
Colecção de Problemas de Electromagnetismo e Óptica

Introdução teórica, problemas resolvidos e problemas propostos com soluções

Instituto Superior Técnico
2º semestre de 2017-18



Fernando Carvalho Barão, Luís Filipe Mendes
Departamento de Física do Instituto Superior Técnico
Versão: Fev/2018

Preâmbulo

Esta colectânea de problemas resulta da experiência dos autores na docência da disciplina de Electromagnetismo e Óptica no mestrado integrado de Electrotecnia e Computadores, no Instituto Superior Técnico ao longo de vários anos. O conjunto de problemas aqui apresentado, beneficiou do trabalho de inúmeros colegas, quer pela contribuição directa para a disciplina em causa, quer pela via de problemas herdados. A todos devotamos os nossos agradecimentos. Adicionalmente, destacamos também a contribuição dos alunos para esta colectânea de problemas, quer pelo apontar de incorrecções ou incongruências quer pelo estímulo que nos foi dado para a sua execução.

A colectânea de problemas encontra-se dividida em vários capítulos. Nestes, faz-se uma breve introdução teórica que pretende resumir a matéria necessária à resolução dos problemas propostos. Segue-se um conjunto de exercícios resolvidos que pretende ser um guia da metodologia a seguir na resolução dos exercícios propostos. Por último, todos os problemas apresentados possuem soluções.

Este documento encontra-se ainda a ser trabalhado, nomeadamente no que respeita às introduções teóricas de alguns dos capítulos. No entanto e apesar de provisório, achámos útil a sua disponibilização aos alunos. Resta o desejo de que ele cumpra os objectivos de permitir uma melhor assimilação dos conteúdos ensinados na disciplina de Electromagnetismo e Óptica.

Lisboa, 16 de Dezembro de 2009

Fernando Carvalho Barão
Luís Filipe Mendes



Formulário matemático

Algumas Primitivas

$$\int \frac{dx}{(x^2 + b)^{3/2}} = \frac{1}{b} \frac{x}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2 + b}} = \sqrt{x^2 + b}$$

$$\int \frac{dx}{x(x+a)} = \frac{1}{a} \ln\left(\frac{x}{x+a}\right)$$

$$\int \frac{xdx}{(x^2 + b)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + b}}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + b}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + b}\right)$$

Para o cálculo analítico de integrais pode ser consultado o endereço web: <http://integrals.wolfram.com>

[t] Coordenadas cartesianas (x, y, z)

$$d\vec{\ell} = dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$$

$$dS = dx dy$$

$$dv = dx dy dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (A_x, A_y, A_z)$$

Coordenadas polares (r, θ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta$$

$$dS = r dr d\theta$$

Coordenadas cilíndricas (r, θ, z)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

$$dv = r dr d\theta dz$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{\partial F}{\partial z} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial(r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right) \vec{u}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \vec{u}_\theta + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \vec{u}_z$$

Coordenadas esféricas (r, θ, ϕ)

$$d\vec{\ell} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin\theta d\phi \vec{u}_\phi$$

$$dv = r^2 dr \sin\theta d\theta d\phi$$

$$\vec{\nabla} F = \left(\frac{\partial F}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin\theta A_\theta) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_\phi)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \left[\frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial(\sin\theta A_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \phi} \right] \vec{u}_r + \frac{1}{r} \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial(r A_\phi)}{\partial r} \right] \vec{u}_\theta + \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(r A_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \vec{u}_\phi$$

Teorema da Divergência

$$\int_v \vec{\nabla} \cdot \vec{A} dv = \oint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS$$

Teorema da Stokes

$$\int_S \vec{\nabla} \times \vec{A} \cdot d\vec{S} = \oint_\Gamma \vec{A} \cdot d\vec{\ell}$$

Identidades vectoriais

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$$

Formulário de Electromagnetismo e Óptica

Electrostática

- $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$
- $\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 9 \times 10^9 N.m^2.C^{-2}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$
 $\nabla \times \vec{E} = 0$
- $\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int_v \rho_{liv} dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv}$
- $\oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS = - \int_v \rho_{pol} dv$
 $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$
 $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext}$
- $V_P = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell}$
 $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
- $\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E}$
 $\vec{D} = \epsilon_0(1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E}$
- $Q = CV$
- $U_E = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i q_i V_i$
- $u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2$
 $U_E = \int_v u_E dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_E}{ds} \vec{u}_s$

Corrente eléctrica estacionária

- $\vec{J} = Nq\vec{v}$
- $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$
- $I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
- $p = \vec{J} \cdot \vec{E}$
- $\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{d\rho}{dt}$

