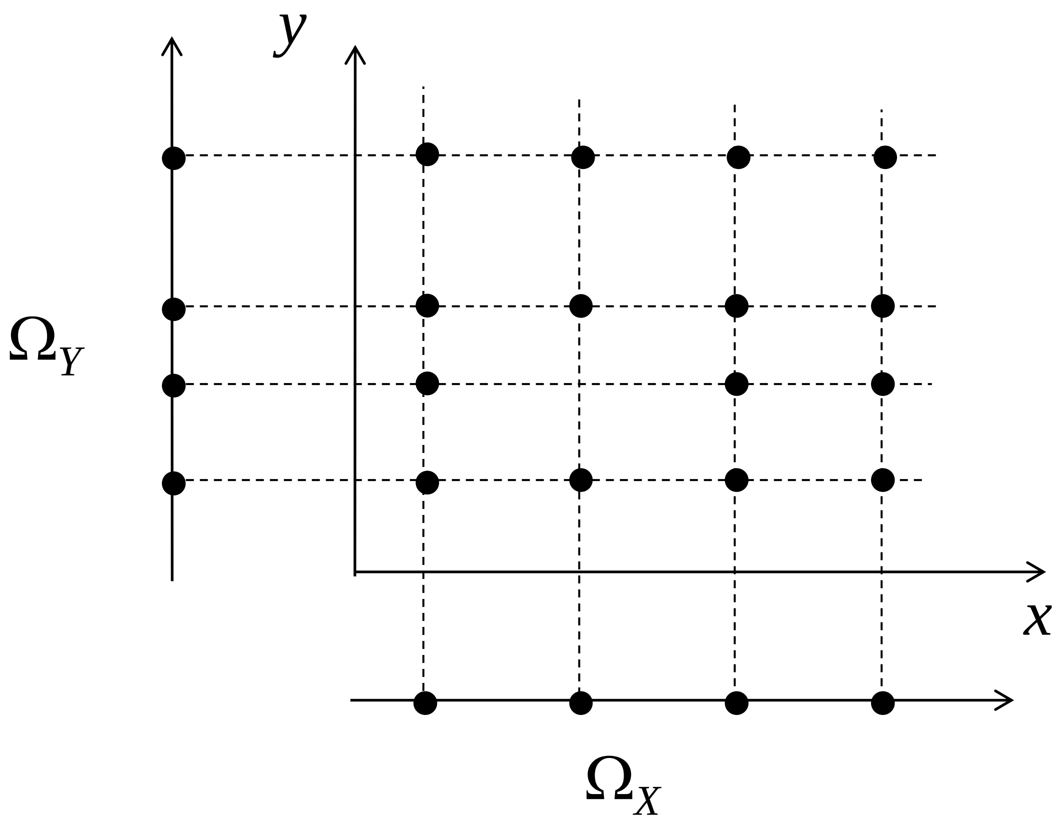
Avaliação de Desempenho

Distribuição Multivariada Discreta

Distribuição bivariada discreta



Distribuição bivariada discreta

- Função de probabilidade
  - Experimento aleatório com duas variáveis aleatórias discretas X e Y
  - O resultado do experimento aleatório é representado por um vetor em $\mathbf{R}^2$
  - A função de distribuição de probabilidade mapeia cada par ordenado na probabilidade de ocorrência simultânea dos eventos $X = x$ e $Y = y$

$$P[X = x, Y = y] = p_{X,Y}(x, y)$$

Exemplo 1

- Seja o experimento de lançamento de duas moedas, uma de R$1,00 (variável X) e uma de R$0,50 (variável Y)
- As duas variáveis assumem valor 0 se a face sorteada for cara e o valor 1 se a face sorteada for coroa

