Técnicas de Demonstração

Aula 4

Gregory Moro Puppi Wanderley

Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)

Bacharelado em Ciência da Computação – 3º Período

gregory.puppi@pucpr.br

Plano de Aula

- Técnicas de Demonstração (TDE)
- Devolutiva da Prova I

Técnicas de Demonstração

- Objetivo
  - Demonstrar ou provar teoremas.

Técnicas de Demonstração

- Objetivo
  - Demonstrar ou provar teoremas.

- Podem ser úteis para verificar se programas de computador estão corretos.

Técnicas de Demonstração

- Objetivo
  - Demonstrar ou provar teoremas.
- Podem ser úteis para verificar se programas de computador estão corretos.
  - Como ter certeza que um programa produzirá sempre as respostas corretas?

Técnicas de Demonstração

- Objetivo
  - Demonstrar ou provar teoremas.

- Podem ser úteis para verificar se programas de computador estão corretos.
  - Como ter certeza que um programa produzirá sempre as respostas corretas?
  - Demonstração para mostrar que um programa sempre fornece a saída correta.
    - **=> (Será visto nas próximas aulas)**

Técnicas de Demonstração

- Teorema
  - Um teorema é representado na forma "Se p, então q", ou dita condição ou implicação, i.e.:
    - $p \rightarrow q$

Técnicas de Demonstração

- Teorema
  - Um teorema é representado na forma "Se p, então q", ou dita condição ou implicação, i.e.:
    - $p \rightarrow q$

Premissa ou hipótese

Tese

Técnicas de Demonstração

- Teorema
  - Um teorema é representado na forma "Se p, então q", ou dita condição ou implicação, i.e.:
    - $p \rightarrow q$

Premissa ou hipótese

Tese

- É verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa.

Técnicas de Demonstração

- Teorema
  - Um teorema é representado na forma "Se p, então q", ou dita condição ou implicação, i.e.:
    - $p \rightarrow q$

Premissa ou hipótese

Tese

      - É verdadeira, a menos que p seja verdadeira e q seja falsa.

  - Objetivo
    - Deduzir q de p usando axiomas, definições, teoremas previamente comprovados, regras de inferência lógica, manipulação matemática.

Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta
  - Como demonstrar que $p \rightarrow q$ é verdadeira?
    - (a) Assumir a hipótese p como verdadeira e deduzir a tese q.
    - (b) Para a dedução:
      - Aplicar axiomas, definições, manipulação matemática, etc.

Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta
  - Exemplo I
    - Definições
      - Seja k um inteiro:
        - n é **par** se n = 2k ; n é **ímpar** se n = 2k + 1
        - **divisibilidade**: a/b, se a = b.k

Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta
  - Exemplo I
    - Definições
      - Seja k um inteiro:
        - n é **par** se n = 2k ; n é **ímpar** se n = 2k + 1
        - **divisibilidade**: a/b, se a = b.k

Dê uma demonstração direta do teorema:

- "Se um inteiro é divisível por 6, então ele também é divisível por 3".

Técnicas de Demonstração

- Demonstração Direta
  - Exemplo I (cont.)
    - x divisível por 6 $\rightarrow$ x divisível por 3
    - a) Hipótese como verdadeira: x divisível por 6
    - b) Dedução da tese
      - $x = 6.k$ (divisibilidade)
      - $6 = 2.3$ (fatoração)
      - $x = (2.3)k$ (substituição)
      - $x = (k.2)3$ (associatividade)
      - $\underline{x = j.3}$ (j = k.2)

Provado: x é divisível por 3 (divisibilidade)

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
    - Hipótese: $\neg q$; tese: $\neg p$

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$
    - Hipótese: $\neg q$; tese: $\neg p$
    - (a) Assumir a hipótese $\neg q$ como verdadeira e deduzir a tese $\neg p$.
    - (b) Para a dedução:
      - Aplicar axiomas, definições, manipulação matemática, etc.

