpressão. Como assumimos que *P(k)* é verdadeira, podemos substituir esta expressão pelo lado direito da equação (2). Senão vejamos:

$$\begin{aligned} &1 + 3 + 5 + - + [2(k+1) - 1] \\ &\quad = 1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + [2(k+1) - 1] \\ &\quad = k^2 + [2(k+1) - 1] \\ &\quad = k^2 + [2k + 2 - 1] \\ &\quad = k^2 + 2k + 1 \\ &\quad = (k + 1)^2 \end{aligned}$$

Portanto

$$1 + 3 + 5 + \ldots + [2(k + 1) - 1] = (k + 1)^2$$

o que verifica *P(k* + 1) e prova que a equação (1) é verdadeira para qualquer inteiro positivo *n*. •

EXEMPLO 11 Prove que

$$1 + 2 + 2^2 + - + 2^n = 2^{n+1} - 1$$

para qualquer *n* > 1.

Aqui, novamente, a indução é a técnica mais apropriada. *P(\)* é a equação

$$1 + 2 = 2^{1+1} - 1 \text{ ou } 3 = 2^2 - 1$$

que é verdadeira. Consideremos agora *P(k)*

$$1 + 2 + 2^2 + - + 2^k = 2^{k+1} - 1$$

como a hipótese de indução, e busquemos obter *P(k*+1):

$$1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} \stackrel{?}{=} 2^{k+1+1} - 1$$

Agora, se reescrevermos a soma do lado esquerdo de *P(k*+ 1), obtemos uma forma de usar a hipótese de indução:

$$\begin{aligned} &1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^{k+1} \\ &= 1 + 2 + 2^2 + \ldots + 2^k + 2^{k+1} \\ &= 2^{k+1} - 1 + 2^{k+1} \quad \text{(da hipótese de indução } P(k)) \\ &= 2(2^{k+1}) - 1 \\ &= 2^{k+1+1} - 1 \end{aligned}$$

Portanto

$$1 + 2 + 2^2 + - + 2^{k+1} = 2^{k+1+1} - 1$$

que verifica *P(k*+1) e completa a demonstração.

PRÁTICA 6 Prove que para qualquer inteiro positivo n,

$$1 + 2 + 3 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$ ◆

Nem todas as demonstrações por indução envolvem fórmulas com somas. Outras identidades algébricas sobre inteiros positivos podem ser demonstradas por indução, bem como suposições não-algébricas, como o número de descendentes na geração n da família Silva.

EXEMPLO 12 Demonstre que, para qualquer inteiro positivo n, $2^n > n$.

P(1) é a sentença $2^1 > 1$ que é, sem dúvida, verdadeira. Suponhamos agora $P(k)$, $2^k > k$, como verdadeira, e procuremos concluir a partir daí $P(k+1)$, $2^{k+1} > k + 1$. Começando pelo lado esquerdo de $P(k+1)$, temos que $2^{k+1} = 2^k \cdot 2$. Usando a hipótese de indução $2^k > k$ e multiplicando ambos os lados dessa desigualdade por 2, temos $2^k \cdot 2 > k \cdot 2$. Podemos escrever então que:

$$2^{k+1} = 2^k \cdot 2 > k \cdot 2 = k + k \geq k + 1$$

o que resulta em

$$2^{k+1} > k + 1$$ •

EXEMPLO 13 Prove que, para qualquer inteiro positivo n, o número $2^{2n} - 1$ é divisível por 3.

A base da indução é mostrar $P(1)$, ou seja, mostrar que $2^{2(1)} - 1 = 4 - 1 = 3$ é divisível por 3, o que obviamente é verdadeiro.

Assumimos que $2^{2k} - 1$ é divisível por 3, o que equivale a escrever $2^{2k} - 1 = 3m$ para algum inteiro m, ou $2^{2k} = 3m + 1$. Desejamos mostrar que $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3.

$$\begin{aligned}
2^{2(k+1)} - 1 &= 2^{2k+2} - 1 \\
&= 2^2 \cdot 2^{2k} - 1 \\
&= 2^2 \cdot (3m+1) - 1 \quad \text{(pela hipótese de indução)} \\
&= 12m + 4 - 1 \\
&= 12m + 3 \\
&= 3\,(4m + 1) \text{ onde } 4m + 1 \text{ é um inteiro.}
\end{aligned}$$

Logo $2^{2(k+1)} - 1$ é divisível por 3. •

Em alguns casos, pode ser que, para o primeiro passo do processo de indução, seja mais apropriado começar com valores 0, 2, ou 3, ao invés de 1. O mesmo princípio se aplica, qualquer que seja o degrau da escada que você alcance no primeiro passo.

