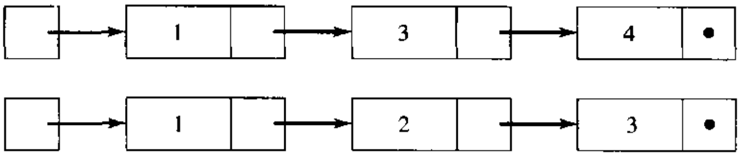
**63.** Seja o conjunto universo $S = \{1,2,3,4,5\}$. Usando a representação por vetor de bits, quais são os seguintes conjuntos?
a. $A = \{2,3,5\}$
b. $B = \{5\}$
**c.** $\emptyset$

64. Seja o conjunto universo $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Usando a representação por vetor de bits, encontre
a. O complemento de 10011
b. A união de 11001 e 01011
c. A interseção de 00111 e 10110

★65. Sejam os conjuntos $A$ e $B$ com as representações na forma de listas encadeadas mostradas a seguir:




Desenhe a representação na forma de lista encadeada de $A \cup B$.

66. Usando os conjuntos do Exercício 65, desenhe a representação em forma de lista encadeada de $A \cap B$.

★67. Prove que o conjunto dos inteiros positivos ímpares é denumerável.

68. Prove que o conjunto $\mathbb{Z}$ de todos os inteiros é denumerável.

69. Prove que o conjunto de todas as strings de tamanho finito de letras $a$ é denumerável.

70. Prove que o conjunto $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ é denumerável.

71. Use o método da diagonalização de Cantor para mostrar que o conjunto de todas as seqüências infinitas de inteiros positivos não é contável.

72. Explique por que qualquer subconjunto de um conjunto contável é também contável.

★73. Explique por que a união de quaisquer dois conjuntos denumeráveis é também denumerável.

74. Conjuntos podem ter conjuntos como elementos (veja Exercício 10, por exemplo). Seja $B$ o conjunto definido como mostrado a seguir:

$$B = \{S \mid S \text{ é um conjunto e } S \notin S\}$$

Verifique que tanto $B \in B$ quanto $B \notin B$ são verdadeiros. Esta contradição é chamada de **paradoxo de Russell** devido ao famoso matemático e filósofo Bertrand Russell, que primeiro a enunciou em 1901. (A criação cuidadosa de axiomas na teoria dos conjuntos impôs algumas restrições sobre o que se pode chamar de conjunto. Todos os conjuntos ordinários continuam sendo conjuntos, mas conjuntos peculiares que nos induzem a dúvidas, como o $B$ acima, foram evitados.)

## Seção 3.2 Contagem

**A combinatória** é o ramo da Matemática que trata da contagem. Tratar a contagem é importante, sempre que temos recursos finitos (Quanto espaço um banco de dados consome? Quantos usuários a configuração de um computador pode suportar?) ou sempre que estamos interessados em eficiência (Quantos cálculos um determinado algoritmo envolve?).

Problemas de contagem normalmente se resumem em determinar quantos elementos existem em um conjunto finito. Esta questão que parece trivial pode ser difícil de ser respondida. Já respondemos algumas questões do tipo "quantos" — quantas linhas existem na tabela-verdade com $n$ símbolos proposicionais, e quantos subconjuntos existem em um conjunto com $n$ elementos? (Na verdade, como já vimos, essas podem ser a mesma pergunta.)

## O Princípio da Multiplicação

Resolvemos o problema da tabela-verdade, desenhando uma árvore de possibilidades. Essa árvore sugere um princípio mais geral que pode ser usado para resolver diversos problemas de contagem. Antes de enunciarmos o princípio geral, daremos uma olhada em outro exemplo de árvore.

**EXEMPLO 28** A uma criança é permitido escolher um dentre dois confeitos, um vermelho e outro preto, e um entre três chicletes, amarelo, lilás e branco. Quantos conjuntos diferentes de doces a criança pode ter?

Podemos resolver este problema, quebrando a tarefa da escolha dos doces em duas etapas seqüenciais: a escolha do confeito e a escolha do chiclete. A árvore da Fig. 3.3 mostra que existem 2 x 3 = 6 escolhas possíveis. São elas: {V, A}, {V, L}, {V, B}, {P, A}, {P, L}e {P, B}.

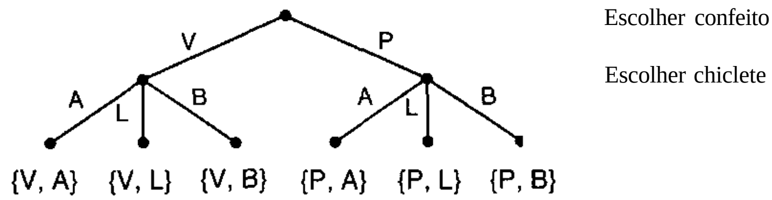



**Figura 3.3**

Neste problema, a seqüência de eventos pode ser invertida; a criança pode escolher o chiclete antes de escolher o confeito, resultando na árvore da Fig. 3.4, mas o número de escolhas possíveis permanece o mesmo (2 X 3 = 6). Pensar como uma seqüência de eventos sucessivos nos ajuda a resolver o problema, mas o seqüenciamento não é uma parte do problema, pois o conjunto {V, A} é o mesmo que o {A, V}.

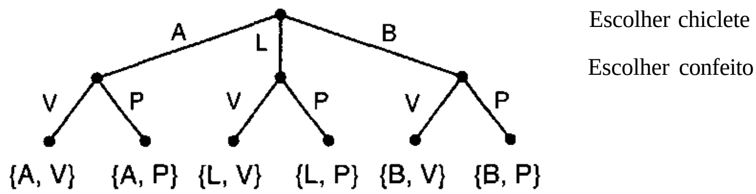



**Figura 3.4**

•

O Exemplo 28 mostra que o número de possibilidades para eventos seqüenciados pode ser obtido por meio da multiplicação dos números de possibilidades do primeiro evento pelo número de possibilidades do segundo. Esta idéia é sintetizada no *Princípio da Multiplicação.*

**Princípio da Multiplicação**
Se existem $n_1$ possibilidades para um primeiro evento e $n_2$ possibilidades para **um segundo evento, então** existem $n_1 \cdot n_2$ possibilidades para a seqüência dos dois eventos.

O Princípio da Multiplicação pode ser estendido por indução a fim de se aplicar a seqüência de qualquer número finito de eventos. (Veja o Exercício 53 ao fim desta seção.) O Princípio da Multiplicação é útil, quando desejamos contar o número de possibilidades totais de uma tarefa que pode ser quebrada em uma seqüência de etapas sucessivas.

**EXEMPLO 29** A última parte do número de seu telefone contém quatro dígitos. Quantos números de quatro dígitos existem?

Podemos imaginar um número de quatro dígitos como o total de possibilidades de uma seqüência de etapas de escolha do primeiro dígito, depois do segundo, depois do terceiro e, finalmente, do quarto dígito. O primeiro dígito pode ser qualquer dos 10 dígitos entre 0 e 9, portanto há 10 possibilidades para a primeira etapa. Da mesma forma, há 10 possibilidades para as etapas de escolha dos segundo, terceiro e quarto dígitos. Usando o Princípio da Multiplicação, multiplicamos o número de possibilidades de cada etapa da seqüência. Portanto, há 10 . 10 . 10 . 10 = 10.000 números diferentes. •

O número de resultados possíveis para eventos sucessivos após o primeiro evento é afetado se o mesmo elemento não puder ser usado novamente, isto é, se não forem permitidas repetições.

EXEMPLO 30 Com relação ao Exemplo 29, quantos números de quatro dígitos sem repetições de dígitos existem?

Novamente, temos a seqüência de etapas de seleção dos quatro dígitos, mas não são permitidas repetições. Existem 10 possibilidades para a escolha do primeiro dígito, mas apenas nove para a escolha do segundo, pois não podemos usar o que já foi usado para o primeiro dígito, e assim por diante. Existem, portanto, 10 . 9 . 8 . 7 = 5040 números diferentes sem repetições de dígitos. •

EXEMPLO 31 a. De quantas maneiras podemos escolher três funcionários de um grupo de 25 pessoas?
b. De quantas maneiras podemos escolher três funcionários de um grupo de 25 pessoas, se uma pessoa puder acumular mais de um cargo?

Em (a) existem três etapas sucessivas sem repetições. A primeira etapa, escolher o primeiro funcionário, tem 25 resultados possíveis. A segunda etapa tem 24 possibilidades, c a terceira 23. O número total de resultados possíveis é 25 . 24 . 23 = 13.800. Em (b), as mesmas três etapas são realizadas em seqüência, mas são permitidas repetições. O número total de repetições é 25 . 25 . 25 = 15.625. •

PRÁTICA 24 Se um homem tem quatro ternos, oito camisas e cinco gravatas, quantas combinações ele pode compor? •

EXEMPLO 32 Para qualquer conjunto finito *S,* seja $|S|$ o número de elementos em *S.* Se *A* e *B* são conjuntos finitos, então

$$|A \times B| = |A| \cdot |B|$$

*A X B* consiste em todos os pares ordenados com a primeira componente em *A* e a segunda componente em *B.* A escolha desses pares ordenados é equivalente a escolher, em seqüência, a primeira componente dentre as $|A|$ possibilidades, e então escolher a *segunda,* para a qual existem $|B|$ possibilidades. O resultado segue, então, o Princípio da Multiplicação. •

## O Princípio da Adição

Suponha que desejamos escolher uma sobremesa dentre três tortas e quatro bolos. De quantas formas isto pode ser feito? Existem dois eventos, um com três resultados possíveis (escolher uma torta) e outro com quatro resultados possíveis (escolher um bolo). No entanto, não estamos compondo uma seqüência de dois eventos, uma vez que desejamos apenas uma sobremesa, que precisa ser escolhida dentre as possibilidades de dois conjuntos disjuntos. O número de possibilidades é o número total de opções que temos, 3 + 4 = 7. Isto ilustra o *Princípio da Adição.*

### Princípio da Adição

Se *A* e *B* são eventos disjuntos com $n_1$ e $n_2$ possibilidades, respectivamente, **então o número total de** possibilidades para o evento *A ou B é* $n_1 + n_2$.

O Princípio da Adição pode ser estendido por indução para o caso de qualquer número finito de eventos disjuntos. (Veja o Exercício 54, ao fim desta seção.) O Princípio da Adição é útil sempre que desejamos contar o número total de resultados possíveis para uma tarefa que pode ser quebrada em dois casos disjuntos.

EXEMPLO 33 Um comprador deseja comprar um veículo de uma concessionária. A concessionária tem 23 carros e 14 caminhões em estoque. Quantas possíveis escolhas o comprador pode ter?

O comprador deseja escolher um carro ou caminhão. São eventos disjuntos; escolher um carro tem 23 possibilidades e escolher um caminhão tem 14. Pelo Princípio da Adição, a escolha de um veículo tem 23 + 14 = 37 possibilidades. Perceba que os requisitos para os eventos *A e B* são conjuntos disjuntos. Portanto, se um comprador desejar comprar um veículo de uma concessionária que tenha 23 carros, 14 caminhões e 17 veículos vermelhos, não podemos dizer que o comprador tem 23 + 14 + 17 possibilidades de escolha. •

EXEMPLO 34 Sejam *A* e *B* conjuntos finitos disjuntos. Então $|A \cup B| = |A| + |B|$.

A união $|A \cup B|$ pode ser encontrada, no caso de conjuntos disjuntos, pela contagem do número de elementos *em A,* $|A|$, e do número de elementos em *B,* $|B|$. Pelo Princípio da Adição, somamos esses dois números. •

EXEMPLO 35 Se $A$ e $B$ são conjuntos finitos, então

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

e

$$|A - B| = |A| - |B| \text{ se } B \subseteq A$$

Para provar a primeira igualdade, perceba que

$$\begin{aligned}(A - B) \cup (A \cap B) &= (A \cap B') \cup (A \cap B)\\ &= A \cap (B' \cup B)\\ &= A \cap S\\ &= A\end{aligned}$$

de forma que $A = (A - B) \cup (A \cap B)$. Além disso, $A - B$ e $A \cap B$ são conjuntos disjuntos; portanto, pelo Exemplo 34,

$$|A| = |(A - B) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |A \cap B|$$

ou

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

A segunda equação é obtida a partir da primeira, aplicando-se que se $B \subseteq A$, então, $A \cap B = B$. •

Freqüentemente, o Princípio da Adição é usado em conjunto com o Princípio da Multiplicação.

