

Análise da Dimensão de Similaridade em Estratégias de Vacinação num Modelo Epidemiológico via Autômatos Celulares

Guilherme H. F. Silva

Resumo

Este trabalho apresenta uma implementação de Autômatos Celulares (AC) acoplada a um modelo SEIR para simular a dinâmica espaço-temporal de epidemias em reticulados bidimensionais. O objetivo central é avaliar a eficácia comparativa de três estratégias de vacinação: Aleatória, em Cluster (Barreira Geográfica) e Reativa (bloqueio de vizinhança). Para quantificar a complexidade estrutural dos surtos, aplicou-se o método de box-counting para estimar a Dimensão de Similaridade (D_S) dos aglomerados de infecção. Os resultados demonstram que várias estratégias são viáveis, reduzindo a taxa de transmissão global. O destaque vai para a vacinação reativa, que provoca um colapso abrupto na dimensão fractal da epidemia com uma necessidade menor de vacinados. O estudo valida a análise da complexidade geométrica como uma métrica robusta para o planejamento de contenção de doenças.

Palavras-chave: Autômatos Celulares; Modelo SEIR; Estratégias de Vacinação; Dimensão de Similaridade; Dinâmica Espacial.

1. Introdução

A modelagem matemática de doenças infecciosas é uma ferramenta fundamental para a saúde pública, permitindo prever cenários e avaliar a eficácia de intervenções não farmacêuticas e farmacêuticas. Os modelos compartimentais clássicos, como o SEIR (Keeling e Rohani) têm sido a pedra angular da epidemiologia teórica. Autômatos Celulares (ACs) são sistemas discretos capazes de gerar comportamentos globais complexos a partir de regras locais simples (Schiff), tornando-os ideais para simular a dinâmica de contágio em populações estruturadas espacialmente.

No mundo real, a vacinação não ocorre de forma uniforme no espaço; diferentes estratégias alteram fundamentalmente a conectividade da rede de contágio. Neste trabalho, apresentamos um modelo de Autômato Celular baseado em SEIR para avaliar a eficácia de três estratégias de vacinação: (i) Aleatória, (ii) Baseada em Agrupamentos (Barreira Geográfica) e (iii) Reativa (focada na vizinhança de infectados). Além das métricas epidemiológicas tradicionais, introduzimos uma análise da Dimensão de Similaridade dos clusters de infectados, conforme metodologia de box-counting (Schiff).

Nossas simulações, realizadas em um reticulado de $[100 \times 100]$ células, demonstram que, embora todas as estratégias reduzam o R_0 efetivo, a vacinação reativa provoca um colapso abrupto na dimensão fractal da epidemia (reduzindo-a de $[D_{\text{inicial}}]$ para $[D_{\text{final}}]$), fragmentando as cadeias de transmissão com $[XX]\%$ mais eficiência do que a alocação aleatória. Esta abordagem fornece uma nova métrica baseada na complexidade espacial para avaliar protocolos de imunização em cenários de recursos limitados.

2. Metodologia

Para investigar o impacto de estratégias de vacinação espacial na dinâmica de epidemias, foi desenvolvido um modelo computacional estocástico de tempo discreto baseado em AC.

2.1. Estrutura do Modelo e Espaço de Estados

A simulação ocorre em uma grade bidimensional $L \times L$ com $L = 100$, onde cada célula (i, j) representa um agente individual. Em qualquer passo de tempo t , uma célula existe em um dos cinco estados mutuamente exclusivos $\Sigma = \{S, E, I, R, V\}$:

- **Suscetível (S)**: Capaz de contrair o patógeno.
- **Exposto (E)**: Período latente, ainda não infeccioso.
- **Infeccioso (I)**: Capaz de transmitir a doença para vizinhos.
- **Recuperado (R)**: Imunidade permanente derivada da infecção.
- **Vacinado (V)**: Imunidade artificial, atuando como bloqueadores espaciais.

2.2. Regras de Transição (Dinâmica SEIR)

A evolução temporal do sistema é governada por transições probabilísticas baseadas na Vizinhança de Moore, com risco de infecção é estritamente local.

- **Transmissão ($S \rightarrow E$)**: Uma célula suscetível torna-se exposta com probabilidade P_{inf} , calculada em função da “carga viral” local: $P_{\text{inf}} = 1 - (1 - \beta)^n$ Onde β é a taxa de transmissão por contato e n é o número de vizinhos infecciosos (I) na vizinhança.
- **Latência ($E \rightarrow I$)**: Células Expostas tornam-se Infecciosas com probabilidade σ (inverso do período de incubação).
- **Recuperação ($I \rightarrow R$)**: Células Infecciosas tornam-se Recuperadas com probabilidade γ (inverso do período de recuperação).

