1.6 Introdução a Demonstrações

Introdução

Nesta seção, introduziremos a noção de demonstração e descreveremos métodos para a construção de demonstrações. Uma demonstração é um argumento válido que estabelece a verdade de uma sentença matemática. Uma demonstração pode usar as hipóteses do teorema, se existirem, axiomas assumidos com verdade e teoremas demonstrados anteriormente. Usando esses ingredientes e regras de inferência, o passo final da demonstração estabelece a verdade da sentença que está sendo demonstrada.

Em nossa discussão, vamos nos mover de demonstrações formais de teoremas até demonstrações mais informais. Os argumentos que introduzimos na Seção 1.5 para demonstrar que sentenças que envolvem proposições e sentenças quantificadas são verdadeiras sob demonstrações formais, se todos os passos são dados, e as regras para cada passo do argumento são também dadas. No entanto, demonstrações formais de teoremas muito comuns podem ser extremamente longas e difíceis de fazer. Na prática, as demonstrações dos teoremas feitas por humanos são na sua maioria **demonstrações informais**, em que mais de uma regra de inferência pode ser utilizada em cada passo, passos podem ser pulados, axiomas são assumidos e as regras de inferência utilizadas em cada passo não são explicitamente demonstradas. Demonstrações informais podem explicar aos humanos por que teoremas são verdadeiros, enquanto computadores só se contentam quando produzem uma demonstração formal usando sistemas de raciocínio automático.

Os métodos de demonstrações discutidos neste capítulo são importantes não só porque são utilizados para demonstrar teoremas, mas também pelas muitas aplicações em ciência da computação. Essas aplicações incluem verificar se programas de computador são corretos, estabelecendo se sistemas de operação são seguros, fazendo inferência em inteligência artificial, mostrando que sistemas de especificações são consistentes, e assim por diante. Conseqüentemente, compreender as técnicas utilizadas em demonstrações é essencial tanto para matemática quanto para ciência da computação.

Alguma Terminologia

Formalmente, um **teorema** é uma sentença que se pode demonstrar que é verdadeira. Em escrita matemática, o termo teorema é usualmente reservado para as sentenças que são consideradas com alguma importância. Teoremas menos importantes são comumente chamados de **proposições**. (Teoremas podem ser também referidos como **fatos** ou **resultados**.) Um teorema pode ser uma quantificação universal de uma sentença condicional com uma ou mais premissas e uma conclusão. No entanto, pode ser outro tipo de sentença lógica, como os exemplos vão mostrar, mais tarde, neste capítulo. Nós demonstramos que um teorema é verdadeiro com uma **demonstração**. Uma demonstração é um argumento válido que estabelece a verdade de um teorema. As sentenças utilizadas na demonstração podem incluir **axiomas** (ou **postulados**), os quais são sentenças que assumimos ser verdadeiras (por exemplo, veja Apêndice 1 com axiomas para os números reais), as premissas do teorema, se existirem, e teoremas previamente provados. Axiomas podem ser descritos usando termos primitivos que não requerem definição, mas todos os outros termos utilizados em teoremas e suas demonstrações devem ser definidos. Regras de inferência, juntamente com as definições dos termos, são utilizadas para chegar a conclusões a partir de outras afirmações, unindo os passos da demonstração. Na prática, o passo final de uma demonstração é usualmente a conclusão do teorema. No entanto, para esclarecer, vamos freqüentemente retomar a sentença do teorema como o passo final de uma demonstração.

Um teorema menos importante que nos ajuda em uma demonstração de outros resultados é chamado de **lema** (plural *lemas* ou *lemata*). Demonstrações complicadas são usualmente mais fáceis de entender quando elas são demonstradas utilizando-se uma série de lemas, em que cada lema é demonstrado individualmente. Um **corolário** é um teorema que pode ser estabelecido diretamente de um teorema que já foi demonstrado. Uma **conjectura** é uma sentença que inicialmente é proposta como verdadeira, usualmente com base em alguma evidência parcial, um argumento heurístico ou a intuição de um perito. Quando uma demonstração de uma conjectura é achada, a conjectura se torna um teorema. Muitas vezes são verificadas que conjecturas são falsas, portanto elas não são teoremas.

Entendendo como Teoremas São Descritos

Exemplos Extras

Antes de introduzir métodos para demonstrar teoremas, precisamos entender como teoremas matemáticos são expostos. Muitos teoremas dizem que essa propriedade é assegurada para todos os elementos em um domínio, como os inteiros ou os números reais. Embora as sentenças precisas desses teoremas necessitem da inclusão de um quantificador universal, a convenção em matemática é omiti-la. Por exemplo, a sentença

"Se $x > y$, em que x e y são números reais positivos, então $x^2 > y^2$."

significa que

"Para todos os números reais positivos x e y, se $x > y$, então $x^2 > y^2$."

Entretanto, quando teoremas desse tipo são demonstrados, a propriedade da instanciação universal é freqüentemente usada sem ser explicitamente mencionada. O primeiro passo da demonstração usualmente envolve selecionar um elemento geral do domínio. Os passos subseqüentes mostram que esse elemento tem a propriedade em questão. Finalmente, a generalização universal implica que o teorema é válido para todos os membros do domínio.

Métodos de Demonstrações de Teoremas

Auto-avaliação

Vamos agora mudar nossa atenção para demonstração de teoremas matemáticos. Demonstrar teoremas pode ser difícil. Vamos precisar de toda a munição que tivermos para nos ajudar a demonstrar resultados diferentes. Vamos, então, introduzir uma bateria de métodos de demonstrações diferentes. Esses métodos podem se tornar parte de nosso repertório para demonstrar teoremas.

Para demonstrar um teorema da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, nosso objetivo é mostrar que $P(c) \rightarrow Q(c)$ é verdadeira, em que c é um elemento arbitrário do domínio, e então aplicar a generalização universal. Nesta demonstração, precisamos mostrar que uma sentença condicional é verdadeira. Por isso, focalizaremos métodos que demonstram que condicionais são verdadeiras. Lembre-se de que $p \rightarrow q$ é verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa. Note que para a sentença $p \rightarrow q$ ser demonstrada, é necessário apenas mostrar que q é verdadeira se p é verdadeira. A seguinte discussão nos dará as técnicas mais comuns para demonstrar sentenças condicionais. Mais tarde vamos discutir métodos para demonstrar outros tipos de sentenças. Nesta seção e na Seção 1.7, vamos desenvolver um arsenal de muitas técnicas diferentes de demonstração, que podem ser usadas para demonstrar uma grande variedade de teoremas.