EXEMPLO 36 Com referência ao Exemplo 28, suponha que desejamos achar quantas formas diferentes existem para uma criança *escolher* um doce, ao contrário do número de conjuntos de doces que uma criança pode ter. Desta forma, escolher um confeito amarelo, seguido de um chiclete amarelo é diferente de escolher um chiclete amarelo diferente de um confeito amarelo. Podemos considerar dois casos disjuntos — escolher confeitos antes de escolher chicletes ou escolher chicletes antes de escolher confeitos. Cada um desses casos (pelo Princípio da Multiplicação) tem seis possibilidades, portanto (pelo Princípio da Adição) existem $6 + 6 = 12$ formas possíveis de escolher o doce. •

EXEMPLO 37 Quantos números de quatro dígitos começam com 4 ou 5?

Podemos considerar dois casos disjuntos — números que começam por 4 e números que começam por 5. Para a contagem dos números que começam por 4, existe uma forma de escolher o primeiro dígito, e 10 possibilidades para as etapas de escolha de cada um dos outros dígitos. Portanto, pelo Princípio da Multiplicação, existem $1 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 1000$ formas de escolher um número de quatro dígitos começando com 4. O mesmo raciocínio mostra que existem 1000 formas de escolher um número de quatro dígitos começando por 5. Pelo Princípio da Adição, existem $1000 + 1000 = 2000$ resultados possíveis ao todo. •

PRÁTICA 25 Se uma mulher tem sete blusas, cinco saias e nove vestidos, com quantas combinações diferentes ela pode se vestir?

Normalmente, problemas de contagem podem ser resolvidos de mais de uma forma. Apesar da possibilidade de uma segunda solução poder parecer confusa, ela fornece um modo de verificar nosso resultado — se duas abordagens diferentes do mesmo problema produzem o mesmo resultado, isto aumenta a credibilidade de que analisamos o problema corretamente.

EXEMPLO 38 Considere o problema do Exemplo 37 novamente. Podemos evitar usar o Princípio da Adição, pensando sobre o problema em etapas sucessivas, onde a primeira etapa será escolher o primeiro dígito, que tem duas possibilidades de escolha— escolher 4 ou 5. Desta forma, existem $2 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 2000$ possibilidades de escolha. •

**EXEMPLO 39** Quantos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999) são pares?

Uma solução faz uso do fato de que números inteiros terminam em 0, 2, 4, 6 ou 8. Considerando esses casos separadamente, o número de inteiros de três dígitos terminando em 0 pode ser encontrado escolhendo seus dígitos em etapas. Existem nove possibilidades, de 1 a 9, para o primeiro dígito; 10 possibilidades, 0 a 9, para o segundo dígito; e uma possibilidade para o terceiro dígito, 0. Pelo Princípio da Multiplicação, existem

90 números de três dígitos terminando em 0. Analogamente, existem 90 números terminando por 2, 4, 6 e 8. Portanto, pelo Princípio da Adição, existem 90 + 90 + 90 + 90 + 90 = 450 números pares de três dígitos.

Outra solução tira vantagem do fato de que existem apenas cinco escolhas para o terceiro dígito. Pelo Princípio da Multiplicação, existem 9 . 10 . 5 = 450 números.

Para este problema, existe ainda uma terceira solução. Existem 999 — 100 + 1 = 900 inteiros de três dígitos. Metade dos quais é ímpar, portanto 450 devem ser pares. •

**EXEMPLO 40** Suponha que os quatro últimos dígitos de um número de telefone precisam incluir, pelo menos, um dígito repetido. Quantos números deste tipo existem?

Apesar de ser possível resolver este problema com um uso direto do Princípio da Adição, isto é difícil, porque existem diversos casos disjuntos a considerar. Por exemplo, se os primeiros dois dígitos forem iguais, mas os terceiro e quarto forem diferentes, existem 10 . 1 . 9.8 maneiras de escolher o número. Se o primeiro e terceiro dígitos forem iguais, existem 10 . 9 . 1 . 8 maneiras de escolher o número. Se os dois primeiros forem iguais e os dois últimos também forem iguais, mas diferentes dos dois primeiros, existirão 10 • 1 • 9 • 1 números. Obviamente, existem diversas outras possibilidades.

Ao contrário da abordagem acima, resolveremos este problema usando o fato de que números com repetições e números sem repetições são conjuntos disjuntos cuja união é o conjunto de todos os números de quatro dígitos. Pelo Exemplo 34, podemos achar quantos números com repetições existem através da subtração da quantidade de números sem repetições (5040, segundo o Exemplo 30) do total de números de quatro dígitos (10.000, de acordo com o Exemplo 29). Portanto, existem 4960 números com repetições. •

## Árvores de Decisão

Árvores como as mostradas nas Figs. 3.3 e 3.4 ilustram o número de possibilidades de um evento baseado em uma série de opções possíveis. Tais árvores são chamadas **árvores de decisão.** Veremos no Cap. 5 como elas são usadas na análise de algoritmos, mas, por enquanto, as usaremos para resolver problemas de contagem adicionais. As árvores das Figs. 3.3 e 3.4 nos levam ao Princípio da Multiplicação, porque o número de possibilidades em cada nível sucessivo da árvore é constante. Na Fig. 3.4, por exemplo, o nível 2 da árvore mostra duas possibilidades para cada um dos três ramos derivados do nível 1. Árvores de decisão menos regulares podem ainda ser usadas para resolver problemas de contagem onde o Princípio da Multiplicação não se aplica.

**EXEMPLO 41** Tony está jogando "cara-ou-coroa". Cada lançamento resulta em cara (C) ou coroa (K). De quantas formas ele pode lançar a moeda cinco vezes sem obter duas caras consecutivas?

A Fig. 3.5 mostra a árvore de decisão para este problema. Cada lançamento de moeda tem duas possibilidades: o ramo à esquerda está marcado com um C para cara, e o ramo da direita com um K para coroa. Sempre que um C aparecer em um ramo, o próximo nível pode conter apenas um ramo para a direita (K). Existem 13 possibilidades. •

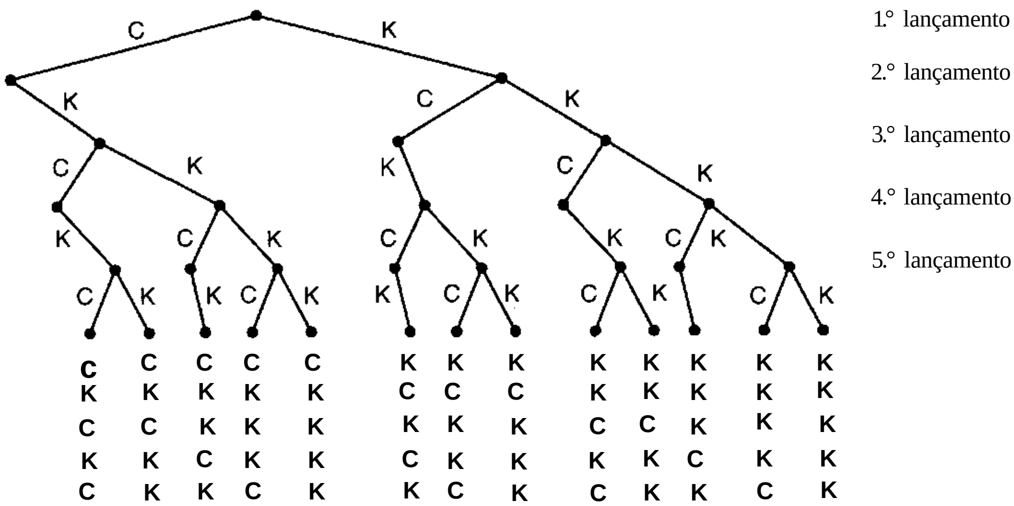



Figura 3.5

PRÁTICA 26 Explique por que o Princípio da Multiplicação não se aplica ao Exemplo 41. •

PRÁTICA 27 Desenhe a árvore de decisões para o número de cadeias de caracteres com *X's, Y's* e Z's com tamanho 3 que não contenham um Z seguindo um *Y*. •

## Revisão da Seção 3.2

### Técnica

- Uso do Princípio da Multiplicação e o Princípio da Adição e árvores de decisão para a contagem do número de objetos em um conjunto finito.

### Idéias Principais

O Princípio da Multiplicação é usado para contar o número de resultados possíveis para uma seqüência de eventos, cada qual com um número fixo de possibilidades.
O Princípio da Adição é usado para contar o número de resultados possíveis para eventos disjuntos.
Os Princípio da Multiplicação e da Adição são normalmente usados juntos.
Árvores de decisão podem ser usadas para contar o número de resultados possíveis para uma seqüência de eventos onde o número de possibilidades para um dado evento não é constante e depende do resultado do evento anterior.

## Exercícios 3.2

★1. Uma loja de iogurte congelado permite escolher um sabor (baunilha, morango, limão, cereja ou pêssego), um acompanhamento (raspas de chocolate, jujuba ou castanha de caju) e uma calda (creme batido ou coco ralado). Quantas sobremesas diferentes são possíveis?

★2. No Exercício 1, por quantas escolhas de sobremesa podemos optar, se formos alérgicos a chocolate e a morangos?

3. Um jogo de computador é iniciado fazendo-se seleções em cada um dos três menus. O primeiro menu (número de jogadores) tem quatro opções, o segundo menu (nível de dificuldade do jogo) tem oito, e o terceiro menu (velocidade) tem seis. Com quantas configurações o jogo pode ser jogado?

4. Uma prova de múltipla-escolha tem 20 perguntas, cada qual com quatro respostas possíveis, e 10 perguntas adicionais, cada uma com cinco respostas possíveis. Quantas folhas de respostas diferentes são possíveis?

5. Uma senha de usuário em um computador de grande porte consiste em três letras seguidas de dois dígitos. Quantas senhas diferentes são possíveis (considere o alfabeto com 26 letras)?

6. No computador do Exercício 5, quantas senhas serão possíveis se diferenciarmos as letras maiúsculas das minúsculas?

★7. Uma conferência telefônica está tendo lugar do centro do Rio de Janeiro até Curitiba, via São Paulo. Existem 45 troncos telefônicos entre o Rio de Janeiro e São Paulo e 13 de São Paulo a Curitiba. Quantas rotas diferentes podem estar sendo usadas?

8. A, B, C e D são nodos (nós) de uma rede de computadores. Existem dois caminhos entre A e C, dois entre B e D, três entre A e B e quatro entre C e D. Por quantos caminhos uma mensagem de A para D pode ser enviada?

9. Quantos números de CPF são possíveis?

★10. Um prédio de apartamentos comprou um novo sistema de fechaduras para seus 175 apartamentos. Essas fechaduras são abertas através de um código numérico de dois dígitos. Será que o síndico fez uma compra inteligente?

★11. Um palíndrome é uma cadeia de caracteres que é igual quando lido normalmente ou de trás para frente. Quantas palíndromes de cinco letras são possíveis na língua portuguesa?

12. Quantos números de três dígitos menores que 600 podem ser construídos usando os dígitos 8, 6, 4 e 2?

13. Um conectivo lógico binário pode ser definido fornecendo sua tabela-verdade. Quantos conectivos lógicos binários existem?

★14. Um identificador em BASIC precisa ser ou uma letra simples ou uma letra seguida de outra letra ou dígito. Quantos idenficadores são possíveis de serem formados?

15. Três cadeiras da câmara dos deputados serão preenchidas, cada qual com alguém de um partido diferente. Existem quatro candidatos concorrendo pelo Partido do Movimento Democrático Brasileiro, três do Partido dos Trabalhadores e dois do Partido Social Democrático. De quantas formas as cadeiras podem ser preenchidas?

