CAPÍTULO

11 Álgebra Booleana

Os circuitos nos computadores e em outros aparelhos eletrônicos têm entradas, cada uma das quais ou é 0 ou 1 e produz saídas que também são 0s e 1s. Os circuitos podem ser construídos usando qualquer elemento básico que tenha dois estados diferentes. Esses elementos incluem chaves que podem estar na posição aberta ou fechada e aparelhos óticos que podem estar acesos ou não. Em 1938, Claude Shannon mostrou como as regras básicas da lógica, enunciadas pela primeira vez por George Boole em 1854, em seu *The Laws of Thought*, poderiam ser usadas para projetar circuitos. Essas regras formam a base da álgebra booleana. Neste capítulo, desenvolvemos as propriedades básicas dessa álgebra. A operação de um circuito é definida por uma função booleana que especifica o valor de uma saída para cada conjunto de entradas. O primeiro passo na construção de um circuito é representar a função booleana por uma expressão construída usando as operações básicas da álgebra booleana. Forneceremos um algoritmo para produzir essas expressões. A expressão que obtemos pode conter muito mais operações do que seriam necessárias para representar a função. Mais adiante, neste capítulo, veremos métodos para encontrar uma expressão com o número mínimo de somas e produtos que representam uma função booleana. Os procedimentos que desenvolveremos, mapas de Karnaugh e o método de Quine–McCluskey, são importantes no projeto de circuitos eficientes.

11.1 Funções Booleanas

Introdução

A álgebra booleana fornece as operações e as regras para trabalhar com o conjunto $\{0, 1\}$. Chaves eletrônicas e óticas podem ser estudadas usando esse conjunto e as regras da álgebra booleana. As três operações na álgebra booleana que mais usaremos são a complementação, a soma booleana e o produto booleano. O **complemento** de um elemento, indicado por uma barra, é definido por $\overline{0} = 1$ e $\overline{1} = 0$. A soma booleana, indicada por $+$ ou por *OU*, tem os seguintes valores:

$$1 + 1 = 1, \qquad 1 + 0 = 1, \qquad 0 + 1 = 1, \qquad 0 + 0 = 0.$$

O produto booleano, indicado por $\cdot$ ou por *E*, tem os seguintes valores:

$$1 \cdot 1 = 1, \qquad 1 \cdot 0 = 0, \qquad 0 \cdot 1 = 0, \qquad 0 \cdot 0 = 0.$$

Quando não houver perigo de confusão, o símbolo $\cdot$ pode ser omitido, do mesmo modo que escrevemos um produto algébrico. A menos que sejam usados parênteses, as regras de precedência para as operações booleanas são: primeiro, são calculados todos os complementos, seguidos pelos produtos booleanos, seguidos por todas as somas booleanas. Isso está ilustrado no Exemplo 1.

EXEMPLO 1 Encontre o valor de $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)}$.

Solução: Usando as definições de complementação, de soma booleana e de produto booleano, segue que

$$\begin{aligned} 1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} &= 0 + \overline{1} \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

◀

O complemento, a soma boolena e o produto booleano correspondem aos operadores lógicos $\neg$, $\vee$ e $\wedge$, respectivamente, em que 0 corresponde a **F** (falso) e 1 corresponde a **V** (verdade). As igualdades na álgebra booleana podem ser traduzidas diretamente por equivalências de proposições compostas. Reciprocamente, equivalências de proposições compostas podem ser traduzidas por igualdades na álgebra booleana. Veremos mais tarde, nesta seção, por que essas traduções fornecem equivalências lógicas válidas e identidades na álgebra booleana. O Exemplo 2 ilustra a tradução da álgebra booleana para a lógica proposicional.

EXEMPLO 2 Traduza $1 \cdot 0 + \overline{(0 + 1)} = 0$, a igualdade encontrada no Exemplo 1, em uma equivalência lógica.

Solução: Obtemos uma equivalência lógica quando traduzimos cada 1 por um **V** e cada 0 por um **F**, cada soma booleana por uma disjunção, cada produto booleano por uma conjunção e cada complementação por uma negação. Obtemos

$$(\mathbf{V} \wedge \mathbf{F}) \vee \neg(\mathbf{V} \vee \mathbf{F}) \equiv \mathbf{F}.$$ ◀

O Exemplo 3 ilustra a tradução da lógica proposicional para a álgebra booleana.

