1)

a) $\overrightarrow{BF}$

$\overrightarrow{BF} = \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{BF} = -\vec{f} + \vec{b}$

$= -f$ ↲ ↳ b

b) $\overrightarrow{AG}$

$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FG} \Rightarrow \overrightarrow{AG} = \vec{f} + \vec{c}$

↳ $\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{AC} = c$

c) $\overrightarrow{AE} = -\vec{b}$

↳ oposto, pela simetria, de $\overrightarrow{CF}$

d) $\overrightarrow{BG}$

$\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} \Rightarrow \overrightarrow{BG} = -\vec{b} + \vec{f} + \vec{c}$

$-b$ ↲ ↳ $f + c$

e) $\overrightarrow{HB}$

$\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} \Rightarrow \overrightarrow{HB} = -\vec{c} + \vec{b}$

oposto de $\overrightarrow{FG}$ ↲ ↳ $\vec{b}$

f) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} = \vec{b} + \vec{c}$

b ↲ ↳ c

g) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{HG} = -\vec{b} - \vec{c}$

$-b$ ↲ ↳ $-c$, oposto

oposto à $\overrightarrow{CB}$ à $\overrightarrow{FG}$

h) $\overrightarrow{HF} + \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{EF} = 2\vec{b} + \vec{f} + \vec{c}$

$\vec{b}$ ↲ ↳ $\vec{f} + \vec{c}$ ↳ $-b = AD$

oposto de AE

$\overrightarrow{HG} = c$

i) $2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{FG} - \overrightarrow{BH} + \overrightarrow{GH} = -\vec{b}$

$-b$ ↲ ↳ c ↳ $c - b = -\overrightarrow{HB}$

2)

a) $\vec{DF}$

$\vec{DF} = \underbrace{\vec{DE}}_{-DC} + \vec{EF} \Rightarrow \vec{DF} = \vec{v} - \vec{u}$

b) $\vec{DA}$

$\vec{DA} = \underbrace{DE}_{-u} + EF + \underbrace{FA}_{-v} \Rightarrow \vec{DA} = \vec{w} - \vec{v} - \vec{u} = -\vec{u}$

c) $\vec{DB} = \vec{DC} + \vec{CB} + \vec{BA} \Rightarrow -\vec{w}$

$-w = -DE$ $-DC = -\vec{u}$

d) $\vec{DO} = -\frac{1}{2}(\vec{u} + \vec{w})$

e) $\vec{EC} = \vec{ED} + \vec{DC} = -\vec{w} + \vec{u}$

f) $\vec{EB} = \vec{EC} + \vec{CB} = (\vec{u} - \vec{w}) - \vec{w} = \vec{u} - 2\vec{w}$

g) $\vec{OB} = \frac{1}{2}(u - w)$

h) $\vec{AF} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} = -u$

$-u - w - u + w + u$

3)

a) $\underbrace{\vec{OA}}_{e} + \underbrace{\vec{OB}}_{\text{rot.}} + \underbrace{\vec{OC}}_{\text{rot}} + \overset{\vec{d}}{\vec{OD}} + \overset{\vec{e}}{\vec{OE}} + \underbrace{\vec{OF}}_{\text{rot.}} = \vec{0}$

"e" em 60°   "e" em 120°   "e" em -60°

b) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} + \vec{FA} = \vec{0}$

c) $\vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CD} + \vec{DE} + \vec{EF} = \vec{AF}$

 d) $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OD} + \vec{OE} = -\vec{a} - \vec{c} + \vec{a} + \vec{e} = \vec{0}$

e) $\vec{OC} + \underbrace{\vec{AF} + \vec{EF}}_{\vec{AE} = -\vec{u}} \Rightarrow -\vec{d} - \vec{u}$

$-\vec{d}$ ↲

f) $\vec{AF} + \vec{DE} = \vec{0}$

↳ $-\vec{DE}$

4)

• $\vec{BP} = \vec{BA} + \vec{AP} \Rightarrow -\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AC}$ //

$-\vec{AB}$ ↲ ↳ $\frac{1}{2}\vec{AC}$

• $\vec{AN} = AB + BN \Rightarrow \vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{BC}$ //

$\frac{1}{2}BC$ ↲

• $CM = CB + BM \Rightarrow \vec{CB} - \frac{1}{2}\vec{AB}$ //

$-\frac{1}{2}BA$ ↲

5)

a) · $\vec{CD} = \vec{CB} + \vec{BD} \Rightarrow \vec{BD} = -2\vec{w} + 5\vec{u}$