16. Um presidente e um vice-presidente precisam ser escolhidos de um comitê de uma organização. Existem 17 voluntários da Divisão Leste e 24 voluntários da Divisão Oeste. Se ambos os funcionários precisam vir da mesma divisão, de quantas maneiras os funcionários podem ser selecionados?

★17. Em um jantar especial, existem cinco aperitivos para serem escolhidos, três saladas, quatro entradas e três bebidas. Quantos jantares diferentes são possíveis?

18. No Exercício 17, quantos jantares diferentes são possíveis, se pudermos ter um aperitivo ou uma salada, mas não ambos?

19. Um novo carro pode ser encomendado com a escolha dentre 10 cores exteriores; sete cores interiores; transmissão automática, câmbio com três marchas ou câmbio com cinco marchas; com ou sem ar condicionado; com ou sem piloto-automático; e com ou sem o pacote opcional que contém as travas elétricas das portas e o desembaçador do vidro traseiro. Quantos carros diferentes podem ser encomendados?

20. No Exercício 19, quantos carros diferentes podem ser encomendados se o pacote opcional só for possível para carros com transmissão automática?

★21. Em um estado, as placas dos carros precisam ter dois dígitos (sem zeros à esquerda), seguidos de uma letra mais uma cadeia de dois ou quatro dígitos (podendo conter zeros à esquerda). Quantas placas diferentes são possíveis?

22. Um freguês de uma lanchonete pode pedir um hambúrguer com ou sem mostarda, ketchup, picles ou cebola; um sanduíche de peixe com ou sem alface, tomate ou molho tártaro; e escolher entre três tipos de bebidas fracas ou dois tipos de milk shakes. Quantos pedidos diferentes são possíveis para fregueses que possam pedir no máximo um hambúrguer, um sanduíche de peixe e uma bebida, mas podem pedir menos também?

★23. Qual o valor de *Contador* após a execução do seguinte trecho de programa?

```
Contador := 0;
for i : = 1 to 5 do
    for Letra := 'A' to 'C' do
        Contador := Contador + 1;
```

24. Qual o valor da variável *Resultado* após a execução do seguinte trecho de programa?

```
Resultado : = 0;
for índice : = 20 downto 10 do
    for Interno := 5 to 10 do
        Resultado := Resultado + 2;
```

Os Exercícios de 25 a 30 referem-se ao conjunto dos inteiros de três dígitos (números entre 100 e 999, inclusive).

25. Quantos são divisíveis por 5?

★26. Quantos não são divisíveis por 5?

27. Quantos são divisíveis por 4?

28. Quantos são divisíveis por 4 ou 5?

29. Quantos são divisíveis por 4 e 5?

30. Quantos não são divisíveis por 4 nem por 5?

Os Exercícios de 31 a 40 referem-se ao conjunto de cadeias de caracteres de tamanho 8 (cada caracter é ou o dígito 0 ou o dígito 1).

★31. Quantas cadeias deste tipo existem?

32. Quantas começam e terminam por 0?

★33. Quantas começam ou terminam por 0?

34. Quantas têm 1 como segundo dígito?

35. Quantas começam por 111?

36. Quantas contêm exatamente um 0?

37. Quantas começam por 10 e têm 0 como terceiro dígito?

38. Quantas são palíndromes? (Veja o Exercício 11.)

★39. Quantas contêm exatamente sete ls?

40. Quantas contêm dois ou mais Os?

Nos Exercícios de 41 a 50, uma mão consiste em uma carta escolhida ao acaso de um baralho de 52 cartas com flores no verso e em uma carta escolhida, também ao acaso, de um baralho de 52 cartas com pássaros no verso.

★41. Quantas mãos diferentes são possíveis?

42. Quantas mãos consistem em pares de ases?

43. Quantas mãos contêm todas as cartas de figuras?

★44. Quantas mãos consistem em duas cartas do mesmo naipe?

45. Quantas mãos contêm exatamente um rei?

46. Quantas mãos têm o valor total de 5 (considere o ás como 1)?

47. Quantas mãos têm o valor total menor que 5?

48. Quantas mãos não contêm quaisquer cartas de figuras?

★49. Quantas mãos contêm pelo menos uma carta de figura?

50. Quantas mãos contêm pelo menos um rei?

★51. A votação em determinado debate é feita através de pedaços de papel vermelho, azul e verde que devem ser colocados em um chapéu. Essas tiras de papel são retiradas uma de cada vez, e a primeira cor que receber dois votos ganha. Desenhe uma árvore de decisão para encontrar o número de maneiras que o resultado da votação pode ocorrer.

52. Desenhe uma árvore de decisão (use os times A e B) para encontrar o número de maneiras que as partidas da NBA podem ocorrer, onde o vencedor é o primeiro time a vencer quatro partidas de sete.

53. Use a indução matemática para estender o Princípio da Multiplicação à seqüência de $m$ eventos para qualquer inteiro $m$, $m \geq 2$.

54. Use a indução matemática para estender o Princípio da Adição para $m$ eventos disjuntos para qualquer inteiro $m$, $m \geq 2$.

## Seção 3.3 Princípio da Inclusão e Exclusão e o Princípio da Casa do Pombo

Discutiremos, nesta seção, dois outros princípios da contagem que podem ser usados para resolverem problemas de combinatória.

### Princípio da Inclusão e Exclusão

A fim de desenvolvermos o Princípio da Inclusão e Exclusão, precisamos antes perceber que se $A$ e $B$ são quaisquer conjuntos de um conjunto universo $S$, então $A - B$, $B - A$ e $A \cap B$ são conjuntos mutuamente disjuntos (veja a Fig. 3.6). Por exemplo, se $x \in A - B$, então $x \notin B$, portanto, $x \notin B - A$ e $x \notin A \cap B$. Além disso, também podemos dizer algo a respeito da união de tais conjuntos.

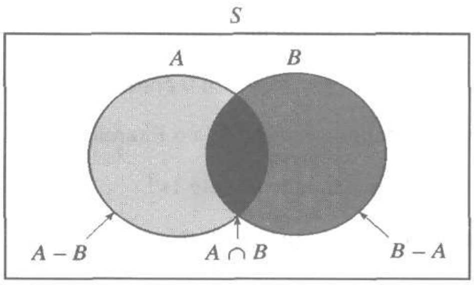



**Figura 3.6**

PRÁTICA 28 Qual o outro nome do conjunto $(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)$? •

Pelo Exemplo 34 (estendido a três conjuntos finitos disjuntos)

$$|(A - B) \cup (B - A) \cup (A \cap B)| = |A - B| + |B - A| + |A \cap B| \tag{1}$$

Do Exemplo 35,

$$|A - B| = |A| - |A \cap B|$$

e

$$|B - A| = |B| - |A \cap B|$$

Usando essas expressões na equação (1), junto com o resultado da Prática 28, obtemos

$$|A \cup B| = |A| - |A \cap B| + |B| - |A \cap B| + |A \cap B|$$

ou

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| \tag{2}$$

A equação (2) é a versão para dois conjuntos do Princípio da Inclusão e Exclusão. Este nome decorre do fato de que, quando contamos o número de elementos na união de $A$ e $B$, precisamos "incluir" (contar) o número de elementos em $A$ e o número de elementos em $B$, mas devemos "excluir" (subtrair) os elementos que pertencerem a $A \cap B$ para evitar contá-los duas vezes.

PRÁTICA 29 Como a equação (2) se refere ao Exemplo 34 da seção anterior? •

EXEMPLO 42 Um entrevistador de opinião pública entrevista 35 pessoas que optam pelo referendum 1, referendum 2 ou por ambos, e conclui que 14 entrevistados escolheram o referendum 1 e 26 o referendum 2. Quantos entrevistados escolheram ambos?

Seja $A$ o conjunto dos entrevistados que escolheram o referendum 1, e $B$ o conjunto dos entrevistados que escolheram o referendum 2; assim, sabemos que

$$|A \cup B| = 35 \quad |A| = 14 \qquad |B| = 26$$

Da equação (2),

$$|A \cap B| = |A| + |B| - |A \cup B| = 14 + 26 - 35 = 5$$

portanto, cinco entrevistados escolheram ambos. •

A Equação (2) pode ser facilmente estendida para o caso de três conjuntos, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}|A \cup B \cup C| &= |A \cup (B \cup C)| = |A| + |B \cup C| - |A \cap (B \cup C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - |(A \cap B) \cup (A \cap C)| \\ &= |A| + |B| + |C| - |B \cap C| - (|A \cap B| + |A \cap C| - |A \cap B \cap C|) \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\end{aligned}$$

Portanto, a versão do Princípio da Inclusão e Exclusão para três conjuntos é

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| \tag{3}$$

PRÁTICA 30 Justifique cada uma das igualdades usadas na derivação da equação (3). •

EXEMPLO 43 Uma quitanda vende apenas brócolis, cenoura e quiabo. Em determinado dia, a quitanda atendeu 208 pessoas. Se 114 pessoas compram apenas brócolis, 152 compraram cenouras, 17 compraram quiabos, 64 compraram brócolis e cenouras, 12 compraram cenouras e quiabos e 9 compraram todos os três, quantas pessoas compraram brócolis e quiabos?

Sejam

$A$ = {pessoas que compraram brócolis}
$B$ = {pessoas que compraram cenouras}
$C$ = {pessoas que compraram quiabos}

Então $|A \cup B \cup C| = 208$, $|A| = 114$, $|B| = 152$, $|C| = 17$, $|A \cap B| = 64$, $|B \cap C| = 12$ e $|A \cap B \cap C| = 9$. Da equação (3),

$$|A \cap C| = 114 + 152 + 17 - 64 - 12 + 9 - 208 = 8$$ ◆

Na equação (2), somamos o número de elementos nos conjuntos simples, e subtraímos o número de elementos da interseção de ambos os conjuntos. Na equação (3), somamos o número de elementos do conjunto simples, subtraímos o número de elementos das interseções dos conjuntos dois a dois e somamos, novamente, o número de elementos da interseção dos três conjuntos. Isto parece sugerir um padrão: Se tivermos $n$ conjuntos, devemos somar o número de elementos dos conjuntos simples, subtrair o número de elementos das interseções dos conjuntos dois a dois, somar o número de elementos das interseções dos conjuntos três a três, subtrair o número de elementos das interseções dos conjuntos quatro a quatro, e assim por diante. Isto nos leva à forma geral do Princípio da Inclusão e Exclusão:

**Princípio da Inclusão e Exclusão**

**Dados os conjuntos finitos $A_1, \ldots, A_n$, $n \geq 2$, então,**

$$\begin{aligned}|A_1 \cup \cdots \cup A_n| = &\sum_{1 \leq i \leq n} |A_i| - \sum_{1 \leq i < j \leq n} |A_i \cap A_j| \\ &+ \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} |A_i \cap A_j \cap A_k| \\ &- \cdots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_n|\end{aligned} \tag{4}$$

Na equação (4), a notação

$$\sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j|$$

por exemplo, indica a soma dos números de elementos de todas as interseções da forma $A_i \cap A_j$, onde $i$ e $j$ podem conter quaisquer valores entre 1 e $n$, desde que $i < j$. Para $n = 3$, temos $|A_1 \cap A_2|$ $(i = 1, j = 2)$, $|A_1 \cap A_3|$ $(i = 1, j = 3)$ e $|A_2 \cap A_3|$ $(i = 2, j = 3)$. Isto está de acordo com a equação (3), onde $A_1 = A$, $A_2 = B$ e $A_3 = C$.

