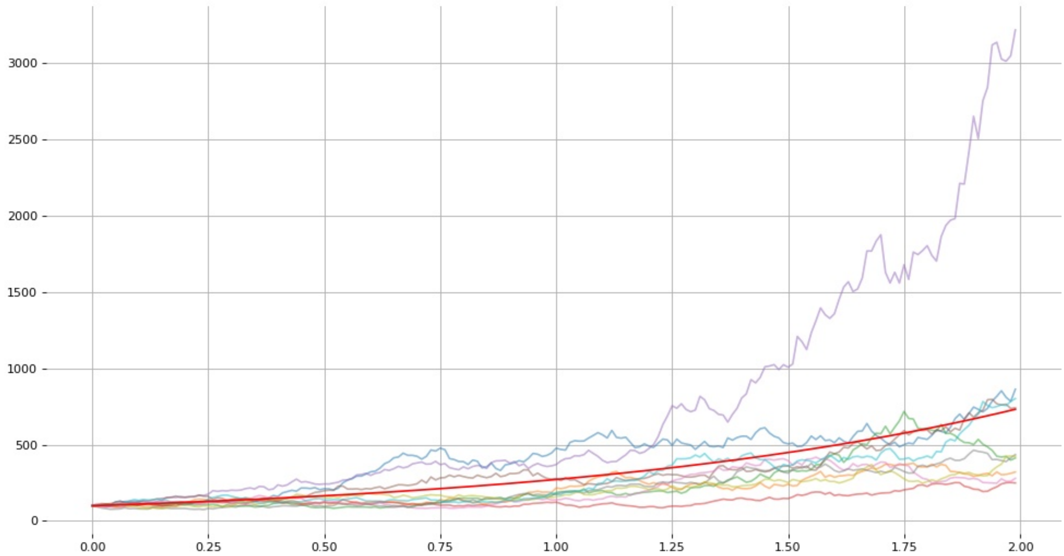
凯利公式 连续化

赵又奇
统计只会LR



上文我们谈到凯利公式，本文我们试图将它连续化。和上篇一样，尽量不涉及严格的数学证明。一般情况下，赌场机制或股票的dynamics用 s 或 S 表示，使用某种策略 w 的赌金或投资组合用 x 或 X 表示。

离散化的简单推广

重新考虑凯利公式中的赌局，并加入一个新的条件，输掉赌局并不会输掉所有本轮押上的赌金，而是只输掉一部分，假设输掉的赌金占总赌金的比例为 a ，即输掉赌局后，赌金从 1 元变为 $1-a$ 元。 假设每轮押注的比例为 w ，则

如果赢： 赌金从 X_t 变为 $X_t(1+bw)$ ；
如果输： 赌金从 X_t 变为 $X_t(1-wa)$ ；

赌金收益率 R ：

$$\begin{aligned} R &= B(p)(1+wb)+(1-B(p))(1-wa) \\ &= B(p)w(a+b)+(1-wa), \end{aligned}$$

其中 $B(p)$ 是代表输赢的 Bernoulli 随机变量。

考虑凯利准则， 则 $E(\ln R) = p\ln(1+wb)+q\ln(1-wa)$， 所以最优下注比例 w^* 有

$$w^* = \underset{w}{\operatorname{argmax}} E(\ln R) = \frac{pb - qa}{ab}$$

其中 $q = 1 - p$ 。注意 $a = 1$ 的时，会退化为原版凯利公式。

从离散到连续

假设有连续 N 轮上述赌局，考虑赌场的dynamics，即每轮都梭哈($w = 1$)，则赌场收益率 $R = R_{w=1}$ 。初始押注 $S_0 = 1$ 元，则 N 轮后赌金为 $S_N = R^N S_0 = R^N$，或 $s_N \triangleq \ln S_N = \sum \ln R$ 。

不妨调整 a、b， 使得 $\delta \triangleq \ln(1+b) = -\ln(1-a)$，并令 $r \triangleq \ln R$， ，有

$$P(r = \delta) = p, \quad P(r = -\delta) = q,$$

则 $s_n = \ln S_n = \sum_{i=1}^{n} r$ 是一个均值为 $(p-q)\delta n$，方差为 $4pq\delta^2 n$ 的随机游走(Random walk)。

假设*单位时间*内发生了 l 次赌局，令 $\lambda \triangleq 1/l$ 为连续两次赌局的时间间隔， $t \triangleq n\lambda$ 为 n 轮赌博经过的时间。由标准的连续化过程，令 $\delta \to 0$， $l \to \infty$， $\lambda \to 0$，则在 t 时刻，s_t 服从正态分布，

$$s_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t),$$

其中

$$\mu = (p-q)\delta/\lambda, \quad \sigma^2 = 4pq\delta^2/\lambda,$$

留意这里从 s_n 到 s_t 的转变。

注意到上述连续化过程中，

$$p \approx \frac{1}{2}(1 + \frac{\mu}{\sigma^2}\delta), \quad q \approx \frac{1}{2}(1 - \frac{\mu}{\sigma^2}\delta), \quad b \approx \delta, \quad a \approx \delta,$$

