em F (assim, Brian é o mais famoso e Oscar o menos famoso dessas pessoas). Suponha também que R seja o conjunto de pessoas ricas com $R = \{0{,}4\ \text{Alice}, 0{,}8\ \text{Brian}, 0{,}2\ \text{Fred}, 0{,}9\ \text{Oscar}, 0{,}7\ \text{Rita}\}$.

61. O **complemento** de um conjunto fuzzy S é o conjunto $\overline{S}$, com o grau de pertinência de um elemento em $\overline{S}$ igual a 1 menos o grau de pertinência desse elemento em S. Encontre $\overline{F}$ (o conjunto fuzzy das pessoas que não são famosas) e $\overline{R}$ (o conjunto fuzzy das pessoas que não são ricas).

62. A **união** de dois conjuntos fuzzy S e T é o conjunto fuzzy $S \cup T$, em que o grau de pertinência de um elemento em $S \cup T$ é o máximo dos graus de pertinência desse elemento em S e em T. Encontre o conjunto fuzzy $F \cup R$ das pessoas ricas ou famosas.

63. A **interseção** de dois conjuntos fuzzy S e T é o conjunto fuzzy $S \cap T$, em que o grau de pertinência de um elemento em $S \cap T$ é o mínimo dos graus de pertinência desse elemento em S e em T. Encontre o conjunto fuzzy $F \cap R$ de pessoas ricas e famosas.

2.3 Funções

Introdução

Em muitos momentos delimitamos, para cada elemento de um conjunto, um determinado elemento de um segundo conjunto (o qual pode ser o mesmo do primeiro). Por exemplo, suponha que para cada estudante na aula de matemática discreta é determinada uma nota que é uma letra do conjunto $\{A, B, C, D, F\}$. Suponha que a nota de cada aluno é: A para Adams, C para Chou, B para Goodfriend, A para Rodriguez e F para Stevens. Essa determinação das notas é ilustrada na Figura 1.

Essa determinação é um exemplo de função. O conceito de função é extremamente importante em matemática e em ciência da computação. Por exemplo, em matemática discreta as funções são usadas na definição de estruturas discretas, como seqüências e cadeias. As funções são também usadas para representar quanto tempo um computador leva para resolver problemas de um determinado tamanho. Muitos programas de computação e sub-rotinas são criados para calcular valores de funções. As funções recursivas, que são funções definidas em termos delas mesmas, são usadas pela ciência da computação; elas serão estudadas no Capítulo 4. Esta seção revê os conceitos básicos que envolvem funções necessárias para a matemática discreta.

DEFINIÇÃO 1 Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma *função f* de A para B é uma determinação de exatamente um elemento de B para cada elemento de A. Escrevemos $f(a) = b$ se b for o único elemento de B determinado pela função f para o elemento a de A. Se f é uma função de A para B, escrevemos $f : A \to B$.

Lembre-se: As funções são também chamadas de **mapeamentos** ou **transformações.**

Auto-avaliação

As funções são específicas em muitos casos. Às vezes, constatamos explicitamente as determinações, como na Figura 1. Normalmente damos uma fórmula, como $f(x) = x + 1$, para definir uma função. Outras vezes, usamos um programa de computação para especificar uma função.

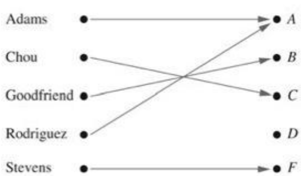

FIGURA 1 Determinação de Notas em uma Sala de Matemática Discreta.

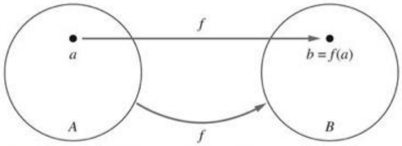

FIGURA 2 A Função f Mapeia A para B.