(x, y)	$p_{X,Y}(x,y)$
(0, 0)	1/4
(0, 1)	1/4
(1, 0)	1/4
(1, 1)	1/4

X \ Y	0	1
0	1/14	1/14
1	1/14	1/14

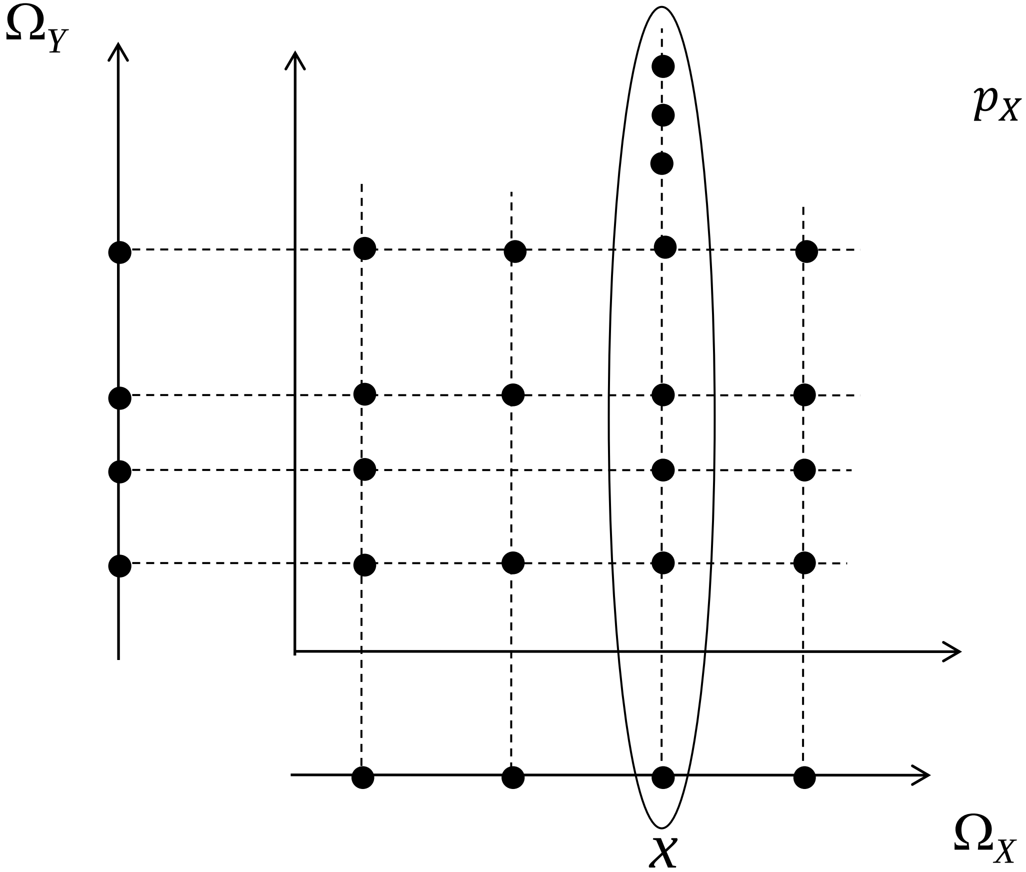
Distribuição bivariada discreta

- Propriedades

$$0 \leq p_{X,Y}(x, y) \leq 1$$

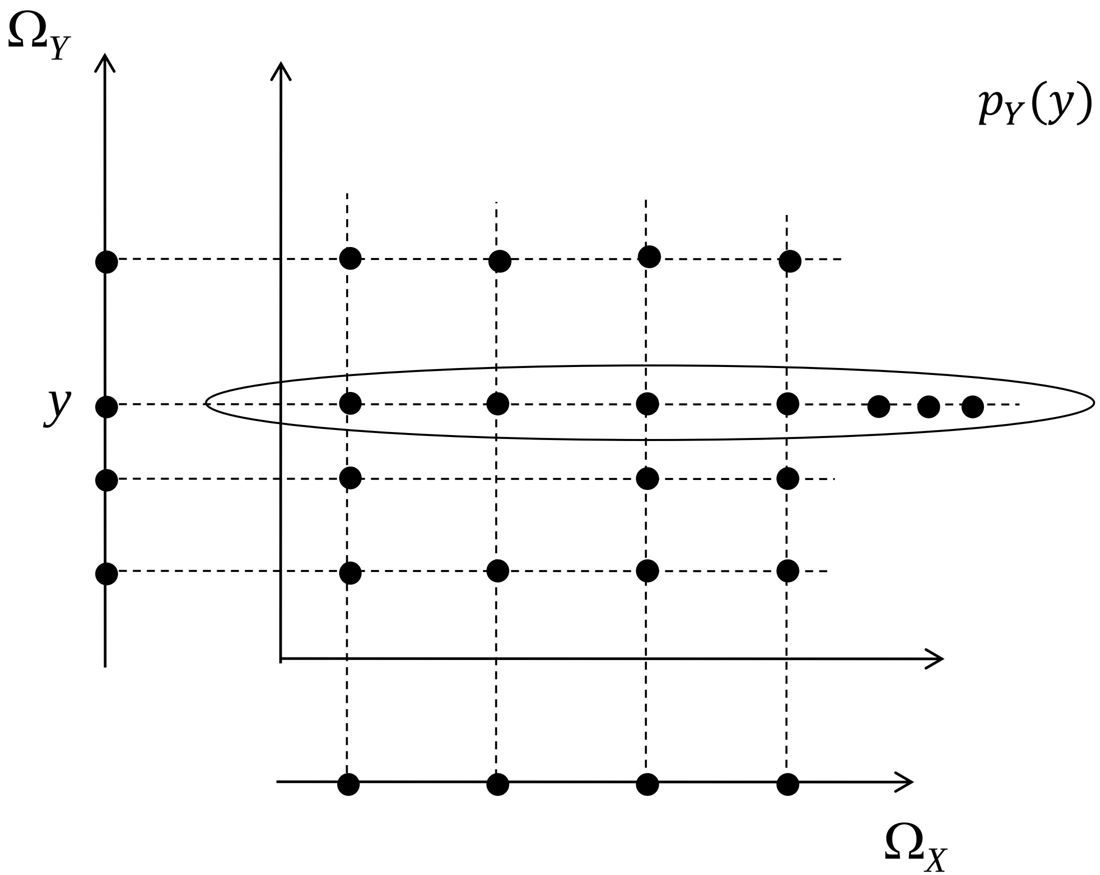
$$\sum_x \sum_y p_{X,Y}(x, y) = 1$$

Função de probabilidade marginal



$$p_X(x) = \sum_{y \in \Omega_Y} P[X = x,\ Y = y]$$

Função de probabilidade marginal



$$p_Y(y) = \sum_{x \in \Omega_X} P[X = x,\ Y = y]$$

Exemplo 2

- Seja o experimento de lançamento de duas moedas, uma de R$1,00 (variável X) e uma de R$0,50 (variável Y)
- As duas variáveis assumem valor 0 se a face sorteada for cara e o valor 1 se a face sorteada for coroa

$X \backslash Y$	0	1	$p_X(x)$
0	1/14	1/14	1/2
1	1/14	1/14	1/2
$p_Y(y)$	1/2	1/2	

Independência de variáveis bivariadas

- Duas variáveis aleatórias X e Y são independentes se todos os eventos conjuntos são independentes, isto é, a ocorrência de um evento de uma variável aleatória não afeta a ocorrência de qualquer outro evento da outra variável
- X e Y são variáveis aleatórias independentes se para todos os pares $(x, y) \in \Omega_{X,Y}$
  - $p_{X,Y}(x, y) = p_X(x) \cdot p_Y(y)$

Exemplo 3

- Seja um experimento aleatório envolvendo uma moeda, e dois dados com cores diferentes (vermelho e azul)
- A moeda é lançada, se a face sorteada for coroa, a variável X assume o valor zero, o dado vermelho é lançando e a variável Y assume o numero de pontos da face sorteada
- Se a face sorteada cara, a variável X assume o valor um, o dado azul é lançando e a variável Y assume o numero de pontos da face sorteada
- Calcular $p_{X,Y}(x, y)$, $p_X(x)$ e $p_Y(y)$
- Verificar se X e Y são independentes

Exemplo 3

X \ Y	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
0	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
1	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/12	1/2
$p_Y(y)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