Para provar a forma geral do Princípio da Inclusão e Exclusão, usamos a indução matemática. O caso básico, $n = 2$ é a equação (2). Admitimos a equação (4) como verdadeira para $n = k$, e mostraremos que ela é válida para $n = k + 1$. Escrevemos

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \cup \cdots \cup A_{k+1}| \\
&\quad = |(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cup A_{k+1}| \\
&\quad = |A_1 \cup \cdots \cup A_k| + |A_{k+1}| \\
&\quad - |(A_1 \cup \cdots \cup A_k) \cap A_{k+1}| \quad \text{(pela equação (2))} \\
&\quad = \overset{a}{\sum_{1 \le i \le k}} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < m \le k} |A_i \cap A_j \cap A_m| \\
&\quad - \cdots + (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_k| + |\overset{a}{A_{k+1}}| \\
&\quad - |(A_1 \cap A_{k+1}) \cup \cdots \cup (A_k \cap A_{k+1})|
\end{aligned}
$$

(pela hipótese de indução e a propriedade distributiva)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1 \le i \le k+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k} \overset{b}{|A_i \cap A_j|} + \sum_{1 \le i < j < m \le k} \overset{c}{|A_i \cap A_j \cap A_m|} \\
&\quad - \cdots + (-1)^{k+1} \overset{d}{|A_1 \cap \cdots \cap A_k|} \\
&\quad - \left( \sum_{1 \le i \le k} \overset{b}{|A_i \cap A_{k+1}|} - \sum_{1 \le i < j \le k} \overset{c}{|A_i \cap A_j \cap A_{k+1}|} + \cdots + \right. \\
&\quad + (-1)^k \sum_{1 \le i < j < \cdots m \le k} \underbrace{|(A_i \cap A_{k+1}) \overset{d}{\cap} (A_j \cap A_{k+1}) \cap \cdots \cap (A_m \cap A_{k+1})|}_{k-1\ \text{termo}} \\
&\quad \left. + (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}| \right)
\end{aligned}
$$

(combinando os termos 1 acima e usando a hipótese de indução nos $k$ conjuntos $A_1 \cap A_{k+1}, A_2 \cap A_{k+1}, \ldots, A_k \cap A_{k+1}$)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1 \le i \le k+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < m \le k+1} |A_i \cap A_j \cap A_m| \\
&\quad - \cdots - (-1)^{k+1} |A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

(combinando os termos do mesmo índice acima)

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{1 \le i \le k+1} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le k+1} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < m \le k+1} |A_i \cap A_j \cap A_m| \\
&\quad - \cdots + (-1)^{k+2} |A_1 \cap \cdots \cap A_{k+1}|
\end{aligned}
$$

Isto completa a prova da equação (4).

## O Princípio da Casa do Pombo

O Princípio da Casa do Pombo recebe este nome estranho devido à seguinte idéia: Se mais do que $k$ pombos pousarem em $k$ casas de pombos, então pelo menos uma casa de pombo ficará com mais de um pombo. Apesar de isto parecer imediatamente óbvio, podemos construir uma prova por contradição. Suponha que mais do que $k$ pombos pousaram em $k$ casas de pombos. Se cada casa contiver no máximo um pombo, teríamos, ao todo, no máximo $k$ pombos, uma contradição. Enunciaremos, agora, o Princípio da Casa do Pombo de uma forma menos pitoresca.

**Princípio da Casa do Pombo**
Se mais do que $k$ itens são distribuídos entre $k$ caixas, então pelo menos uma caixa conterá mais de um item.

Escolhendo-se apropriadamente os itens e as caixas, podemos resolver uma grande gama de problemas de contagem.

EXEMPLO 44 Quantas pessoas precisam estar no mesmo quarto para se garantir que pelo menos duas pessoas têm o sobrenome iniciado pela mesma letra?

Existem 26 letras no alfabeto (caixas). Se tiverem 27 pessoas, então haverá 27 letras iniciais (itens) que devem ser distribuídas entre as 26 caixas; por isso, pelo menos uma caixa conterá mais de um item. •

PRÁTICA 31 Quantas vezes um único dado precisa ser lançado para termos certeza de que obtivemos algum valor duas vezes? •

EXEMPLO 45 Prove que se 51 inteiros positivos entre 1 e 100 são escolhidos, então pelo menos um deles divide outro.

Sejam os inteiros $n_1, ..., n_{51}$ diferentes entre si. Cada inteiro $n_i \geq 2$ pode ser escrito como um produto de números primos (veja o Exemplo 17 do Cap. 2); cada número primo, exceto o 2, é ímpar, e o produto de números ímpares é ímpar. Portanto, para cada $i$, $n_i = 2^{k_i}b_i$, onde $k_i \geq 0$ e $b_i$ é um número ímpar. Além disso, $1 \leq b_i \leq 99$. Mas existem 50 números ímpares entre 1 e 99 inclusive. Pelo Princípio da Casa do Pombo, $b_i = b_j$ para algum $i$ e $j$ com $i \neq j$. Portanto, $n_i = 2^{k_i}b_i$ e $n_j = 2^{k_j}b_i$ .Se $k_i < k_j$ então $n_i$, divide $n_j$; do contrário, $n_j$ divide $n_i$ •

## Revisão da Seção 3.3

### Técnicas

- Uso do Princípio da Inclusão e Exclusão para encontrar o número de elementos da união de conjuntos.
- Uso do Princípio da Casa do Pombo para encontrar o número mínimo de elementos que garantem que dois elementos gozam de uma mesma propriedade.

### Idéia Principal

O Princípio da Inclusão e Exclusão e o Princípio da Casa do Pombo são mecanismos de contagem adicionais.

## Exercícios 3.3

1. Em um grupo de 42 turistas, todos falam inglês ou francês; existem 35 pessoas que falam inglês e 18 pessoas que falam francês. Quantas falam inglês e francês?

•2. Todos os convidados de uma festa bebem café ou chá; 13 convidados bebem café, 10 bebem chá e 4 bebem café e chá. Quantas pessoas têm neste grupo?

3. O controle de qualidade em uma fábrica introduziu 47 peças com defeitos de pintura, na embalagem ou na parte eletrônica na linha de montagem. Dessas peças, 28 tinham defeito de pintura, 17 tinham defeito na embalagem, 7 tinham defeito na embalagem e na parte eletrônica e 3 tinham defeitos na pintura e na parte eletrônica. Alguma peça tinha os três tipos de defeito?

4. Em um grupo de 24 pessoas que gostam de rock, country e música clássica, 14 gostam de rock, 12 gostam de música clássica, 11 gostam de rock e country, 9 gostam de rock e música clássica, 13 gostam de country e música clássica e 8 gostam de rock, country e música clássica. Quantos gostam de country?

★5. Onze produtos diferentes para higiene bucal têm as seguintes estratégias: 10 veiculam que oferecem um hálito puro, oito garantem que protegem a gengiva, sete anunciam que reduzem a placa bacteriana, seis prometem um hálito puro e a redução da placa, cinco dizem prevenir a gengiva e oferecer um hálito puro e cinco dizem prevenir a gengiva e reduzir a placa.
a. Quantos produtos veiculam todas as três vantagens?
b. Quantos produtos veiculam um hálito puro, mas não veiculam prevenir a formação da placa bacteriana?

6. Dentre 214 clientes de um banco com contas-correntes, caderneta de poupança ou aplicações financeiras, 189 têm contas-correntes, 73 têm cadernetas de poupanças regulares, 114 têm aplicações no mercado financeiro e 69 têm contas-correntes e cadernetas de poupança. Não é possível ter caderneta de poupança e investir no mercado financeiro.
a. Quantos clientes têm, ao mesmo tempo, conta-corrente e aplicações no mercado financeiro?
b. Quantos clientes têm apenas conta-corrente?

★7. Uma pesquisa dentre 150 estudantes revelou que 83 são proprietários de carros, 97 possuem bicicletas, 28 têm motocicletas, 53 são donos de carros e bicicletas, 14 têm carros e motocicletas, sete possuem bicicletas e motocicletas, e dois têm todos os três.
a. Quantos estudantes possuem apenas bicicletas?
b. Quantos estudantes não têm qualquer dos três?

8. Você está desenvolvendo um novo sabonete e contratou uma empresa de pesquisa de opinião pública para realizar uma pesquisa de mercado para você. A empresa constatou que, em sua pesquisa de 450 consumidores, os fatores a seguir foram considerados relevantes na decisão de compra de um sabonete:

| | |
|---|---|
| Perfume | 425 |
| Fácil produção de espuma | 397 |
| Ingredientes naturais | 340 |
| Perfume e fácil produção de espuma | 284 |
| Perfume e ingredientes naturais | 315 |
| Fácil produção de espuma e ingredientes naturais | 219 |
| Todos os três fatores | 147 |

Você confiaria nesses resultados? Justifique.

9. Escreva a expressão para $|A \cup B \cup C \cup D|$ a partir da equação (4).

10. Escreva uma expressão para o número de termos da expressão para $|A_1 \cup \ldots \cup A_n|$ dada pela equação (4).

11. Quantas cartas precisam ser tiradas de um baralho convencional de 52 cartas para garantirem que tiraremos duas cartas do mesmo naipe?

★12. Se 12 cartas são tiradas de um baralho convencional, podemos afirmar que duas têm valores iguais, independentemente do naipe?

13. Quantas pessoas precisam estar em um grupo para se garantir que duas pessoas tenham o mesmo aniversário (não se esqueça de ignorar o ano)?

14. Em um grupo de 25 pessoas, podemos afirmar que existem pelo menos três que nasceram no mesmo mês?

★15. Prove que se quatro números são escolhidos do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pelo menos um par precisa somar 7. *(Dica:* Encontre todos os pares de números do conjunto que somem 7.)

16. Quantos números precisam ser escolhidos do conjunto $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$ afim de se garantir que pelo menos um par soma 22? (Veja a dica para o Exercício 15.)

17. Seja $n$ um inteiro positivo. Mostre que em qualquer conjunto com $n + 1$ elementos, existem pelo menos dois com o mesmo resto, quando dividido por $n$.

# Seção 3.4 Permutações e Combinações

## Permutações

Na Seção 3.2, vimos o problema da contagem de todas as possibilidades para os últimos quatro dígitos de um número telefônico sem repetições (Exemplo 30). Neste problema, o número 1259 não é o mesmo que o número 2951, pois a ordem dos dígitos é importante. Um arranjo ordenado de objetos é chamado de **permutação.** A determinação da quantidade de números de quatro dígitos sem dígitos repetidos pode ser considerada a contagem do número de permutações ou arranjos: são 4 objetos distintos escolhidos de um conjunto de 10 objetos distintos (os dígitos). A resposta encontrada pelo Princípio da Multiplicação foi $10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$. Em geral, o número de permutações de $r$ objetos distintos escolhidos de $n$ objetos distintos é denotada por $P(n, r)$. Portanto, a solução do problema dos quatro dígitos sem repetição pode ser expressada como $P(10, 4)$.

Uma fórmula para $P(n, r)$ pode ser escrita usando a função fatorial. Para um inteiro positivo $n$, **fatorial de n** é definido como $n(n - 1)(n - 2) \ldots 1$ e denotado por $n!$; além disso, $0!$ é definido como tendo valor 1. Pela definição de $n!$, vemos que

$$n! = n(n - 1)!$$

e que para $r < n$,

$$\frac{n!}{(n-r)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-r+1)((n-r)!}{(n-r)!}$$

$$= n(n-1)\cdots(n-r+1)$$

Usando a função fatorial,

$$P(10,4) = 10.9.8.7$$
$$= \frac{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{10!}{6!} = \frac{10!}{(10-4)!}$$

Em geral, $P(n, r)$ é dado pela fórmula

$$P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!} \quad \text{para } 0 \leq r \leq n$$

**EXEMPLO 46** O valor de $P(7, 3)$ é

$$\frac{7!}{(7-3)!} = \frac{7!}{4!} = \frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 7\cdot 6\cdot 5 = 210$$

•

**EXEMPLO 47** Três casos particulares podem ocorrer ao computarmos $P(n, r)$, que são as duas "condições de fronteira" $P(n, 0)$ e $P(n, n)$ e também $P(n, 1)$. De acordo com a fórmula

$$P(n,0) = \frac{n!}{(n-0)!} = \frac{n!}{n!} = 1$$

Isto pode ser interpretado como dizer que existe um único arranjo ordenado de zero objeto — o conjunto vazio.

$$P(n,1) = \frac{n!}{(n-1)!} = n$$

Esta fórmula reflete o fato de que existem *n* arranjos ordenados de um objeto. (Como cada arranjo consiste em apenas um objeto, basta contar quantas formas existem de se escolher um objeto.)

$$P(n,n)=\frac{n!}{(n-n)!}=\frac{n!}{0!}=n!$$

Esta fórmula mostra que existem *n!* arranjos ordenados de *n* objetos distintos. (O que apenas reflete o Princípio da Multiplicação — *n* escolhas para o primeiro objeto, *n* — 1 para o segundo, e assim por diante, com uma única escolha para o n-ésimo objeto.)