Uma função $f: A \to B$ pode também ser definida em termos de uma relação de A para B. Recorde a Seção 2.1, em que uma relação de A para B é apenas um subconjunto de $A \times B$. Uma relação de A para B que contém um, e apenas um, par ordenado (a, b) para cada elemento $a \in A$, define uma função f de A para B. Essa função é definida pela determinação $f(a) = b$, em que (a, b) é o único par ordenado na relação que tem a como seu primeiro elemento.

DEFINIÇÃO 2 Se f é uma função de A para B, dizemos que A é o *domínio* de f e B é o *contradomínio* de f. Se $f(a) = b$, dizemos que b é a *imagem* de a e a é a *imagem inversa* de b. A *imagem* de f é o conjunto com todas as imagens dos elementos de A. Além disso, se f é uma função de A para B, dizemos que f *mapeia* A para B.

A Figura 2 representa uma função f de A para B.

Quando definimos uma função, especificamos seu domínio, seu contradomínio e o mapeamento dos elementos no domínio e no contradomínio. Duas funções são **iguais** quando elas apresentam o mesmo domínio, têm o mesmo contradomínio e mapeiam os elementos de seus domínios comuns para os mesmos elementos no seu contradomínio. Note que se trocarmos o domínio ou o contradomínio de uma função, então obteremos uma função diferente. Se trocarmos o mapeamento dos elementos, também obteremos uma função diferente.

Os exemplos de 1 a 5 fornecem exemplos de funções. Em cada caso, descrevemos o domínio, o contradomínio, o conjunto imagem e as determinações de valores para os elementos do domínio.

EXEMPLO 1 Qual é o domínio, o contradomínio e o conjunto imagem da função que determina as notas dos estudantes descritos no primeiro parágrafo da introdução desta seção?

Solução: Considere G como a função que determina uma nota para um estudante na sala de matemática discreta. Note que $G(\text{Adams}) = A$, por exemplo. O domínio de G é o conjunto {Adams, Chou, Goodfriend, Rodriguez, Stevens} e o contradomínio é o conjunto $\{A, B, C, D, F\}$. O conjunto imagem de G é o conjunto $\{A, B, C, F\}$, pois cada nota, exceto D, é designada a algum estudante. ◀

EXEMPLO 2 Considere R como a relação dos pares ordenados (Abdul, 22), (Brenda, 24), (Carla, 21), (Desire, 22), (Eddie, 24) e (Felicia, 22), em que cada par é formado por um estudante e por sua idade. Qual é a função que essa relação determina?

Solução: Essa relação define a função f, com $f(\text{Abdul}) = 22$, $f(\text{Brenda}) = 24$, $f(\text{Carla}) = 21$, $f(\text{Desire}) = 22$, $f(\text{Eddie}) = 24$ e $f(\text{Felicia}) = 22$. Aqui, o domínio é o conjunto {Abdul, Brenda, Carla, Desire, Eddie, Felicia}. Para definir a função f, precisamos especificar um contradomínio. Aqui, podemos entender o contradomínio como sendo o conjunto de números inteiros positivos

DEFINIÇÃO 4 Seja f uma função do conjunto A para o conjunto B e seja S um subconjunto de A. A *imagem* de S sob a função f é o subconjunto de B que é formado pelas imagens dos elementos de S. Indicamos a imagem de S por $f(S)$, então

$$f(S) = \{t \mid \exists s \in S\,(t = f(s))\}.$$

Usamos também a notação abreviada $\{f(s) \mid s \in S\}$ para indicar tal conjunto.

Lembre-se: A notação $f(S)$ para a imagem do conjunto S sob a função f é potencialmente ambígua. Aqui, $f(S)$ indica um conjunto e não o valor da função f para o conjunto S.

EXEMPLO 7 Considere $A = \{a, b, c, d, e\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 2$, $f(b) = 1$, $f(c) = 4$, $f(d) = 1$ e $f(e) = 1$. A imagem do subconjunto $S = \{b, c, d\}$ é o conjunto $f(S) = \{1, 4\}$. ◀

Funções Injetoras e Sobrejetoras

Algumas funções nunca determinam o mesmo valor para dois elementos diferentes no domínio. Essas funções são chamadas de **injetoras.**

DEFINIÇÃO 5 Uma função f é chamada de *injetora,* ou *um para um,* se e somente se $f(a) = f(b)$ implica que $a = b$ para todos os a e b no domínio de f. Uma função pode ser chamada de *injeção* se for de um para um.

