澄清：四种凯利公式，凯利准则是什么 编辑

0，先说协方差是什么：

方差：

$$var(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(X_i - \bar{X})}{n-1}$$

协方差：

$$cov(X,Y) = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{n-1}$$

协方差矩阵：

$$C_{n\times n} = (c_{i,j}, c_{i,j} = cov(Dim_i, Dim_j))$$

1，很多人在谈论凯利公式，但是他们好像使用了适用于赌博的凯利公式，

适用于赌博的凯利公式并不适用于股票和资产配置。以下是它们的区别：

假设有一个简单的赌局，胜率是 p ，净赔率是 b ，凯利公式断言每轮赌局最优下注比例 w 为

$$\boxed{w = \frac{pb-q}{b},}$$

其中 $q = 1 - p$ 。

离散化的简单推广

重新考虑凯利公式中的赌局，并加入一个新的条件，输掉赌局并不会输掉所有本轮押上的赌金，而是只输掉一部分，假设输掉的赌金占总赌金的比例为 a ，即输掉赌局后，赌金从 1 元变为 $1-a$ 元。假设每轮押注的比例为 w ，则最优下注比例 w^* 有

$$\boxed{w^* = \underset{w}{\operatorname{argmax}} E(\ln R) = \frac{pb-qa}{ab}}$$

其中 $q = 1 - p$ 。注意 $a = 1$ 的时，会退化为原版凯利公式。

从离散到连续

假设有连续 N 轮上述赌局，考虑赌场的dynamics，即每轮都梭哈($w=1$)，则赌场收益率 $R = R_{w=1}$ 。初始押注 $S_0 = 1$ 元，则 N 轮后赌金为 $S_N = R^N S_0 = R^N$ ，或 $s_N \triangleq \ln S_N = \sum \ln R$ 。

不妨调整 a、b， 使得 $\delta \triangleq \ln(1+b) = -\ln(1-a)$ ，并令 $r \triangleq \ln R$， ，有

$$P(r=\delta) = p, \quad P(r=-\delta) = q,$$

则 $s_n = \ln S_n = \sum_{i=1}^{n} r$ 是一个均值为 $(p-q)\delta n$ ，方差为 $4pq\delta^2 n$ 的随机游走(Random walk)。

假设*单位时间*内发生了 l 次赌局，令 $\lambda \triangleq 1/l$ 为连续两次赌局的时间间隔， $t \triangleq n\lambda$ 为 n 轮赌博经过的时间。由标准的连续化过程，令 $\delta \to 0$， $l \to \infty$， $\lambda \to 0$，则在 t 时刻，s_t 服从正态分布，

$$s_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t),$$

其中

$$\mu = (p-q)\delta/\lambda, \quad \sigma^2 = 4pq\delta^2/\lambda,$$

留意这里从 s_n 到 s_t 的转变。

注意到上述连续化过程中，

$$p \approx \frac{1}{2}(1+\frac{\mu}{\sigma^2}\delta), \quad q \approx \frac{1}{2}(1-\frac{\mu}{\sigma^2}\delta), \quad b \approx \delta, \quad a \approx \delta,$$

则连续化的凯利公式为

$$\boxed{w_t^* = w^* = \frac{pb-qa}{ab} = \frac{\mu}{\sigma^2}}。$$

$$\boxed{F = C^{-1} M}$$

1，列向量 M 表示超额收益。
2，C 表示协方差矩阵。
3，列向量 F 表示分配的净值比例。

特例：如果假设所有策略在统计上独立，协方差矩阵就变为对角矩阵，对角线元素等于每个策略收益率的方差：

$$\boxed{f_i{}^* = \frac{m_i}{\sigma_i{}^2} = \frac{\text{SharpeRatio}}{\sigma_i}} \; (*\text{SharpeRatio}=\frac{\text{Rp}-\text{Rf}}{\sigma}=\frac{m}{\sigma}*)$$

2，适用于股票和资产配置的凯利公式 F= C^-1 M 的证明：

凯利公式的证明

用正态随机变量 x_i 描述策略 i 的单期预期收益，策略i的超额收益率 $m_i = \text{Expectation}[x_i] - r$;

策略组合 $X = \sum_{i=1}^{n} f_i\, x_i$ 的预期超额收益率为 $m = \sum_{i=1}^{n} f_i\, m_i = F^T M$,