Quando você ler demonstrações, encontrará freqüentemente as palavras "obviamente" ou "claramente". Essas palavras indicam que passos foram omitidos e que o autor espera que o leitor seja capaz de fazê-los. Infelizmente, assumir isso nem sempre é interessante, pois os leitores não são todos capazes de fazer os passos nesses buracos das demonstrações. Vamos assiduamente tentar não usar essas palavras e não omitir muitos passos. No entanto, se concluirmos todos os passos em demonstrações, nossas demonstrações serão com freqüência exaustivamente longas.

Demonstrações Diretas

Uma **demonstração direta** de uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é construída quando o primeiro passo é assumir que p é verdadeira; os passos subseqüentes são construídos utilizando-se regras de inferência, com o passo final mostrando que q deve ser também verdadeira. Uma demonstração direta mostra que uma sentença condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira mostrando que p é verdadeira, então q deve ser verdadeira, de modo que a combinação p verdadeira e q falsa nunca ocorre. Em uma demonstração direta, assumimos que p é verdadeira e usamos axiomas, definições e teoremas previamente comprovados, junto com as regras de inferência, para mostrar que q deve ser também verdadeira. Você verá que demonstrações diretas de muitos resultados são construídas de maneira direta, com uma seqüência óbvia de passos que levam da hipótese à conclusão. No entanto, demonstrações diretas algumas vezes requerem *insights* particulares e podem ser bastante astuciosas. As primeiras demonstrações diretas que vamos apresentar aqui são bastante óbvias; mais tarde veremos algumas menos óbvias.

Vamos dar muitos exemplos de demonstrações diretas. Mas, antes de darmos o primeiro exemplo, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 1 O inteiro n é *par* se existe um inteiro k tal que $n = 2k$, e n é *ímpar* se existe um inteiro k tal que $n = 2k + 1$. (Note que um inteiro é sempre par ou ímpar e nenhum inteiro é par e ímpar.)

EXEMPLO 1 Dê uma demonstração direta do teorema "Se n é um número inteiro ímpar, então n^2 *é ímpar*".

Exemplos Extras

Solução: Note que este teorema diz $\forall n P((n) \rightarrow Q(n))$, em que $P(n)$ é "n é um inteiro ímpar" e $Q(n)$ é "n^2 *é ímpar*". Como dissemos, vamos seguir a convenção matemática usual para demonstrações, mostrando que $P(n)$ implica $Q(n)$, e não usando explicitamente instanciação universal. Para começar uma demonstração direta desse teorema, vamos assumir que a hipótese dessa sentença condicional é verdadeira, ou seja, assumimos que n é ímpar. Pela definição de número ímpar, temos que $n = 2k + 1$, em que k é algum inteiro. Queremos demonstrar que n^2 é também ímpar. Podemos elevar ao quadrado ambos os membros da equação $n = 2k + 1$ para obter uma nova equação que expresse n^2. Quando fizermos isso, teremos $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Pela definição de inteiro ímpar, concluímos que n^2 é ímpar (ele é um a mais que o dobro de um inteiro). Conseqüentemente, provamos que se n é um número inteiro ímpar, então n^2 é ímpar. ◀

EXEMPLO 2 Dê uma demonstração direta de que se m e n são ambos quadrados perfeitos, então nm também é um quadrado perfeito. (Um inteiro a é um **quadrado perfeito** se existe um inteiro b tal que $a = b^2$.)

Solução: Para produzir uma demonstração direta desse teorema, assumimos que a hipótese dessa condicional é verdadeira, ou seja, assumimos que m e n são ambos quadrados perfeitos. Pela definição de quadrado perfeito, segue-se que existem inteiros s e t tal que $m = s^2$ e $n = t^2$. O objetivo da demonstração é mostrar que mn também deve ser um quadrado perfeito quando m e n o são; olhando adiante, vemos como podemos mostrar isto apenas multiplicando as duas equações $m = s^2$ e $n = t^2$. Isso mostra que $mn = s^2t^2$, o que implica que $mn = (st)^2$ (usando comutatividade e associatividade da multiplicação). Pela definição de quadrado perfeito, segue que mn também é um quadrado perfeito, pois é o quadrado de st, o qual também é um inteiro. Demonstramos que se m e n são ambos quadrados perfeitos, então mn também é um quadrado perfeito.

Demonstração por Contraposição

Demonstrações diretas vão da hipótese do teorema à sua conclusão. Elas começam com as premissas, continuam com uma seqüência de deduções e com a conclusão. No entanto, vamos ver que tentar fazer demonstrações diretas freqüentemente não tem um bom final. Precisamos de outros métodos para demonstrar teoremas da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$. Demonstrações de teoremas desse tipo que não são demonstrações diretas, ou seja, que não seguem das hipóteses e terminam com a conclusão, são chamadas de **demonstrações indiretas**.

Uma demonstração indireta extremamente usada é conhecida como **demonstração por contraposição**. Demonstrações por contraposição fazem uso do fato de que a sentença condicional $p \rightarrow q$ é equivalente a sua contrapositiva, $\neg q \rightarrow \neg p$, isto significa que uma sentença condicional

$p \to q$ pode ser demonstrada mostrando que sua contrapositiva, $\neg q \to \neg p$, é verdadeira. Em uma demonstração por contraposição de $p \to q$, vamos tomar $\neg q$ como uma hipótese, e usando axiomas, definições e teoremas previamente demonstrados, juntamente com regras de inferência, mostramos que $\neg p$ deve ser verdadeira. Vamos ilustrar demonstração por contraposição com dois exemplos. Esses exemplos mostram que demonstrações por contraposição podem ser bem-sucedidas quando não é fácil achar demonstrações diretas.

EXEMPLO 3 Demonstre que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar.