$-\vec{BC} = -3\vec{u}$ ↲ ↳ $\vec{BA} + \vec{AD}$

$-\vec{AB} = -2\vec{w}$ ↲ ↳ $5\vec{u}$

$\vec{CA} = \vec{CB} + \vec{BA} = -3\vec{u} - 2\vec{w}$

· $CD = -3u + (-2w + 5u) = 2u - 2w$

b) $AD = 5u$, $BC = 3u$ } $u \Rightarrow AD \parallel BC$ ∴ ABCD é um Trapézio

6) $\vec{DE} = \vec{DA} + \vec{AB} + \vec{BE} \to 5/4\, a$

$-AD = -\frac{1}{4}c$ ↲ ↳ $b - a$

$DE = -\frac{1}{4}c + (b - a) + \frac{5}{4}a$

$= b - a + \frac{5}{4}a - \frac{1}{4}c$

$= b + \frac{1}{4}a - \frac{1}{4}c$ //

7)

$\cdot\ \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (5a - xb) - (a + 2b) = 4a + (x-2)b$

$\cdot\ \vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (5a + xb) - (3a + 2b) = 2a + (x-2)b$

$\vec{AC} = k \cdot \vec{BC} \Rightarrow 4a + (x-2)b = k(2a + (x-2)b)$

$\cdot\ 4 = 2k \Rightarrow k = 2$ $\qquad \cdot\ (x-2) = 2(x-2) \Rightarrow$

$(x-2) = 2x - 4 \Rightarrow$

$x - 2x = -4 + 2 \Rightarrow$

$-x = -2 \Rightarrow x = 2$

8)

$\cdot\ \vec{OB} = \frac{1}{m}\vec{ON}$, $\cdot\ \vec{OC} = \frac{1}{1+m}\vec{OM}$

· como $\vec{ON}$ e $\vec{OM}$ são lados e diagonais do paralelogramo, OB e OC são combinações lineares dos mesmos vetores da base

· se A, B e C estivessem no mesmo plano e os vetores OB e OC forem colineares, então os pontos B e C estarão no mesmo segmento que A, porém, ambos os vetores são múltiplos escalares dos vetores da base, não havendo dependência linear contraditória, A B C são colineares

9)

$\cdot\ v_1 = 2u + v$

$\cdot\ v_2 = u - 2v$

$\alpha(2u + v) + \beta(u - 2v) = 0$

$(2\alpha + \beta)u + (\alpha - 2\beta)v = 0$

$\begin{cases} 2\alpha + \beta \rightsquigarrow 2(2\beta) + \beta = 0 \Rightarrow 5\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta \Rightarrow \alpha = 2\beta \end{cases}$

$\alpha = 2 \cdot 0 \Rightarrow \alpha = 0$

 v_1 e v_2 são L.I $\therefore$ formam base

10)

a) se u, v, w são L.I, a partir de somas e subtrações ($u+v$, $u-w$, $u+w$, ...) essas combinações também são L.I. apartir do momento em que não sejam multiplos uns dos outros ou combinação redundantes.

b) $u + w + t_1 = u + v + (au + bv + cw) = (1+a)u + (1+b)v + cw$
. esse vetor será L.I com u e w apenas se o sistema $(1+a) = 0, (1+b) = 0, c = 0$ não for simultaneamente verdadeiro. Ou seja, $a + b + c \neq -1$ garante que os vetores não colapsam para combinação L.D

11)

a) . $\vec{AB} = B - A = (0, -3, -3)$
. $\vec{BC} = C - A = (0, 1, 1)$
. $\vec{CA} = A - C = (0, 2, 2)$

c) $C + \frac{1}{2}\vec{AB}$
$C + \frac{1}{2}(0, -3, -3)$
$(1, 1 - \frac{3}{2}, 0 - \frac{3}{2})$
$(1, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2})$

b) $\vec{AB} + \frac{2}{3}\vec{BC}$
$(0, -3, -3) + (\frac{2}{3})(0, 1, 1)$
$(0, -3 + \frac{2}{3}, -3 + 2/3)$
$(0, -\frac{7}{3}, -\frac{7}{3})$

d) $A - 2BC$
$A - 2(0, 1, 1)$
$(1, 3-2, 2-2) = (1, 1, 0)$

12)
a) $\{(2,3), (0,2)\} \rightsquigarrow$ l.i
b) $\{(3,0), (-2,0)\} \rightsquigarrow$ l.d (mesma direção)
c) $\{(2,3,4), (0,3,3)\} \rightsquigarrow$ l.i
d) $\{(1,-1,2), (1,1,0), (1,-1,1)\} \rightsquigarrow$ l.d
e) $\{(1,-1,1), (-1,2,1), (-1,2,2)\} \rightsquigarrow$ l.d
f) $\{(1,0,1), (0,0,1), (2,0,5)\} \rightsquigarrow$ l.i

