Indução Matemática

Respostas

Exercícios

Prove que: $1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, n \geq 1.$

Reposta 01:

Prova (por indução matemática):

- ***Passo base:*** Para n = 1, $1^2 = 1$ e [n(n+1)(2n+1)] / 6 = [1 x 2 x 3] / 6 = 1.
  O passo base é verdadeiro.
- ***Passo indutivo:*** se a fórmula é verdadeira para n = k, k ≥ 1 então deve ser verdadeira para n = k+1.

Exercícios

Resposta 01:

Hipótese indutiva:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}, k \geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 \quad = \quad \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}$$

Exercícios

Resposta 01:

Sabe-se que:

$$
\begin{aligned}
1^2 + 2^2 + \ldots + k^2 + (k+1)^2 &= \frac{k(k+1)(2k+1)}{6} + (k+1)^2 \\
&= \frac{k(k+1)(2k+1) + 6(k+1)^2}{6} \\
&= \frac{(k+1)[k(2k+1) + 6(k+1)]}{6} \\
&= \frac{(k+1)[2k^2 + k + 6k + 6]}{6} \\
&= \frac{(k+1)(2k^2 + 7k + 6)}{6} \\
&= \frac{(k+1)(k+2)(2k+3)}{6}
\end{aligned}
$$

Exercícios

Prove que: $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2, n \geq 1.$

Reposta 02:

Prova (por indução matemática):

- ***Passo base:*** Para n = 1, 1 = 1^2. O passo base é verdadeiro.
- ***Passo indutivo:*** se a fórmula é verdadeira para n = k, k ≥ 1
  então deve ser verdadeira para n = k + 1.

Exercícios

Resposta 02:

Hipótese indutiva:

$$\boxed{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) = k^2, k \geq 1}$$

Deve-se mostrar que:

$$\boxed{1 + 3 + 5 + \ldots + (2k - 1) + (2k + 1) = (k + 1)^2, k \geq 1}$$

Exercícios

Resposta 02:

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 1+3+5+\ldots+(2k-1)+(2k+1) &= k^2+(2k+1) \\ &= (k+1)^2 \end{aligned}$$

Exercícios

Prove que: $$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = (1 + 2 + \ldots + n)^2, n \geq 1.$$

Reposta 03:

Prova: dividida em duas partes:

- prova do somatório do lado direito e substituição pela fórmula fechada, e
- prova do somatório do lado esquerdo.

Sabe-se que a soma 1 + 2 + . . . + n, n ≥ 1, vale [n(n+1)]/2 (esta prova pode ser obtida por indução matemática). Assim, tem-se que

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n \geq 1.$$

Exercícios

Prove que: $1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}, n \geq 1.$

Resposta 03:

Prova:

- ***Passo base:*** Para $n = 1$, $1^3 = [1^2(1+1)^2] / 4$.
  O passo base é verdadeiro.
- ***Passo indutivo:*** se a fórmula é verdadeira para $n = k$, $k \geq 1$ então deve ser verdadeira para $n = k+1$.

Exercícios

Resposta 03:

Hipótese indutiva:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}, k \geq 1$$

Deve-se mostrar que:

$$1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}, k \geq 1$$

Exercícios

Resposta 03:

Sabe-se que:

$$\begin{aligned}
1^3 + 2^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 &= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)(k+1)^2 \\
&= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + \frac{4(k+1)(k+1)^2}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k^2+4k+4)}{4} \\
&= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}
\end{aligned}$$

Exercícios

Prove que: $$2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2n = n^2 + n, n \geq 1.$$

Resposta 04:

Prova:

- ***Passo base:*** Para n = 1, 2 . 1 = 2 e $1^2 + 1 = 2$.
  O passo base é verdadeiro.
- ***Passo indutivo:*** se a fórmula é verdadeira para n = k, k ≥ 1 então deve ser verdadeira para n = k + 1.

Exercícios

Resposta 04:

Hipótese indutiva:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + 2k &= k^2 + k \\ &= k(k+1), k \geq 1 \end{aligned}$$

Deve-se mostrar que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2k + 2(k+1) &= (k+1)^2 + (k+1) \\ &= (k+1)[(k+1)+1] \\ &= (k+1)(k+2), k \geq 1 \end{aligned}$$

Exercícios

Resposta 04:

Sabe-se que:

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + \ldots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= k^2 + k + 2k + 2 \\ &= k^2 + 3k + 2 \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

Exercícios

Prove que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

Resposta 05:

Somando os primeiros termos e simplificando tem-se que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{4}{5}$$

o que leva a conjectura que para todos os inteiros positivos n,

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Exercícios

Prove que: $$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Resposta 05:

Prova:

- ***Passo base:*** Para n = 1, 1 / (2 . 1) = ½, que é a formula fechada. O passo base é verdadeiro.
- ***Passo indutivo:*** se a fórmula é verdadeira para n = k, k ≥ 1 então deve ser verdadeira para n = k+1.

Exercícios

Resposta 05:

Hipótese indutiva:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}=\frac{k}{k+1}$$

Deve-se mostrar que:

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \quad = \quad \frac{k+1}{k+2}$$

Exercícios

Resposta 05:

Sabe-se que:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{k(k+1)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} &= \frac{k}{k+1}+\frac{1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k(k+2)+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k^2+2k+1}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{(k+1)^2}{(k+1)(k+2)} \\
&= \frac{k+1}{k+2}
\end{aligned}
$$

Exercício Extra

- Encontre a fórmula fechada para a soma

$$\sum_{i=2}^{n} \frac{1}{(i-1)i},$$

- E para todo inteiro $n \geq 2$, prove o seu resultado por indução matemática.