Exemplos Extras

Solução: Primeiro vamos olhar para uma demonstração direta. Para construir uma demonstração direta, devemos assumir que $3n + 2$ é um número ímpar. Isso significa que $3n + 2 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Podemos usar esse fato para mostrar que n é ímpar? Vemos que $3n + 1 = 2k$, mas não parece ter algum meio direto para concluir que n é ímpar. Como nossa tentativa com demonstração direta falhou, vamos tentar uma demonstração por contraposição.

O primeiro passo em uma demonstração por contraposição é assumir que a conclusão da sentença condicional "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar" é falsa; assumimos que n é par. Então, pela definição de número par, $n = 2k$ para algum inteiro k. Substituindo $2k$ em n, chegamos a $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Isso nos diz que $3n + 2$ é par (pois é um múltiplo de 2), e logo não é ímpar. Isso é a negação da hipótese do teorema. Como a negação da conclusão da sentença condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença original é verdadeira. Nossa demonstração por contraposição foi bem-sucedida; demonstramos que se n é um inteiro e $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. ◀

EXEMPLO 4 Demonstre que se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$.

Solução: Como não há um meio óbvio de mostrar que $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ diretamente da equação $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, vamos tentar uma demonstração por contraposição.

O primeiro passo nesta demonstração é assumir que a conclusão da condicional "Se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$ " é falsa. Ou seja, assumir que a sentença $(a \leq \sqrt{n}) \vee (b \leq \sqrt{n})$ é falsa. Usando o significado da disjunção junto com a lei de De Morgan, vemos que isso implica que ambos $a \leq \sqrt{n}$ e $b \leq \sqrt{n}$ são falsas. Isso implica que $a > \sqrt{n}$ e $b > \sqrt{n}$. Podemos multiplicar essas inequações juntas (usando o fato de que se $0 < t$ e $0 < v$, então $su < tv$) para obter $ab > \sqrt{n} \cdot \sqrt{n} = n$. Isso mostra que $ab \neq n$, o que contradiz a sentença $n = ab$.

Como a negação da conclusão da condicional implica que a hipótese é falsa, a sentença condicional original é verdadeira. Nossa demonstração por contraposição foi bem-sucedida; demonstramos que se $n = ab$, em que a e b são inteiros positivos, então $a \leq \sqrt{n}$ ou $b \leq \sqrt{n}$. ◀

DEMONSTRAÇÃO POR VACUIDADE E DEMONSTRAÇÃO POR TRIVIALIZAÇÃO Podemos rapidamente demonstrar que uma sentença condicional $p \to q$ é verdadeira quando sabemos que p é falsa, pois $p \to q$ deve ser verdadeira quando p é falsa. Conseqüentemente, se pudermos mostrar que p é falsa, então teremos uma demonstração, chamada de **demonstração por vacuidade**, da condicional $p \to q$. Demonstrações por vacuidade são empregadas para estabelecer casos especiais de teoremas que dizem que uma condicional é verdadeira para todos os números inteiros positivos [isto é, um teorema do tipo $\forall n P(n)$, em que $P(n)$ é uma função proposicional]. Técnicas de demonstração para esse tipo de teoremas serão discutidas na Seção 4.1.

EXEMPLO 5 Mostre que a proposição $P(0)$ é verdadeira, em que $P(n)$ é "Se $n > 1$, então $n^2 > n$" e o domínio consiste todos os inteiros.

Solução: Note que $P(0)$ é "Se $0 > 1$, então $0^2 > 0$". Podemos mostrar $P(0)$ utilizando-se uma demonstração por vacuidade, pois a hipótese $0 > 1$ é falsa. Isso nos diz que $P(0)$ é automaticamente verdadeira. ◀

Lembre-se: O fato de a conclusão desta sentença condicional, $0^2 > 0$, ser falsa é irrelevante para o valor-verdade da sentença condicional, pois uma condicional com uma hipótese falsa é diretamente verdadeira.

Podemos também demonstrar rapidamente que a condicional $p \rightarrow q$ é verdadeira se sabemos que a conclusão q é verdadeira. Mostrar que q é verdadeira faz com que $p \rightarrow q$ deva ser também verdadeira. Uma demonstração de $p \rightarrow q$ que usa o fato de que q é verdadeira é chamada de **demonstração por trivialização**. Demonstrações por trivialização são freqüentemente usadas e de grande importância quando demonstramos casos especiais de teoremas (veja a discussão de demonstrações por casos na Seção 1.7) e em indução matemática, que é uma técnica de demonstração discutida na Seção 4.1.

EXEMPLO 6 Seja $P(n)$ a proposição "Se a e b são inteiros positivos com $a \geq b$, então $a^n \geq b^n$", em que o domínio consiste em todos os inteiros. Mostre que $P(0)$ é verdadeira.

Solução: A proposição $P(0)$ é "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$". Como $a^0 = b^0 = 1$, a conclusão da condicional é "Se $a \geq b$, então $a^0 \geq b^0$" é verdadeira. Portanto, a sentença condicional, que é $P(0)$, é verdadeira. Este é um exemplo de demonstração por trivialização. Note que a hipótese, a sentença "$a \geq b$", não foi necessária nesta demonstração. ◄

UM POUCO DE ESTRATÉGIA DE DEMONSTRAÇÃO Descrevemos dois importantes métodos para provar teoremas da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$: demonstração direta e demonstração por contraposição. Também demos exemplos que mostram como cada uma é usada. No entanto, quando você recebe um teorema da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, que método você deve tentar usar para demonstrar? Vamos prover algumas regras rápidas aqui; na Seção 1.7 vamos discutir estratégias de demonstração com mais detalhes. Quando queremos demonstrar uma sentença da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, primeiro devemos avaliar o que parece ser uma demonstração direta para esta sentença. Comece expandindo as definições da hipótese. Vá raciocinando sobre essas hipóteses, juntamente com os axiomas e os teoremas demonstrados. Se uma demonstração direta não aparecer em nenhuma situação, tente a mesma coisa com a contraposição. Lembre-se de que em uma demonstração por contraposição você assume que a conclusão é falsa e usa uma demonstração direta para mostrar que a hipótese deve ser falsa. Vamos ilustrar essa estratégia nos exemplos 7 e 8. Antes de apresentar nossos próximos exemplos, precisamos de uma definição.

