Avaliação de Desempenho

Teorema de Bayes

Teorema de Bayes

- Antônio faz parte da população constituída por bibliotecários e agricultores
  - Tímido, retraído, detalhista, aprecia rotina
  - Qual seria a sua profissão? Agricultor ou bibliotecário?
- Segundo estudo de Daniel Kahneman e Amos Tversky
  - Maioria responderia bibliotecário
- Resposta não racional
  - Não leva em conta a proporção entre bibliotecários e agricultores
  - Nos EUA há 20 vezes mais agricultores do que bibliotecários

Teorema de Bayes

- Proporção entre bibliotecários e agricultores
  - 10/210
- Possuem as características
  - 40% dos bibliotecários e 10% dos agricultores

B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Teorema de Bayes

- Considerando as pessoas que possuem as características
- Probabilidade de ser bibliotecário
  - 4/24
- Probabilidade de ser agricultor
  - 20/24

B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Teorema de Bayes

- Princípio
- Evidências (caraterísticas observadas) não alteram probabilidades mas melhoram as suas estimativas

B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

Teorema de Bayes

- H – Hipótese (evento para o qual queremos estimar a probabilidade)
- E – Evidências
- Como melhorar a estimativa da probabilidades de H a partir das evidências

$$P[E|H] = \frac{P[E \cap H]}{P[H]}$$

$$P[E \cap H] = P[E|H]P[H]$$

$$P[H] = P[E|H]P[H] + P[E|H^c]P[H^c]$$

$$P[H|E] = \frac{P[E|H]P[H]}{P[E|H]P[H] + P[E|H^c]P[H^c]}$$

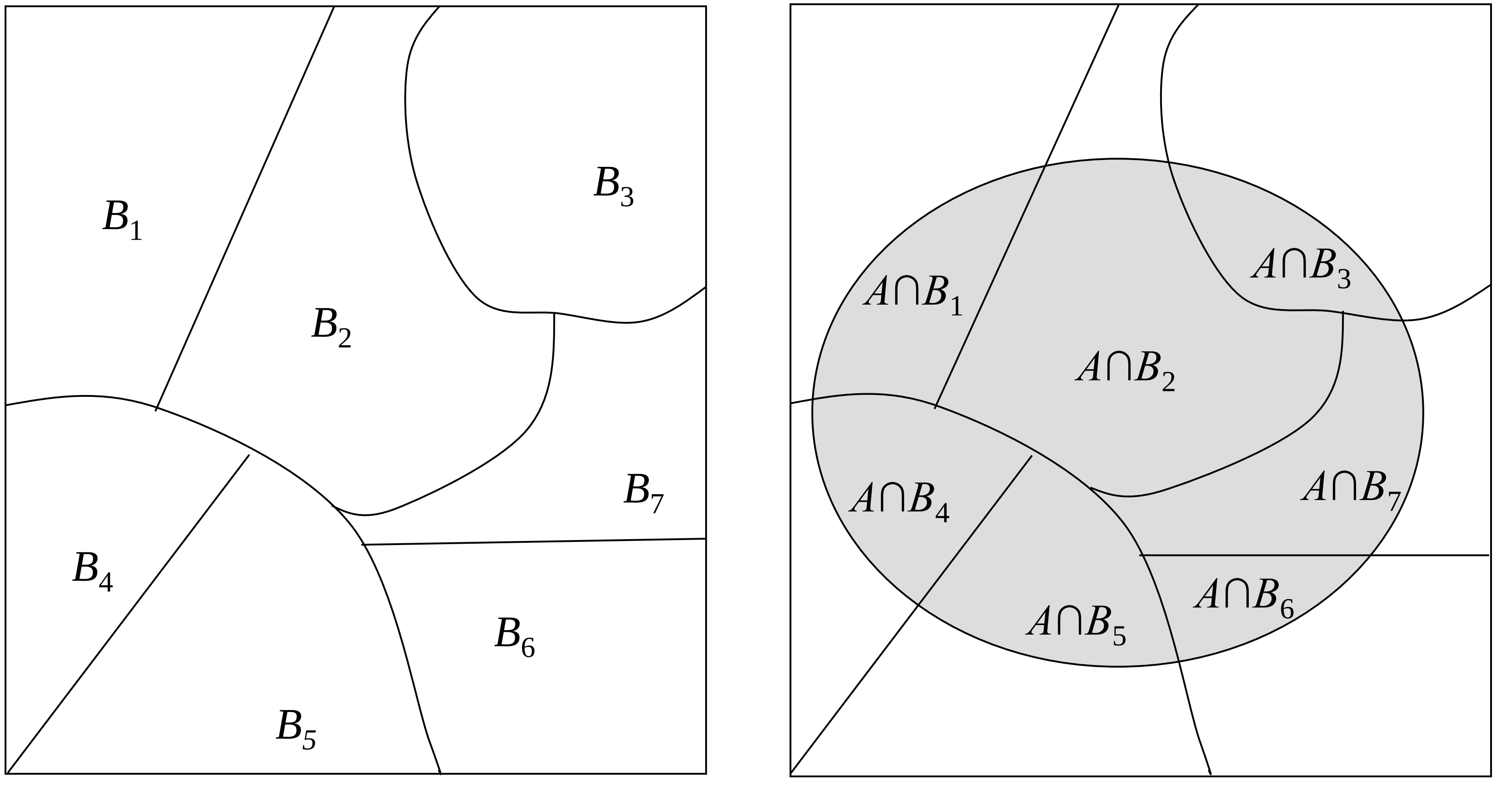
Teorema de Bayes

- Hipótese: Antônio é bibliotecário
  - $P[H] = 10/210$
- Probabilidade de Antônio ser bibliotecário dado que é tímido, retraído, detalhista, aprecia rotina
  - $P[H \mid E] = 4/24$
- Probabilidade de ser tímido, retraído, detalhista, aprecia rotina
  - Entre os bibliotecários: $P[E \mid H] = 4/10$
  - Entre os agricultores: $P[E \mid H^c] = 20/200$

B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A

- $$P[H|E] = \frac{P[E|H]P[H]}{P[E|H]P[H] + P[E|H^c]P[H^c]} = \frac{4/210}{24/210}$$

Teorema de Bayes



- Se o evento A é observado, qual é a probabilidade de B_i?