2.3. Estratégias de Vacinação

Para avaliar os mecanismos de controle, implementamos três estratégias distintas de alocação espacial para o estado Vacinado (V), modificando a topologia da grade antes ou durante o surto:

- **Alocação Aleatória**: Uma fração ρ de células Suscetíveis é selecionada aleatoriamente e transitada para V em $t = 0$. Esta estratégia imita campanhas de vacinação em massa sem direcionamento espacial, testando o limiar de percolação da rede.
- **Estratégia de Barreira (Segmentação Geométrica)**: A vacinação é aplicada como uma barreira em forma de cruz, dividindo a grade em quadrantes isolados. Isso simula “cordões sanitários” ou medidas de isolamento geográfico destinadas a compartimentar o surto.
- **Vacinação Reativa**: A cada passo t , vizinhos Suscetíveis de qualquer célula Infecciosa identificada são vacinados com probabilidade η . Isso simula rastreamento de contatos e bloqueio, tentando conter aglomerados localmente antes que se expandam.

2.4. Análise da Dimensão Fractal

Quantificamos a complexidade morfológica dos aglomerados de infecção usando o Método de Box-Counting para estimar a Dimensão de Similaridade (D_S), conforme descrito por Schiff. Em intervalos discretos, a grade de células Infecciosas (I) é coberta por uma malha de caixas de tamanho ε . O número de caixas $N(\varepsilon)$ necessário para cobrir todas as infecções ativas segue a lei de potência: $N(\varepsilon) \propto \varepsilon^{-D_S}$. A dimensão D_S é obtida da inclinação da regressão linear de $\log(N(\varepsilon))$ vs $\log(\frac{1}{\varepsilon})$. Valores de $D_S \rightarrow 2$ indicam uma propagação “sólida” cobrindo o plano, enquanto valores mais baixos indicam padrões de propagação fragmentados ou dendríticos, sinalizando contenção efetiva.

2.5. Implementação

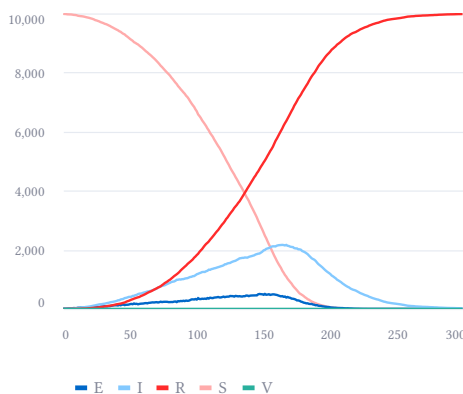
O modelo foi implementado em Python utilizando a biblioteca NumPy para manipulações de arrays de alto desempenho e SciPy (convolve2d) para cálculos eficientes de vizinhança. O framework Streamlit foi utilizado para ajuste de parâmetros e visualização em tempo real da evolução espaço-temporal.

3. Experimentos

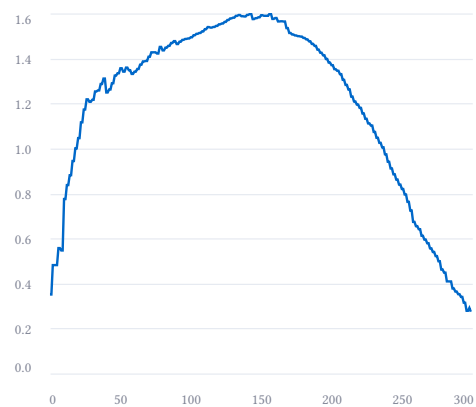
Para fins de comparação, realizaram-se diversas rodadas de experimentos, variando os parâmetros específicos de cada estratégia de vacinação. Independentemente da estratégia adotada, o modelo SEIR base foi configurado da seguinte forma:

- $I = 5$
- $L = 100$
- $t = 300$
- $\beta = 0.5$
- $\sigma = 0.2$
- $\gamma = 0.04$

Sendo I a quantidade inicial de indivíduos infectados. A Figura 1 ilustra a execução do experimento sem a aplicação de nenhuma estratégia de vacinação, resultando em uma dimensão fractal (D_S) máxima de 1.59. Esse valor evidencia a tendência do vírus de se propagar por áreas mais densas da rede. O pico de infecção ocorreu no passo de tempo 161, atingindo aproximadamente 2.000 infectados simultâneos. Posteriormente, observou-se uma redução brusca no ritmo de contaminação, de modo que, ao final dos 300 passos, todos os indivíduos já haviam transitado para o estado de Recuperado.