EXEMPLO 3 Traduza a equivalência lógica $(\mathbf{V} \wedge \mathbf{V}) \vee \neg\mathbf{F} \equiv \mathbf{T}$ para uma identidade na álgebra booleana.

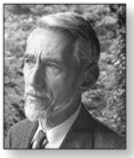
Solução: Obtemos uma identidade na álgebra booleana quando traduzimos cada **V** por 1, cada **F** por 0, cada disjunção por uma soma booleana, cada conjunção por um produto booleano e cada negação por uma complementação. Obtemos

$$(1 \cdot 1) + \overline{0} = 1.$$ ◀

Expressões Booleanas e Funções Booleanas

Seja $B = \{0, 1\}$. Então $B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in B \text{ para } 1 \leq i \leq n\}$ é o conjunto de todas as n-uplas de 0s e 1s. A variável x é chamada de **variável booleana** se ela assume valores apenas em B, ou seja, se seus únicos valores possíveis são 0 e 1. Uma função de B^n para B é chamada de **função booleana de *n* variáveis**.

Links



CLAUDE ELWOOD SHANNON (1916–2001) Claude Shannon nasceu em Petoskey, Michigan, e cresceu em Gaylord, Michigan. Seu pai era negociante e juiz de sucessão e sua mãe era professora de línguas e diretora de escola de ensino médio. Shannon freqüentou a Universidade de Michigan, tendo se formado em 1936. Ele continuou seus estudos no M.I.T., onde obteve o trabalho de manutenção do analisador diferencial, um aparelho mecânico de computação que consistia em bastões e engrenagens, construído por seu orientador, Vannevar Bush. A dissertação de mestrado de Shannon, escrita em 1936, estudava os aspectos lógicos do analisador diferencial. Essa tese de mestrado apresentava a primeira aplicação da álgebra booleana ao projeto de circuitos de chaves; ela talvez seja a dissertação de mestrado mais famosa do século XX. Ele recebeu seu título de doutor do M.I.T. em 1940. Shannon ingressou no Bell Laboratories em 1940, onde trabalhou na transmissão eficiente de dados. Ele foi uma das primeiras pessoas a usar bits para representar informação. No Bell Laboratories, ele trabalhou na determinação da quantidade de tráfico que as linhas telefônicas podem suportar. Shannon fez muitas contribuições fundamentais à teoria da informação. No início da década de 1950, ele foi um dos fundadores do estudo da inteligência artificial. Ele ingressou no quadro de professores do M.I.T. em 1956, onde continuou seu estudo da teoria da informação.

Shannon tinha um lado não convencional. A invenção do Frisbee movido a foguete é atribuída a ele. Ele também é famoso por andar em um monociclo pelos corredores do Bell Laboratories ao mesmo tempo em que fazia malabarismos com quatro bolas. Shannon se aposentou quando tinha 50 anos e publicou artigos esporadicamente durante a década seguinte. Mais tarde, se concentrou em alguns projetos pessoais, tal como a construção de um pula-pula motorizado. Uma citação interessante de Shannon, publicada em *Omni Magazine* em 1987, é "Eu visualizo uma época na qual seremos para os robôs o que os cachorros são para os humanos. E estou torcendo pelas máquinas".

EXEMPLO 4 A função $F(x, y) = x\overline{y}$ do conjunto de pares ordenados de variáveis booleanas para o conjunto $\{0, 1\}$ é uma função booleana de duas variáveis com $F(1, 1) = 0$, $F(1, 0) = 1$, $F(0, 1) = 0$ e $F(0, 0) = 0$. Mostramos esses valores de F na Tabela 1. ◀

TABELA 1

x	y	$F(x, y)$
1	1	0
1	0	1
0	1	0
0	0	0

As funções booleanas podem ser representadas usando expressões formadas por variáveis e operações booleanas. As **expressões booleanas** nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ são definidas recursivamente como

$0, 1, x_1, x_2, \ldots, x_n$ são expressões booleanas;

se E_1 e E_2 são expressões booleanas, então $\overline{E}_1$, (E_1E_2) e $(E_1 + E_2)$ são expressões booleanas.

