Avaliação de Desempenho de Sistemas

Variáveis Aleatórias Discretas

Variáveis aleatórias

- Muitos fenômenos aleatórios têm resultados numéricos
- $\Omega \subseteq \mathbf{R}$
  - Tempo de vida de um equipamento
  - Tempo de chegada de um pacote em um switch
  - ...
- $\Omega \subseteq \mathbf{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$
  - O número de carros que passa por um ponto de controle em uma rodovia em certo intervalo de tempo
  - O número de pacotes que chegou a um roteador de uma rede em certo intervalo de tempo
  - O número de pessoas entrevistadas que vai votar em certo candidato
  - ...

Variáveis aleatórias

- Mesmo quando Ω não é numérico, podemos desejar um novo espaço para Ω que seja numérico
- No lançamento de uma moeda
  - $\Omega = \{ \text{Cara}, \text{Coroa} \}$
  - Poderíamos representar $\Omega = \{ 0, 1\}$, através do mapeamento Cara$\rightarrow$0 e Coroa$\rightarrow$1

Variáveis aleatórias

Uma variável aleatória associa cada elemento de Ω a um valor numérico

Ω_X é o conjunto de todos os valores possíveis da variável aleatória X

Para que servem

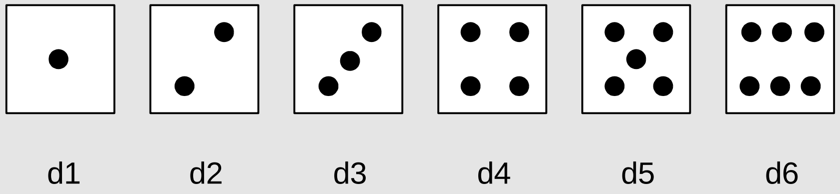
- É mais adequado para o tratamento matemático
- Os conjuntos que representam os eventos são ser representados por expressões matemáticas envolvendo as variáveis aleatórias

Variáveis Aleatórias Discretas

- Quando os valores possíveis de X for finito ou infinito enumerável, dizemos que X é discreta

Exemplo 1

- No lançamento de um dado equilibrado
  d_i = "número de pontos observados na face superior"



- $\Omega = \{d_1, d_2, d_3, d_4, d_5, d_6\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- $\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Exemplo 2

- Seja o experimento de lançamento de uma moeda até que saia a primeira cara
- Seja x o número de lançamentos observados até que a primeira cara seja observada
- $\Omega_X = \{1, 2, 3, ...\}$.

Probabilidade de Eventos

- A probabilidade de uma expressão matemática qualquer envolvendo a variável *X* pode ser calculada encontrando-se o evento correspondente
- O evento (que corresponde a um conjunto) é representando por uma expressão matemática

$\Omega_{X=}\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $\{x \in \Omega_X \mid 0<x<7\}$

$\{2, 4, 6\}$ $\{x \in \Omega_X \mid x \text{ é par } \}$ $\{x \in \Omega_X \mid \text{mod}(x,2)=0\}$

Exemplo 3

- Para o lançamento de um dado calcular $P[X \leq 2]$ e $P[X > 3]$.

$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

- $P[X \leq 2] = P[\{1, 2\}] = P[\{$⚀, ⚁$\}] = 2/3$ $\qquad \{x \in \Omega_X \mid 1 \leq x \leq 2\}$
- $P[X > 3] = P[\{4, 5, 6\}] = P[\{$⚃, ⚄, ⚅$\}] = 1/2$ $\qquad \{x \in \Omega_X \mid 3 < x \leq 6\}$

Função de Probabilidade

- Dada uma variável aleatória X, sua função de distribuição p_X é a função
  - $p_X(x) = P[X = x]$
  - Também chamada de *pdf* (probability distribution function)
  - Também chamada de *pmf* (probability mass function)