Note que uma função f é injetora se e somente se $f(a) \neq f(b)$ sempre que $a \neq b$. Essa maneira de expressar que f é injetora é obtida a partir da contraposição da implicação na definição.

Lembre-se: Podemos expressar que f é injetora usando quantificadores como $\forall a\, \forall b\, (f(a) = f(b) \rightarrow a = b)$ ou, equivalentemente, $\forall a\, \forall b\, (a \neq b \rightarrow f(a) \neq f(b))$, em que o universo do discurso é o domínio da função.

Auto-avaliação

Ilustramos este conceito dando alguns exemplos de funções que são injetoras e outras funções que não são injetoras.

EXEMPLO 8 Determine se a função f de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ com $f(a) = 4$, $f(b) = 5$, $f(c) = 1$ e $f(d) = 3$ é injetora.

Exemplos Extras

Solução: A função f é injetora, pois f assume diferentes valores para os quatro elementos no seu domínio. Isso é ilustrado na Figura 3. ◀

EXEMPLO 9 Determine se a função $f(x) = x^2$ do conjunto de número inteiros para o conjunto de números inteiros é injetora.

Solução: A função $f(x) = x^2$ não é injetora, porque, por exemplo, $f(1) = f(-1) = 1$, mas $1 \neq -1$.

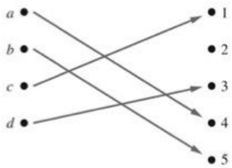

FIGURA 3 **Uma Função Injetora.**

Note que a função $f(x) = x^2$ com o domínio restrito a $\mathbf{Z}^+$ é injetora. (Tecnicamente, quando restringimos o domínio de uma função, obtemos uma nova função cujos valores concordam com aqueles da função original para os elementos do domínio restrito. A função restrita não é definida pelos elementos do domínio original, mas sim do domínio restrito.) ◀

EXEMPLO 10 Determine se a função $f(x) = x + 1$ do conjunto de números reais para ele mesmo é injetora.

Solução: A função $f(x) = x + 1$ é uma função injetora. Para demonstrar isso, note que $x + 1 \neq y + 1$ quando $x \neq y$. ◀

Daremos agora algumas condições para garantir que uma função seja injetora.

DEFINIÇÃO 6 Uma função f cujo domínio e contradomínio são subconjuntos do conjunto dos números reais é chamada de *crescente* se $f(x) \leq f(y)$, e *estritamente crescente* se $f(x) < f(y)$, sempre que $x < y$ e x e y estão no domínio de f. Analogamente, f é chamada de *decrescente* se $f(x) \geq f(y)$, e *estritamente decrescente* se $f(x) > f(y)$, sempre que $x < y$ e x e y estão no domínio de f. (A palavra *estritamente* nesta definição indica uma inequação estrita.)

Lembre-se: Uma função f é crescente se $\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow f(x) \leq f(y))$, estritamente crescente se $\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow f(x) < f(y))$, decrescente se $\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow f(x) \geq f(y))$ e estritamente decrescente se $\forall x\, \forall y\, (x < y \rightarrow f(x) > f(y))$, em que o universo de discurso é o domínio de f.

A partir dessas definições, vemos que uma função que é ou estritamente crescente ou estritamente decrescente deve ser injetora. Entretanto, uma função que é crescente, mas não estritamente crescente, ou decrescente, mas não estritamente decrescente, não é necessariamente injetora.

Para algumas funções, o conjunto imagem e o contradomínio são iguais. Ou seja, todo membro do contradomínio é a imagem de algum elemento do domínio. Funções com esta propriedade são chamadas de funções **sobrejetoras** ou **sobrejetivas**.