Cada expressão booleana representa uma função booleana. Os valores dessa função são obtidos substituindo as variáveis na expressão por 0 e 1. Na Seção 11.2, mostraremos que toda função booleana pode ser representada por uma expressão booleana.

EXEMPLO 5 Encontre os valores da função booleana representada por $F(x, y, z) = xy + \overline{z}$.

Solução: Os valores dessa função estão mostrados na Tabela 2. ◀

Observe que podemos representar uma função booleana graficamente distinguindo os vértices do n-cubo que corresponde às n-uplas de bits nos quais a função tem valor 1.

EXEMPLO 6 A função $F(x, y, z) = xy + \overline{z}$ de B^3 para B do Exemplo 3 pode ser representada distinguindo os vértices que correspondem às cinco 3-uplas (1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 0) e (0, 0, 0), nas quais $F(x, y, z) = 1$, como mostrado na Figura 1. Esses vértices estão mostrados pelos círculos pretos cheios. ◀

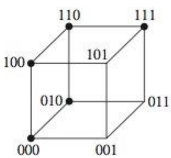


FIGURA 1

As funções booleanas F e G de n variáveis são iguais se e somente se $F(b_1, b_2, \ldots, b_n) = G(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ sempre que $b_1, b_2, \ldots, b_n$ pertença a B. Duas expressões booleanas diferentes que representam a mesma função são ditas **equivalentes**. Por exemplo, as expressões booleanas xy, $xy + 0$ e $xy \cdot 1$ são equivalentes. O **complemento** da função booleana F é a função $\overline{F}$, em que $\overline{F}(x_1, \ldots, x_n) = \overline{F(x_1, \ldots, x_n)}$. Sejam F e G funções booleanas de n variáveis. A **soma booleana** $F + G$ e o **produto booleano** FG são definidos por

$$(F + G)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n) + G(x_1, \ldots, x_n),$$
$$(FG)(x_1, \ldots, x_n) = F(x_1, \ldots, x_n)G(x_1, \ldots, x_n).$$

TABELA 2

x	y	z	xy	$\overline{z}$	$F(x, y, z) = xy + \overline{z}$
1	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

TABELA 3 As Funções Booleanas de Duas Variáveis.

x	y	F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}	F_{15}	F_{16}
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	0
0	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0

Uma função booleana de duas variáveis é uma função de um conjunto de quatro elementos, a saber, pares de elementos de $B = \{0, 1\}$, para B, um conjunto com dois elementos. Portanto, existem 16 funções booleanas diferentes de duas variáveis. Na Tabela 3 mostramos os valores das 16 funções booleanas diferentes de duas variáveis, chamadas de $F_1, F_2, \ldots, F_{16}$.

EXEMPLO 7 Quantas funções booleanas diferentes de n variáveis existem?

Solução: A partir da regra do produto para contagem, segue que existem 2^n n-uplas diferentes de 0s e 1s. Como uma função booleana é uma associação de 0 ou 1 a cada uma destas 2^n n-uplas diferentes, a regra do produto mostra que existem 2^{2^n} funções booleanas diferentes de n variáveis. ◀

A Tabela 4 mostra o número de funções booleanas diferentes de uma a seis variáveis. O número dessas funções cresce extremamente rápido.

Identidades da Álgebra Booleana

Existem muitas identidades na álgebra booleana. As mais importantes estão mostradas na Tabela 5. Essas identidades são particularmente úteis na simplificação de projetos de circuitos. Cada uma das identidades na Tabela 5 pode ser demonstrada usando uma tabela. Demonstraremos uma das propriedades distributivas dessa maneira no Exemplo 8. As demonstrações das propriedades restantes são deixadas como exercício para o leitor.

EXEMPLO 8 Mostre que a propriedade distributiva $x(y + z) = xy + xz$ é válida.

Solução: A verificação dessa identidade é mostrada na Tabela 6. A identidade é válida porque as duas últimas colunas da tabela coincidem. ◀

TABELA 4 O Número de Funções Booleanas de n Variáveis.