DEFINIÇÃO 2 O número real r é *racional* se existem inteiros p e q com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$. Um número real que não é racional é chamado de *irracional*.

EXEMPLO 7 Demonstre que a soma de dois números racionais é um racional. (Note que se incluirmos o quantificador implícito aqui, o teorema que queremos demonstrar é "Para todo número real r e todo real s, se r e s são números racionais, então $r + s$ é racional".)

Exemplos Extras

*Solução:*Primeiro tentemos uma demonstração direta. Para começar, suponha que r e s são racionais. Da definição de números racionais, segue que existem inteiros p e q, com $q \neq 0$, tal que $r = p/q$, e inteiros t e u, com $u \neq 0$, tal que $s = t/u$. Podemos usar essas informações para mostrar que $r + s$ é racional? O próximo passo é adicionar $r = p/q$ e $s = t/u$, para obter

$$r + s = \frac{p}{q} + \frac{t}{u} = \frac{pu + qt}{qu}.$$

Como $q \neq 0$ e $u \neq 0$, temos que $qu \neq 0$. Conseqüentemente, expressamos $r + s$ como a razão de dois inteiros, $pu + qt$ e qu, em que $qu \neq 0$. Isso significa que $r + s$ é racional. Demonstramos que a soma de dois números racionais é racional; nossa tentativa de achar uma demonstração direta foi bem-sucedida. ◄

EXEMPLO 8 Demonstre que se n é um número inteiro e n^2 *é ímpar*, então n é ímpar.

Solução: Primeiro tentaremos uma demonstração direta. Suponha que n é um inteiro e n^2 é ímpar. Então existe um inteiro k, tal que $n^2 = 2k + 1$. Podemos usar essa informação para mostrar que n é ímpar? Parece que não existe uma saída óbvia para mostrar que n é ímpar, pois, resolvendo a equação em n, temos $n = \pm\sqrt{2k+1}$, que não é interessante de trabalhar.

Como a tentativa de uma demonstração direta não rendeu frutos, tentaremos uma demonstração por contraposição. Tomaremos como hipótese a sentença n não é ímpar. Como todo inteiro é par ou ímpar, isso significa que n é par. E isso implica que existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Para demonstrar o teorema, devemos mostrar que essa hipótese implica a conclusão, ou seja, n^2 não é ímpar, ou ainda, que n^2 é par. Podemos usar a equação $n = 2k$ para determinar isso? Elevando ao quadrado ambos os membros da equação, obtemos $n^2 = 4k^2 = 2(2k^2)$, o que implica que n^2 é também par, pois $n^2 = 2t$, em que $t = 2k^2$. Demonstramos que se n é um número inteiro e n^2 é ímpar, então n é ímpar. Nossa tentativa de encontrar uma demonstração por contraposição foi bem-sucedida. ◀

Demonstração por Contradição

Suponha que queremos demonstrar que uma sentença p é verdadeira. Além disso, suponha que podemos achar uma contradição q tal que $\neg p \to q$ é verdadeira. Como q é falsa, mas $\neg p \to q$ é verdadeira, podemos concluir que $\neg p$ é falsa, o que significa que p é verdadeira. Como podemos encontrar uma contradição q que possa nos ajudar a demonstrar que p é verdadeira usando esse raciocínio?

Como a sentença $r \wedge \neg r$ é uma contradição qualquer que seja a proposição r, podemos demonstrar que p é verdadeira se pudermos mostrar que $\neg p \to (r \wedge \neg r)$ é verdadeira para alguma proposição r. Demonstrações desse tipo são chamadas de **demonstrações por contradição**. Como uma demonstração por contradição não mostra o resultado diretamente, esse é um outro tipo de demonstração indireta. Daremos três exemplos de demonstração por contradição. O primeiro é um exemplo de uma aplicação do princípio da casa dos pombos, uma técnica combinatória que vamos desenvolver profundamente na Seção 5.2.

EXEMPLO 9 Demonstre que ao menos 4 de 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

Solução: Seja p a proposição "Ao menos 4 dos 22 dias escolhidos caem no mesmo dia da semana". Suponha que $\neg p$ é verdadeira. Isso significa que no máximo 3 dos 22 dias caem no mesmo dia da semana. Como existem 7 dias na semana, isso implica que no máximo 21 dias podem ser escolhidos, pois, para cada dia da semana, podem ser escolhidos no máximo 3 dias que coincidem no mesmo dia da semana. Isso contradiz a hipótese que afirmava ter 22 dias considerados. Assim, se r é a sentença que diz que 22 dias foram escolhidos, então temos mostrado que $\neg p \to (r \wedge \neg r)$. Conseqüentemente, sabemos que p é verdadeira. Demonstramos que ao menos 4 de 22 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana. ◀

Exemplos Extras

EXEMPLO 10 Demonstre que $\sqrt{2}$ é irracional por meio de uma demonstração por contradição.

Solução: Seja p a proposição "$\sqrt{2}$ é irracional". Para começar uma demonstração por contradição, supomos que $\neg p$ é verdadeira. Note que $\neg p$ é a sentença "Não é o caso que $\sqrt{2}$ é irracional", o que diz que $\sqrt{2}$ é racional. Vamos demonstrar que, assumindo que $\neg p$ é verdadeira, chegaremos a uma contradição.

Se $\sqrt{2}$ é racional, existem inteiros a e b tal que $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum (então a fração a/b é irredutível). (Aqui, estamos usando o fato de que todo número racional pode ser escrito em uma fração irredutível.) Como $\sqrt{2} = a/b$, quando ambos os membros da equação são elevados ao quadrado, segue-se que

$$2 = a^2/b^2.$$

Portanto,

$$2b^2 = a^2.$$

Pela definição de número par segue-se que a^2 é par. Podemos usar o fato de que se a^2 é par, então a é par, o qual segue do Exercício 16. Mas se a é par, pela definição de número par, $a = 2c$ para algum inteiro c. Então,

$$2b^2 = 4c^2.$$

Dividindo ambos os membros dessa equação por 2, temos

$$b^2 = 2c^2.$$

Pela definição de par, isso significa que b^2 é par. Novamente usando o fato de que se o quadrado de um inteiro é par, então o inteiro também deve ser par, concluímos que b deve ser par também.