DEFINIÇÃO 7 Uma função f de A para B é chamada de *sobrejetora* ou *sobrejetiva,* se e somente se para todo elemento $b \in B$ houver um elemento $a \in A$ com $f(a) = b$.

Lembre-se: Uma função f é sobrejetiva se $\forall y\, \exists x\, (f(x) = y)$, em que o domínio para x é o domínio da função e o domínio para y é o contradomínio da função.

Daremos agora alguns exemplos de funções sobrejetivas e funções que não são sobrejetivas.

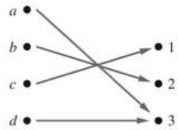

FIGURA 4 **Uma Função Sobrejetiva.**

EXEMPLO 11 Considere f como a função de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3\}$ definida por $f(a) = 3$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$, e $f(d) = 3$. A função f é uma função sobrejetiva?

Exemplos Extras

Solução: Pelo fato de todos os três elementos do contradomínio serem imagens de elementos no domínio, vemos que f é sobrejetiva. Isso é ilustrado na Figura 4. Note que se o contradomínio fosse $\{1, 2, 3, 4\}$, então f não seria sobrejetiva. ◄

EXEMPLO 12 A função $f(x) = x^2$ a partir do conjunto de números inteiros para o conjunto dos números inteiros é sobrejetiva?

Solução: A função f não é sobrejetiva porque não há número inteiro x com $x^2 = -1$, por exemplo. ◄

EXEMPLO 13 A função $f(x) = x + 1$ do conjunto de números inteiros para o conjuntos dos números inteiros é sobrejetiva?

Solução: Essa função é sobrejetiva, porque para cada número inteiro y há um número inteiro x, tal que $f(x) = y$. Para ver isso, note que $f(x) = y$ se e somente se $x + 1 = y$, que se mantém se e somente se $x = y - 1$. ◄

DEFINIÇÃO 8 A função f é *bijetora*, ou é uma *correspondência um para um,* se for injetora e sobrejetora.

Os exemplos 14 e 15 ilustram o conceito de uma função bijetora.

EXEMPLO 14 Considere f como a função de $\{a, b, c, d\}$ para $\{1, 2, 3, 4\}$ com $f(a) = 4$, $f(b) = 2$, $f(c) = 1$ e $f(d) = 3$. A função f é bijetora?

Solução: A função f é injetora e sobrejetiva. É injetora porque dois valores do domínio não têm a mesma imagem. É sobrejetiva porque todos os quatro elementos do contradomínio são imagens de elementos no domínio. Assim, f é uma bijetora. ◄

A Figura 5 dispõe quatro funções, em que a primeira é injetora, mas não sobrejetora, a segunda é sobrejetora, mas não injetora, a terceira é injetora e sobrejetora e a quarta, nem injetora nem sobrejetora. A quinta correspondência na Figura 5 não é uma função, porque projeta um elemento em dois diferentes.

Suponha que f seja uma função de um conjunto A para ele mesmo. Se A é finito, então f é injetora se e somente se for apenas sobrejetiva. (Temos isto a partir do resultado do Exercício 68, ao final desta seção.) Isto não é necessariamente o caso de A ser infinito (como será mostrado na Seção 2.4).

EXEMPLO 15 Considere A como um conjunto. A *função identidade* em A é a função $\iota_A : A \to A$, em que

$$\iota_A(x) = x$$

para todo $x \in A$. Em outras palavras, a função identidade ι_A é a função que projeta cada elemento nele mesmo. A função ι_A é injetora e sobrejetiva, então, ela é bijetora. (Note que ι é a letra grega iota.) ◄