Número de variáveis	*Número de funções*
1	4
2	16
3	256
4	65.536
5	4.294.967.296
6	18.446.744.073.709.551.616

TABELA 5	**Identidades Booleanas.**
Identidade	***Nome***
$\overline{\overline{x}} = x$	Propriedade do duplo complemento
$x + x = x$ $x \cdot x = x$	Propriedades idempotentes
$x + 0 = x$ $x \cdot 1 = x$	Propriedades dos elementos neutros
$x + 1 = 1$ $x \cdot 0 = 0$	Propriedades de dominação
$x + y = y + x$ $xy = yx$	Propriedades comutativas
$x + (y + z) = (x + y) + z$ $x(yz) = (xy)z$	Propriedades associativas
$x + yz = (x + y)(x + z)$ $x(y + z) = xy + xz$	Propriedades distributivas
$\overline{(xy)} = \overline{x} + \overline{y}$ $\overline{(x + y)} = \overline{x}\,\overline{y}$	Leis de De Morgan
$x + xy = x$ $x(x + y) = x$	Propriedades de absorção
$x + \overline{x} = 1$	Propriedade da unidade
$x\overline{x} = 0$	Propriedade do zero

O leitor deveria comparar as identidades booleanas da Tabela 5 com as equivalências lógicas da Tabela 6 da Seção 1.2 e com o conjunto de identidades da Tabela 1 da Seção 2.2. Todas são casos especiais do mesmo conjunto de identidades em uma estrutura abstrata mais geral. Cada coleção de identidades pode ser obtida fazendo as traduções adequadas. Por exemplo, podemos transformar cada uma das identidades da Tabela 5 em uma equivalência lógica transformando cada variável booleana em uma variável proposicional, cada 0 em um **F**, cada 1 em um **V**, cada soma booleana em uma disjunção, cada produto booleano em uma conjunção e cada complementação em uma negação, como ilustraremos no Exemplo 9.

TABELA 6 Verificando Uma das Propriedades Distributivas.

x	y	z	$y + z$	xy	xz	$x(y + z)$	$xy + xz$
1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	0	1	1
1	0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0

EXEMPLO 9 Traduza a propriedade distributiva $x + yz = (x + y)\,(x + z)$ da Tabela 5 para uma equivalência lógica.

Solução: Para traduzir uma identidade booleana para uma equivalência lógica, trocamos cada variável booleana por uma variável proposicional. Aqui, mudaremos as variáveis booleanas x, y e z para variáveis proposicionais p, q e r. A seguir, mudamos cada soma booleana para uma disjunção e cada produto booleano para uma conjunção. (Observe que 0 e 1 não aparecem nesta identidade e que a complementação também não aparece.) Isso transforma a identidade booleana na equivalência lógica

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r).$$

Essa equivalência lógica é uma das propriedades distributivas da lógica proposicional da Tabela 6 da Seção 1.2. ◀

As identidades na álgebra booleana podem ser usadas para demonstrar mais identidades. Ilustraremos isso no Exemplo 10.

EXEMPLO 10 Demonstre a **propriedade de absorção** $x\,(x + y) = x$ usando as outras identidades da álgebra booleana mostradas na Tabela 5. (Isso é chamado de propriedade de absorção, pois absorver $x + y$ em x deixa x invariante.)

Exemplos Extras

Solução: Os passos usados para deduzir essa identidade e a propriedade usada em cada passo são os seguintes:

$$\begin{aligned}
x(x+y) &= (x+0)(x+y) && \text{Propriedade do elemento neutro para a soma booleana}\\
&= x + 0 \cdot y && \text{Propriedade distributiva da soma booleana em relação ao produto booleano}\\
&= x + y \cdot 0 && \text{Propriedade comutativa para o produto booleano}\\
&= x + 0 && \text{Propriedade de dominação para o produto booleano}\\
&= x. && \text{Propriedade do elemento neutro para a soma booleana}
\end{aligned}$$

◀

Dualidade

As identidades na Tabela 5 vêm aos pares (exceto pela propriedade do duplo complemento e pelas propriedades da unidade e do zero.) Para explicar a relação entre as duas identidades de cada par, usaremos o conceito de dual. O **dual** de uma expressão booleana é obtido trocando as somas booleanas e os produtos booleanos e trocando os 0s e os 1s.

EXEMPLO 11 Encontre os duais de $x(y + 0)$ e de $\overline{x} \cdot 1 + (\overline{y} + z)$.