Na fórmula de *P(n,* r), à medida que *r* cresce, *n* — *r,* e, portanto, *(n* — *r)!,* diminui; logo *P(n, r)* cresce. Desta forma, os valores de *P(n, r)* cresceram de *n* a n! para $1 \leq r \leq n$. •

EXEMPLO 48 O número de permutações de três objetos, digamos *a, b* e *c,* é dado por P(3, 3) = 3! = 3. 2 . 1 = 6. São elas

*abc, acb, bac, bca, cab, cba* •

EXEMPLO 49 Quantas palavras de três letras (não necessariamente com sentido) podem ser formadas com as letras da palavra "compilar", se não pudermos repetir letras? Neste caso, desejamos saber o número de permutações de três objetos distintos tomados dentre oito objetos. A resposta é *P*(8, 3) = 8!/5! = 336. •

Perceba que poderíamos ter resolvido o Exemplo 49, usando apenas o Princípio da Multiplicação — existem oito possibilidades para a primeira letra, sete para a segunda e seis para a terceira, de forma que a resposta é 8 . 7 . 6 = 336. *P(n, r)* simplesmente nos fornece uma nova maneira de pensar no problema, bem como uma notação mais compacta.

PRÁTICA 32 De quantas maneiras podem ser escolhidos um presidente e um vice-presidente dentre um grupo de 20 pessoas? •

PRÁTICA 33 De quantos modos seis pessoas podem sentar-se em uma sala com seis cadeiras? •

EXEMPLO 50 Uma biblioteca tem quatro livros sobre sistemas operacionais, sete sobre programação e três sobre estrutura de dados. Vamos ver de quantas maneiras esses livros podem ser arrumados em uma prateleira, considerando que todos os livros de cada assunto precisam estar juntos. Podemos pensar neste problema como uma seqüência de subtarefas. Primeiro consideremos a subtarefa de arrumar os três assuntos. Existem 3! maneiras de fazer isto, isto é, 3! maneiras de ordenar os assuntos dos livros na prateleira. As etapas seguintes são arranjar os livros sobre sistemas operacionais (4! maneiras), arrumar os livros sobre programação (7! maneiras) e, então, arrumar os livros sobre estrutura de dados (3! maneiras). Portanto, pelo Princípio da Multiplicação, o número final de arranjos possíveis de todos os livros é (3!) (4!) (7!) (3!) = 4.354.560. •

## Combinações

Às vezes, desejamos selecionar *r* objetos de um conjunto de *n* objetos, mas não desejamos relevar a ordem na qual eles são arranjados. Neste caso, estamos contando o número de **combinações** de *r* objetos distintos escolhidos dentre *n* objetos distintos, denotadas por *C(n, r).* Para cada combinação dessas, existem *r!* maneiras de permutar seus *r* objetos. Pelo Princípio da Multiplicação, o número de objetos escolhidos dentre *n* objetos é o produto do número de maneiras de selecionar esses objetos, *C(n, r)* multiplicado pelo número de maneiras de arranjar esses objetos escolhidos, *r\.* Portanto,

$$C(n, r).r! = P(n, r)$$

ou

$$C(n,r) = \frac{P(n,r)}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \text{ para } 0 \leq r \leq n$$

Outras notações para $C(n, r)$ são

$$_{n}C_{r},\ C^{n}_{r},\ \text{e}\ \binom{n}{r}.$$

**EXEMPLO 51** O valor de C(7, 3) é

$$\frac{7!}{3!(7-3)!}=\frac{7!}{3!4!}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}}{3\cdot 2\cdot 1\cdot \cancel{4}\cdot \cancel{3}\cdot \cancel{2}\cdot \cancel{1}},$$
$$=\frac{7\cdot 6\cdot 5}{3\cdot 2\cdot 1}=7\cdot 5=35$$

Do Exemplo 46, o valor de $P(7, 3)$ é 210 e C(7, 3) . (3!) = 35(6) = 210 = $P(7, 3)$. •

**EXEMPLO 52** Os casos especiais para $C(n, r)$ são $C(n, 0)$, $C(n, 1)$ e $C(n, n)$. A fórmula para $C(n, 0)$,

$$C(n,0)=\frac{n!}{0!(n-0)}=1$$

reflete o fato de que existe apenas uma maneira de escolher zero objeto dentre $n$ — o conjunto vazio.

$$C(n,1)=\frac{n!}{1!(n-1)!}=n$$

Aqui a fórmula mostra que existem $n$ maneiras de escolher 1 dentre $n$ objetos.

$$C(n,n)=\frac{n!}{n!(n-n)!}=1$$

Aqui vemos que existe uma maneira de se escolher $n$ dentre $n$ objetos e que esta escolha é composta por todos os objetos.

Na fórmula de $C(n, r)$, à medida que $r$ aumenta, r! também aumenta, o que tende a fazer $C(n, r)$ menor, mas $(n - r)!$ diminui, o que tende a tornar $C(n, r)$ maior. Para pequenos valores de r, o aumento de r! não é tão marcante quanto a diminuição de $(n - r)!$ e, desta forma, $C(n, r)$ aumenta de 1 para $n$ e para valores maiores. Em algum ponto, no entanto, o acréscimo de r! supera o decréscimo de $(n - r)!$ e os valores de $C(n, r)$ diminuem até voltar a 1 quando $r = n$. •

**EXEMPLO 53** Quantas mãos de pôquer com cinco cartas podem ser sorteadas de um baralho de 52 cartas? Neste caso a ordem não interessa; C(52, 5) = 52!/(5! 47!) = 2.598.960. •

Ao contrário dos problemas anteriores, a resposta ao Exercício 53 não pode ser facilmente obtida pela aplicação do Princípio da Multiplicação. Portanto, $C(n, r)$ nos fornece um modo de resolver novos problemas.

**PRÁTICA 34** De quantas maneiras podemos escolher um comitê de três pessoas dentre um grupo de 12? •

Lembre-se de que a diferença entre permutações e combinações reside no fato de que os objetos são apenas selecionados ou selecionados e ordenados. Se a ordem for relevante, o problema envolve permutações; se a ordem não importar, o problema envolve combinações. Por exemplo, a Prática 32 é um problema de permutação — duas pessoas serão selecionadas e ordenadas — a primeira será o presidente e a segunda o vice-presidente —, enquanto que a Prática 34 é um problema de combinação — três pessoas serão escolhidas, mas não serão ordenadas. Um bom ponto de partida para os problemas de contagem, então, é determinar se a ordem é importante ou não.

Na solução de problemas de contagem, $C(n, r)$ pode ser usada juntamente com o Princípio da Multiplicação ou o Princípio da Adição.

**EXEMPLO 54** Um comitê de oito estudantes deve ser selecionado de uma turma de 19 calouros e 34 veteranos.

a. De quantas maneiras podem ser selecionados três calouros e cinco veteranos?
b. De quantas maneiras podem ser selecionados comitês com exatamente um calouro?
c. De quantas maneiras podem ser selecionados comitês com no máximo um calouro?
d. De quantas maneiras podem ser selecionados comitês com pelo menos um calouro?

Como a ordenação das escolhas individuais não é importante, este problema envolve combinações.

Para o item (a), ternos uma seqüência de duas etapas, selecionar calouros e selecionar veteranos. O Princípio da Multiplicação pode ser usado. (Pensar em uma seqüência de subtarefas pode parecer implicar ordenação, mas isto apenas define os níveis da árvore de decisão, a base para o Princípio da Multiplicação. Na verdade, não há ordenação para os estudantes.) Como existem *C(* 19, 3) maneiras de escolher calouros e C(34, 5) formas de escolher veteranos, a resposta é

$$C(19,\ 3).C(34,\ 5) = \frac{19!}{3!16!} \cdot \frac{34!}{5!29!} = (969)(278.256)$$

Para o item (b), temos novamente uma seqüência de subtarefas: selecionar um único calouro e então selecionar o resto do comitê dentre os veteranos. Existem C(19, 1) maneiras de selecionar o único calouro e C(34, 7) modos de selecionar os sete outros membros dentre os veteranos. Pelo Princípio da Multiplicação, a resposta é

$$C(19,\ 1).C(34,\ 7) = \frac{19!}{1!(19-1)!} \cdot \frac{34!}{7!(34-7)!} = 19(5.379.616)$$

Para o item (c), obtemos no máximo um calouro escolhendo exatamente um calouro ou escolhendo 0 calouro. Como esses eventos são disjuntos, usaremos o Princípio da Adição. O número de maneiras de escolher exatamente um calouro é a resposta do item (b). O número de escolher 0 calouro é a mesmo do número de maneiras de selecionar todos os oito membros do comitê dentre os 34 veteranos, C(34, 8). Portanto, a resposta é

C(19, 1) . C(34, 7) + C(34, 8) = algum número grande

Podemos abordar o item (d) de diversas formas. Uma forma é usar o Princípio da Adição para as seguintes possibilidades disjuntas: exatamente um calouro, exatamente dois calouros, e assim por diante até oito calouros. Podemos computar cada um desses números, e então somá-los. No entanto é mais simples ver de quantas maneiras o comitê pode ser selecionado de um total de 53 pessoas, e então eliminar (subtrair) o número de comitês com 0 calouro (apenas veteranos). Desta forma, a resposta é

C(53, 8) - C(34, 8) •

A função fatorial cresce muito rapidamente. Um número como 100! não pode ser computado em diversas calculadoras (ou em muitos computadores, exceto se usarmos aritmética de precisão dupla), mas expressões como

$$\frac{100!}{25!75!}$$

podem, todavia, ser computadas se cancelarmos os fatores comuns em primeiro lugar.

## Eliminando Duplicidades

Mencionamos anteriormente que problemas de contagem podem, ser resolvidos amiúde de diferentes maneiras. Infelizmente, também é fácil encontrar assim-chamadas soluções que parecem razoáveis, mas são, na verdade, incorretas. Em geral, são erradas porque contam algum(ns) elemento(s) mais de uma vez (ou às vezes por esquecer de contar algo).

**EXEMPLO 55** Considere novamente o item (d) do Exemplo 54. Uma solução inválida para este problema é a seguinte: Imagine uma seqüência de duas subtarefas, escolhendo um calouro e então escolhendo o resto do comitê. Existem C(19, 1) maneiras de escolher um calouro. Uma vez que um calouro já tenha sido escolhido, o que garante que pelo menos um calouro compõe o comitê, estamos livres para escolher os demais sete membros do comitê dentre as 52 pessoas que sobraram, sem quaisquer restrições, o que nos dá C(52, 7) possibilidades. Pelo Princípio da Multiplicação, temos C(19, 1) . C(52, 7). No entanto, este é um número maior do que o obtido na resposta correta.

O problema é o seguinte: suponha que Daniel e Felícia são calouros. Em uma das possibilidades, foi contado o caso no qual Daniel é o calouro escolhido em primeiro lugar, e o resto do comitê foi selecionado de forma que Felícia foi escolhida junto com outros seis membros. Mas também contamos o caso no qual Felícia foi escolhida em primeiro lugar, e Daniel foi selecionado junto com os mesmos seis outros membros do comitê. Este comitê é o mesmo que o anterior, e foi contado duas vezes. •

PRÁTICA 35 Um comitê de duas pessoas precisa ser escolhido dentre quatro matemáticos e três físicos, e precisa incluir pelo menos um matemático. Compute os dois valores a seguir

a. C(7, 2) — C(3, 2) (a solução correta — todos os comitês menos os sem matemáticos)
b. C(4, 1) . C(6,1) (a solução errada — escolhe um matemático e depois seleciona o outro integrante do comitê)

Perceba que C(4, 1) . C(6, 1) — C(4, 2) nos dá a resposta correta, porque C(4, 2) é o número de comitês com dois matemáticos, e esses comitês foram contados duas vezes em C(4, 1) • C(6, 1). •

**EXEMPLO 56** a. Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra FLORIDA?
b. Quantas permutações distintas podem ser formadas com as letras da palavra MISSISSIPI?