Curvas SEIR a)



Dimensão Fractal a)

Figura 1: a) Curvas SEIR padrão, sem estratégia de vacinação. b) Dimensão Fractal dos infectados.

3.1. Alocação Aleatória

A estratégia de vacinação aleatória foi avaliada sob três densidades de cobertura inicial: $\rho = 0.25$, $\rho = 0.50$ e $\rho = 0.65$. O objetivo destes testes foi analisar o comportamento do vírus em populações com diferentes níveis de imunização prévia. A Figura 2 demonstra que a proporção de indivíduos vacinados afeta drasticamente a propagação viral. Em comparação ao cenário sem vacinação, o cenário (a) apresenta uma redução no pico de infectados, embora a taxa de recuperação desses indivíduos seja ligeiramente mais lenta entre os passos 200 e 300. Ao analisar o cenário (b), nota-se uma queda expressiva na velocidade de disseminação do vírus: a curva de infectados assume um comportamento quase linear, sem o crescimento exponencial característico. Essa contenção também se reflete no

gráfico de dimensão fractal (b), onde o D_S atinge o valor de 1.1 por volta do passo 100 e permanece estável durante o restante da simulação. Por fim, no cenário (c), a alta taxa de vacinação impediu completamente o avanço do vírus e sua dimensão fractal atingiu as máximas ao redor de $D_S = 0.9$.

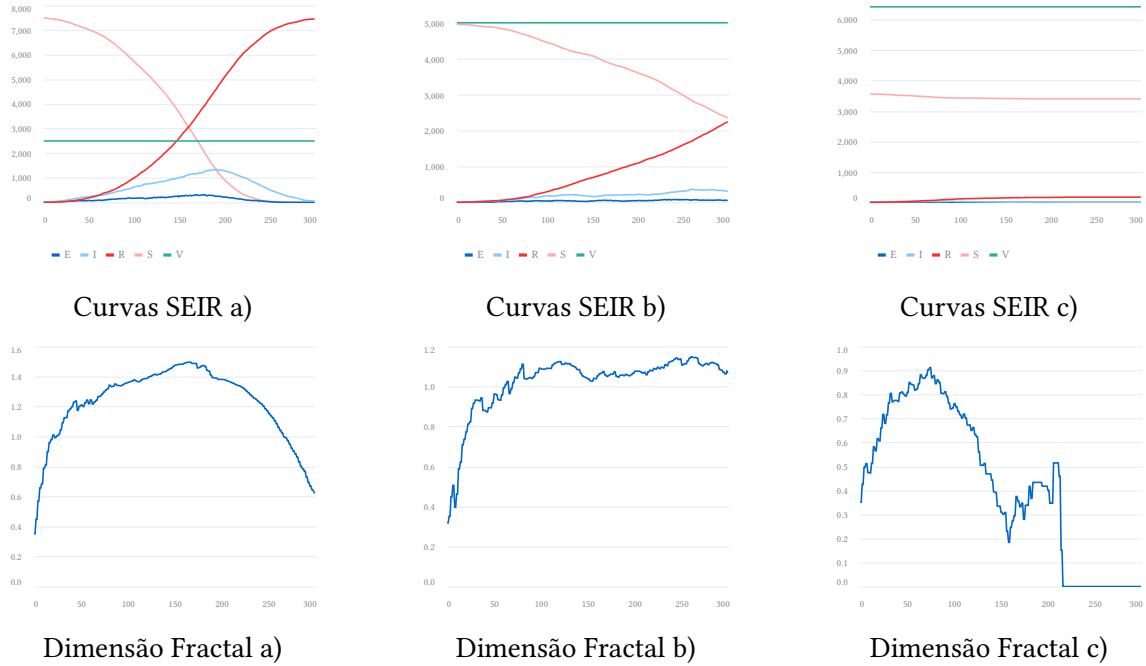


Figura 2: Curvas SEIR e Dimensão Fractal sob vacinação aleatória para diferentes densidades iniciais: a) $\rho = 0.25$; b) $\rho = 0.50$; c) $\rho = 0.65$.

3.2. Estratégia de Barreira

A estratégia de barreira, ilustrada na Figura 3, evidencia que, de modo geral, a infecção não consegue se espalhar por toda a população. Contudo, no quadrante em que o surto efetivamente ocorre, os impactos observados são muito semelhantes aos do experimento sem vacinação. Essa abordagem demonstra um grande potencial quando combinada com outras metodologias, uma vez que foi capaz de restringir o alcance geográfico do vírus em 75%.