Agora mostramos que ter assumido $\neg p$ nos levou à equação $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum; mas a e b são pares, ou seja, 2 divide ambos os número a e b. Note que a sentença $\sqrt{2} = a/b$, em que a e b não têm fator comum, significa em particular que 2 não divide ambos a e b. Como ter assumido $\neg p$ nos levou à contradição de que 2 divide ambos a e b e 2 não divide ambos a e b, $\neg p$ deve ser falsa. Ou seja, a sentença p, "$\sqrt{2}$ é irracional", é verdadeira. Provamos que $\sqrt{2}$ é irracional. ◀

Demonstração por contradição pode ser usada para demonstrar condicionais. Nessas demonstrações, primeiro assumimos a negação da conclusão. Então, usamos as premissas do teorema e a negação da conclusão para chegar à contradição. (A razão pela qual essas demonstrações são válidas está na equivalência lógica $p \to q$ e $(p \wedge \neg q) \to \mathbf{F}$. Para ver que essas sentenças são equivalentes, simplesmente porque cada uma é falsa em exatamente um caso, quando p é verdadeira e q é falsa.)

Note que podemos reescrever uma demonstração por contraposição de uma sentença condicional como uma demonstração por contradição. Em uma demonstração de $p \to q$ por contraposição, assumimos que $\neg q$ é verdadeira. E, então, mostramos que $\neg p$ também deve ser verdadeira. Para reescrever uma demonstração por contraposição de $p \to q$ como uma demonstração por contradição, supomos que ambas p e $\neg q$ são verdadeiras. Então, usamos os passos de uma demonstração de $\neg q \to \neg p$ para mostrar que $\neg p$ é verdadeira. Isso nos leva à contradição $p \wedge \neg p$, completando a demonstração. O Exemplo 11 ilustra como uma demonstração por contraposição de uma condicional pode ser reescrita como uma demonstração por contradição.

EXEMPLO 11 Dê uma demonstração por contradição do teorema "Se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar".

Solução: Seja p a proposição "$3n + 2$ é ímpar" e q a proposição "n é ímpar". Para construir uma demonstração por contradição, assumimos que ambas p e $\neg q$ são verdadeiras. Ou seja, assumimos que $3n + 2$ é ímpar e que n não o é. Como n não é ímpar, sabemos que é par. Seguindo os passos da solução do Exemplo 3 (uma demonstração por contraposição), podemos mostrar que se n é par, então $3n + 2$ é par. Primeiro, como n é par, existe um inteiro k, tal que $n = 2k$. Isso implica que $3n + 2 = 3(2k) + 2 = 6k + 2 = 2(3k + 1)$. Como $3n + 2$ é $2t$, em que $t = 3k + 1$, $3n + 2$ é par. Note que a sentença "$3n + 2$ é par" é o mesmo que $\neg p$, pois um inteiro é par se e somente se não for ímpar. Como ambas p e $\neg p$ são verdadeiras, temos uma contradição. Isso completa a demonstração por contradição, demonstrando que se $3n + 2$ é ímpar, então n é ímpar. ◀

Note que podemos também demonstrar por contradição que $p \to q$ é verdadeira, assumindo que p e $\neg q$ são verdadeiras, e mostrando que q deve ser também verdadeira. Isso implica que $\neg q$ e q são ambas verdadeiras, uma contradição. Essa observação nos diz que podemos tornar uma demonstração direta em uma demonstração por contradição.

DEMONSTRAÇÕES DE EQUIVALÊNCIAS Para demonstrar um teorema que é uma sentença bicondicional, ou seja, que é da forma $p \leftrightarrow q$, mostramos que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são ambas verdadeiras. A validade desse método baseia-se na tautologia

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow [(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)].$$

EXEMPLO 12 Prove o teorema "Se n é um inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se n^2 for ímpar".

Solução: Esse teorema tem a forma "p se e somente se q", em que p é "n é ímpar" e q é "n^2 é ímpar". (Como usual, não explicitamos a expressão com quantificador universal.) Para demonstrar esse teorema, precisamos mostrar que $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras.

Exemplos Extras

Já mostramos (no Exemplo 1) que $p \rightarrow q$ é verdadeira e (no Exemplo 8) que $q \rightarrow p$ é verdadeira.

Como evidenciamos que ambas $p \rightarrow q$ e $q \rightarrow p$ são verdadeiras, mostramos que o teorema é verdadeiro. ◀

Algumas vezes um teorema determina que muitas proposições são equivalentes. Esses teoremas determinam que as proposições $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ são equivalentes. Isso pode ser escrito por

$$p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n,$$

que significa que todas as n proposições têm o mesmo valor-verdade e, conseqüentemente, que para todo i e j com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$, p_i e p_j são equivalentes. Uma maneira de demonstrar essa equivalência mutua é usar a tautologia

$$[p_1 \leftrightarrow p_2 \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow p_n] \leftrightarrow [(p_1 \rightarrow p_2) \wedge (p_2 \rightarrow p_3) \wedge \ldots \wedge (p_n \rightarrow p_1)].$$

Isso mostra que se as sentenças condicionais $p_1 \rightarrow p_2, p_2 \rightarrow p_3, \ldots, p_n \rightarrow p_1$ podem ser demonstradas como verdadeiras, então as proposições $p_1, p_2, \ldots, p_n$ são todas equivalentes.

Isso é muito mais eficiente que demonstrar que $p_i \rightarrow p_j$ para todo $i \neq j$ com $1 \leq i \leq n$ e $1 \leq j \leq n$.

Quando demonstramos que algumas sentenças são equivalentes, podemos estabelecer uma cadeia de sentenças condicionais que escolhermos tão grande quanto possível para trabalhar sobre essa cadeia e ir de qualquer uma dessas sentenças para outra. Por exemplo, podemos evidenciar que p_1, p_2 e p_3 são equivalentes mostrando que $p_1 \rightarrow p_3$, $p_3 \rightarrow p_2$ e $p_2 \rightarrow p_1$.

