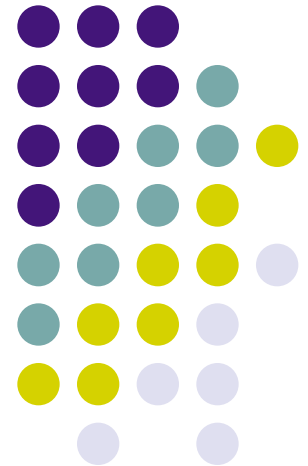


Técnicas de Demonstração

Aula 4

Gregory Moro Puppi Wanderley

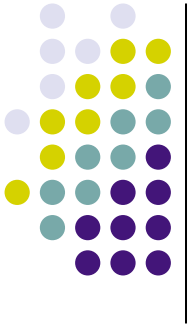
Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)
Bacharelado em Ciência da Computação – 3º Período





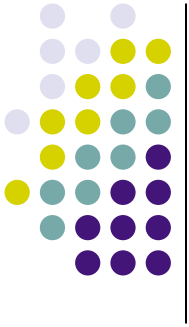
Plano de Aula

- Técnicas de Demonstração (TDE)
- Devolutiva da Prova I



Técnicas de Demonstração

- Objetivo
 - Demonstrar ou provar teoremas.



Técnicas de Demonstração

- Objetivo
 - Demonstrar ou provar teoremas.
- Podem ser úteis para verificar se programas de computador estão corretos.



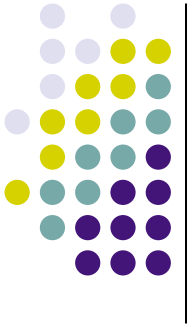
Técnicas de Demonstração

- Objetivo
 - Demonstrar ou provar teoremas.
- Podem ser úteis para verificar se programas de computador estão corretos.
 - Como ter certeza que um programa produzirá sempre as respostas corretas?



Técnicas de Demonstração

- Objetivo
 - Demonstrar ou provar teoremas.
- Podem ser úteis para verificar se programas de computador estão corretos.
 - Como ter certeza que um programa produzirá sempre as respostas corretas?
 - Demonstração para mostrar que um programa sempre fornece a saída correta.
 - **=> (Será visto nas próximas aulas)**



Técnicas de Demonstração

- Teorema
 - Um teorema é representado na forma "Se p , então q ", ou dita condição ou implicação, i.e.:
 - $p \rightarrow q$



Técnicas de Demonstração

- Teorema

- Um teorema é representado na forma "Se p, então q", ou dita condição ou implicação, i.e.:

- $p \rightarrow q$

Premissa ou
hipótese



Tese



Técnicas de Demonstração

- Teorema

- Um teorema é representado na forma "Se p, então q", ou dita condição ou implicação, i.e.:

- $p \rightarrow q$

Premissa ou hipótese



Tese

- É verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa.



Técnicas de Demonstração

- Teorema

- Um teorema é representado na forma "Se p , então q ", ou dita condição ou implicação, i.e.:

- $p \rightarrow q$

Premissa ou
hipótese



Tese

- É verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa.

- Objetivo

- Deduzir q de p usando axiomas, definições, teoremas previamente comprovados, regras de inferência lógica, manipulação matemática.



Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta
 - Como demonstrar que $p \rightarrow q$ é verdadeira?
 - (a) Assumir a hipótese p como verdadeira e deduzir a tese q .
 - (b) Para a dedução:
 - Aplicar axiomas, definições, manipulação matemática, etc.



Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta
 - Exemplo I
 - Definições
 - Seja k um inteiro:
 - n é **par** se $n = 2k$; n é **ímpar** se $n = 2k + 1$
 - **divisibilidade**: a/b , se $a = b.k$



Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta

- Exemplo I

- Definições

- Seja k um inteiro:

- n é **par** se $n = 2k$; n é **ímpar** se $n = 2k + 1$

- **divisibilidade**: a/b , se $a = b.k$

→ Dê uma demonstração direta do teorema:

- "Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3".



Técnicas de Demonstração

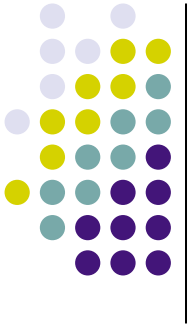
- Demonstração Direta

- Exemplo I (cont.)

- x divisível por 6 \rightarrow x divisível por 3
- a) Hipótese como verdadeira: x divisível por 6
- b) Dedução da tese
 - $x = 6.k$ (divisibilidade)
 - $6 = 2.3$ (fatoração)
 - $x = (2.3)k$ (substituição)
 - $x = (k.2)3$ (associatividade)
 - $x = j.3$ ($j = k.2$)



Provado: x é divisível por 3 (divisibilidade)



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição
 - $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

- Hipótese: $\neg q$; tese: $\neg p$



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

- Hipótese: $\neg q$; tese: $\neg p$

- (a) Assumir a hipótese $\neg q$ como verdadeira e deduzir a tese $\neg p$.
 - (b) Para a dedução:
 - Aplicar axiomas, definições, manipulação matemática, etc.



