Pontifícia Universidade Católica do Paraná
Escola Politécnica / Bacharelado em Ciência da Computação
Disciplina de Complexidade de Algoritmos / Prof. Edson Emilio Scalabrin
Prova: 15/04/2021

Estudante: Gustavo Hammerschmidt.

Regras: cada aluno deve realizar o seu teste de forma individual e entrega-lo até 21h00. A pontuação de cada questão está indicada na própria questão. Esse teste vale 10 pontos. Peso indicado no plano de ensino (50% do RA1 ou 15% da nota geral da disciplina).

A prova pode ser revolvida a mão em folha de papel, fotografada e as fotos inseridas em um arquivo. Esse arquivo salvo em PDF e postado no ***Blackboard***. Outra forma, resolver a prova usando um editor de texto e postar o PDF correspondente no ***Blackboard***.

QUESTÃO 01 (2p).
Dado o programa **P1** calcule a sua complexidade. Deve-se mostrar de forma detalhada o passo-a-passo para encontrar f(n), assim como para verificar a propriedade f(n)=O(g(n)). Todas as linhas de P1 (da 2 até a 14) devem ser incluídas na contagem dos comandos.

```
1   def P1( A ):                          # custo
2     # N é o tamanho do problema         # C0 . 0 = 0
3     N = len( A )                        # C1
4     for j in range(1, N, 1):            # C2
5       chave = A[ j ]                    # C3
6       i = j - 1                         # C4
7       while (i > -1) and (A[ i ] > chave):  # C5
8         A[ i + 1 ] = A[ i ]             # C6
9         i = i - 1                       # C7
10      A[ i + 1] = chave                 # C8
11      p = 0                             # C9
12      while (p < N):                    # C10
13        print(A[ p ])                   # C11
14        p = p + 1                       # C12
```

C1 <= 1; C2 <= N-1; C3 <= C2 * 1; C4 <= C2 * 1; C5 <= C2 * N (pior caso);

C6 <= C2 * N (pior caso); C7 <= C2 * N (pior caso);

C8 <= C2 * 1; C9 <= C2 * 1; C10 <= C2 * N; C11 <= C2 * N; C12 <= C2 * N;

f(n) = C1 + C2 + C3 + C4 + C5 + C6 + C7 + C8 + C9 + C10 + C11 + C12

f(n) = 1 + 5*(N-1) + 6 * (N-1) * N = 1 + 5N – 5 + 6N² - 6N = -4 - N + 6N²

f(n) = 6n² - n - 4

Para que a equação f(n) = O(g(n)) seja verdadeira, g(n) deve ser g(n) = n² e a constante deve ser maior que 6 para n tendendo ao infinito.

A complexidade de P1 é (f(n) = 6n² - n – 4) = O(n² .)

Verificando a propriedade f(n) = O(g(n)):

$6n^2 - n - 4 = O(n^2)$, se $g(n) = n^2$

$6n^2/(n^2) - n/(n^2) - 4/(n^2) = c * (n^2)/(n^2)$

Para n = oo, tem-se que c >= 6.

QUESTÃO 02 (2p).

Dadas as expressões a seguir:

$a)\ f(n) = \frac{2}{7}n^7 - 5n^6 \quad prove\ que\ f(n) = O(n^7)$

2/7 * (n ^ 7) – 5 * (n ^ 6) = O (n ^ 7)
2/7 * (n ^ 7) / (n ^ 7) – 5 * (n ^ 6) / (n ^ 7) = c * (n ^ 7) / (n ^ 7)
2/7 – 5 /n = c

Para todos os casos em que c maior que -4.7 [n=1], a performance de O(n^7) será pior que a de f(n), pois c não varia em n e, para n tendendo ao infinito, há um coeficiente c capaz de dar uma performance a O(n^7) pior à da função f.

$b)\ f(n) = a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \cdots + +a_0 \quad prove\ que\ f(n) = O(n^k), k \geq g$

$a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \cdots + +a_0 = O(n^k)$

$(a_g n^g + a_{g-1}n^{g-1} + \cdots + +a_0)$ / (n^k) = c * (n^k) / (n^k)

$(a_g n^g)$ / (n^k) = c * (n^k) / (n^k)

Se k for maior ou igual a g, para valores de n tendendo ao infinito, haverá um coeficiente ag. Se a constante c for maior que ag, então existirá um ponto em que a performance de O(n^k) será pior à de f(n).

$(a_g) = $ c, para n tendendo ao infinito.