策略组合的方差 $\sigma^2 = \text{Variance}[X] = F^T C F$

年化复合增长率 $g = r + m - \frac{\sigma^2}{2} = r + F^T M - \frac{F^T C F}{2}$; 对g求极值条件: $\frac{\partial g}{\partial F} = 0$

$$\Rightarrow M - \frac{C F}{2} - \frac{(F^T C)^T}{2} = M - C F = 0;$$

$$\Rightarrow F = C^{-1} M$$

说明：假设策略i (这里用i代表第i个策略) 的收益率服从正态分布，其均值m[i]和标准差σ[i]已经给定 (收益扣除融资成本，也就是超额收益)。
1，列向量 M = { m[1],m[2],m[3],……， m[n] } 表示 n 个策略的超额收益。
2，C 表示协方差矩阵，矩阵的元素 C[i,j] 表示第 i 个策略和第 j 个策略收益率的协方差，C^(–1) 表示协方差矩阵的逆。
3，列向量 F = { f[1], f[2], f[3], ……， f[n] } 表示分配到 n 个策略的净值比例， F= C^(–1) M

3，关于凯利准则（最大几何平均数准则）：

场中，投资者花高价进行财务咨询也是很有道理的。均值方差分析迅速席卷金融界和学术界，成为正统思想。

拉塔内1957年的博士论文研究的正是选择股票投资组合的问题。伯努利并未对此进行研究，凯利也只是在对赛马和熵进行大篇幅讨论的过程中模糊地提到过这个问题。在萨维奇的鼓励下，拉塔内于1959年，凯利发表文章3年后，公开发表了这一作品，题为“风险投资选择准则”（Criteria for Choice Among Risky Ventures）。文章刊登于《政治经济学杂志》上。

这篇文章的读者不可能听说过约翰•凯利。考尔斯研讨会时期就连拉塔内本人都从未听说过凯利。

拉塔内把自己这套投资组合设计方法称为几何平均数准则。他表明这只是一种缺乏远见的策略。一种“近视”策略，听起来似乎是件坏事，但是当经济学家们使用这种策略时发现其实它很不错。这就意味着现在你不必清楚了解市场未来的走向就可以做出良好的决策。这一点很重要，因为市场总是在不断变化。

几何平均数准则（或者凯利准则）的“近视”特征在21点游戏中是至关重要的。现在你可以根据现有的牌面结构决定赌注大小。牌面结构将来会发生变化，但没有关系。即使你并不了解将来牌面的结构，也不会对现在的决策造成影响。投资组合也是如此。现在你能做的最好的事情就是根据由当前均值、方差和其他数据计算出来的结果概率分布值的最高几何平均数选择一种投资组合方式。投资的收益和波动将随着时间改变，当其发生改变时，你也要据此调整你的投资组合，唯一的目的就是获得最高的几何平均数。

同样在1959年，哈里•马科维茨出版了著作《投资组合选择》（Portfolio Selection）。金融界的每个人都阅读了这本书，或者自称阅读了这本书。马科维茨告诉我说他第一次了解到拉塔内的作品是在1955~1956学年，当时詹姆斯•托宾（James Tobin）给了他一份拉塔内文章早期版本的复印版。马科维茨在《投资组合选择》一书中用一个章节专门介绍几何平均数准则（或许是这本书中最让人忽略的章节），并在参考文献中提到了拉塔内的作品。

实际上马科维茨是唯一一个看到几何平均数准则中存在诸多价值的经济学大家。他发现均值方差分析是一种静态的单周期理论。实际上，它假定你现在计划购买一些股票并在特定的时间框架结点将其抛售。马科维茨理论试图在单周期内平衡风险与收益。

但大多数人的投资方式并非如此。他们购买股票和债券，然后一直留在手里，直到有强大的理由出现才会将其抛售。市场默认会一赌到底。这一点关系重大，因为有些赌博单独一次来看貌似是有利的，可一旦周而复始，就会导致毁灭性的后果。针对一次有利赌博活动进行极端“过度下注”，无论以何种形式，都符合上述描述。

几何平均数准则也可以解决均值方差分析中存在的哈姆雷特式决断中出现的犹豫不决的问题。因为它能帮助挑选出一种“最佳”投资组合。马科维茨注意到几何平均数可以通过标准（算数）平均数和方差进行估算。几何平均数约等于算数平均数减去方差的1/2。进一步引入统计度量可能会使这一估算值更加精确。

还有另外一个人可以说是凯利准则或者几何平均数准则的共同发现者或者是促进者。1960年，统计学家里奥•布雷曼（Leo Breiman）发表了文章《最佳长期企业扩张投资策略》（Investment Policies for Expanding Businesses Optimal in a Long-Run Sense）。这篇文章刊登在《海军补给研究季刊》（Naval Research Logistics Quarterly）上，感觉和刊登在《贝尔系统技术杂志》上一样不可思议。布雷曼是第一个提出几何平均数最大化可以将达到特定财富目标的时间缩至最短的人。谁想成为百万富翁？布雷曼表示赌徒或者投资者利用几何平均数准则获得百万（或其他）财富的速度要比利用其他任何资金管理方式都快。

