Nome: Gustavo Hammerschmidt.

TDE 03 - Indução Matemática

Demonstre os seguintes exemplos:

a) $2 + 6 + 10 + \ldots + (4n - 2) = 2n^2$
b) $1 + 5 + 9 + \ldots + (4n - 3) = n(2n - 1)$
c) $4 + 10 + 16 + \ldots + (6n - 2) = n(3n + 1)$
d) 2^(n) < n! para n >= 4
e) $1 + 2 + \ldots + n < n^2$ para $n > 1$
f) Números triangulares $T(n) = n(n + 1)/2$
g) Prove que qualquer valor postal maior ou igual a 64 unidades monetárias pode ser obtido usando-se somente selos de 5 e 17.
h) Um quebra-cabeça é montado por junções sucessivas de peças que se organizam em blocos. Um movimento é feito cada vez que uma peça é adicionada a um bloco, ou quando dois blocos são agrupados. Prove que não importa como os movimentos são realizados, são necessários n-1 movimentos para montar um quebra-cabeça com n peças.
i) Considere um jogo em que dois jogadores se alternam para remover qualquer número positivo de cartas que eles pegam a partir de dois montes de cartas de baralho. O jogador que tirar a última carta ganha o jogo. l Mostre que se duas pilhas contém o mesmo número de cartas inicialmente, o segundo jogador sempre ganha o jogo, ou tem uma estratégia para isso.

Respostas:

a) $2 + 6 + 10 + ... + (4n - 2) = 2n^2$

$P(1) = 2n^2 = 2.\ 1^2 = 2$ <- Base

$P(K) \Rightarrow 2 + 6+ 10 + ... + (4K - 2) = 2k^2$

$P(K+1) \Rightarrow 2 + 6 + 10 + ... + (4K+4-2) = 2(K+1)^2$

$P(K+1) \Rightarrow P(K) + (4K+4-2) = 2(K+1)^2$

$P(K+1) \Rightarrow 2K^2 + 4K + 2 = 2(K + 1)^2$

Comprovado por Indução fraca.

b) $1 + 5 + 9 + ... + (4n – 3) = n(2n - 1)$

$P(1) = n(2n - 1) = 1x(2x1 - 1) = 1$ <- Base

$P(k) \Rightarrow 1 + 5 + 9 + ... + (4k - 3) = k(2k - 1)$

$P(k + 1) \Rightarrow 1 + 5 + 9 + ... + (4x(k+1) - 3) = (k+1)x(2x(k+1) - 1)$

$P(k + 1) \Rightarrow P(k) + (4x(k+1) - 3) = (k+1)x(2x(k+1) - 1)$

$P(k + 1) \Rightarrow k(2k - 1) + (4x(k+1) - 3) = (k+1)x(2x(k+1) - 1)$

$P(k + 1) \Rightarrow 2k^2 + 3k + 1 = 2k^2 + 3k + 1$

Comprovado por Indução fraca.

c) $4 + 10 + 16 + ... + (6n - 2) = n(3n + 1)$

$P(1) = n(3n + 1) = 1(3x1 + 1) = 4$ <- Base

$P(k) \Rightarrow 4 + 10 + 16 + \dots + (6k - 2) = k(3k + 1)$

$P(K + 1) \Rightarrow 4 + 10 + 16 + \dots + (6k + 6 - 2) = (k + 1)(3(k+1) + 1)$

$P(K + 1) \Rightarrow P(k) + (6k + 6 - 2) = (k + 1)(3(k+1) + 1)$

$P(K + 1) \Rightarrow k(3k + 1) + (6k + 6 - 2) = (k + 1)(3(k+1) + 1)$

$P(K + 1) \Rightarrow 3k^2 + 7k + 4 = 3k^2 + 7k + 4$

Comprovado por Indução fraca.

d) 2^(n) < n! para n >= 4

$P(4) = 2^{(4)} < 4! \Rightarrow 16 < 24$ (Verdade) <- Base

$P(k) \Rightarrow 2^{(k)} < k!$

$P(k + 1) \Rightarrow 2^{(k + 1)} < (k + 1)!$

$P(k + 1) \Rightarrow 2 \times P(k) < (k + 1)!$

$2 \times P(k) \Rightarrow 2^{(k + 1)} < 2*(k!)$

$P(k + 1) \Rightarrow 2^{(k + 1)} < (k + 1)!$

$P(k + 1) \Rightarrow 2*(k!) < (k + 1)!$ Para $n > 1$

Comprovado por Indução fraca.

e) 1 + 2 + ... + n < n² para n > 1

$P(1) = 1$ <- Base

$P(k) \Rightarrow 1 + 2 + \dots + k < k^2$

$P(k+1) \Rightarrow 1 + 2 + \dots + k + (k+1) < (k + 1)^2$

$k < k^2 \Rightarrow k + (k+1) < k^2 + (k+1)$ para $k > 1$

$k + k + 1 < k^2 + k + 1 < k^2 + 2k + 1$

$k^2 + k + 1 < k^2 + 2k + 1 \Rightarrow k^2 + k + 1 < (k +1)^2$

f) Números triangulares $T(n) = n(n + 1)/2$

$T(1) = 1 \times (1+1)/2 = 1$ <- Base

$T(k) \Rightarrow 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + k = k \times (k+1)/2$

$T(k + 1) \Rightarrow 1 + 3 + 6 + 10 + \ldots + k + (k+1) = (k+1)\times((k+1)+1)/2$

$T(k + 1) \Rightarrow \{ k \times (k+1) / 2 + (k+1) = (k+1)(k+2)/2 \} \times 2$

$T(k + 1) \Rightarrow k \times (k+1) + 2 \times (k+1) = (k+1)(k+2)$

$T(k + 1) \Rightarrow k^2 + k + 2k + 2 = k^2 + 3k + 2$

$T(k + 1) \Rightarrow k^2 + 3k + 2 = k^2 + 3k + 2$

Comprovado por Indução fraca.

g) Demonstração:

$S(64) = 64$ <- Base

Para $64 =< r =< k$

$K + 1 >= 69$

$K + 1 > = 64 + 5$

$(K + 1) – 5 >= 64$ <- Provado que é possível obter selos maiores que 64 com selos de 5 e 17 entre a faixa de 64 =< n =< 69.

$K + 1 >= 64$

$((K+1) – 5) + 5 >= 64+5$

$K+1 >= 69$ <- provado que eu posso ir de selos de 64 a 69 com selos de 5 e 17.

Comprovado por Indução forte.

h) Demonstração:

Q(K + 1) => número de peças.

Metade de Q é igual a 1 =< r1 =< k e 1 =< r2 =< k
e r1+r2 = k.

O quebra-cabeça original tem (r1-1)+(r2-1) + 1 movimentos.

(r1-1)+(r2-1) + 1 => (r1+ r2) – 1
⇨ (k + 1) – 1 = k movimentos.

Comprovado que, em um quebra-cabeça de tamanho k+1 , o número de movimentos é k.

i) Demonstração:

Pilha1 = Pilha2 = k + 1 para 1 =< r =< k .

Jogador 1 retira uma: k + 1 – r.
Jogador 2 faz o mesmo na outra pilha.

O escopo agora é 1 =< k +1 – r =< k

Depois de o jogador 1 tiver tirado k +1 cartas da pilha,

sobrará uma para o jogador 2 tirar.