Exemplo 4

- Lançamento do dado

$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

x	$p_X(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

$p_X(x) = 1/6$

$P[\mathrm{X} > 3] = P[\{4, 5, 6\}] =$

$P[\{4\}] + \mathrm{P}[\{5\}] + \mathrm{P}[\{6\}] =$

$p_X(4) + p_X(5) + p_X(6) =$

$P[X = 2] + P[X = 4] + P[X = 6]$

Função de Probabilidade

Propriedades

$$0 \leq p_X(x) \leq 1$$

$$\sum_x p_X(x) = 1$$

Função de Probabilidade

- Lançamento de dois dados equilibrados
  - X = “soma do número de pontos nos dois dados”
  - $\Omega_X = \{2, ..., 12\}$
  - Também chamada de *pmf* (probability mass function)
  - $P[X = x]$ pode ser representada pela seguinte tabela

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$p_X(x)$	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36

Exemplo 6

- Lançamento de uma moeda
- X = *"número de lançamentos até primeira cara"*

$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

x	$p_X(x)$	
1	$(1/2)^1$	Ca
2	$(1/2)^2$	Co Ca
3	$(1/2)^3$	Co Co Ca
...	...	
x	$(1/2)^x$	Co Co ... Co Ca

$$p_X(x) = (1/2)^x$$

Exemplo 6

- Lançamento de uma moeda
- X = *"número de lançamentos até primeira cara"*

$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, ...\}$

x	$p_X(x)$
1	$(1/2)^1$
2	$(1/2)^2$
3	$(1/2)^3$
...	...
x	$(1/2)^x$

$p_X(x) = (1/2)^x$

$P[\ X$ é par$] =$

$P[\{2, 4, 6, 8, ...\}] =$

$P[\{2\} \cup \{4\} \cup \{6\} \cup \{8\} \cup ...] =$

$P[\{2\}] + P[\{4\}] + P[\{6\}] + + ...]$

$P[X=2] + P[X=4] + ... =$

$p_X(2) + p_X(4) + p_X(6) + ... =$

$P[X = 2] + P[X = 4] + ...$

Função de Distribuição Acumulada

- Dada uma variável aleatória X, sua função de distribuição (acumulada) F_X é a função
  - $F_X(x) = P[X \leq x]$
  - Também chamada de *cdf*

Exemplo 7

- Lançamento de dado

$\Omega_X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

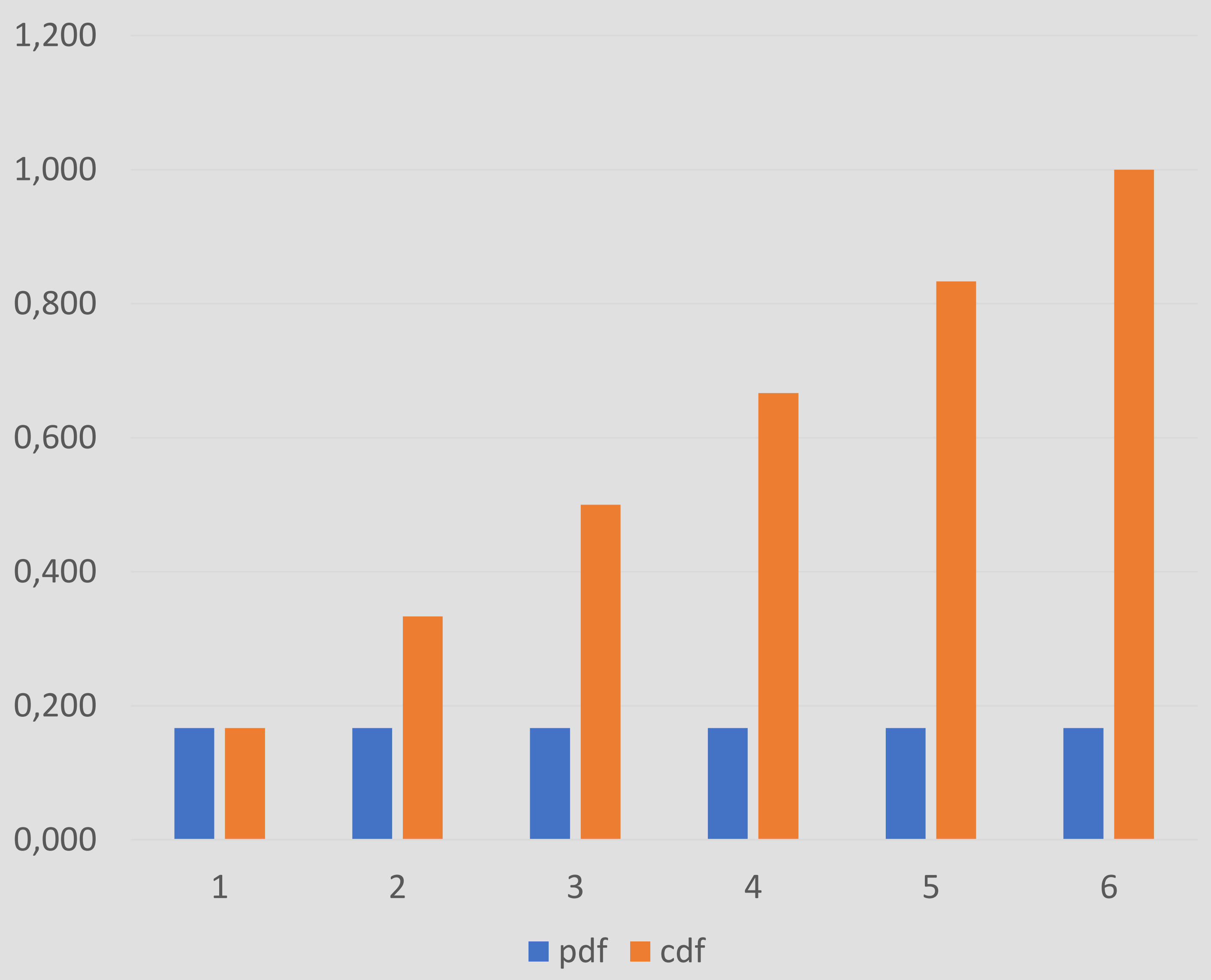
x	$p_X(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