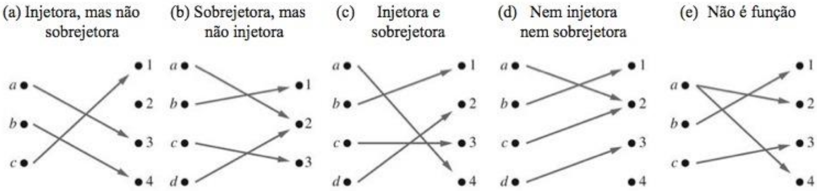

FIGURA 5 **Exemplos de Tipos Diferentes de Correspondências.**

Funções Inversas e Composições de Funções

Considere agora uma função f bijetora do conjunto A para o conjunto B. Como f é uma função sobrejetiva, todo elemento de B é a imagem de algum elemento em A. Além disso, como f é também uma função injetora, todo elemento de B é a imagem de um *único* elemento de A. Conseqüentemente, podemos definir uma nova função de B para A que inverte a correspondência dada por f. Isto nos leva à Definição 9.

DEFINIÇÃO 9 Seja f uma função bijetora do conjunto A para o conjunto B. A *função inversa* de f é a função que leva a um elemento b pertencente a B o único elemento a em A, tal que $f(a) = b$. A função inversa de f é indicada por f^{-1}. Assim, $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$.

Lembre-se: Assegure-se de não confundir a função f^{-1} com a função $1/f$, que é a função que toma para cada x do domínio o valor $1/f(x)$. Note que esta última só faz sentido quando $f(x)$ é um número real diferente de zero. Essas duas funções f^{-1} e $1/f$ não são iguais.

A Figura 6 ilustra o conceito de uma função inversa.

Se uma função f não é uma bijeção, não podemos definir uma função inversa de f. Quando f não é uma bijeção, ela não é injetora ou não é sobrejetora. Se f não é injetora, algum elemento b do contradomínio é a imagem de mais de um elemento no domínio. Se f não é sobrejetiva, para algum elemento b do contradomínio, não existe um elemento a no domínio para que $f(a) = b$. Conseqüentemente, se f não é uma bijeção, não podemos determinar para cada elemento b do contradomínio um único elemento a do domínio, tal que $f(a) = b$ (porque para algum b há mais de um elemento a ou não há projeção para a).

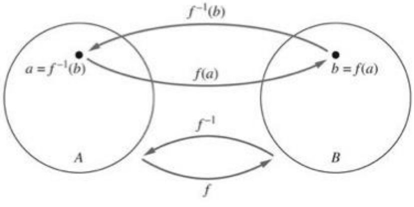

FIGURA 6 **A Função f^{-1} é a Inversa da Função f.**

Uma bijeção é chamada **inversível**, pois podemos definir uma função inversa. Uma função é **não inversível** se não é uma bijeção, porque não existe a função inversa.

EXEMPLO 16 Considere f como a função de $\{a, b, c\}$ para $\{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 2$, $f(b) = 3$ e $f(c) = 1$. Esta função é inversível? Se for, qual é sua inversa?

Solução: A função f é inversível porque é uma bijeção. A função inversa f^{-1} é dada a partir de f, então $f^{-1}(1) = c$, $f^{-1}(2) = a$ e $f^{-1}(3) = b$. ◀

EXEMPLO 17 Considere $f: \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}$ tal que $f(x) = x + 1$. A função f é inversível? Se sim, qual sua função inversa?

Solução: A função f tem uma inversa, porque é uma correspondência um para um, como mostramos antes nesta mesma seção. Para fazer a inversão da correspondência, suponha que y seja a imagem de x, para que $y = x + 1$. Então, $x = y - 1$. Isso significa que $y - 1$ é o único elemento de $\mathbf{Z}$ em que y é projetado por f. Conseqüentemente, $f^{-1}(y) = y - 1$. ◀

EXEMPLO 18 Considere f como a função de $\mathbf{R}$ para $\mathbf{R}$ com $f(x) = x^2$. A função f é inversível?

Solução: Como $f(-2) = f(2) = 4$, f não é injetora. Se uma função inversa fosse definida, teríamos dois elementos como imagem do real 4. Assim, f não é inversível. ◀

Às vezes, podemos restringir o domínio ou o contradomínio de uma função, ou ambos, para obter uma função inversa, como o Exemplo 19 mostra.