O item (a) é um simples problema de encontrar o número de arranjos ordenados de sete objetos distintos, que é 7! No entanto, a resposta para o item (b) não é 11! porque as 11 letras de MISSISSIPI não são todas distintas. Isto significa que 11! conta alguns dos mesmos arranjos mais de uma vez (o mesmo arranjo significa que não podemos ver a diferença entre $MIS_1S_2ISSIPI$ e $MIS_2S_1ISSIPI$.)

Considere qualquer arranjo das letras. Os quatro Ss ocupam certas posições no arranjo. Rearrumar esses Ss resultaria em não alterar o resultado final, de forma que um mesmo arranjo tem 4! possibilidades de ser escrito. A fim de evitar contar esse arranjo mais de uma vez, devemos dividir 11! por 4!, que são as formas de trocar os Ssde posição. Analogamente, precisamos dividir por 4! a fim de evitar a contagem repetida por parte dos Is e por 2! para tratar os dois Ps. O número de permutações distintas é, portanto,

$$\frac{11!}{4!4!2!}$$ •

Em geral, suponha que existam $n$ objetos dos quais um conjunto de $n_1$ é igual entre si, outro conjunto de $n_2$ é também igual entre si, e assim por diante até $n_k$ objetos que são iguais entre si. O número de permutações distintas desses $n$ objetos é

$$\frac{n!}{(n_1!)(n_2!)\cdots(n_k!)}$$

PRÁTICA 36 Quantas permutações distintas são possíveis com as letras da palavra MONOFÁSICOS? •

## Permutações e Combinações com Repetições

Nossas fórmulas para $P(n, r)$ e $C(n, r)$ assumem que arranjamos ou escolhemos $r$ objetos dentre $n$ objetos disponíveis usando cada objeto apenas uma vez. Portanto, $r \leq n$. Suponha, no entanto, que podemos reutilizar os $n$ objetos tantas vezes quantas desejarmos. Por exemplo, construímos palavras usando as 26 letras do alfabeto; as palavras podem ser tão grandes quanto quisermos, e as letras podem ser repetidas. Ou desejamos sortear cartas de um baralho, repondo-as após cada sorteio; poderemos sortear quantas cartas desejarmos com cartas sendo sorteadas repetidamente. Podemos continuar falando de permutações e combinações de $r$ objetos $n$ a $n$, mas com a possibilidade de repetições, r pode ser maior que $n$.

Contar o número de permutações de $r$ objetos $n$ a $n$ objetos distintos com repetições (ou reposição) é simples. Temos $n$ opções para a escolha do primeiro objeto e, uma vez que podemos repetir esse objeto, $n$ opções para a escolha do segundo objeto, $n$ opções para o terceiro e assim por diante. Portanto, o número de permutações de $r$ objetos $n$ *an* com a possibilidade de repetições é $n^r$.

Para determinar o número de combinações de $r$ objetos $n$ a $n$ com a possibilidade de repetições, usamos uma idéia um pouco mais elaborada.

**EXEMPLO 57** Um joalheiro, ao projetar um broche, decidiu usar cinco pedras escolhidas entre diamantes, rubis e esmeraldas. De quantas maneiras as pedras podem ser escolhidas?

Como não estamos interessados na ordem em que as pedras serão arranjadas, este é um problema de combinação, e não um problema de permutação. Desejamos obter o número de combinações de cinco objetos três a três, permitindo repetições. O broche pode ser formado de um diamante, três rubis e uma esmeralda, por exemplo, ou cinco diamantes. Podemos representar essas possibilidades representando as pedras escolhidas com asteriscos e a inclusão de separadores entre elas a fim de representar a distribuição entre os três tipos de pedras. Por exemplo, podemos representar a escolha de um diamante, três rubis e uma esmeralda por

$$* \mid *** \mid *$$

enquanto que a escolha de cinco diamantes, nenhum rubi e nenhuma esmeralda pode ser representada por

$$***** \mid \mid$$

Estamos, portanto, trabalhando com sete posições (para as cinco pedras e os dois separadores), e as diferentes escolhas são determinadas por quais posições são ocupadas por asteriscos. Estamos contando, portanto, o número de maneiras de escolher cinco itens dentre sete, que é C(7, 5) ou

$$\frac{7!}{5!2!}$$ •

Em geral, se usarmos o mesmo esquema para representarmos uma combinação de $r$ objetos dentre $n$ objetos distintos com a possibilidade de repetições, existirão $n - 1$ separadores para indicar o número de cópias de cada um dos $n$ objetos. Isto nos dá $r + (n - 1)$ posições a ser preenchidas, e desejamos obter o número de maneiras de selecionar $r$ dessas posições. Portanto, o valor que desejamos é

$$C(r+n-1,r) = \frac{(r+n-1)!}{r!(r+n-1-r)!} = \frac{(r+n-1)!}{r!(n-1)!}$$

**PRÁTICA 37** Seis crianças escolhem um pirulito cada, dentre pirulitos vermelhos, amarelos e verdes. De quantas maneiras essa escolha pode ser feita? •

## Revisão da Seção 3.4

### Técnicas

- Encontrar o número de permutações de $r$ objetos distintos escolhidos dentre $n$ objetos distintos.
- Encontrar o número de combinações de $r$ objetos distintos escolhidos dentre $n$ objetos distintos.
- Usar permutações e combinações em conjunto com o Princípio da Multiplicação e o Princípio da Adição.
- Encontrar o número de permutações distintas de $n$ objetos que não sejam todos distintos.
- Encontrar o número de permutações de $r$ objetos dentre $n$ objetos distintos que possam ser escolhidos repetidas vezes.
- Encontrar o número de combinações de $r$ objetos dentre $n$ objetos distintos que possam ser escolhidos repetidas vezes.

### Idéias Principais

Existem fórmulas para contagem de diversas permutações e combinações de objetos.
É preciso tomar cuidado ao analisar problemas de contagem a fim de evitar a contagem das mesmas possibilidades mais de uma vez e evitar que se esqueça de contar algumas possibilidades.

## Exercícios 3.4

1. Compute o valor das expressões abaixo:
   ★a. $P(7, 2)$ b. $P(8, 5)$ c. $P(6, 4)$
   d. $P(n, 1)$ e. $P(n, n - 1)$

2. Quantas ordenações para rebatedores é possível em um time de nove jogadores de beisebol?

3. Os 14 times da Confederação Local estão listados no jornal. Quantas listagens diferentes são possíveis?

4. Quantas permutações das letras da palavra COMPUTADOR existem? Quantas delas terminam por uma vogai?

★5. Quantas permutações distintas da palavra ERRO existem? (Lembre-se que os Rs não podem ser distinguidos um do outro.)

6. De quantas maneiras seis pessoas podem sentar-se em uma roda com seis cadeiras? (Apenas as posições relativas em um círculo podem ser distinguidas.)

★7. De quantas maneiras os primeiro, segundo e terceiro prêmios em um concurso de tortas podem ser atribuídos a 15 concorrentes?

8. a. A designação de títulos de valores é limitada a três letras. Quantas designações existem?
b. Quantas designações existem se as letras não puderem se repetir?

★9. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 11 homens e 8 mulheres em uma fileira, se todos os homens se sentam juntos e as mulheres também se sentam juntas?

10. De quantas maneiras diferentes podem se sentar 11 homens e oito mulheres em uma fileira sem que duas mulheres se sentem juntas?

11. Compute o valor das seguintes expressões:
★a. C(10, 7) b. C(9, 2) c. C(8, 6) d. $C(n, n - 1)$

12. Compute $C(n, n — 1)$. Explique por que $C(n, n — 1) = C(n, 1)$

★13. O controle de qualidade deseja testar 25 chips de microprocessadores dentre os 300 que são produzidos diariamente. De quantas maneiras isto pode ser feito?

14. Um time de futebol leva 18 jogadores na comitiva; 11 jogadores compõem o time titular. De quantas maneiras o time titular pode ser formado?

★15. De quantas maneiras pode ser selecionado um júri de cinco homens e sete mulheres dentre um elenco de 17 homens e 23 mulheres?

16. De quantas formas uma bibliotecária seleciona quatro novelas e três peças dentre uma coleção de 21 novelas e 11 peças?

Os Exercícios 17 a 20 referem-se à seguinte situação: do pessoal de uma companhia, sete trabalham no projeto, 14 na produção, quatro nos testes, cinco em vendas, dois na contabilidade e três em marketing. Um comitê de seis pessoas deve ser formado para uma reunião com o supervisor.

★17. De quantas maneiras podemos formar este comitê, se tiver que haver um membro de cada departamento?

18. De quantas maneiras podemos formar o comitê, se tiver que haver exatamente dois membros do departamento de produção?

19. De quantas maneiras o comitê pode ser formado, se o departamento de contabilidade não for representado e o de marketing tiver exatamente um representante?

★20. De quantas maneiras o comitê pode ser formado se a produção tiver que ter pelo menos dois representantes?

Os Exercícios 21 a 26 referem-se a uma mão de cinco cartas tiradas de um baralho de 52 cartas.

★21. Quantas mãos consistem em três cartas de espadas e duas de copas?

22. Quantas mãos consistem em cartas apenas de ouros?

★23. Quantas mãos consistem em cartas do mesmo naipe?

24. Quantas mãos consistem em cartas apenas com figuras?

25. Quantas mãos contêm uma trinca (três cartas do mesmo tipo)?

26. Quantas mãos contêm um *full house* (uma trinca e um par)?

Nos Exercícios 27 a 30, um conjunto de quatro fichas é escolhido de uma caixa contendo cinco fichas vermelhas e sete fichas pretas.

★27. Encontre o número de conjuntos de quatro fichas.

28. Encontre o número de conjuntos nos quais duas fichas são vermelhas e duas são pretas.

29. Encontre o número de conjuntos composto por todas as fichas vermelhas ou todas as fichas pretas.

30. Encontre o número de conjuntos com três ou quatro fichas pretas.

Os Exercícios 31 a 34 referem-se a uma rede de computadores com 60 nós.

31. A rede é projetada para resistir à falha de quaisquer dois nós. De quantas maneiras esse tipo de falha pode ocorrer?

★32. De quantas maneiras podem falhar um ou dois nós?

33. Se um nó falhar, de quantas maneiras podemos selecionar sete nós, sem que estes sejam quaisquer dos nós que falharam?

34. Se dois nós falharem, de quantas maneiras podemos selecionar sete nós de forma que eles incluam exatamente um dos nós que falharam?

Nos Exercícios 35 a 38, um comitê do congresso com três integrantes precisa ser selecionado dentre cinco democratas, três republicanos e quatro independentes.

★35. De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido?

36. De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido, se precisar incluir pelo menos um independente?

★37. De quantas maneiras podem ser escolhidos comitês que não incluam democratas e republicanos simultaneamente?

38. De quantas maneiras o comitê pode ser escolhido, se precisar ter pelo menos um democrata e um republicano?

Nos Exercícios 39 a 42, uma anfitriã deseja convidar seis pessoas para o jantar de uma lista de 14 amigos.

★39. De quantas maneiras ela pode escolher seus convidados?

40. De quantas maneiras ela pode escolher seus convidados, se seis deles são chatos e seis são interessantes e ela deseja ter pelo menos um de cada?

41. De quantas maneiras ela pode escolher seus convidados, se duas de suas amigas não se suportam, e uma não virá se a outra vier?

42. De quantas maneiras ela pode escolher seus convidados, se duas de suas amigas forem muito amigas e uma não for sem a outra?

★43. Vinte e cinco pessoas, incluindo Simon e Yuan, são candidatos a um comitê de cinco componentes. Se o comitê precisa incluir Simon e Yuan, de quantas maneiras o comitê pode ser selecionado?