EXEMPLO 14 Prove que $n^2 > 3n$ para $n \geq 4$.

Neste exemplo devemos aplicar a indução e começar com um passo inicial $P(4)$. (Se testarmos para valores de $n = 1, 2$ e 3, verificaremos que a desigualdade não se verifica.) $P(A)$ é então a desigualdade $4^2 > 3(4)$, ou $16 > 12$, que é verdadeira. A hipótese de indução é $k^2 > 3k$, para $k > 4$, e queremos mostrar que $(k+1)^2 > 3(k+1)$.

$$\begin{aligned}
(k+1)^2 &= k^2 + 2k + 1 \\
&> 3k + 2k + 1 \quad \text{(pela hipótese de indução)} \\
&\geq 3k + 8 + 1 \quad (\text{já que } k \geq 4) \\
&> 3k + 3 \\
&= 3(k+1)
\end{aligned}$$

PRÁTICA 7 Prove que $2^{n+1} < 3^n$ para todo $n > 1$. •

Podemos lançar mão de uma prova por indução para aplicações que não sejam tão óbvias quanto às dos exemplos acima. Isto geralmente acontece quando a sentença que desejamos demonstrar contém uma variável que pode assumir valores inteiros arbitrários e não-negativos.

EXEMPLO 15 Uma linguagem de programação pode ser projetada com as seguintes convenções no que se refere à multiplicação. Um fator simples não requer parênteses, mas o produto "o vezes b" deve ser escrito como $(a)b$. Desejamos mostrar que qualquer produto de fatores precisa de um número par de parênteses para ser escrito. A prova é feita por indução, considerando-se como variável o número de fatores. Para um único fator usa-se 0 (zero) parêntese, um número par. Suponhamos que para qualquer produto de k fatores, usamos um número par de parênteses. Consideremos agora o produto P de $k+1$ fatores. P pode ser escrito na forma r vezes s, onde r tem k fatores e s é um fator único. Pela hipótese de indução, r tem um número par de parênteses. Então pode-se escrever r vezes s como $(r)s$, adicionando-se mais dois parênteses ao número par de parênteses em r, e resultando assim um número par de parênteses para P. •

É possível se enganar ao construir uma prova por indução. Quando demonstramos que $P(k+1)$ é verdadeira, sem nos valermos da hipótese $P(k)$, nós elaboramos uma prova direta de $P(k+1)$, onde $k+1$ é arbitrário. A prova deveria ser reescrita para explicitar que é uma prova direta de $P(n)$ para qualquer n, e não uma prova por indução.

Indução Completa

O princípio da indução que tem sido utilizado,

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{1. } P(1) \text{ verdadeira}\\ \textbf{2. } (\forall k)[P(k) \text{ verdadeira} \rightarrow P(k+1) \text{verdadeira}]\end{array}\right\} \rightarrow P(n) \text{ verdadeira para todos os } n \text{ inteiros positivos.}$$

é também conhecido como **indução fraca** em oposição ao princípio da **indução forte** ou **indução completa:**

$$\left.\begin{array}{l}\textbf{1}'\textbf{.}\ P(1) \text{ verdadeira}\\ \textbf{2}'\textbf{.}\ (\forall k)[P(r) \text{ verdadeira para todo } r\\ \quad 1 \leq r \leq k \rightarrow P(k+1) \text{ verdadeira}]\end{array}\right\} \rightarrow P(n) \text{ verdadeira para todos os } n \text{ inteiros positivos.}$$

Estes dois princípios de indução diferem nos itens 2 e 2'. No item 2, devemos ser capazes de provar para um inteiro positivo arbitrário k que $P(k+1)$ é verdadeira, tendo por base apenas a premissa de que $P(k)$ é verdadeira. No item 2', podemos assumir que $P(r)$ é verdadeira para todos os inteiros r entre 1 e um inteiro positivo arbitrário k, para provar que $P(k+1)$ é verdadeira. Este fato nos fornece uma boa "munição", de tal forma que podemos algumas vezes ser capazes de provar a implicação em 2', quando não podemos provar a implicação em 2.