EXEMPLO 19 Mostre que se restringirmos a função $f(x) = x^2$ do Exemplo 18 a uma função do conjunto de todos os números reais não negativos para o conjunto de todos os números reais não negativos, então f será inversível.

Solução: A função $f(x) = x^2$ do conjunto dos números reais não negativos para o conjunto dos números reais não negativos é injetora. Para ver isso, note que se $f(x) = f(y)$, então $x^2 = y^2$, assim $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$. Isto significa que $x + y = 0$ ou $x - y = 0$, assim $x = -y$ ou $x = y$. Como ambos, x e y, são números não negativos, temos que $x = y$. Assim, verifica-se que é uma função injetora. Além disso, $f(x) = x^2$ é sobrejetiva quando o contradomínio é o conjunto de todos os números reais não negativos, pois cada número real não negativo tem uma raiz quadrada. Ou seja, se y for um número real não negativo, existirá um número real não negativo x, tal que $x = \sqrt{y}$, que significa que $x^2 = y$. Como a função $f(x) = x^2$ do conjunto de números reais não negativos para o conjunto dos números reais não negativos é injetora e sobrejetora, então ela é inversível. Sua inversa é dada pela regra $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. ◀

DEFINIÇÃO 10 Considere g como uma função do conjunto A para o conjunto B e considere f como uma função do conjunto B para o conjunto C. A *composição* das funções f e g, indicada por $f \circ g$, é definida por

$$(f \circ g)(a) = f(g(a)).$$

Em outras palavras, $f \circ g$ é a função que determina para o elemento a de A, o elemento determinado por f para $g(a)$. Ou seja, para encontrar $(f \circ g)(a)$, primeiro aplicamos a função g em a para obter $g(a)$ e, então, aplicamos a função f ao resultado $g(a)$ para obter $(f \circ g)(a) = f(g(a))$. Note

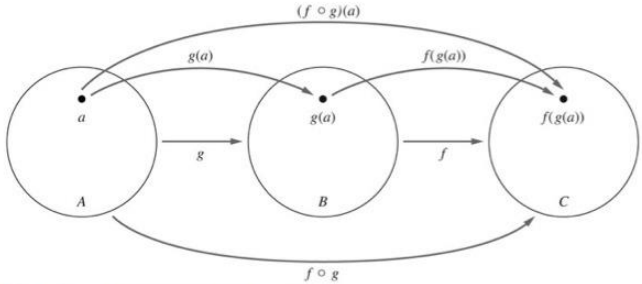

FIGURA 7 A Composição das Funções f e g.

que a composição $f \circ g$ não pode ser definida a menos que o conjunto imagem de g seja um subconjunto do domínio de f. Na Figura 7, é mostrada a composição das funções.

EXEMPLO 20 Considere g como a função do conjunto $\{a, b, c\}$ para ele mesmo, tal que $g(a) = b$, $g(b) = c$ e $g(c) = a$. Considere f como a função do conjunto $\{a, b, c\}$ para o conjunto $\{1, 2, 3\}$, tal que $f(a) = 3, f(b) = 2$ e $f(c) = 1$. Qual é a composição de f e g, e qual a composição de g e f?

Solução: A composição $f \circ g$ é definida por $(f \circ g)(a) = f(g(a)) = f(b) = 2$, $(f \circ g)(b) = f(g(b)) = f(c) = 1$ e $(f \circ g)(c) = f(g(c)) = f(a) = 3$.

Note que $g \circ f$ não é definida, porque o conjunto imagem de f não é um subconjunto do domínio de g. ◀

EXEMPLO 21 Considere f e g como as funções do conjunto dos números inteiros para o conjunto dos números inteiros definidas por $f(x) = 2x + 3$ e $g(x) = 3x + 2$. Qual a composição de f e g? Qual é a composição de g e f?