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
  - Exemplo I
    - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
  - Exemplo I
    - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
      - Teorema: n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
  - Exemplo I
    - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
      - Teorema: n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar
      - Por demonstração direta:
        - Hipótese: $n^2 = 2k + 1$ (como usar isso para provar que n é ímpar?)
        - $n = \sqrt{2k + 1}$ (?) x

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
      - Teorema: n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar
      - Por contraposição:
      - n par $\rightarrow$ n2 par
        - Hipótese: $n = 2k$

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
      - Teorema: n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar
      - Por contraposição:
      - n par $\rightarrow$ n2 par
        - Hipótese: $n = 2k$
        - $n = 2k$ (elevando ao quadrado ambos os lados para chegar na tese)
        - $n^2 = 4k^2$
        - $n^2 = 2(2k^2)$ (fatoração)
        - $n^2 = 2z$ ($z = 2k^2$)

Técnicas de Demonstração

- Demonstração por Contraposição ($\neg q \rightarrow \neg p$)
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que se o quadrado de um número é ímpar, então o número também é ímpar.
      - Teorema: n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar
      - Por contraposição:
      - n par $\rightarrow$ n2 par
        - Hipótese: $n = 2k$
        - $n = 2k$ (elevando ao quadrado ambos os lados para chegar na tese)
        - $n^2 = 4k^2$
        - $n^2 = 2(2k^2)$ (fatoração)
        - $\underline{n^2 = 2z}$ ($z = 2k^2$)

Provado: n^2 é par. Logo, demonstrou-se que n^2 ímpar $\rightarrow$ n ímpar

Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow p \land \neg q \rightarrow F$

Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow p \land \neg q \rightarrow F$

Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$
    - Hipótese: p
    - Negação da tese: $\neg q$
    - Contradição: F

Técnicas de Demonstração

- Redução ao Absurdo (Contradição)
  - $p \rightarrow q \leftrightarrow p \wedge \neg q \rightarrow F$
    - Hipótese: p
    - Negação da tese: $\neg q$
    - Contradição: F

    - (a) Assumir a hipótese p e a negação da tese $\neg q$ como verdadeiras, então deduzir uma contradição (F).
    - (b) Para a dedução:
      - Aplicar axiomas, definições, manipulação matemática, etc.

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I
    - Definição
      - **Número racional:** pode ser escrito como a/b, sendo a e b inteiros, $q \neq 0$, e a e b não tem fator comum (eles são fração irredutível).

→ Demonstre através de uma contradição que $\sqrt{2}$ não é racional.

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \land \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
      - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \land \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
      - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
      - Por contradição:
        - p: $\sqrt{2}$
        - ¬q: $\sqrt{2}$ é racional, **então:**
        - $\sqrt{2} = a/b$
        - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
        - $2b^2 = a^2$

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \land \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
      - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
      - Por contradição:
        - p: $\sqrt{2}$
        - $\neg$q: $\sqrt{2}$ é racional, **então:**

        - $\sqrt{2} = a/b$
        - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
        - $2b^2 = a^2$ → a^2 é par. Logo a deve ser par.

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
      - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
      - Por contradição:
        - p: $\sqrt{2}$
        - $\neg$q: $\sqrt{2}$ é racional, **então:**

        - $\sqrt{2} = a/b$
        - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
        - $2b^2 = a^2$ → a^2 é par. Logo a deve ser par.
        - $2b^2 = (2k)^2$
        - $2b^2 = 4k^2$

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \land \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
      - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
      - Por contradição:
        - p: $\sqrt{2}$
        - ¬q: $\sqrt{2}$ é racional, **então:**
        - $\sqrt{2} = a/b$
        - $2 = a^2/b^2$ (elevando ao quadrado ambos os lados)
        - $2b^2 = a^2$ → a^2 é par. Logo a deve ser par.
        - $2b^2 = (2k)^2$
        - $2b^2 = 4k^2$ → b^2 é par. Logo b deve ser par.

Técnicas de Demonstração

- Contradição $(p \wedge \neg q) \rightarrow F$
  - Exemplo I (cont.)
    - Demonstre que $\sqrt{2}$ não é racional através de uma contradição.
      - Teorema: $\sqrt{2} \rightarrow \sqrt{2}$ não-racional
      - Por contradição:
        - p: $\sqrt{2}$
        - ¬q: $\sqrt{2}$ é racional

Conclusão:

Como a e b possuem um fator comum, i.e., 2, a fração não é irredutível. Assim, foi encontrada uma contradição para a suposição que $\sqrt{2}$ era racional.

Síntese da Aula

- Teorema
- Demonstração Direta
- Demonstração por Contraposição
- Demonstração por Contradição (Redução ao Absurdo)

Próxima Aula (05/04)

- **TDE03**
  - **Conceito de Indução.**