则连续化的凯利公式为

$$w_t^* = w^* = \frac{pb - qa}{ab} = \frac{\mu}{\sigma^2}\text{。}$$

更进一步

更详细的分析需要随机过程的工具，假设某种资产（比如股票）的dynamics 是GBM(geometric brownian motion)：

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dZ_t,$$

另外有无风险的债券，利率为 r ：

$$\frac{dB_t}{B_t} = rdt.$$

现在我们构建一个上述两个标的投资组合 X_t ，在资产 S_t 的权重为 w_t ，无风险债券的权重为 $1 - w_t$ ， 则 X_t 的dynamics为：

$$dX_t = w_t X_t \frac{dS_t}{S_t} + (1 - w_t) X_t \frac{dB_t}{B_t},$$

整理可得

$$\frac{dX_t}{X_t} = [w_t \mu + (1 - w_t) r] dt + w_t \sigma dZ_t\text{。}$$

由 Ito lemma, 对数收益率的期望为

$$E(\ln R_t) = E(d \ln X_t) = [w_t \mu + (1 - w_t) r - \frac{1}{2} w_t^2 \sigma^2] dt\text{。}$$

由凯利准则，最优持仓最大化对数收益率期望，故

$$\begin{aligned} w_t^* &= \underset{w_t}{\operatorname{argmax}} \{ w_t \mu + (1 - w_t) r - \frac{1}{2} w_t^2 \sigma^2 \} \\ &= \frac{\mu - r}{\sigma^2}\text{。} \end{aligned}$$

$r = 0$ 时与上一节结论相符。

夏普比（市场风险价格）

夏普比(Sharpe ratio)，也叫风险市场价格(Market price of risk)，可以定义为：

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}\text{。}$$

则使用凯利公式进行交易时，投资组合的dynamics为，

$$\begin{aligned} dX_t &= w^* \mu dt + w^* \sigma dZ_t + (1 - w^*) r dt \\ &= \frac{\lambda}{\sigma} \mu dt + \lambda dZ_t + (1 - \frac{\lambda}{\sigma}) r dt \\ &= (\lambda^2 + r) dt + \lambda dZ_t\text{。} \end{aligned}$$

可以看到最终投资组合的回报只和无风险利率 r ，以及资产 S_t 的夏普比有关。

发布于 2019-10-05

▲赞同 2 ▼ 添加评论 分享 收藏 举报 收起

凯利公式，效用函数和行为学

赵又奇

统计只会LR

1 人赞同了该文章

本文主要讨论凯利公式，效用函数和行为学之间的关系。不对数学严谨性做过多的纠结。

凯利公式

假设有一个简单的赌局，胜率是 p ，净赔率是 b ，凯利公式断言每轮赌局最优下注比例 w 为

$$w=\frac{pb-q}{b},$$

其中 $q=1-p$ 。

知乎上针对凯利公式讨论的很多，不再单独讨论。重要的是凯利公式的推导过程。

证明：假设赌局共有 T 轮，第 i 轮赌金为 X_i ，每轮赌博输赢服从独立的 Bernoulli 分布 $B(p)$ ，则 $X_{i+1}=B(p)(b+1)wX_i+(1-w)X_i$ ，其中 $w=w_i$ 为每轮下注的比例。即赌赢了，赌金增加 wbX_i ； 赌输了，赌金减少 wX_i .