Solução: Ambas as composições $f \circ g$ e $g \circ f$ são definidas. Além disso,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 2) = 2(3x + 2) + 3 = 6x + 7$$

e

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 3) = 3(2x + 3) + 2 = 6x + 11.$$ ◀

Lembre-se: Note que mesmo $f \circ g$ e $g \circ f$ sendo definidas pelas funções f e g no Exemplo 21, $f \circ g$ e $g \circ f$ não são iguais. Em outras palavras, a propriedade comutativa não se aplica à composição de funções.

Quando fazemos a composição de uma função e sua inversa, em qualquer ordem, a função obtida é a identidade. Para ver isso, suponha que f seja uma bijeção do conjunto A para o conjunto B. Então, a função inversa f^{-1} existe e é uma bijeção de B para A. A função inverte a correspondência da função original, assim $f^{-1}(b) = a$ quando $f(a) = b$, e $f(a) = b$ quando $f^{-1}(b) = a$. Assim,

$$(f^{-1} \circ f)(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b) = a$$

e

$$(f \circ f^{-1})(b) = f(f^{-1}(b)) = f(a) = b.$$

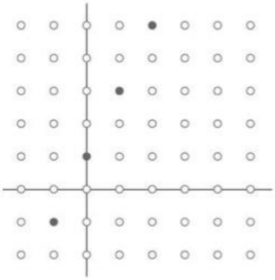

FIGURA 8 O Gráfico de $f(n) = 2n + 1$ de Z para Z.

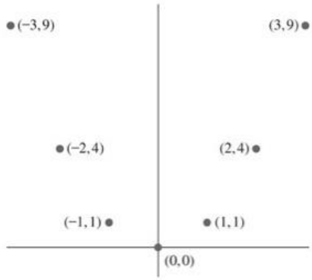

FIGURA 9 O Gráfico de $f(x) = x^2$ de Z para Z.

Conseqüentemente, $f^{-1} \circ f = \iota_A$ de $f \circ f^{-1} = \iota_B$, em que ι_A e ι_B são funções identidade dos conjuntos A e B, respectivamente. Daqui podemos concluir que: $(f^{-1})^{-1} = f$.

Os Gráficos de Funções

Podemos associar um conjunto de pares de $A \times B$ para cada função de A para B. Esse conjunto de pares é chamado de **gráfico** da função e geralmente é disposto pictoricamente como apoio para o entendimento do comportamento da função.

DEFINIÇÃO 11 Considere f como uma função do conjunto A para o conjunto B. O *gráfico* da função f é o conjunto de pares ordenados $\{(a, b) \mid a \in A \text{ e } f(a) = b\}$.

A partir da definição, vemos que o gráfico de uma função f de A para B é o subconjunto $A \times B$ que contém os pares ordenados com a segunda entrada igual ao elemento de B determinado por f para a primeira entrada.

EXEMPLO 22 Esboce o gráfico da função $f(n) = 2n + 1$ do conjunto de números inteiros para o conjunto de números inteiros.

Solução: O gráfico de f é o conjunto de pares ordenados da forma $(n, 2n + 1)$, em que n é um número inteiro. Esse gráfico é mostrado na Figura 8. ◀

EXEMPLO 23 Esboce o gráfico da função $f(x) = x^2$ do conjunto de números inteiros para o conjunto dos números inteiros.

Solução: O gráfico de f é o conjunto de pares ordenados da forma $(x, f(x)) = (x, x^2)$, em que x é um número inteiro. Esse gráfico é mostrado na Figura 9. ◀

Algumas Funções Importantes

Introduziremos agora duas funções importantes em matemática discreta, conhecidas como funções *maior inteiro menor que* e *menor inteiro maior que*. Considere x como um número real. A função maior inteiro menor que leva x para o número inteiro mais próximo menor que ou igual a x, e a função menor inteiro maior que leva x para o número inteiro mais próximo maior que ou igual a x. Essas funções são geralmente usadas quando os objetos são contáveis. Elas desempe-