EXEMPLO 13 Demonstre que estas sentenças sobre o inteiro n são equivalentes:

p_1: n é par.
p_2: $n - 1$ é ímpar.
p_3: n^2 é par.

Solução: Vamos demonstrar que essas três sentenças são equivalentes mostrando que as condicionais $p_1 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_3$, e $p_3 \rightarrow p_1$ são verdadeiras.

Vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $p_1 \rightarrow p_2$. Suponha que n é par. Então $n = 2k$ para algum inteiro k. Conseqüentemente, $n - 1 = 2k - 1 = 2(k - 1) + 1$. Isso significa que $n - 1$ é ímpar, pois é da forma $2m + 1$, em que m é o inteiro $k - 1$.

Também vamos usar uma demonstração direta para mostrar que $p_2 \rightarrow p_3$. Agora, suponha que $n - 1$ é ímpar. Então $n - 1 = 2k + 1$ para algum inteiro k. Portanto, $n = 2k + 2$, então, $n^2 = (2k + 2)^2 = 4k^2 + 8k + 4 = 2(2k^2 + 4k + 2)$. Isso significa que n^2 é o dobro do inteiro $2k^2 + 4k + 2$, e, portanto, é par.

Para demonstrar $p_3 \rightarrow p_1$, usaremos uma demonstração por contraposição. Ou seja, provamos que se n não é par, então n^2 não é par. Isso é o mesmo que demonstrar que se n é ímpar, então n^2 é ímpar, o que já demonstramos no Exemplo 1. Isso completa a demonstração. ◀

CONTRA-EXEMPLOS Na Seção 1.3, dissemos que, para demonstrar que uma sentença da forma $\forall x\, P(x)$ é falsa, precisamos apenas encontrar um **contra-exemplo**, que é um exemplo de x para o qual $P(x)$ é falsa. Quando recebemos uma sentença da forma $\forall x\, P(x)$, a qual acreditamos ser falsa ou não conseguimos demonstrar por nenhum método, procuramos por contra-exemplos. Vamos ilustrar o uso de contra-exemplos no Exemplo 14.

EXEMPLO 14 Mostre que a sentença "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros" é falsa.

Exemplos Extras

Solução: Para mostrar que a sentença é falsa, procuramos um contra-exemplo, que será um inteiro que não é a soma dos quadrados de dois inteiros. Isso não vai demorar muito, pois 3 não pode ser escrito como a soma dos quadrados de dois inteiros. Para mostrar esse caso, note que os quadrados que não excedem 3 são $0^2 = 0$ e $1^2 = 1$. Mais que isso, não há como obter 3 da soma desses dois quadrados, com apenas dois termos. Conseqüentemente, mostramos que "Todo inteiro positivo é a soma dos quadrados de dois inteiros" é falsa. ◀

Erros em Demonstrações

Existem muitos erros comuns na construção de demonstrações matemáticas. Vamos brevemente descrever alguns deles aqui. Os erros mais comuns são erros em aritmética e álgebra básica. Até matemáticos profissionais cometem esses erros, especialmente quando estão trabalhando com fórmulas muito complicadas. Sempre que usarmos essas computações, ou passagens, devemos verificá-las tão cuidadosamente quanto possível. (Você deve também revisar os aspectos problemáticos da álgebra básica, principalmente antes de estudar a Seção 4.1.)

Links

Cada passo de uma demonstração matemática precisa ser correto e a conclusão precisa seguir logicamente os passos que a precedem. Muitos erros resultam da introdução de passos que não seguem logicamente aqueles que o precedem. Isso está ilustrado nos exemplos 15 a 17.

EXEMPLO 15 O que está errado com a famosa suposta "demonstração" de que $1 = 2$?

"Demonstração": Usamos estes passos, em que a e b são dois inteiros positivos iguais

Passo	**Razão**
1. $a = b$	Dado
2. $a^2 = ab$	Multiplicando ambos os membros de (1) por a.
3. $a^2 - b^2 = ab - b^2$	Subtraindo b^2 de ambos os lados de (2)
4. $(a - b)(a + b) = b\,(a - b)$	Fatorando ambos os membros de (3)
5. $a + b = b$	Dividindo ambos os lados de (4) por $a - b$
6. $2b = b$	Substituindo a por b em (5), pois $a = b$, e simplificando
7. $2 = 1$	Dividindo ambos os membros de (6) por b

Solução: Todos os passos são válidos exceto um, o passo 5, onde dividimos ambos os lados por $a - b$. O erro está no fato de $a - b$ ser zero; dividir ambos os lados de uma equação pela mesma quantidade é válido se essa quantidade não é zero. ◀

EXEMPLO 16 O que está errado com a "demonstração"?

"Teorema": Se n^2 é positivo, então n é positivo.

"Demonstração": Suponha que n^2 é positivo. Como a sentença condicional "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é verdadeira, podemos concluir que n é positivo.

Solução: Seja $P(n)$ a proposição "n é positivo" e $Q(n)$, "n^2 é positivo". Então nossa hipótese é $Q(n)$. A sentença "*Se* n é positivo, então n^2 é positivo*"* é a sentença $\forall n(P(n) \to Q(n))$. Da hipótese $Q(n)$ e da sentença $\forall n(P(n) \to Q(n))$ não podemos concluir que $P(n)$, pois não estamos usando uma regra válida de inferência. Pelo contrário, este é um exemplo da falácia de afirmação da conclusão. Um contra-exemplo é dado por $n = -1$ para o qual $n^2 = 1$ é positivo, mas n é negativo. ◀

EXEMPLO 17 O que está errado com a "demonstração"?

> "Teorema": Se n não é positivo, então n^2 não é positivo. (Esta é a contrapositiva do "teorema" no Exemplo 16.)

"Demonstração": Suponha que n não é positivo. Como a sentença condicional "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é verdadeira, podemos concluir que n^2 não é positivo.