44. Um estudante precisa selecionar cinco dentre 12 cadeiras para cursar no próximo período, mas uma das cadeiras precisa ser ou história americana ou literatura inglesa. De quantas maneiras o estudante pode escolher as cadeiras?

45. Em uma mão com cinco cartas tiradas de um baralho de 52 cartas, quantas formas existem de se ter quatro ases e uma carta de paus?

46. Em uma mão com cinco cartas tiradas de um baralho de 52 cartas, quantas formas existem de se ter três valetes e duas cartas de copas?

★47. a. Quantas permutaçoes distintas existem com as letras da palavra HAWAIIAN?
b. Quantas dessas começam por H?

48. a. Quantas permutações distintas é possível conseguir com as letras da palavra APALACHICOLA?
b. Quantas dessas têm os dois Ls juntos?

49. Uma livraria exibe uma prateleira com cinco, três e quatro cópias, respectivamente, dos três livros mais vendidos. Quantos arranjos diferentes desses livros existem, se os livros do mesmo título não puderem ser distinguidos entre si?

50. O Grupo Unido de Ação Divisiva usa palavras-código que são permutações de cinco letras. Você sabe que existem apenas 10 palavras-código. O que podemos dizer sobre letras repetidas nessas palavras-chave?

★51. Cinco pessoas em um jantar repartem um aperitivo. Se as opções são escargot, ovos e nabos, de quantas maneiras as seleções podem ser feitas?

52. Um florista tem rosas, cravos, lírios e bocas-de-leão em estoque. Quantos buquês diferentes de uma dúzia de flores podem ser feitos?

53. Cada um de quatro amigos compra um par de sapatos de corrida dentre uma seleção de uma loja com 14 tipos. De quantas maneiras eles podem ter feito as escolhas?

54. Uma carteia de bingo é distribuída a cada um dos 12 jogadores. De quantas maneiras isto pode ser feito se houver 15 tipos de cartas e puder haver repetições?

★55. Seis armazéns estão para receber carregamentos de um dos seguintes materiais: tintas, martelos ou telhas.
a. De quantas maneiras isto pode acontecer?
b. De quantas formas isto pode acontecer, se não tiver havido encomendas de tintas?
c. De quantos modos isto pode acontecer, se houver pelo menos um carregamento de cada item?

56. Em uma festa de aniversário, uma mãe serve um biscoito para cada uma das oito crianças. Há abundância de biscoitos de chocolate, de amendoim e de aveia.
a. De quantas maneiras cada criança pode escolher seu biscoito?
b. De quantas formas cada criança poderá escolher seu biscoito, se pelo menos um tipo de biscoito tiver acabado?
c. De quantos modos cada criança poderá escolher seu biscoito, se ninguém gostar de biscoitos de aveia?
d. De quantas maneiras cada criança poderá escolher um biscoito, se duas crianças se decidirem pelo biscoito de amendoim?
e. De quantas formas cada criança poderá escolher seu biscoito, se só houver dois biscoitos de chocolate?

★57. No dia das bruxas, 10 maçãs são distribuídas para sete crianças.
a. De quantas maneiras isto pode ser feito? *(Dica:* Apesar do problema dizer que as maçãs são distribuídas para as crianças, pense como atribuir os nomes das crianças às maçãs; assim um nome de criança pode ir para mais de uma maçã.)
b. De quantas maneiras isto pode ser feito se cada criança for receber pelo menos uma maçã?

58. Oito cofres idênticos são vendidos em um leilão de móveis antigos para três compradores.
a. De quantas maneiras isto pode ser feito? (Veja a dica para o Exercício 57.)
b. De quantas formas isto pode ser feito se o comprador A adquirir apenas um cofre?

★59. Quantas soluções inteiras não-negativas distintas existem para a equação

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 10$$

onde a solução

$x_1 = 3, x_2 = 1, x_3 = 4, x_4 = 2$

e a solução

$x_1 = 4, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 1$

são consideradas distintas. *(Dica:* Pense no problema como a distribuição de 10 moedas entre quatro crianças; depois dê uma olhada na dica do Exercício 57.)

60. Quantas soluções inteiras, não-negativas distintas existem para a equação

$x_1 + x_2 + x_3 = 7$

com $x_1 \geq 3$? (Veja a dica do Exercício 59.)

61. Prove que para $n \geq 2$, $P(n, 1) + P(n, 2) = n^2$. (Esta demonstração não requer o uso da indução, apesar do que possa parecer.)

62. Prove que para qualquer $n$ e $r$ com $0 \leq r \leq n$, $C(n, r) = C(n, n - r)$. Explique por que isto é intuitivamente verdadeiro.

## Seção 3.5 O Polinômio Binomial

A expressão do quadrado de um binômio já nos é familiar:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Este é um caso particular da expansão de um binômio a uma potência inteira positiva $n$. A fórmula de $(a + b)^n$ envolve combinações de $n$ objetos. Antes de provar esta fórmula, veremos uma matriz interessante de números que sugere um fato que será necessário durante a demonstração.

### O Triângulo de Pascal

**O triângulo de Pascal** recebe este nome em homenagem ao matemático francês do século 19, Blaise Pascal (o mesmo que deu nome à linguagem de programação), apesar de, aparentemente, já ser conhecido alguns séculos antes. A linha $n$ do triângulo $(n \geq 0)$ consiste em todos os valores $C(n, r)$ para $0 \leq r \leq n$. Portanto, o triângulo tem a seguinte forma:

| | Linha |
|---|---|
| C(0,0) | 0 |
| C(1,0) C(l,l) | 1 |
| C(2,0) C(2,l) C(2,2) | 2 |
| C(3,0) C(3,l) C(3,2) C(3,3) | 3 |
| C(4,0) C(4,l) C(4,2) C(4,3) C(4,4) | 4 |
| C(5,0) C(5,l) C(5,2) C(5,3) C(5,4) C(5,05) | 5 |
| ⋮ | ⋮ |
| C(n,0) C(n,l) ⋯ C(n,n-1) C(n,n) | *n* |

Se computarmos os valores numéricos para as expressões anteriores, veremos que o triângulo de Pascal tem a seguinte forma

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
 & & & & & \vdots & & & & &
\end{array}
$$

Se observarmos esta figura, veremos claramente que as arestas externas têm sempre o valor 1. Mas também podemos ver que qualquer elemento no interior do triângulo pode ser obtido pela soma dos dois elementos diretamente acima, na linha anterior (por exemplo, o primeiro 10 na quinta linha está abaixo do 4 e do 6 da quarta linha). Se isto for, de fato, sempre verdadeiro, temos que

$$C(n, k) = C(n-1, k-1) + C(n-1, k) \text{ para } 1 \leq k \leq n-1 \tag{1}$$

A equação (1) é conhecida como **fórmula de Pascal.**

Para demonstrar a fórmula de Pascal, começaremos pelo lado direito:

$$
\begin{aligned}
C(n-1,k-1)+C(n-1,k) &= \frac{(n-1)!}{(k-1)![n-1-(k-1)]!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\
&= \frac{k(n-1)!}{k!(n-k)!}+\frac{(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}
\end{aligned}
$$

(multiplicando o primeiro termo por $k/k$ *e o* segundo por $(n-k)/(n-k)$)

$$= \frac{k(n-1)!+(n-1)!(n-k)}{k!(n-k)!}$$

(somando as frações)

$$= \frac{(n-1)![k+(n-k)]}{k!(n-k)!}$$

(simplificando o numerador)

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(n-1)!(n)}{k!(n-k)!} \\
&= \frac{n!}{k!(n-k)!} \\
&= C(n, k)
\end{aligned}
$$

Outra forma, menos algébrica, para demonstrar a fórmula de Pascal envolve um argumento de contagem; razão pela qual é chamada de **prova combinatória.** Desejamos calcular $C(n, k)$, o número de maneiras de escolher $k$ objetos dentre $n$. Existem duas formas de realizar tal escolha o item 1 é escolhido como um dos $k$ objetos, caso no qual restam $k - 1$ escolhas a ser feitas dentre os $n - 1$ restantes sem o item 1 e, por outro lado, existem $C(n - 1, k - 1)$ maneiras de realizar a escolha. Se, por outro lado, o item 1 não for escolhido, deveremos tomar as $k$ escolhas dentre os $n - 1$ objetos restantes, para o que existem $C(n - 1, k)$ modos. O número total de possibilidades é obtido pelo número de possibilidades desses dois casos disjuntos.

Já que temos a fórmula de Pascal, podemos desenvolver a fórmula para $(a + b)^n$, conhecido como *teorema binomial.*

## O Teorema Binomial e sua Demonstração

Na expansão de $(a + b)^2$,

$$a^2 + 2ab + b^2$$

os coeficientes são 1, 2 e 1, que é a linha 2 do triângulo de Pascal.

**PRÁTICA 38** Encontre a expansão de $(a + b)^3$ e $(a + b)^4$, e compare seus coeficientes com as linhas 3 e 4 do triângulo de Pascal. •

Os coeficientes das expansões de $(a + b)^2$, $(a + b)^3$ e $(a + b)^4$ sugere um resultado geral, isto é, que os coeficientes da expansão de $(a + b)^n$ sejam os valores da linha $n$ do triângulo de Pascal. Isto é conhecido como o teorema binomial.

**Teorema Binomial**
**Para todo inteiro não-negativo *n*,**

$$\begin{aligned}(a + b)^n = {} & C(n, 0)a^nb^0 + C(n, 1)a^{n-1}b^1 + C(n, 2)a^{n-2}b^2 \\ & + \ldots + C(n, k)a^{n-k}b^k + \ldots + C(n, n-1)a^1b^{n-1} + C(n, n)a^0b^n \qquad (2)\end{aligned}$$

Como o teorema binomial e enunciado para todo inteiro não-negativo $n''$, uma prova por indução parece apropriada. Para a base, $n = 0$, a equação (2) se torna

$$(a + b)^0 = C(0, 0)\, a^0b^0$$

que é

$$1 = 1$$

Uma vez que este resultado é obviamente verdadeiro, a base da indução está verificada.

Como hipótese de indução, assumiremos

$$\begin{aligned}(a + b)^k = {} & C(k, 0)a^kb^0 + C(k, 1)a^{k-1}b^1 + \ldots + C(k, k-1)a^1b^{k-1} \\ & + C(k, k)a^0b^k\end{aligned}$$

Consideremos agora

$$\begin{aligned}(a + b)^{k+1} &= (a + b)^k(a + b) = (a + b)^ka + (a + b)^kb \\ &= [C(k, 0)a^kb^0 + C(k, 1)a^{k-1}b^1 + \ldots + C(k, k-1)a^1b^{k-1} \\ &\quad + C(k, k)a^0b^k]a + [C(k, 0)a^kb^0 + C(k, 1)a^{k-1}b^1 \\ &\quad + \ldots + C(k, k-1)a^1b^{k-1} + C(k, k)a^0b^k]b\end{aligned}$$

(pela hipótese de indução)

$$\begin{aligned}&= C(k, 0)a^{k+1}b^0 + C(k, 1)a^kb^1 + \ldots + C(k, k-1)a^2b^{k-1} \\ &\quad + C(k, k)a^1b^k + C(k, 0)a^kb^1 + C(k, 1)a^{k-1}b^2 \\ &\quad + \ldots + C(k, k-1)a^1b^k + C(k, k)a^0b^{k+1} \\ &= C(k, 0)a^{k+1}b^0 + [C(k, 0) + C(k, 1)]a^kb^1 + [C(k, 1) + C(k,2)]a^{k-1}b^2 \\ &\quad + \ldots + [C(k, k-1) + C(k, k)]a^1b^k + C(k, k)a^0b^{k+1}\end{aligned}$$

(agrupando os termos semelhantes)

$$\begin{aligned}&= C(k, 0)a^{k+1}b^0 + C(k+1, 1)a^kb^1 + C(k+1, 2)a^{k-1}b^2 \\ &\quad + \ldots + C(k+1, k)a^1b^k + C(k, k)a^0b^{k+1}\end{aligned}$$

(usando a fórmula de Pascal)

$$= C(k+1, 0)a^{k+1}b^0 + C(k+1, 1)a^kb^1 + C(k+1, 2)a^{k-1}b^2 + \dots + C(k+1, k)a^1b^k + C(k+1, k+1)a^0b^{k+1}$$

(porque $C(k, 0) = 1 = C(k+1, 0)$ e $C(k, k) = 1 = C(k+1, k+1)$)

Isto conclui a prova indutiva do teorema binomial.