Solução: A troca dos sinais de $\cdot$ e dos sinais de $+$ e a troca dos 0s e dos 1s nessas duas expressões fornece seus duais. Os duais são $x + (y \cdot 1)$ e $(\overline{x} + 0)(\overline{y}z)$, respectivamente. ◀

O dual de uma função booleana F representada por uma expressão booleana é a função representada pelo dual dessa expressão. Essa função dual, indicada por F^d, não depende da expressão booleana particular usada para representar F. Uma identidade entre funções representadas por expressões booleanas permanece válida quando são tomados os duais em ambos os lados da identidade. (Veja o Exercício 30 para a razão pela qual isso é verdade.) Esse resultado, chamado de **princípio da dualidade**, é usado para obter novas identidades.

EXEMPLO 12 Construa uma identidade a partir da propriedade de absorção $x(x + y) = x$ considerando os duais.

Solução: Considerar os duais de ambos os lados dessa identidade produz a identidade $x + xy = x$, que também é chamada de propriedade de absorção e está mostrada na Tabela 5. ◀

11.2 Representação de Funções Booleanas

Dois problemas importantes da álgebra booleana serão estudados nesta seção. O primeiro problema é: dados os valores de uma função booleana, como pode ser encontrada uma expressão booleana que representa esta função? Este problema será resolvido mostrando que qualquer função booleana pode ser representada por uma soma booleana de produtos booleanos de variáveis e seus complementos. A solução deste problema mostra que toda função booleana pode ser representada usando os três operadores booleanos $\cdot$, $+$ e $^{-}$. O segundo problema é: existe um conjunto menor de operadores que pode ser usado para representar todas as funções booleanas? Responderemos este problema mostrando que todas as funções booleanas podem ser representadas usando apenas um operador. Ambos os problemas têm importância prática no projeto de circuitos.

Expansões em Somas de Produtos

Usaremos exemplos para ilustrar uma maneira importante de encontrar uma expressão booleana que represente uma função booleana.

EXEMPLO 1 Encontre expressões booleanas que representem as funções $F(x, y, z)$ e $G(x, y, z)$, que são dadas na Tabela 1.

Solução: Uma expressão que tenha o valor 1 quando $x = z = 1$ e $y = 0$ e o valor 0, caso contrário, é necessária para representar F. Essa expressão pode ser formada considerando o produto booleano de x, $\overline{y}$ e z. Este produto, $x\overline{y}z$, tem o valor 1 se e somente se $x = \overline{y} = z = 1$, que vale se e somente se $x = z = 1$ e $y = 0$.

Para representar G, precisamos de uma expressão que seja igual a 1 quando $x = y = 1$ e $z = 0$ ou quando $x = z = 0$ e $y = 1$. Podemos formar uma expressão com esses valores considerando a soma booleana de dois produtos booleanos diferentes. O produto booleano $xy\overline{z}$ tem o valor 1 se e somente se $x = y = 1$ e $z = 0$. Analogamente, o produto $\overline{x}y\overline{z}$ tem o valor 1 se e somente se $x = z = 0$ e $y = 1$. A soma booleana destes dois produtos, $xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}$, representa G, pois tem o valor 1 se e somente se $x = y = 1$ e $z = 0$ ou $x = z = 0$ e $y = 1$. ◀

TABELA 1

x	y	z	F	G
1	1	1	0	0
1	1	0	0	1
1	0	1	1	0
1	0	0	0	0
0	1	1	0	0
0	1	0	0	1
0	0	1	0	0
0	0	0	0	0

O Exemplo 1 ilustra um procedimento para construir uma expressão booleana que represente uma função com valores dados. Cada combinação de valores das variáveis para a qual a função tenha o valor 1 leva a um produto booleano das variáveis ou seus complementos.

DEFINIÇÃO 1 Um *literal* é uma variável booleana ou seu complemento. Um *mintermo* das variáveis booleanas $x_1, x_2, \ldots, x_n$ é um produto booleano $y_1 y_2 \ldots\ y_n$, no qual $y_i = x_i$ ou $y_i = \overline{x}_i$. Portanto, um mintermo é um produto de n literais, com um literal para cada variável.

Um mintermo tem o valor 1 para uma e só uma combinação de valores de suas variáveis. Mais precisamente, o mintermo $y_1 y_2 \ldots\ y_n$ é 1 se e somente se cada y_i é 1, e isto ocorre se e somente se $x_i = 1$ quando $y_i = x_i$ e $x_i = 0$ quando $y_i = \overline{x}_i$.