$c)\ f(n) = \frac{2}{7}n^7 - 5n^6 \quad prove\ que\ f(n) = \Theta(n^7)$

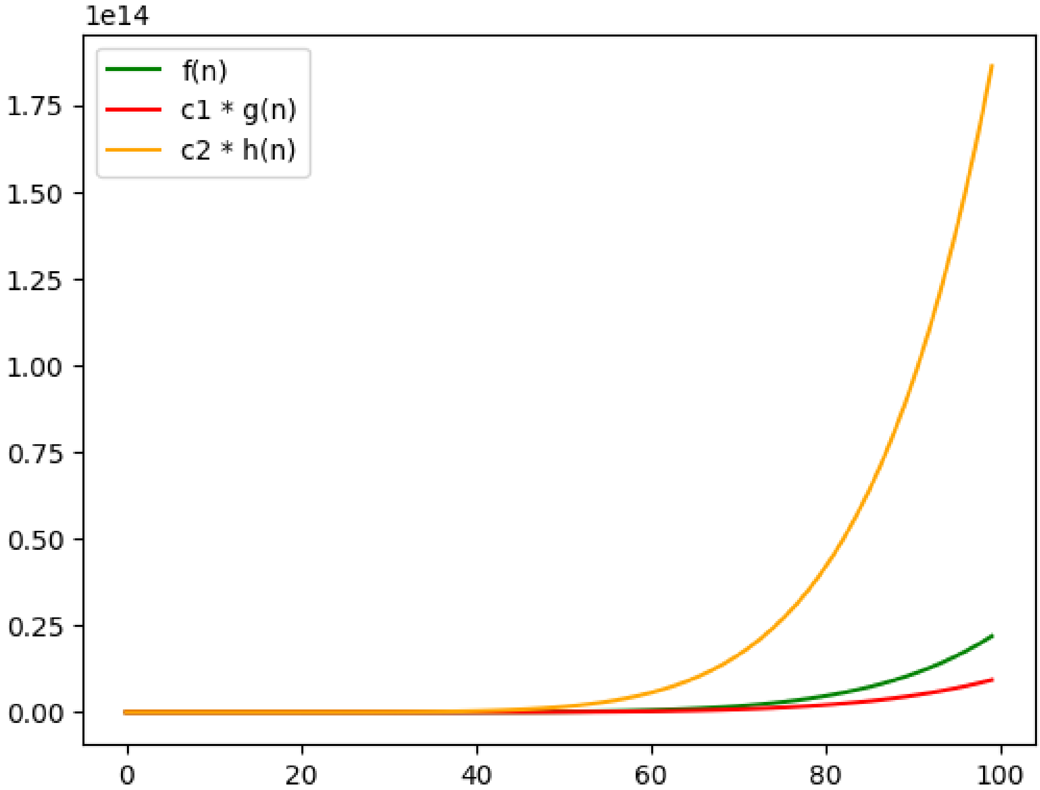
Neste item pede-se que seja desenhado o gráfico referente aos limites de Θ.

$\frac{2}{7}n^7 - 5n^6 = \Theta(n^7)$

$\frac{2}{7}n^7/(n^7) - 5n^6/(n^7) = c * (n^7) / (n^7)$

$\frac{2}{7}$ - 5/n = c

Há duas constantes c1 e c2 tais que c1 < c < c2.



Note que as constantes c1 e c2 respeitam a igualdade $f(n) = \Theta(n^7)$ no gráfico, portanto, a equação é verdadeira. No gráfico, c1 = 0.1 e c2 = 2.

QUESTÃO 03 (1p).

Encontre a fórmula fechada para o seguinte somatório. Mostre o passo-a-passo de como se chegou na fórmula.

$$S = \frac{1}{1.4} + \frac{1}{4.7} + \frac{1}{7.10} + \cdots + \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$$

$\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$ => Inferindo por conta da soma telescópica => $\frac{1}{(3\text{n} - 2)} - \frac{1}{(3\text{n} + 1)}$

$$\frac{1}{(3\text{n} - 2)} - \frac{1}{(3\text{n} + 1)} = \frac{(3\text{n} + 1) - (3\text{n} - 2)}{(3n - 2)*(3\text{n} + 1)} = \frac{3}{(3n - 2)*(3\text{n} + 1)}$$

Portanto, se o numerador é 1 e obtivemos 3, multiplicamos o denominador por 3, chegando-se a seguinte soma fechada:

$$\text{S} = \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} \left(\frac{1}{3 * (3\text{i} - 2)} - \frac{1}{3 * (3\text{i} + 1)} \right)$$