Teorema de Bayes

- Se o evento A é observado, qual é a probabilidade de ocorrência de B_i?

$P[B_i|A] = P[B_i \cap A]/P[A]$ da definição de probabilidade condicional

$= P[A \mid B_i]\ P[B_i]\ /\ P[A]$ da regra do produto

$$= \frac{P[A \mid B_i] \times P[B_i]}{\sum_{j=1}^{n} P[A \mid B_j] \times P[B_j]}$$ da regra da probabilidade total

Exemplo 1

- Uma vacina tem 90% de eficiência na imunização contra certa doença
  - A probabilidade de um paciente ter a doença dado que ele tomou a vacina é 0,1
- A doença acomete 50% da população não vacinada
  - A probabilidade de um paciente ter a doença dado que ele não tomou a vacina é 0,5
- Suponha que, após uma campanha de vacinação em que 70% da população tenham sido vacinadas
  - A probabilidade de um paciente ter tomado a vacina é 0,7
- Um paciente chega a um hospital com a doença em questão, mas sem saber se tomou vacina ou não
- Qual é a probabilidade de que o paciente tenha tomado a vacina?

Exemplo 1

Sejam os eventos:

A = {paciente foi acometido pela doença}

B = {paciente tomou vacina}

Temos as seguintes informações:

$P[A \mid B] = 0,1$

$P[A \mid B^c] = 0,5$

$P[B] = 0,7$

Queremos calcular $P[B \mid A]$ (probabilidade de o paciente ter tomado a vacina dado que está foi acometido pela doença)

$$P[B \mid A] = \frac{P[A \mid B] \times [B]}{P[A \mid B] \times P[B] + P[A \mid B^c] \times P[B^c]}$$

$$= \frac{0,1 \times 0,7}{0,1 \times 0,7 + 0,5 \times 0,3} = 0,07/0,22 = 0,32$$

Exemplo 3

- 1% das pessoas têm diabetes
  - $Y = 0$ "uma pessoa não tem diabetes"
  - $Y = 1$ "uma pessoa tem diabetes"
  - $P[Y = 0] = 0{,}01$ $\qquad P[Y = 1] = 0{,}99$
- 80% dos exames dão positivo quando a pessoa tem diabetes
  - $X = 0$ "o teste deu negativo"
  - $X = 1$ "o teste deu positivo"
  - $P[X = 1 \mid Y = 1] = 0{,}8$
  - $P[X = 0 \mid Y = 1] = 0{,}2$
- 9,6 % dos exames dão positivo quando a pessoa não tem
  - $P[X = 1 \mid Y=0] = 0{,}096$
  - $P[X = 0 \mid Y= 0] = 0{,}904$

Exemplo 3

	Pessoa com diabetes (0,01)	Pessoas sem diabetes (0,99)
Teste positivo	0,8	0,096
Teste negativo	0,2	0,904

- A probabilidade de uma pessoa ter diabetes (1a coluna) é 0,01
- Probabilidade de uma pessoa não ter diabetes (2a coluna) é 0,99
- A probabilidade de o teste dar positivo para pessoas com diabetes (verdadeiro positivo) é 0,8
- A probabilidade de o teste dar negativo para pessoas com diabetes (falso negativo) é 0,2
- A probabilidade de o teste dar positivo para pessoas sem diabetes (falso positivo) é 0,096
- A probabilidade de o teste dar negativo para pessoas sem diabetes (verdadeiro negativo) é 0,904

Exemplo 3

	Pessoas com diabetes (0,01)	Pessoas sem diabetes (0,99)
Teste positivo	0,8	0,096
Teste negativo	0,2	0,904

- Supondo que uma pessoa obteve um teste positivo (evidência), qual a probabilidade de ela ter diabetes ($P[Y=1 \mid X = 1]$)?
- Quando estamos na 1ª linha da tabela temos um resultado positivo, que pode ser verdadeiro positivo ou um falso positivo
- A probabilidade de uma pessoa ter diabetes e receber um resultado positivo (verdadeiro positivo) é $P[Y = 1, X = 1] = 0{,}01 \cdot 0{,}8 = 0{,}08$
- A probabilidade de uma pessoa não ter diabetes e receber um resultado positivo (falso positivo) é $P[Y=0, X = 1] = 0{,}99 \cdot 0{,}096 = 0{,}09504$

Exemplo 3

	Pessoas com diabetes (0,01)	Pessoas sem diabetes (0,99)
Teste positivo	0,8	0,096
Teste negativo	0,2	0,904

- $P[Y = 1 \mid X = 1] = P[X = 1, Y = 1\ ] / P[Y = 1]$
- Temos $P[Y = 1, X = 1] = 0{,}08$
- A probabilidade de obter qualquer tipo de positivo é igual a probabilidade de obter verdadeiros positivos mais a probabilidade de obter falso positivos
- $P[Y = 1] = 0{,}008 + 0{,}09504 = 0{,}10304$
- $P[Y = 1 \mid X = 1] = P[X = 1, Y = 1\ ] / P[Y = 1] = 0{,}008/0{,}10304 = 0{,}07764$

Avaliação de Desempenho

Teorema de Bayes