EXEMPLO 2 Encontre um mintermo que seja igual a 1 se $x_1 = x_3 = 0$ e $x_2 = x_4 = x_5 = 1$ e igual a 0, caso contrário.

Solução: O mintermo $\overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 x_4 x_5$ tem o conjunto correto de valores. ◀

Considerando somas booleanas de mintermos distintos, podemos construir expressões booleanas com um conjunto especificado de valores. Em particular, uma soma booleana de mintermos tem o valor 1 quando exatamente um dos mintermos na soma tem o valor 1. Ela tem o valor 0 para todas as outras combinações de valores das variáveis. Conseqüentemente, dada uma função booleana, pode ser formada uma soma booleana de mintermos que tem o valor 1 quando esta função booleana tiver o valor 1, e tem o valor 0 quando a função tiver o valor 0. Os mintermos nesta soma booleana correspondem àquelas combinações de valores para as quais a função tem o valor 1. A soma de mintermos que representa a função é chamada de **expansão em soma de produtos** ou **forma normal disjuntiva** da função booleana. (Veja o Exercício 42 na Seção 1.2 para o desenvolvimento da forma normal disjuntiva no cálculo proposicional.)

Links

EXEMPLO 3 Encontre a expansão em soma de produtos da função $F(x, y, z) = (x + y)\overline{z}$.

Exemplos Extras

Solução: Encontraremos a expansão em soma de produtos de $F(x, y, z)$ de duas maneiras. Primeiro, usaremos identidades booleanas para expandir o produto e simplificar. Encontramos que

$$
\begin{aligned}
F(x, y, z) &= (x + y)\overline{z} && \\
&= x\overline{z} + y\overline{z} && \text{Propriedade distributiva} \\
&= x1\overline{z} + 1y\overline{z} && \text{Propriedade do elemento neutro} \\
&= x(y + \overline{y})\overline{z} + (x + \overline{x})y\overline{z} && \text{Propriedade da unidade} \\
&= xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + xy\overline{z} + \overline{x}y\overline{z} && \text{Propriedade distributiva} \\
&= xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}. && \text{Propriedade idempotente}
\end{aligned}
$$

Segundo, podemos construir uma expansão em soma de produtos determinando os valores de F para todos os possíveis valores das variáveis x, y e z. Esses valores são encontrados na Tabela 2. A expansão em soma de produtos de F é a soma booleana de três mintermos que correspondem às três linhas desta tabela que dão o valor 1 para a função. Isto dá

$$F(x, y, z) = xy\overline{z} + x\overline{y}\,\overline{z} + \overline{x}y\overline{z}.$$ ◀

Também é possível encontrar uma expressão booleana que represente uma função booleana considerando o produto booleano de somas booleanas. A expansão resultante é chamada de **forma normal conjuntiva** ou **expansão em produto de somas** da função. Essas expansões podem ser encontradas a partir das expansões em somas de produtos considerando os duais. Como encontrar essas expansões diretamente está descrito no Exercício 10 no final desta seção.

TABELA 2

x	y	z	$x + y$	$\bar{z}$	$(x + y)\bar{z}$
1	1	1	1	0	0
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	0	0
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	0
0	1	0	1	1	1
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	1	0

Completude Funcional

Toda função booleana pode ser expressa como uma soma booleana de mintermos. Cada mintermo é o produto booleano de variáveis booleanas ou seus complementos. Isso mostra que toda função booleana pode ser representada usando os operadores booleanos $\cdot$, $+$ e $^{-}$. Como todas as funções booleanas podem ser representadas usando esses operadores, dizemos que o conjunto $\{\cdot, +, ^{-}\}$ é **funcionalmente completo**. Podemos achar um conjunto menor de operadores funcionalmente completos? Podemos fazer isso se um dos três operadores deste conjunto puder ser expresso em termos dos outros dois. Isso pode ser feito usando uma das leis de De Morgan. Podemos eliminar todas as somas booleanas usando a identidade