x	$F_X(x)$
1	1/6
2	1/6 + 1/6 = 2/6
3	1/6 + 1/6+ 1/6 = 3/6
4	4/6
5	5/6
6	6/6

$p_X(x) = 1/6$

$F_X(x) = x/6$

Representação Gráfica



Valor Esperado

- É a média da distribuição de probabilidade

$$E[X]=\sum_{x} xP[X=x]=\sum_{x} x\cdot p_X(x)$$

Exemplo 8

- Lançamento de um dado

$$E[X] = \sum_{x} xP[X = x] = \sum_{x} x \cdot p_X(x)$$

x	$p_X(x)$
1	1/6
2	1/6
3	1/6
4	1/6
5	1/6
6	1/6

1*1/6 + 2*1/6 + 3*1/6 + 4*1/6 + 5*1/6 + 6*1/6

Variância

- A variância de uma variável aleatória X calcula o desvio quadrado médio de sua distribuição de probabilidade

$$V[X] = \sum_x (x - E[X])^2 P[X = x] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$$

Exemplo 9

- Calcular a variância para a variável aleatória correspondente ao valor observado no experimento de lançamento de um dado equilibrado

$$V[X] = \sum_x (x - E[X])^2 P[X = x] = \sum_x (x - E[X])^2 p_X(x)$$

$E[X] = 3{,}5$

$$V[X] = (1\text{-}3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (2\text{-}3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (3\text{-}3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (4\text{-}3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (5\text{-}3{,}5)^2 \cdot 1/6 + (6\text{-}3{,}5)^2 \cdot 1/6 =$$

$$= (\text{-}2{,}5)^2 \cdot 1/6 + (\text{-}1{,}5)^2 \cdot 1/6 + (\text{-}0{,}5)^2 \cdot 1/6 + (0{,}5)^2 \cdot 1/6 + (1{,}5)^2 \cdot 1/6 + (2{,}5)^2 \cdot 1/6 =$$

$$= (6{,}25 + 2,\ 25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25) / 6 = 2{,}917$$

Desvio Padrão

- Desvio padrão

$$DP[X] = \sqrt{V[X]}$$

Avaliação de Desempenho de Sistemas

Variáveis Aleatórias Discretas