O teorema binomial também pode ter uma prova combinatória. Escrevendo $(a + b)^n$ como $(a + b)(a + b) \dots (a + b)$ ($n$ fatores), sabemos (através da propriedade distributiva) que seu resultado é conseguido ao multiplicar-se cada termo em um fator por um termo de todos os demais fatores. Por exemplo, usando $b$ como o termo de $k$ fatores e $a$ como o termo dos demais $n - k$ fatores, produz a expressão $a^{n-k}b^k$. Usando o fator $b$ de um conjunto diferente de $k$ fatores e $a$ de um conjunto diferente de $n - k$ fatores restantes, também produz $a^{n-k}b^k$. Quantos termos desses existem? Existem $C(n, k)$ diferentes maneiras de selecionar $k$ fatores dos quais usaremos $b$; portanto existem $C(n, k)$ termos deste tipo. Após agrupar esses termos, o coeficiente de $a^{n-k}b^k$ será $C(n, k)$. Variando $k$ de 0 a $n$, o resultado é a soma dos termos no teorema binomial.

Devido a seu uso no teorema binomial, a expressão $C(n, r)$ também é chamada de **coeficiente binomial.**

## Aplicando o Teorema Binomial

EXEMPLO 58 Usando o teorema binomial podemos escrever a expressão de $(x - 3)^4$ como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned}(x-3)^4 &= C(4,0)x^4(-3)^0 + C(4,1)x^3(-3)^1 + C(4,2)x^2(-3)^2 \\ &\quad + C(4,3)x^1(-3)^3 + C(4,4)x^0(-3)^4 \\ &= x^4 + 4x^3(-3) + 6x^2(9) + 4x(-27) + 81 \\ &= x^4 - 12x^3 + 54x^2 - 108x + 81\end{aligned}$$ •

PRATICA 39 Encontre a expansão de $(x + 1)^5$ usando o teorema binomial. •

O teorema binomial nos diz que o termo $k + 1$ da expansão de $(a + b)^n$ é $C(n, k)a^{n-k}b^k$. Isto nos permite encontrar termos individuais da expansão sem ter que calculá-la por inteiro.

PRÁTICA 40 Qual o quinto termo da expansão de $(x + y)^7$? •

Usando determinados valores de $a$ e $b$ no teorema, podemos encontrar certas identidades.

**EXEMPLO 59** Seja $a = b = 1$ no teorema binomial. Então

$$(1 + 1)^n = C(n, 0) + C(n, 1) + \dots + C(n, k) + \dots + C(n, n)$$

ou

$$2^n = C(n, 0) + C)n, 1) + \dots + C(n, k) + \dots + C(n, n) \quad (3)$$

Na verdade, a equação (3) poderia ter sido demonstrada através de argumentos de combinatória. O número $C(n, k)$, o número de maneiras de escolher $k$ itens dentre $n$, pode ser pensado como o número de subconjuntos de $k$ elementos de um conjunto com $n$ elementos. O lado direito da equação (3) representa o número total de todos os subconjuntos (de todos os tamanhos) de um conjunto de $n$ elementos. Mas já sabemos que o número total de subconjuntos é $2^n$. •

## Revisão da Seção 3.5

### Técnica

- Uso do teorema binomial para expandir uma binomial ou encontrar um termo particular de sua expansão.

### Idéias Principais

O teorema binomial fornece uma forma de expandir uma expressão binomial sem realizar suas multiplicações.

Os coeficientes de uma binomial elevada a um inteiro não-negativo são combinações de $n$ itens como indicado na linha $n$ do triângulo de Pascal.

## Exercícios 3.5

Nos Exercícios 1 a 8, encontre a expansão usando o teorema binomial.

★1. $(a + b)^5$

2. $(x + y)^6$

★3. $(a + 2)^5$

4. $(a - 4)^4$

★5. $(2x + 3y)^3$

6. $(3x - 1)^5$

7. $(2p - 3q)^4$

8. $(3x + \frac{1}{2})^5$

9. Encontre o quarto termo da expansão de $(a + b)^{10}$.

10. Encontre o sétimo termo da expansão de $(x — y)^{12}$.

★11. Encontre o sexto termo da expansão de $(2x — 3)^9$.

12. Encontre o quinto termo da expansão de $(3a + 2b)^7$.

★13. Encontre o último termo da expansão de $(x — 3y)^8$.

14. Encontre o último termo da expansão de $(ab + 3x)^6$.

★15. Encontre o terceiro termo da expansão de $(4x - 2y)^5$.

16. Encontre o quarto termo da expansão de $(3x - \frac{1}{2})^8$.

17. Use o teorema binomial (mais de uma vez) para expandir $(a + b + c)^3$.

18. Faça a expansão de $(1 + 0.1)^5$ a fim de computar $(1.1)^5$.

★19. Qual o coeficiente de $x^3y^4$ na expansão de $(2x — y + 5)^8$?

20. Qual o coeficiente de $x^5y^2z^2$ na expansão de $(x + y + 2z)^9$?

21. Prove que $C(n + 2, r) = C(n, r) + 2C(n, r - 1) + C(n, r - 2)$ para $2 \leq r \leq n$. *(Dica:* Use a fórmula de Pascal.)

22. Prove que

$$C(k, k) + C(k + 1, k) + \dots + C(n, k) = C(n + 1, k + 1) \text{ para } 0 < k \leq n$$

*(Dica:* Use indução para um $n$ fixo e $k$ arbitrário, bem como a fórmula de Pascal.)

23. Use o teorema binomial para provar que

$$C(n, 0) - C(n, 1) + C(n, 2) - \dots + (-1)^n C(n, n) = 0$$

★24. Use o teorema binomial para provar que

$$C(n, 0) + C(n, 1)2 + C(n, 2)2^2 + \dots + C(n, n)2^n = 3"$$

25. a. Encontre a expansão de $(1+x)^n$.

b. Derive ambos os lados da equação obtida no item (a) em relação a $x$ a fim de obter

$$n(1+x)^{n-1} = C(n, 1) + 2C(n, 2)x + 3C(n, 3)x^2 + \dots + nC(n, n)x^{n-1}$$

c. Prove que

$$C(n, 1) - 2C(n, 2) + 3C(n, 3) + \dots + nC(n, n) = n2^{n-1}$$

d. Prove que

$$C(n, 1) - 2C(n, 2) + 3C(n, 3) - 4C(«, 4) + \dots + (-1)^{n-1}nC(n, n) = 0$$

26. a. Prove que

$$\frac{2^{n+1}-1}{n+1} = C(n,0) + \frac{1}{2}C(n,1) + \frac{1}{3}C(n,2) + \cdots + \frac{1}{n+1}C(n,n)$$

b. Prove que

$$\frac{1}{n+1} = C(n,0) - \frac{1}{2}C(n,1) + \frac{1}{3}C(n,2) + \cdots + (-1)^n\frac{1}{n+1}C(n,n)$$

*(Dica:* Integre ambos os lados da equação do item (a) do Exercício 25.)

# Revisão do Cap. 3

## Terminologia

árvore de decisão
coeficiente binomial
combinatória
combinação
complemento de um conjunto
conjunto contável
conjunto das partes
conjunto denumerável
conjunto fechado sob uma operação
conjunto nulo
conjunto não-enumerável
conjunto universo
conjunto vazio
conjuntos disjuntos
conjuntos iguais
código reutilizável
diferença de conjuntos
dual de uma identidade de conjuntos
encapsulamento
fatoria de n
fórmula de Pascal
herança
interseção de conjuntos
lista encadeada
método da diagonalização de Cantor
operação bem-definida
operação binária
operação unária
par ordenado
permutação
ponteiro nulo (nil)
princípio da Adição
princípio da Casa do Pombo
princípio da Inclusão e Exclusão
princípio da Multiplicação
produto cartesiano (produto cruzado) de conjuntos
prova por combinação
subconjunto
subconjunto próprio
teorema binomial
tipo abstrato de dados
triângulo de Pascal
universo de discurso
união de conjuntos

## Autotestes

Responda às seguintes perguntas com verdadeiro ou falso.

Seção 3.1

1. O conjunto vazio é um subconjunto próprio de todos os conjuntos

2. Se $A$ e $B$ são conjuntos disjuntos, então $(A - B) \cup (B - A) = A \cup B$.
3. Se um conjunto tem $n$ elementos, então seu conjunto das partes tem $2^n$ elementos.
4. Se uma operação binária $\circ$ em um conjunto $S$ é bem-definida, então $x \circ y \in S$ para todo $x$ e $y$ em $S$.
5. O método de diagonalização de Cantor é uma forma de demonstrar que certos conjuntos são denumeráveis.

**Seção** 3.2

6. De acordo com o Princípio da Multiplicação, o número de possibilidades para uma seqüência de tarefas é o produto do número de possibilidades de cada tarefa separadamente.
7. O Princípio da Adição fornece o número total de ramos em uma árvore de decisão.
8. O Princípio da Adição só pode ser usado se as tarefas em questão tiverem conjuntos disjuntos de possibilidades.
9. O Princípio da Multiplicação diz que o número de elementos em $A \times B$ *é* igual ao número de elementos em $A$ vezes o número de elementos em $B$.
10. Qualquer problema que precise de uma árvore de decisões para ser solucionado não pode ser resolvido pelo Princípio da Multiplicação.

Seção 3.3

11. O Princípio da Inclusão e Exclusão só pode ser usado para achar o número de elementos em $A \cup B$ se $A$ e $B$ forem conjuntos disjuntos.
12. O Princípio da Inclusão e Exclusão aplicado a dois conjuntos diz que o número de elementos na união menos o número de elementos na interseção é a soma do número de elementos em cada conjunto.
13. O Princípio da Inclusão e Exclusão aplica-se à união de qualquer número de conjuntos, desde que pelo menos um deles seja finito.
14. O Princípio da Casa do Pombo é uma forma de contar o número de elementos na união de conjuntos disjuntos, ou "casa de pombos".
15. O Princípio da Casa do Pombo garante que se houver oito pessoas em uma sala, pelo menos duas nasceram no mesmo dia de semana.

Seção 3.4

16. Uma permutação é um arranjo ordenado de objetos.
17. O número de combinações de $r$ objetos $n$ a $n$ é menor que o número de permutações de $r$ objetos $n$ a $n$.
18. Para encontrar o número de maneiras que um subconjunto de $r$ objetos pode ser selecionado dentre $n$ objetos, usamos a fórmula $P(n, r)$.
19. O número de permutações das letras de uma palavra com três conjuntos de letras repetidas é n!/3.
20. A fórmula $C(r + n — 1,r)$ calcula o número de combinações de $r$ objetos dentre $n$ objetos onde os objetos podem ser usados repetidamente.

**Seção 3.5**

21. O triângulo de Pascal consiste em linhas que representam maneiras de arranjar $r$ dentre $n$ objetos para os vários $r$.
22. A fórmula de Pascal diz que um número "interior" no triângulo de Pascal é a soma dos dois números imediatamente acima dela no triângulo.
23. Na expansão de um binômio elevado à $n$-ésima potência, o $k$-ésimo termo é encontrado na linha $k$ do triângulo de Pascal.
24. Um argumento combinatorial é aquele que é baseado em técnicas de contagem.
25. O coeficiente do sétimo termo da expansão de $(a + b)^{12}$ é dado pela expressão C(12, 6).

## No Computador

Para os Exercícios 1 a 7, escreva um programa de computador que produza a saída desejada para a entrada fornecida.

1. *Entrada:* Elementos de um conjunto finito S.
   *Saída:* Elementos de $\mathcal{P}(S)$.
   *Algoritmo:* Use recursão.