由于错综复杂的关系，凯利准则有过很多杂乱的名称。因此，亨利•拉塔内从未使用过“凯利准则”这个名称一点也不奇怪。他更青睐“几何平均数原则”这个名称。他偶尔会把这一名称缩写为更容易记住的“G策略”（G policy）或者更为简化的“G”。布雷曼则使用“资本增值准则”这一名称，有时候还能听到“资本增值理论”这种叫法。马科维茨用MEL表示财富的“最大化期望对数”（maximize expected logarithm）。在一篇文章中，索普曾称其为“凯利[－布雷曼－伯努利－拉塔内或资本增值]准则。”这还没算上人们对对数效用进行的数量庞大的讨论。名称的混乱导致外行人士很难理解文献中出现的这一观点。

4，凯利系统的优越性：凯利>马丁>定投>梭哈

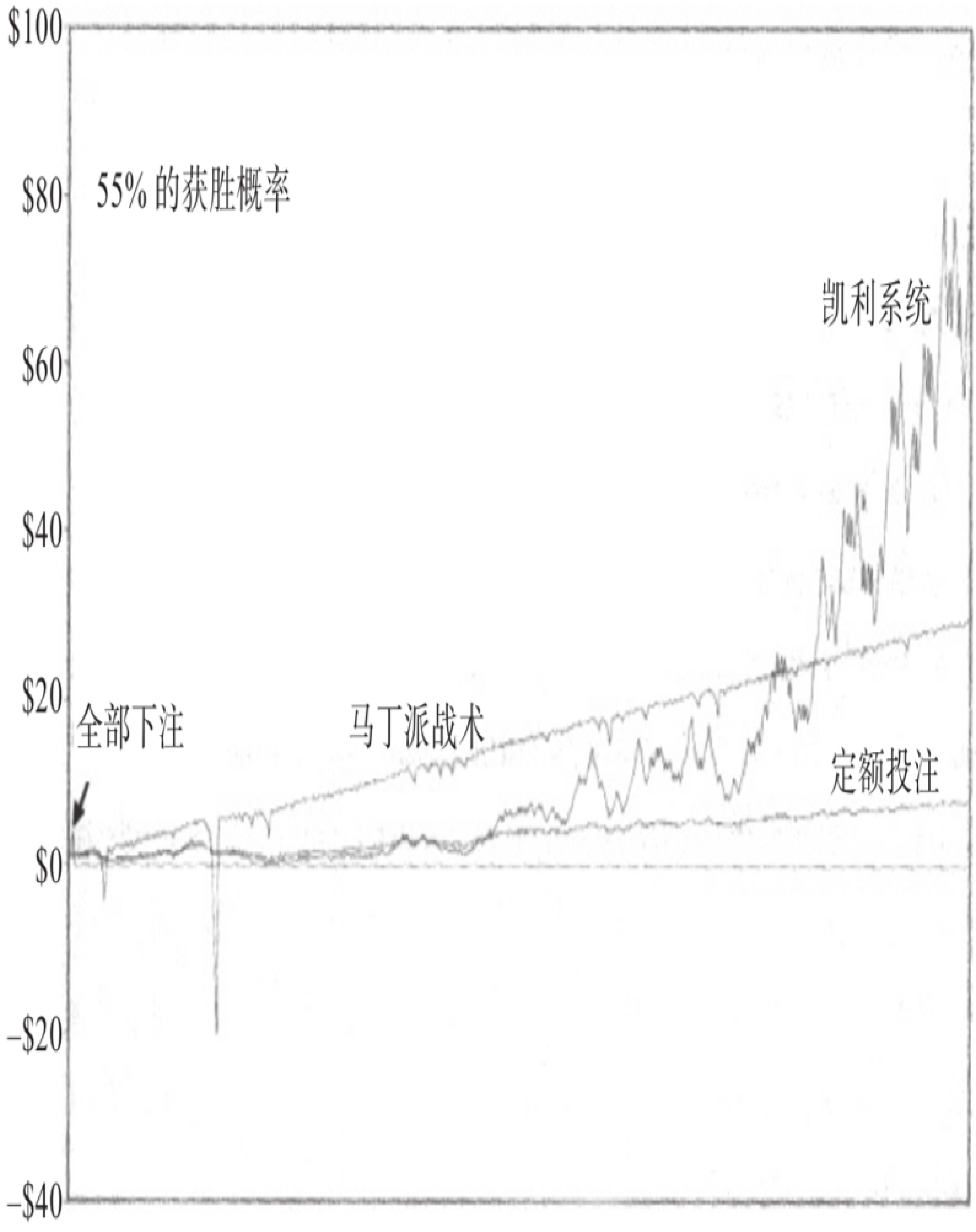

图2-1 四个资金管理系统

3，参考：

0，《赌神数学家：战胜拉斯维加斯和金融市场的财富公式》

1，zhihu-赵又奇的文章

2，算法交易Frame

3，什么是协方差，怎么计算？为什么需要协方差？

4，用凯利公式计算最优配置