X e Y são independentes

Exemplo 4

- Seja a seguinte distribuição conjunta $p_{X,Y}(x, y)$
- É válida porque a soma das probabilidades é 1

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0	1/10	1/15	1/15	2/15	1/15	1/15
1	1/15	1/10	1/10	1/30	1/10	1/10

- Calcular $p_X(x)$ e $p_Y(y)$
- Verificar se X e Y são independentes

Exemplo 4

X \ Y	1	2	3	4	5	6	$p_X(x)$
0	1/10	1/15	1/15	2/15	1/15	1/15	1/2
1	1/15	1/10	1/10	1/30	1/10	1/10	1/2
$p_Y(y)$	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	

X e Y são dependentes

Função de distribuição acumulada bivariada

- A função de distribuição acumulada conjunta de duas variáveis aleatórias X e Y é definida por:

$$F_{X,Y}(x,y) = P[X \leq x, Y \leq y] = \sum_{x<X} \sum_{y<Y} p_{X,Y}(x,y)$$

Exemplo 5

- Seja um experimento aleatório envolvendo uma moeda, e dois dados com cores diferentes (vermelho e azul)
- A moeda é lançada, se a face sorteada for coroa, a variável X assume o valor zero, o dado vermelho é lançando e a variável Y assume o numero de pontos da face sorteada
- Se a face sorteada cara, a variável X assume o valor um, o dado azul é lançando e a variável Y assume o numero de pontos da face sorteada
- Calcular $F_{X,Y}(x, y)$

Exemplo 5

X \ Y	1	2	3	4	5	6
0	1/12	2/12	3/12	4/12	5/12	6/12
1	7/12	8/12	9/12	10/12	11/12	12/12

Distribuição multivariada discreta

- Função de probabilidade
  - n variáveis aleatórias X_1, X_2, ... X_n conjuntamente distribuídas são representadas por uma função de distribuição de probabilidade que mapeia o resultado de um experimento com n variáveis aleatórias em um vetor em $\mathbf{R}^n$

$$P[X_1 = x_1, .., X_n = x_n] = p(x_1, .., x_n)$$

Não usar subscrito no nome da função para aliviar a notação

Valor esperado

- O valor esperado de duas varáveis aleatórias conjuntamente distribuídas é o vetor formado com o valor esperado de cada uma das variáveis

$$E[X,Y] = \begin{bmatrix} E[X] \\ E[Y] \end{bmatrix}$$

- O valor esperado de *n* varáveis aleatórias conjuntamente distribuídas é o vetor formado com o valor esperado de cada uma das variáveis

$$E[X_1, \dots, X_n] = \begin{bmatrix} E[X_1] \\ E[X_2] \\ \dots \\ E[X_n] \end{bmatrix}$$

Exemplo 6

- Seja $p_{X,Y}(x, y) = (1/2)^{x+y}$.
- Ω_X = {1, 2, ...} e Ω_Y = {1, 2, ...}

y \ x	1	2	3	4	...	$p_Y(y)$
1	$(1/2)^2$	$(1/2)^3$	$(1/2)^4$	$(1/2)^5$	...	1/2
2	$(1/2)^3$	$(1/2)^4$	$(1/2)^5$	$(1/2)^6$	...	1/4
3	$(1/2)^4$	$(1/2)^5$	$(1/2)^6$	$(1/2)^7$	...	1/8
4	$(1/2)^5$	$(1/2)^6$	$(1/2)^7$	$(1/2)^8$		1/16
...						$(1/2)^y$
$p_X(x)$	1/2	1/4	1/16	$(1/2)^x$		

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} = \frac{1}{2}$$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} = \frac{1}{4}$$

$$\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{1+y} = \frac{1}{2} \qquad \sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{2+y} = \frac{1}{4}$$

Exemplo 6

- Verificar se $p_{X,Y}(x,y)$ é uma distribuição válida
- sum (1/2)^(x+y) {x from 1 to infinity} {y from 1 to infinity}

$$\sum_{y=1}^{\infty}\left(\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y}\right) = 1$$