$$x + y = \overline{\bar{x}\,\bar{y}},$$

que é obtida considerando complementos em ambos os lados na segunda lei de De Morgan, dada na Tabela 5 da Seção 11.1, e então aplicando a propriedade do duplo complemento. Isso significa que o conjunto $\{\cdot, ^{-}\}$ é funcionalmente completo. Analogamente, poderíamos eliminar todos os produtos booleanos usando a identidade

$$xy = \overline{\bar{x} + \bar{y}},$$

que é obtida considerando os complementos de ambos os lados da primeira lei de De Morgan, dada na Tabela 5 da Seção 11.1, e então aplicando a propriedade do duplo complemento. Conseqüentemente, $\{+, ^{-}\}$ é funcionalmente completo. Observe que o conjunto $\{+, \cdot\}$ não é funcionalmente completo, pois é impossível expressar a função booleana $F(x) = \bar{x}$ usando esses operadores (veja o Exercício 19).

Encontramos conjuntos com dois operadores que são funcionalmente completos. Podemos encontrar um conjunto menor de operadores funcionalmente completos, ou seja, um conjunto com apenas um operador? Esses conjuntos existem. Defina dois operadores, o operador $\mid$ ou ***NE***, definido por $1 \mid 1 = 0$ e $1 \mid 0 = 0 \mid 1 = 0 \mid 0 = 1$; e o operador $\downarrow$ ou ***NOU***, definido por $1 \downarrow 1 = 1 \downarrow 0 = 0 \downarrow 1 = 0$ e $0 \downarrow 0 = 1$. Ambos os conjuntos $\{\mid\}$ e $\{\downarrow\}$ são funcionalmente completos. Para ver que $\{\mid\}$ é funcionalmente completo, como $\{\cdot, ^{-}\}$ é funcionalmente completo, tudo o que temos a fazer é mostrar que ambos os operadores $\cdot$ e $^{-}$ podem ser expressos usando apenas o operador $\mid$. Isso é feito da seguinte maneira

$$\bar{x} = x \mid x,$$
$$xy = (x \mid y) \mid (x \mid y).$$

O leitor deve verificar estas identidades (veja o Exercício 14). Deixamos a demonstração de que $\{\downarrow\}$ é funcionalmente completo para o leitor (veja os exercícios 15 e 16).

11.3 Portas Lógicas

Introdução

Links

Álgebra booleana é usada para modelar o esquema de circuito de aparelhos eletrônicos. Cada entrada e cada saída desse aparelho pode ser considerada como um membro do conjunto $\{0, 1\}$. Um computador, ou outros aparelhos eletrônicos, é feito de muitos circuitos. Cada circuito pode ser projetado usando as regras da álgebra booleana que foram estudadas nas Seções 11.1 e 11.2. Os elementos básicos dos circuitos são chamados de **portas**. Cada tipo de porta implementa uma operação booleana. Nesta seção, definimos diversos tipos de portas. Usando essas portas, aplicaremos as regras da álgebra booleana para projetar circuitos que façam diversas tarefas. Os circuitos que estudaremos neste capítulo dão saídas que dependem apenas da entrada e não de seu

(a) Inversor (b) Porta *OU* (c) Porta *E*

FIGURA 1 Tipos Básicos de Portas.

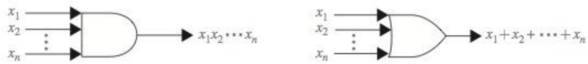


FIGURA 2 Portas com *n* Entradas.

estado atual. Em outras palavras, esses circuitos não têm capacidade de memória. Eles são chamados de **circuitos combinatórios** ou **redes de portas**.

Vamos construir circuitos combinatórios usando três tipos de elementos. O primeiro é um **inversor**, que aceita o valor de uma variável booleana como entrada e produz o complemento desse valor como sua saída. O símbolo usado para um inversor é mostrado na Figura 1(a). A entrada do inversor está mostrada no lado esquerdo, entrando no elemento, e a saída está mostrada no lado direito, saindo do elemento.

O próximo tipo de elemento que usaremos é a **porta *OU***. As entradas dessa porta são os valores de duas ou mais variáveis booleanas. A saída é a soma booleana de seus valores. O símbolo usado para uma porta *OU* está mostrado na Figura 1(b). As entradas da porta *OU* estão mostradas no lado esquerdo, entrando no elemento, e a saída está mostrada no lado direito, saindo do elemento.