O que nos leva a deduzir $(\forall n)P(n)$ em cada caso? Devemos notar que os dois princípios de indução, ou seja, os dois métodos de demonstração são equivalentes. Em outras palavras, se aceitarmos a indução fraca como um princípio válido, então o princípio da indução forte também será válido e vice-versa. Para provar a equivalência entre esses dois princípios de indução, apresentamos um outro princípio chamado **princípio da boa ordenação:** Toda coleção de números inteiros positivos que contenha pelo menos um elemento tem um mínimo.

Devemos então verificar que as seguintes implicações são verdadeiras:

indução forte $\rightarrow$ indução fraca
indução fraca $\rightarrow$ princípio da boa ordenação
princípio da boa ordenação $\rightarrow$ indução forte

Como conseqüência, estes princípios são equivalentes, e aceitar qualquer um dos três como verdadeiro significa aceitar também os outros dois.

Para provar que o princípio da indução forte implica a indução fraca, suponhamos como premissa válida a indução forte. Desejamos então mostrar que a indução fraca é válida, ou seja, que podemos concluir $P(n)$ para todo n a partir das afirmações 1 e 2. Se a afirmação 1 é verdadeira, então a afirmação 1' também o é. Se a afirmação 2 é verdadeira, a 2' também é, porque podemos concluir $P(k+1)$ a partir de $P(r)$ para todo r entre 1 e k, apesar de usarmos apenas a condição $P(k)$. (Mais precisamente, a sentença 2' requer que provemos $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$, mas $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k)$ e, da afirmação 2, $P(k) \rightarrow P(k+1)$, logo $P(1) \wedge P(2) \wedge \cdots \wedge P(k) \rightarrow P(k+1)$. Pela indução forte, concluímos $P(n)$ para todo n. A prova de que a indução fraca implica a boa ordenação, e que a boa ordenação implica a indução forte, é deixada como exercício na Seção 3.1.

A fim de ilustrar a diferença entre uma demonstração por indução fraca de uma demonstração por indução forte, vamos examinar um exemplo pitoresco que pode ser demonstrado das duas formas.

EXEMPLO 16 Prove que uma cerca de madeira com n estacas tem $n-1$ seções para qualquer $n \geq$ i (veja Fig. 2.2a).

Seja $P(n)$ a sentença de que a cerca com n estacas tem $n-1$ seções, e provemos que *P{n)* é verdadeira para todo $n \geq 1$.

Usaremos inicialmente a indução fraca. Pela base da indução, $P(1)$ assegura que uma cerca com apenas uma estaca tem 0 seções, o que é claramente verdadeiro (veja Fig. 2.2b). Assuma que $P(k)$ é verdadeira:

uma cerca com k estacas tem $k-1$ seções

e tente provar $P(k+1)$:

(?) uma cerca com $k+1$ estacas tem k seções

Dada uma cerca com $k+1$ estacas, como podemos relacioná-la com uma cerca com k estacas a fim de podermos utilizar a hipótese de indução? Podemos remover de uma cerca a última estaca e a última seção (Fig. 2.2c). A cerca remanescente tem então k estacas, e pela hipótese de indução, $k-1$ seções. Portanto, a cerca original tinha k seções.

Demonstraremos agora o mesmo resultado utilizando a indução forte. A base da indução é a mesma de antes. Como hipótese de indução, assumimos que:

para todo r, $1 \leq r \leq k$, uma cerca com r estacas tem $r-1$ seções

e tentaremos provar $P(k+1)$:

(?) uma cerca com $k+1$ estacas tem k seções.

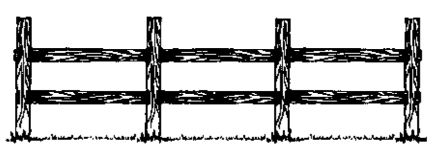
Consideremos uma cerca com $k+1$ estacas, e vamos separá-la em duas partes, removendo uma seção (Fig. 2.2d). As duas partes da cerca têm r_1 e r_2 estacas, onde $1 \leq r_1 \leq k$, $1 \leq r_2 \leq k$ e $r_1 + r_2 = k + 1$. Pela hipótese de indução, as duas partes têm, respectivamente, $r_1 - 1$ e $r_2 - 1$ seções, logo a cerca original tem:

$(r_1 - 1) + (r_2 - 1) + 1$ seções

(O extra 1 corresponde à seção que foi anteriormente removida.) Através de aritmética simples, conclui-se que

$r_1 + r_2 - 1 = (k + 1) - 1 = k$ seções.