Solução: Sejam $P(n)$ e $Q(n)$ as proposições do Exemplo 16. Então nossa hipótese é $\neg P(n)$ e a sentença "Se n é positivo, então n^2 é positivo" é a sentença $\forall n\,(P(n) \to Q(n))$. Da hipótese $\neg P(n)$ e da sentença $\forall n\,(P(n) \to Q(n))$ não podemos concluir que $\neg Q(n)$, pois não estamos usando uma regra válida de inferência. Ao contrário, este é um exemplo da falácia de negação da hipótese. Um contra-exemplo é dado por $n = -1$, como no Exemplo 16. ◀

Finalmente, vamos discutir um tipo de erro particularmente desonesto. Muitos argumentos baseiam-se em uma falácia chamada de **carregando a pergunta.** Essa falácia ocorre quando um ou mais passos da demonstração fundamentam-se na sentença que está sendo demonstrada. Em outras palavras, essa falácia aparece quando uma sentença é demonstrada utilizando-se a própria sentença. Esse é o motivo pelo qual essa falácia é também chamada de **raciocínio circular**.

EXEMPLO 18 O argumento seguinte está correto? Ele supostamente mostra que n é um inteiro par sempre que n^2 é um inteiro par.

> Suponha que n^2 é par. Então $n^2 = 2k$ para algum inteiro k. Seja $n = 2l$ para algum inteiro l. Isso mostra que n é par.

Solução: Este argumento é incorreto. A sentença "Seja $n = 2l$ para algum inteiro l*"* ocorre na demonstração. Nenhum argumento foi dado para demonstrar que n pode ser escrito como $2l$ para algum inteiro l. Este é um raciocínio circular, pois essa sentença é equivalente à sentença que está sendo demonstrada, "n é par". É claro que o resultado está correto; apenas o método de demonstração está errado. ◀

Cometer erros nas demonstrações faz parte do processo de aprendizado. Quando você comete um erro que alguém encontra, você deve analisar cuidadosamente onde está errando e garantir que não cometerá mais o mesmo erro. Matemáticos profissionais também cometem erros em demonstrações. Algumas demonstrações incorretas de importantes resultados enganaram as pessoas por anos antes de os erros serem encontrados.

Só um Começo

Temos agora desenvolvido um arsenal básico de métodos de demonstrações. Na próxima seção, vamos introduzir outros métodos de demonstração importantes. Também vamos introduzir muitas técnicas importantes de demonstração no Capítulo 4, incluindo indução matemática ou indução matemática, que pode ser usada para demonstrar resultados que valem para todos os inteiros positivos. No Capítulo 5, vamos introduzir a noção de demonstrações combinatórias.

Nesta seção, introduzimos muitos métodos para demonstrar teoremas da forma $\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$, incluindo demonstrações diretas e demonstrações por contraposição. Existem muitos teoremas desse tipo que têm suas demonstrações facilmente construídas pelo método direto através de hipóteses e definições de termos do teorema. No entanto, é freqüentemente difícil demonstrar um teorema sem utilizar uma demonstração por contraposição ou uma demonstração por contradição, ou alguma outra técnica de demonstração. Na Seção 1.7, vamos direcionar estratégias de demonstrações. Vamos descrever várias possibilidades que podem ser usadas para encontrar demonstrações quando o método direto não funciona. Construir demonstrações é uma arte que só pode ser aprendida através da experiência, incluindo escrever demonstrações, ter uma demonstração sua criticada e ler e analisar demonstrações.

Exercícios

1. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros ímpares é par.

2. Use uma demonstração direta para mostrar que a soma de dois números inteiros pares é par.

3. Mostre que o quadrado de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

4. Mostre que o inverso aditivo, ou negativo, de um número par é um número par, usando a demonstração direta.

5. Demonstre que se $m + n$ e $n + p$ são números inteiros pares, em que m, n e p são números inteiros, então $m + p$ é par. Que tipo de demonstração você utilizou?

6. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números ímpares é ímpar.

7. Use uma demonstração direta para mostrar que todo número inteiro ímpar é a diferença de dois quadrados.

8. Demonstre que se n é um quadrado perfeito, então $n + 2$ não é um quadrado perfeito.

9. Use um demonstração por contradição para provar que a soma de um número irracional e um racional é irracional.

10. Use uma demonstração direta para mostrar que o produto de dois números racionais é racional.

11. Demonstre ou contrarie que o produto de dois números irracionais é irracional.

12. Demonstre ou contrarie que o produto de um número racional diferente de zero e um número irracional é irracional.

13. Demonstre que se x é irracional, então $1/x$ é irracional.

14. Demonstre que se x é racional e $x \neq 0$, então $1/x$ é racional.

15. Use uma demonstração por contraposição para mostrar que se $x + y \geq 2$, em que x e y são números reais, então $x \geq 1$ ou $y \geq 1$.

16. Demonstre que se *m e n* são números inteiros e mn é par, então *m é par* ou n é par.

17. Mostre que se n é um número inteiro e $n^3 + 5$ é ímpar, então n é par, usando:

a) uma demonstração por contraposição.

b) uma demonstração por contradição.

18. Demonstre que se n é um número inteiro e $3n + 2$ é par, então n é par, usando:

a) uma demonstração por contraposição.

b) uma demonstração por contradição.

19. Demonstre a proposição $P(0)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo maior que 1, então $n^2 > n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

20. Demonstre a proposição $P(1)$, em que $P(n)$ é a proposição "Se n é um número inteiro positivo, então $n^2 \geq n$". Qual tipo de demonstração você utilizou?

21. Assuma $P(n)$ como a proposição "Se a e b são números reais positivos, então $(a + b)^n \geq a^n + b^n$". Comprove que $P(1)$ é verdadeira. Qual tipo de demonstração você utilizou?

22. Mostre que se você pegar 3 meias de uma gaveta, com apenas meias azuis e pretas, você deve pegar ou um par de meias azuis ou um par de meias pretas.

23. Mostre que pelo menos 10 de quaisquer 64 dias escolhidos devem cair no mesmo dia da semana.

24. Mostre que pelo menos 3 de quaisquer 25 dias escolhidos devem cair no mesmo mês do ano.

25. Use uma demonstração por contradição para mostrar que não há um número racional r para que $r^3 + r + 1 = 0$. [*Dica:* Assuma que $r = a/b$ seja uma raiz, em que a e b são números inteiros e a/b é o menor termo. Obtenha uma equação que envolva números inteiros, multiplicando-os por b^3. Então, veja se a e b são pares ou ímpares.]

26. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é par se e somente se $7n + 4$ for par.

27. Demonstre que se n é um número inteiro positivo, então n é ímpar se e somente se $5n + 6$ for ímpar.

28. Demonstre que $m^2 = n^2$ se e somente se $m = n$ ou $m = -n$.

29. Demonstre ou contrarie que se m e n são números inteiros, tal que $mn = 1$, então ou $m = 1$ e $n = 1$, ou $m = -1$ e $n = -1$.

30. Mostre que essas três proposições são equivalentes, em que a e b são números reais: (*i*) a é menor que b, (*ii*) a média de a e b é maior que a, e (*iii*) a média de a e b é menor que b.

31. Mostre que essas proposições sobre o número inteiro x são equivalentes: (*i*) $3x + 2$ é par, (*ii*) $x + 5$ é ímpar, (*iii*) x^2 é par.

32. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (*i*) x é racional, (*ii*) $x/2$ é racional, e (*iii*) $3x-1$ é racional.

33. Mostre que essas proposições sobre o número real x são equivalentes: (*i*) x é irracional, (*ii*) $3x+2$ é irracional, (*iii*) $x/2$ é irracional.

34. Esta é a razão para encontrar as soluções da equação $\sqrt{2x^2-1}=x$ correta? (1) $\sqrt{2x^2-1}=x$ é dado; (*2*) $2x^2-1=x^2$, obtido pelo quadrado dos dois lados de (1); (*3*) $x^2-1=0$, obtido pela subtração de x^2 dos dois lados de (2); (*4*) $(x-1)(x+1)=0$, obtido pela fatoração do lado esquerdo de x^2-1; (*5*) $x=1$ ou $x=-1$, confirmado, pois $ab=0$ implica que $a=0$ ou $b=0$.

35. Os passos abaixo para encontrar as soluções de $\sqrt{x+3}=3-x$ são corretos? (*1*) $\sqrt{x+3}=3-x$ é dado; (*2*) $x+3=x^2-6x+9$, obtido tirando a raiz quadrada dos dois lados de (1); (*3*) $0=x^2-7x+6$, obtido pela subtração de $x+3$ dos dois lados de (2); (*4*) $0=(x-1)(x-6)$, obtido pela fatoração do lado direito de (3); (*5*) $x=1$ ou $x=6$, tirado de (4) porque $ab=0$ implica que $a=0$ ou $b=0$.

36. Comprove que as proposições p_1, p_2, p_3 e p_4 podem ser equivalentes mostrando que $p_1 \leftrightarrow p_4$, $p_2 \leftrightarrow p_3$ e $p_1 \leftrightarrow p_3$.

37. Mostre que as proposições p_1, p_2, p_3, p_4 e p_5 podem ser equivalentes, demonstrando que as proposições condicionais $p_1 \rightarrow p_4$, $p_3 \rightarrow p_1$, $p_4 \rightarrow p_2$, $p_2 \rightarrow p_5$ e $p_5 \rightarrow p_3$ são verdadeiras.

38. Encontre um contra-exemplo para a proposição: todo número inteiro positivo pode ser escrito como a soma dos quadrados de três números inteiros.

39. Comprove que pelo menos um dos números reais $a_1, a_2, \ldots, a_n$ é maior que ou igual ao valor da média desses números. Que tipo de demonstração você utilizou?

40. Use o Exercício 39 para mostrar que se os primeiros 10 números inteiros positivos forem colocados em círculo, em qualquer ordem, haverá três números inteiros, em localização consecutiva no círculo, que terão uma soma maior que ou igual a 17.

41. Comprove que se n é um número inteiro, estas quatro proposições são equivalentes: (*i*) n é par, (*ii*) $n+1$ é ímpar, (*iii*) $3n+1$ é ímpar, (*iv*) $3n$ é par.

42. Comprove que estas quatro proposições sobre o número inteiro n são equivalentes: (*i*) n^2 é ímpar, (*ii*) $1-n$ é par, (*iii*) n^3 é ímpar, (*iv*) n^2+1 é par.

1.7 Métodos de Demonstração e Estratégia

Introdução

Auto-avaliação

Na Seção 1.6 introduzimos uma variedade de métodos de demonstrações e ilustramos como cada método pode ser usado. Nesta seção vamos continuar neste esforço. Vamos introduzir muitos outros importantes métodos de demonstrações, incluindo demonstrações em que consideramos diferentes casos separadamente e demonstrações em que comprovamos a existência de objetos com determinada propriedade desejada.

Na Seção 1.6 apenas discutimos brevemente a estratégia por trás da construção das demonstrações. Essa estratégia inclui a seleção de um método de demonstrações e então a construção com sucesso de um argumento passo a passo, com base nesse método. Nesta seção, depois que tivermos desenvolvido um grande arsenal de métodos de demonstração, vamos estudar alguns aspectos adicionais da arte e da ciência das demonstrações. Vamos prover avanços em como encontrar demonstrações trabalhando de trás para frente e adaptando demonstrações existentes.

Quando matemáticos trabalham, eles formulam conjecturas e tentam comprová-las ou tentam encontrar um contra-exemplo. Vamos brevemente descrever esse processo aqui, comprovando resultados sobre ladrilhar tabuleiros de xadrez com dominós ou outros tipos de peças. Olhando para esse método de ladrilhar, podemos ser capazes de rapidamente formular conjecturas e comprovar teoremas sem que tenhamos desenvolvido uma teoria.

Vamos concluir a seção discutindo o papel das questões abertas. Em particular, vamos discutir alguns problemas interessantes que apenas foram resolvidos depois de permanecerem abertos por centenas de anos ou porque ainda estão abertos.

Demonstração por Exaustão e Demonstração por Casos

Algumas vezes, não podemos comprovar um teorema usando um único argumento que satisfaça todos os casos possíveis. Vamos agora introduzir um método que pode ser usado para comprovar