O terceiro tipo de elemento que usaremos é a **porta *E***. As entradas dessa porta são os valores de duas ou mais variáveis booleanas. A saída é o produto booleano de seus valores. O símbolo usado para uma porta *E* está mostrado na Figura 1(c). As entradas da porta *E* estão mostradas no lado esquerdo, entrando no elemento, e a saída está mostrada no lado direito, saindo do elemento.

Permitiremos entradas múltiplas para as portas *E* e *OU*. As entradas para cada uma dessas portas estão mostradas no lado esquerdo, entrando no elemento, e a saída está mostrada no lado direito. Exemplos de portas *E* e *OU* com *n* entradas estão mostrados na Figura 2.

Combinações de Portas

Circuitos combinatórios podem ser construídos usando uma combinação de inversores, portas *OU* e portas *E*. Quando são formadas combinações de circuitos, algumas portas podem compartilhar entradas. Isso é mostrado em uma de duas maneiras na descrição de circuitos. Um método é usar ramificações que indicam todas as portas que usam uma dada entrada. O outro método é indicar essa entrada separadamente para cada porta. A Figura 3 ilustra as duas maneiras de mostrar portas com os mesmos valores de entrada. Observe também que a saída de uma porta pode ser usada como entrada por um outro elemento ou mais, como mostrado na Figura 3. Ambos os desenhos na Figura 3 descrevem o circuito que produz a saída $xy + \bar{x}y$.

EXEMPLO 1 Construa circuitos que produzam as seguintes saídas: (a) $(x + y)\bar{x}$, (b) $\bar{x}\,\overline{(y + \bar{z})}$ e (c) $(x + y + z)(\bar{x}\,\bar{y}\,\bar{z})$.

Solução: Circuitos que produzem essas saídas são mostrados na Figura 4. ◀

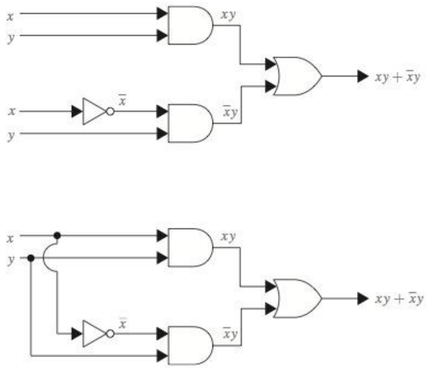


FIGURA 3 Duas Maneiras de Desenhar o Mesmo Circuito.

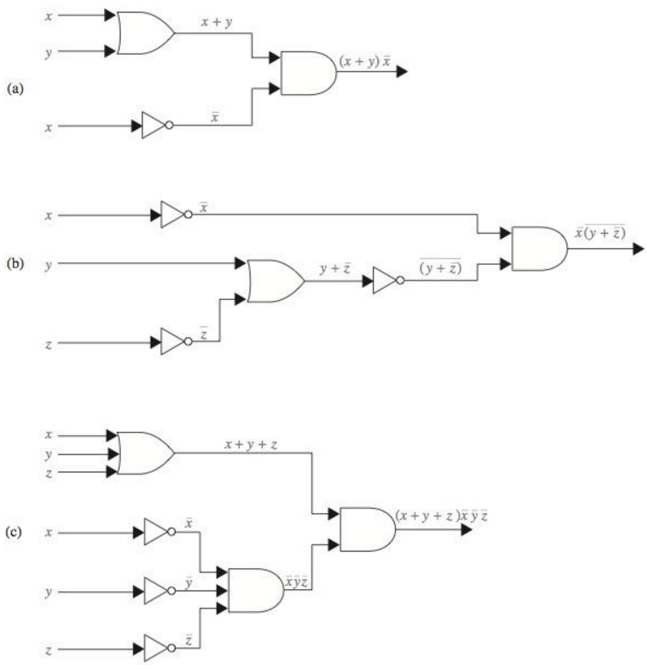


FIGURA 4 Circuitos que Produzem as Saídas Especificadas no Exemplo 1.

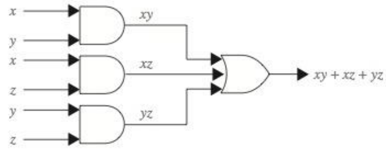


FIGURA 5 Circuito para Votação Majoritária.