Exercícios Propostos[1]

⚠ *Álgebra de matrizes*

1. Considere as seguintes matrizes: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 7 & -3 & -2 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -3 \\ -1 & 0 & -4 \\ -6 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $F = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calcule as expressões matriciais abaixo *quando possível.*

(a) $A + 2B$
(b) $AB - BA$
(c) $2C - D$
(d) $2D^t - 3E^t$
(e) $D^2 + DE$
(f) $C^t A$
(g) $E - AC$
(h) $F^t E$
(i) BCF

2. Seja $C = AB$ uma matriz obtida pelo produto das matrizes A e B, respectivamente. Encontre a ordem $m \times n$ de C nos casos em que o produto existe e verifique se o produto BA está definido.

(a) $A_{2\times3}B_{3\times4}$
(b) $A_{4\times1}B_{1\times2}$
(c) $A_{1\times2}B_{3\times1}$
(d) $A_{5\times2}B_{2\times3}$
(e) $A_{4\times4}B_{3\times3}$
(f) $A_{4\times2}B_{2\times4}$
(g) $A_{2\times1}B_{1\times3}$
(h) $A_{2\times2}B_{2\times2}$

⚠ *Leis de formação de matrizes e elementos*

3. Determine as matrizes a partir de suas leis de formação.

(a) $A = (a_{ij})_{2\times3}$, onde $a_{ij} = 3i - 2j$

(b) $B = (b_{ij})_{3\times3}$, onde $b_{ij} = \begin{cases} 3i + j, & \text{se } i = j \\ i^2 - j, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

(c) $C = (c_{ij})_{1\times4}$, onde $c_{ij} = j^i$

(d) $D = (d_{ij})_{4\times4}$, onde $d_{ij} = \begin{cases} i^2 + j^2, & \text{se } i = j \\ 2ij, & \text{se } i \neq j \end{cases}$

4. Dadas as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ -3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$, use *apenas* as linhas e colunas indicadas para encontrar:

(a) $[BA]_{23}$
(b) $[AB]_{23}$
(c) $[B^2]_{31}$
(d) $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + a_{33}$
(e) $\mathrm{tr}(B^t) = [B^t]_{11} + [B^t]_{22} + [B^t]_{33}$
(f) $\mathrm{tr}(A - B)$
$= [A - B]_{11} + [A - B]_{22} + [A - B]_{33}$
(g) $\mathrm{tr}(AB) = [AB]_{11} + [AB]_{22} + [AB]_{33}$

[1] Resolva os exercícios sem omitir nenhuma passagem em seus cálculos. Respostas sem resolução e/ou justificativa não serão consideradas. **Data máxima de entrega: 26/03/2025 até 14:00 horas**

Equações matriciais

5. Sendo $A = \begin{pmatrix} -1 & 7 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$ e $C = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, determine X e Y em cada uma das expressões matriciais abaixo:

(a) $2X + A = 3B + C$

(b) $Y + A = \frac{1}{2}(B - C)^t$

(c) $3X + A = B - X$

(d) $\begin{cases} X + Y = 3A \\ X - Y = 2B + C \end{cases}$

6. Mostre que as matrizes da forma $A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{x} \\ x & 1 \end{pmatrix}$, em que x é um número real não nulo, satisfazem a equação $A^2 = 2A$ e obtenha uma expressão para A^n, com $n = 1, 2, 3 \ldots$

7. Sejam $X = AB$ e $Y = AC$ matrizes definidas a partir dos produtos AB e AC, respectivamente. Calcule as expressões abaixo em função X e Y.

(a) $A(B + C)$ (b) $B^t A^t$ (c) $C^t A^t$ (d) $(ABA)C$

8. Resolva os exercícios a seguir.

(a) Suponha que $A = \begin{pmatrix} 4 & x+2 \\ 2x-3 & x+1 \end{pmatrix}$ seja uma matriz simétrica, isto é, $A^t = A$. Determine x e A.

(b) Determine x, y e z de modo que a matriz $B = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 2 \\ x & 0 & 1-z \\ y & 2z & 0 \end{pmatrix}$ seja antissimétrica, isto é, $B^t = -B$.

9. Encontre x, y, z e t que satisfazem a equação matricial:

$$3\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+t & 3 \end{pmatrix}.$$

10. Uma matriz A de ordem $n \times n$ é chamada de *matriz ortogonal* se $AA^t = A^t A = I_n$, onde $I_n = (\delta_{ij})_{n \times n}$ é a matriz identidade de ordem n.

(a) Mostre que a matriz $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ é ortogonal.

(b) Encontre os valores de x, y e z para os quais a matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & y \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & z \end{pmatrix}$ é ortogonal.