令 $R=(b+1)B(p)w+(1-w)$, 则 R 为赌金的收益率。

现在我们想要赌局结束后最大化赌局，即 $\max X_T$, 则

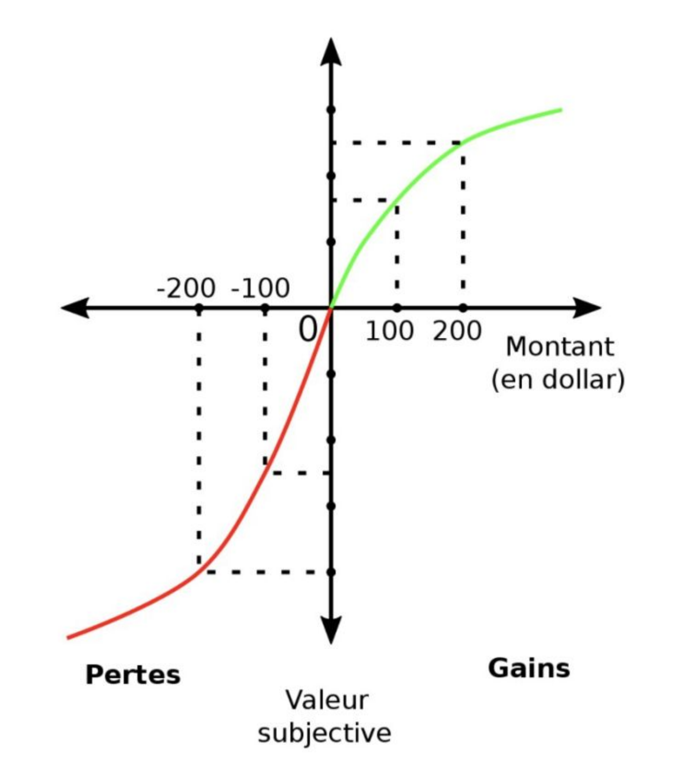
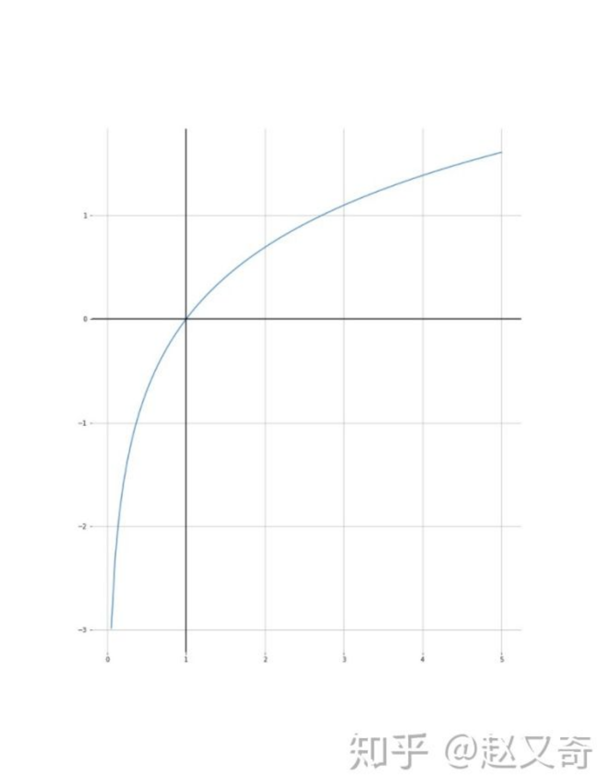
$$\begin{aligned}\max X_T &\iff \max RX_{T-1}\\ &\iff \max\prod_t R\\ &\iff \max\sum_t \ln R\\ &\iff \max E(\ln R)\end{aligned}$$

同理也可以直接写成 $\max(\ln X_T)$. 注意这里和 $\max E(X_T)$ 的区别。

由 $E(\ln R)=p\cdot\ln(1+wb)+q\cdot\ln(1-w)$ ，故当 $w=\dfrac{pb-q}{b}$ 时取到最大值。Q.E.D

效用函数与行为学

注意到证明过程中的优化目标，从 $\max X_T$ 变化到 $\max E(\ln R)$ 或者 $\max E(\ln X_T)$ ， 相当于使用了效用函数 $u(x)=\ln x$. 我们可以跟前景理论(Prospect Theory)中的效用函数比较一下：

Gain-loss utility	Logarithm utility
	

左图：Gain-loss utility from wiki; 右图：ln函数，坐标轴为x = 1, y = 0

左图是前景理论中的 Gain-loss 效用, 大意是人面对正收益时厌恶风险，面对负收益时偏好风险。总结为效用曲线，则正半轴为凹函数，所以得到200元的效用 少于 得到100元效用的两倍；负半轴为凸函数，失去200元的效用，高于 失去100元效用的两倍。

右图是 $\ln x$ 的函数图像，用 $x=1, y=0$ 作为坐标原点。原点意味着收益率为 1 ，即不赚不亏，此时效用为 0 。

可以看到两幅图在大部分情况下相似（左图 $x=100$ 的右半部分）。 说明人在做决策的时候，并没有如同金融行为学描述的那样不理性，而是内嵌了一套最大化终值($\max E(\ln X_T)$)的策略。为了最大化终值，人在做决策的时候会对 可能的巨大损失 反应过激，忽视掉巨大损失可能带来的巨大利润，毕竟人生只有一次，破产了就很难有东山再起的可能了。

至于 极其巨大的损失 （左图 $x=100$ 的左半部分），可能是对殊死一搏的刻画。老虎机的收益为负数，稍懂概率的人都不会想通过老虎机赚钱，但是在极端情况下却不一定。马云早期在美国被绑架，身上只有25美分，通过老虎机赢了700美元才买了机票回家。在极端情况下，如果不愿意承担极端的风险，就只能等死， 所以效用函数会在极端情况下变得平滑。

编辑于 2019-10-02