13)

a) $\begin{cases} 2a + 1b = 1 \\ -a - b = 1 \end{cases} \Rightarrow 2(-1-b)+b = 1$

$-2-2b+b = 1$

$\hookrightarrow a = -1-b \qquad -b = 3$

$a = -1+3 \qquad \boxed{b = -3}$

$\boxed{a = 2} \quad \therefore \quad w = -3u + 2v$

b) $\begin{cases} x + z = 1 \Rightarrow z = 1 - x \Rightarrow \boxed{z = -1} \\ x + y + z = 2 \\ x + y = 3 \Rightarrow y = 3 - x \Rightarrow \boxed{y = 1} \end{cases}$

$x + (3-x) + (1-x) = 2 \qquad z = 2a + b - c$

$3 + 1 - x = 2$

$\boxed{x = 2}$

14)

a) l.d = múltiplos entre si ($w = k \cdot u$)

- $m = k \cdot 1 \Rightarrow k = m$
- $2m = m(m-1)$
- $m(-m) = 4 \Rightarrow -m^2 \quad m^2 = -4 \Rightarrow m = \pm 2$

impossível em $\mathbb{R}$

não há valores reais de m e n para u e v serem l.d

b) mesmo da letra a)...

- $m = k \cdot 1 \Rightarrow k = m$
- $n + 1 = m \cdot m = m^2$
- $8 = m(n+1) = m \cdot m^2 \Rightarrow m^3$

- $n + 1 = m^2$

$n = m^2 - 1 \Rightarrow n = 2^2 - 1 \Rightarrow \boxed{n = 3}$

- $m^3 = 8 \Rightarrow \boxed{m = 2}$

FORON:

15) $\begin{vmatrix} m & m^2+1 & m \\ 1 & m & 1 \\ -m^2+1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$det = m \cdot det|m\ 1,\ 0\ 1| - (m^2+1) \cdot det|1\ 1,\ -m^2+1\ 1|$
$+ m \cdot det|1\ m;\ -m^2+1\ 0|$

$det = m \cdot m - (m^2+1)m^2 + m(m^3-m)$
$= m^2 - m^2(m^2+1) + m^4 - m^2$
$= m^2 - m^4 - m^2 + m^4 - m^2$
$= -m^2 \neq 0$
$= m \neq 0$

∴ vetores são l.i para qualquer $m \neq 0$, formando uma base

16)

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ $\Rightarrow det = 1(0 \cdot -1 - 1 \cdot 1) - 1(1 \cdot -1 - 1 \cdot 0) + 1 \cdot (1 \cdot 1 - 0 \cdot 0)$
$det = -1(-1) + 1$
$= -1 + 1 + 1 \Rightarrow 1 \neq 0$ ∴ l.i, formam base

b) $x(1,1,0) + y(1,0,1) + z(1,1,-1) = (2,3,7)$
$(x+y+z,\ x+z,\ y-z) = (2,3,7)$

$\begin{cases} x+y+z = 2 & \text{I} \\ x+z = 3 & \text{II} \\ y-z = 7 \Rightarrow y = z+7 & \text{III} \end{cases}$ III'

I' $x + z + 7 + z = 2$
$x + 2z = -5$

subtraindo I' de II

$(x+2z) - (x+z) = -5-3$

- $z = -8$
- $x = 3-(-8) = 11$
- $y = -8+7 = -1$

$\Rightarrow \vec{u} = (2,3,7)_c = 11f_1 - f_2 - 8f_3$

coordenadas $= (11, -1, -8)$
base B

c) $\alpha(1,1,0) + \beta(1,0,1) + \gamma(1,1,-1) = (2,3,7)$

$(\alpha+\beta+\gamma, \alpha+\gamma, \beta-\gamma) = (2,3,7)$

$$\begin{cases} \text{I} & \alpha+\beta+\gamma = 2 \\ \text{II} & \alpha+\gamma = 3 \Rightarrow \alpha = 3-\gamma \quad \text{II}' \\ \text{III} & \beta-\gamma = 7 \Rightarrow \beta = \gamma+7 \quad \text{III}' \end{cases}$$

subst II' e III' em I

$3-\gamma+\gamma+7+\gamma = 2$

$10+\gamma = 2 \Rightarrow \gamma = -8$

$\circ\ \alpha = 3-(-8) = 11$

$\circ\ \beta = -8+7 = -1$

$\Rightarrow \vec{w} = (2,3,7)_b = 11f_1 - f_2 - 8f_3$

coordenadas base b $= (11, -1, -8)$