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
 - Exemplo I
 - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
 - Exemplo I
 - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
 - Teorema: n^2 ímpar \rightarrow n ímpar



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
 - Exemplo I
 - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
 - Teorema: n^2 ímpar \rightarrow n ímpar
 - **Por demonstração direta:**
 - Hipótese: $n^2 = 2k + 1$ (como usar isso para provar que n é ímpar?)
 - $n = \sqrt{2k + 1}$ (?) **X**



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
 - Teorema: n^2 ímpar \rightarrow n ímpar
 - **Por contraposição:**
 - n par \rightarrow n^2 par
 - Hipótese: $n = 2k$



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
 - Teorema: n^2 ímpar \rightarrow n ímpar
 - **Por contraposição:**
 - n par \rightarrow n^2 par
 - Hipótese: $n = 2k$
 - $n = 2k$ (elevando ao quadrado ambos os lados para chegar na tese)
 - $n^2 = 4k^2$
 - $n^2 = 2(2k^2)$ (fatoração)
 - $n^2 = 2z$ ($z = 2k^2$)



Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)

- Exemplo I (cont.)

- Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.

- Teorema: n^2 ímpar \rightarrow n ímpar

- **Por contraposição:**

- n par \rightarrow n^2 par

- Hipótese: $n = 2k$

- $n = 2k$ (elevando ao quadrado ambos os lados para chegar na tese)

- $n^2 = 4k^2$

- $n^2 = 2(2k^2)$ (fatoração)

- $n^2 = 2z$ ($z = 2k^2$)



Provado: n^2 é par. Logo, demonstrou-se que n^2 ímpar \rightarrow n ímpar



Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)
 - $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$



Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$



Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$

- Hipótese: p

- Negação da tese: $\neg q$

- Contradição: F



Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)

- $p \rightarrow q \Leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$

- Hipótese: p
- Negação da tese: $\neg q$
- Contradição: F
- (a) Assumir a hipótese p e a negação da tese $\neg q$ como verdadeiras, então deduzir uma contradição (F).
- (b) Para a dedução:
 - Aplicar axiomas, definições, manipulação matemática, etc.



Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I
 - Definição
 - **Número racional:** pode ser escrito como a/b , sendo a e b inteiros, $q \neq 0$, e a e b não tem fator comum (eles são fração irredutível).

→ Demonstre através de uma contradição que $\sqrt{2}$ não é racional.



Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
 - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional



Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
 - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
 - Por contradição:
 - $p: \sqrt{2}$
 - $\neg q: \sqrt{2}$ é racional, **então:**
 - $\sqrt{2} = a/b$
 - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
 - $2b^2 = a^2$



Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
 - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
 - Por contradição:
 - $p: \sqrt{2}$
 - $\neg q: \sqrt{2}$ é racional, **então:**
 - $\sqrt{2} = a/b$
 - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
 - $2b^2 = a^2 \longrightarrow a^2$ é par. Logo a deve ser par.



Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
 - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
 - Por contradição:
 - $p: \sqrt{2}$
 - $\neg q: \sqrt{2}$ é racional, **então:**
 - $\sqrt{2} = a/b$
 - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
 - $2b^2 = a^2$ → a^2 é par. Logo a deve ser par.
 - $2b^2 = (2k)^2$
 - $2b^2 = 4k^2$



Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
 - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
 - Por contradição:
 - $p: \sqrt{2}$
 - $\neg q: \sqrt{2}$ é racional, **então:**
 - $\sqrt{2} = a/b$
 - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
 - $2b^2 = a^2 \longrightarrow a^2$ é par. Logo a deve ser par.
 - $2b^2 = (2k)^2$
 - $2b^2 = 4k^2 \longrightarrow b^2$ é par. Logo b deve ser par.

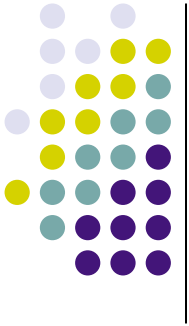


Técnicas de Demonstração

- Contradição ($p \wedge \neg q \rightarrow F$)
 - Exemplo I (cont.)
 - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
 - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
 - Por contradição:
 - $p: \sqrt{2}$
 - $\neg q: \sqrt{2}$ é racional

Conclusão:

→ Como a e b possuem um fator comum, i.e., 2, a fração não é irredutível. Assim, foi encontrada uma contradição para a suposição que $\sqrt{2}$ era racional.



Síntese da Aula

- Teorema
- Demonstração Direta
- Demonstração por Contraposição
- Demonstração por Contradição (Redução ao Absurdo)



Próxima Aula (05/04)

- **TDE03**
 - **Conceito de Indução.**