Se estendermos o somatório, teremos que a segunda fração cancela-se com a primeira da próxima iteração. Ou seja, temos que s é igual a:

$$S = \sum_{\text{i}=1}^{\text{n}} \left(\frac{1}{3 * (3i - 2)} - \frac{1}{3 * (3i + 1)} \right) =$$

$$\left[\frac{1}{3 * (3\text{i} - 2)} \right], \text{para i} = 1 - \left[\frac{1}{3 * (3\text{i} + 1)} \right], \text{para i} = \text{n}$$

$$S = \frac{1}{3} - \frac{1}{3 * (3\text{n} + 1)}$$

QUESTÃO 04 (2p). A forma mais simples e mais comum de indução matemática permite provar que um enunciado *p* vale para todos os números naturais *n* e consiste de dois passos: **base** e **indutivo**. No **passo base** busca-se mostrar que o enunciado *p* vale para *n* = 1 e no **passo indutivo** busca-se mostrar que, se o enunciado *p* vale para *n* = *k*, então o mesmo enunciado vale para *n* = *k* + 1. Mostrar que as 2 fórmulas a seguir são validas para todos os números naturais.

$$a) \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}, prove\ que\ para\ n = k+1\ a\ fórmula\ fechada\ é\ \frac{k^2+3k+2)}{2}$$

Passo base:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} \quad ==> \ (\sum_{i=1}^{n=1} i \ = \ 1) \ = (\frac{1(1+1)}{2} \ = \ 1) \ => \ 1 \ = \ 1$$

Passo indutivo:

Quando n = k, 1 + 2 + 3 + … + k = k * (k+1) / 2

Quando n = k + 1, 1 + 2 + 3 + ... + k + (k+1) = (k+1) * (k+2) / 2

Portanto, se, para n = k, temos k * (k+1) / 2, para n = k+1, devemos mostrar que k * (k+1) / 2 + k+1 é igual a fórmula fechada.

$$\frac{k * (k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k * (k+1)}{2} + \frac{2 * (k+1)}{2}$$

$$\frac{k * (k+1)}{2} + \frac{2 * (k+1)}{2} = \frac{(2+k) * (k+1)}{2}$$

$$\frac{(k+1) * (k+2)}{2} = \frac{k^2 + 3k + 2}{2}$$

$$b) \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}$$

Passo base:

$$\frac{1}{(3*1-2)(3*1+1)} = \frac{1}{3*1+1}, \text{para i } = 1 \text{ e n } = 1; \ \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

Passo Indutivo:

$$\frac{k}{3k+1} + \frac{k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{(3k+4)}$$

$$\frac{k}{3k+1} + \frac{k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{(3k+4)}$$

$$\frac{k}{3k+1} + \frac{k+1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1) + k(3k+4)}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$\frac{3k^2 + 5k + 1}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{(k+1)}{(3k+4)}$$

QUESTÃO 05 (3p).

Dados os somatórios (a), (b) e (c) a seguir, encontre a fórmula fechada para cada um deles, aplicando a propriedade **telescópica.** Deve-se mostrar claramente os passos realizados.

$$a)\ \sum_{i=0}^{n-1}[(i+1)^2 - i^2]$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[(i+1)^2 - i^2] \sim \cancel{1}^2 - 0^2 + \cancel{2}^2 - \cancel{1}^2 + \cancel{\ldots} + (n)^2 - (\cancel{n-1})^2$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}[(i+1)^2 - i^2] = n^2$$

$$b) \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{i^2} - \frac{5}{(i+1)^2}\right)$$

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{5}{i^2} - \frac{5}{(i+1)^2}\right) \sim \frac{5}{1^2} - \cancel{\frac{5}{2^2}} + \cancel{\frac{5}{2^2}} - \cancel{\frac{5}{3^2}} + \ldots + \cancel{\frac{5}{n^2}} - \frac{5}{(n+1)^2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{5}{i^2} - \frac{5}{(i+1)^2}\right) = \frac{5}{1^2} - \frac{5}{(n+1)^2}\right) = \frac{5}{1^2} - \frac{5}{0^2} = 5$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{5}{i^2} - \frac{5}{(i+1)^2}\right) = 5$$

$$c)\ \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k(k+1)}\right)$$

Para esse item (c), transforme o somando para permitir aplicar a soma **telescópica.** Não é necessário encontrar a fórmula fechada final. Deve-se mostrar claramente os passos realizados.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k(k+1)}\right) \Rightarrow \frac{3}{\mathrm{k}} - \frac{3}{(k+1)} = \frac{3\mathrm{k} + 3 - 3\mathrm{k}}{\mathrm{k}(k+1)} = \frac{3}{k(k+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{k(k+1)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\mathrm{k}} - \frac{3}{(k+1)}\right)$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{\mathrm{k}} - \frac{3}{(k+1)}\right) = \frac{3}{1} - \frac{3}{(\infty+1)} = 3$$