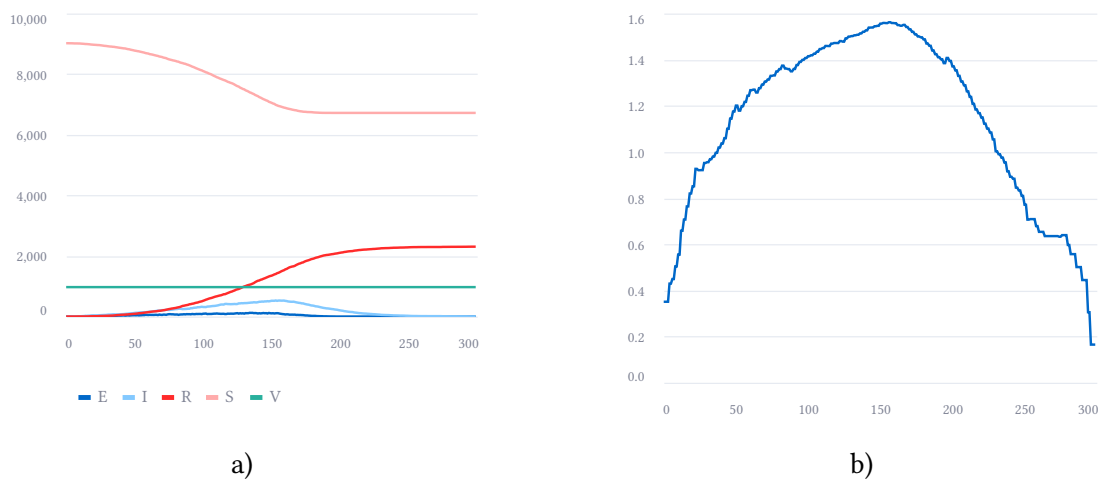


Figura 3: a) Curvas SEIR utilizando a estratégia de vacinação por barreira. b) Dimensão Fractal dos infectados correspondente.

3.3. Vacinação Reativa

A estratégia de vacinação reativa foi simulada em dois cenários distintos, adotando $\eta = 0.20$ e $\eta = 0.35$. Na Figura 4, é possível observar que o bloqueio rápido de aglomerados locais por células vacinadas inibe consideravelmente a disseminação do vírus. O cenário (e) apresenta o menor valor de D_S registrado, atingindo um pico de 0.74 e caindo bruscamente para zero logo em seguida. Por sua vez, o cenário (a) exibe o crescimento mais lento no número de infectados dentre todas as abordagens testadas, ainda que o número total de casos ultrapasse o observado no cenário (b) da estratégia aleatória. Em termos numéricos, a vacinação reativa destaca-se como a mais eficiente quando se considera a quantidade mínima de vacinas necessárias para suprimir a epidemia. Entretanto, em um contexto real, essa medida profilática tende a ser menos efetiva e mais difícil de operacionalizar do que a imunização prévia e em massa da população.