- Calcular $p_X(x)$
- sum (1/2)^(x+y) {y from 1 to infinity}
- $p_X(x) = 2^{-x} = (1/2)^x$

$$\sum_{y=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = 2^{-x}$$

- Calcular $p_Y(y)$
- sum (1/2)^(x+y) {x from 1 to infinity}
- $p_Y(y) = 2^{-y} = (1/2)^y$

$$\sum_{x=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{x+y} = 2^{-y}$$

Exemplo 6

- $E[X] = \sum_x x \cdot p_X(x)$
- sum x*(1/2)^x {x from 1 to infinity} $\sum_{x=1}^{\infty} x\left(\frac{1}{2}\right)^x = 2$
- $E[X] = 2$

- $\mathrm{E}[Y] = \sum_y y \cdot p_y(y)$
- sum y*(1/2)^y {y from 1 to infinity} $\sum_{y=1}^{\infty} y\left(\frac{1}{2}\right)^y = 2$
- $E[Y] = 2$

- $E[X, Y] = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$

Distribuição condicional bivariada

$$p_{X|Y}(x,y) = P[X = x | Y = y] = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{p_{X,Y}(x,y)}{p_Y(y)}$$

$$F_{X|Y}(x,y) = P[X < x \mid Y = y] = \sum_{a \leq x} p_{X|Y}(a,y)$$

Distribuição condicional bivariada

- X e Y independentes

$$p_{X|Y}(x,y) = P[X = x | Y = y] = \frac{P[X = x, Y = y]}{P[Y = y]} = \frac{P[X = x] \cdot P[Y = y]}{P[Y = y]}$$

$$p_{X|Y}(x,y) = p_X(x)$$

Regra da probabilidade total

- Sejam X e Y variáveis aleatórias quaisquer
- Seja A evento qualquer envolvendo X e Y

$$P[A] = \sum_y P[A|Y = y]P[Y = y]$$

Exemplo 7

- Lançamento de dois dados (variáveis X e Y). Qual a probabilidade de o número observado no dado X ser menor ou igual do que o número observado no dado Y?
  - $\Omega = \{(1,1), (1,2), ... (6,6)\}$
  - $A = X \leq Y$
  - $A = \{$ (1, 1)

    (1, 2) (2, 2)

    (1, 3) (2, 3) (3, 3)

    (1, 4) (2, 4), (3, 4) (4, 4)

    (1, 5), (2, 5) (3, 5) (4, 5) (5, 5)

    (1, 6), (2, 6) (3, 6) (4, 6), (5, 6) (6, 6) $\}$
  - $P[A] = 21/36$

Exemplo 7

- Lançamento de dois dados (variáveis X e Y). Qual a probabilidade de o número observado no dado X ser menor ou igual do que o número observado no dado Y?
  - $\Omega = \{(1,1), (1,2), \ldots. (6,6)\}$
  - $A = X \leq Y$
  - $Y = 1$ $\quad X = 1$ $\quad P[X \leq 1] \cdot P[Y=1] = 1/6 \cdot 1/6$
  - $Y = 2$ $\quad X = 1$ ou $X = 2$ $\quad P[X \leq 2] \cdot P[Y=2] = 2/6 \cdot 1/6$
  - $Y = 3$ $\quad X = 1$ ou $X = 2$ ou $X = 3$ $\quad P[X \leq 3] \cdot P[Y=3] = 3/6 \cdot 1/6$
  - $Y = 4$ $\quad X = 1$ ou $X = 2$ ou $X = 3$ ou $X = 4$ $\quad P[X \leq 4] \cdot P[Y=4] = 4/6 \cdot 1/6$
  - $Y = 5$ $\quad X = 1$ ou ... ou $X = 5$ $\quad P[X \leq 5] \cdot P[Y=5] = 5/6 \cdot 1/6$
  - $Y = 6$ $\quad X = 1$ ou ... ou $X = 6$ $\quad P[X \leq 6] \cdot P[Y=6] = 6/6 \cdot 1/6$

$$\sum_y P[X \leq y]\, p_y(y) = 21/36 \qquad\qquad P[A] = \sum_y P[A|Y = y]P[Y = y]$$

Avaliação de Desempenho

Distribuições Multivariadas
Discretas