Este resultado prova que uma cerca com $k+1$ estacas tem k seções, o que verifica $P(k+1)$ e completa a demonstração por indução forte. •



Cerca com 4 estacas e 3 seções

(a)

Cerca com 1 estaca e 0 seções

(b)

Cerca com a última estaca e a última seção removidas

(c)

Cerca com uma seção removida

(d)

Figura 2.2

O exemplo anterior permitiu o uso das duas formas de demonstração por indução porque é possível remover a última parte da cerca ou ainda separá-la em duas partes a partir de um ponto arbitrário. Para alguns problemas a indução forte é a técnica de demonstração mais indicada, sendo que, para alguns dos quais, o seu uso é absolutamente necessário.

EXEMPLO 17 Prove que para todo $n \geq 2$, n é um número primo ou é um produto de números primos.

Usaremos a indução forte; da mesma forma que na indução fraca, a base da indução não precisa começar com o valor 1, e aqui, por motivos óbvios, começaremos pelo valor 2. P(2) é a sentença de que 2 é um número primo ou o produto de dois primos. Como 2 é primo, $P(2)$ é verdadeira. Suponhamos que para todo r, $2 \leq r \leq k$, $P(r)$ é verdadeira — r é primo ou é o produto de números primos. Tomemos agora o número $k+1$. Se $k+1$ é primo, o resultado se verifica. Se $k+1$ não é primo, então ele é um número composto e pode ser escrito como $k+1 = ab$, onde $1 < a < k+1$ e $1 < b < k+1$, ou $2 \leq a \leq k$ e $2 \leq b \leq k$. A hipótese de indução se aplica a a e a b e, portanto, *ou at b* são primos ou são produtos de primos. Logo $k+1$ é o produto de números primos. Isto verifica $P(k+1)$ e completa a prova por indução forte. •

EXEMPLO 18 Prove que qualquer valor postal maior ou igual a oito unidades monetárias pode ser obtido usando-se apenas selos com valores de 3 e 5.

Aqui faremos $P(n)$ denotar que apenas selos nos valores de 3 e 5 são necessários para se obter um valor postal n, e provaremos que $P(n)$ é verdadeira para $n \geq 8$. A base da indução consiste em estabelecer P(8), que resulta da equação

$$8 = 3 + 5$$

Por motivos que oportunamente ficarão mais claros, vamos estabelecer dois resultados adicionais, $P(9)$ e $P(10)$ obtidos das equações

$$9 = 3 + 3 + 3$$
$$10 = 5 + 5$$

Vamos assumir então que $P(r)$ é verdadeira para qualquer r, $8 \leq r \leq k$, e examinar o que ocorre com $P(k+1)$. Podemos assumir que $k+1$ é no mínimo 11, posto que já foi mostrado que $P(r)$ é verdadeira para r = 8, 9e 10. Se $k+1 \geq 11$, vem $(k+1) - 3 = k - 2 \geq 8$, e pela hipótese de indução, $P(k-2)$ é verdadeira ($P(r)$ é verdadeira para $8 \leq r \leq k$). Portanto $k-2$ pode ser escrita como a soma de 3s e 5s, e adicionando-se o valor 3 obtém-se $k-2+3 = k+1$, o que implica que $k+1$ pode ser escrito como a soma de 3s e 5s. Este resultado comprova que $P(k+1)$ é verdadeira e completa a demonstração.

PRÁTICA 8

a. Por que os casos $P(9)$ e $P(10)$ são provados separadamente no Exemplo 18?
b. Por que não podemos usar indução fraca na demonstração do Exemplo 18? •

Revisão da Seção 2.2

Técnicas

- Uso da indução fraca em demonstrações
- Uso da indução forte em demonstrações

Idéias Principais

A indução matemática é uma técnica usada para demonstrar propriedades de números inteiros positivos.

Uma demonstração por indução não precisa começar no valor 1.

A indução pode ser usada para demonstrar resultados sobre quantidades, cujos valores são inteiros não-negativos arbitrários.

A indução fraca e a indução forte podem ser usadas para demonstrarem o mesmo resultado; no entanto, dependendo da situação, uma ou outra abordagem pode ser mais fácil de ser utilizada.