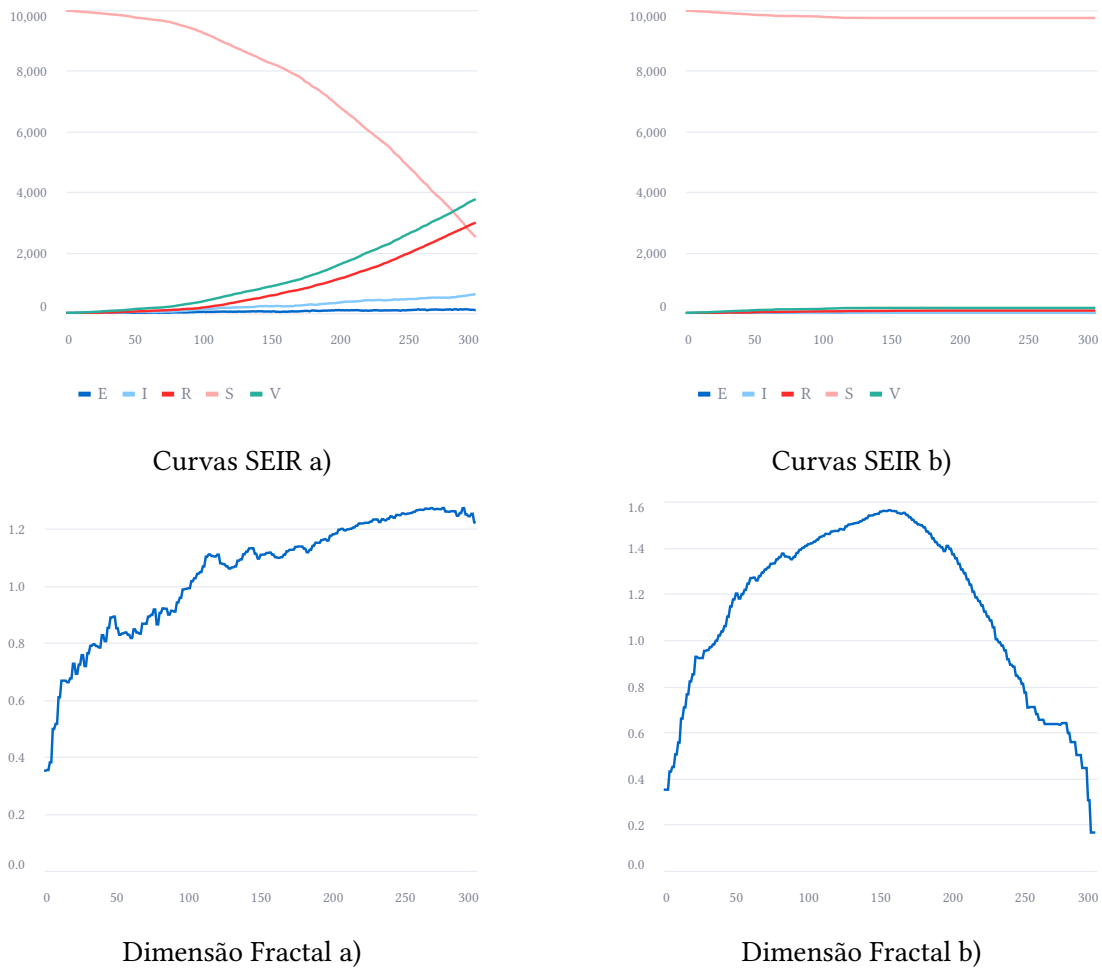


Figura 4: Curvas SEIR e Dimensão Fractal sob vacinação reativa para diferentes taxas de efetividade: a) $\eta = 0.20$; b) $\eta = 0.35$.

4. Conclusão

Este trabalho propôs a utilização de um modelo epidemiológico SEIR baseado em Autômatos Celulares para investigar a eficácia de diferentes estratégias espaciais de vacinação: aleatória, por barreira e reativa. A introdução da análise da Dimensão de Similaridade (D_S) por meio do método de box-counting revelou-se uma ferramenta analítica complementar robusta, permitindo quantificar não apenas

o volume da epidemia ao longo do tempo, mas também a complexidade morfológica das cadeias de transmissão no espaço.

Os resultados obtidos evidenciam que a distribuição topológica dos indivíduos imunizados altera drasticamente a dinâmica de propagação viral. A vacinação aleatória demonstrou que o atingimento de um limiar ótimo de cobertura prévia ($\rho = 0.65$) impede o avanço do vírus, estabilizando a rede de contatos em níveis baixos de fragmentação ($D_S \approx 0.9$). A estratégia de barreira, embora não mitigue a força da infecção em seu quadrante de origem, provou ser altamente eficaz na contenção geográfica, restringindo a área afetada do reticulado.

Destaca-se, ainda, a vacinação reativa, que obteve o melhor desempenho teórico na supressão de aglomerados locais. Esta abordagem registrou a menor dimensão fractal máxima ($D_S = 0.74$) e otimizou o uso de recursos vacinais. Sua eficácia ótima no modelo contrasta com as barreiras logísticas do mundo real, sugerindo que uma combinação de imunização prévia com ações de rastreamento de contatos pode representar a abordagem mais equilibrada.

Conclui-se que o planejamento em saúde pública beneficia-se significativamente de abordagens preditivas que consideram a dimensão espacial e fractal do contágio. A transição de um padrão de propagação denso ($D_S = 1.59$) para padrões altamente fragmentados fornece um indicador claro do sucesso das intervenções estruturais. Trabalhos futuros poderão expandir este modelo para incorporar a mobilidade estocástica dos agentes ou simular a hibridização das estratégias de vacinação aqui apresentadas.

5. Referências

1. Keeling, M. J., & Rohani, P. (2008). Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals. Princeton University Press.
2. Schiff, J. L. (2008). Cellular Automata: A Discrete View of the World. Wiley Series in Discrete Mathematics & Optimization. John Wiley & Sons.