Ondas electromagnéticas

- $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$
- $\vec{n} = \frac{\vec{\kappa}}{\kappa} = \frac{\vec{E}}{E} \times \frac{\vec{B}}{B}$
- $\frac{E}{B} = v$
- $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$
- $u = u_E + u_M$
- $I = \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle$

Magnetostática

- $\vec{B} = \int_{\Gamma} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Id\vec{\ell} \times \vec{u}_r}{r^2}$
 $\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} H/m$
- $d\vec{F} = Id\vec{\ell} \times \vec{B}$
- $\oint_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS = 0$
 $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}$
- $\vec{B} = \mu_0(\vec{M} + \vec{H})$
 $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H}$
- $\oint_{\Gamma} \vec{M} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J}_M \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}$
 $\vec{J}'_M = \vec{M} \times \vec{n}_{ext}$

Interacção de partículas e campos

- $\vec{F} = q (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

Campos variáveis e indução

- $\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$
- $\Phi_i = L_i I_i + M_{ij} I_j$
- $U_M = \left[\frac{1}{2} \right] \sum_i \Phi_i I_i$
- $u_M = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu}$
 $U_M = \int_v u_M dv$
- $\vec{F}_s = \pm \frac{dU_M}{ds} \vec{u}_s$
- $\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS + \frac{d}{dt} \int_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS$
 $\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$

Óptica

- $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$
- $\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1}$
 interferência entre fendas
- $d \sin \theta_{max} = m\lambda$
- $d \sin \theta_{min} = m\lambda + \frac{\lambda}{m'} \quad (m' \leq N \text{ e par})$
 difracção
- $a \sin \theta_{min} = m\lambda$

Capítulo 1

Cálculo integral: uma pequena revisão

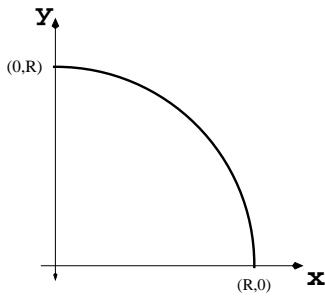
Capítulo 1

x

1.1 Exercícios Propostos

Integrais de linha

Exercício 1.1 : Pretende-se determinar o comprimento de um quarto da circunferência de raio $R = 1$ cm.



- Escreva o elemento de comprimento de arco, $d\ell$, em coordenadas polares.
- Determine o comprimento do quarto de circunferência.
- Imagine agora que na resolução do problema decidia utilizar coordenadas cartesianas, x e y (mais complicado!). Escreva o elemento vectorial de comprimento de arco em coordenadas cartesianas, $d\vec{\ell}$ e partindo daí o comprimento do quarto de circunferência.
Sugestão: escreva o módulo do elemento de comprimento, $d\ell$, em função de apenas uma das coordenadas cartesianas, dx ou dy .

Exercício 1.2 : Uma espira de raio a tem uma distribuição de carga uniforme $\lambda [C/m]$. Determine a carga total da espira.

Exercício 1.3 : Um campo vetorial é descrito por $\vec{F} = F \vec{e}_r$ em coordenadas esféricas.

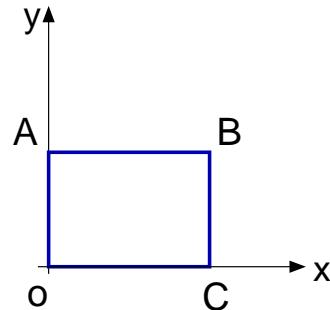
- Mostre que ao longo de um qualquer caminho entre dois pontos A e B o integral de linha deste campo vetorial verifica a igualdade,

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{r_A}^{r_B} F dr$$

- Sendo $\vec{F} = \frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ com k uma constante, determine

$$\int_a^\infty F dr$$

Exercício 1.4 : Considere os caminhos indicados na figura, em que $y_A = 2$, $x_C = 6$,



- Determine o integral ao longo do caminho fechado, $\oint_{OABCO} \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$, do seguinte campo vectorial,
$$\vec{F} = (2x + y) \vec{e}_x + y \vec{e}_y + xz \vec{e}_z$$
- Determine o integral ao longo do caminho OAB do seguinte campo vectorial,
$$\vec{F} = F_0 \vec{e}_r$$

Integrais de superfície

Exercício 1.5 : Pretende-se determinar a área de uma superfície esférica de raio $R = 1$ cm.

- Escreva o elemento de área da superfície esférica em coordenadas esféricas, dS .
- Determine a área da superfície esférica.

Exercício 1.6 : O fluxo de um campo vectorial que atravessa uma dada superfície é dado pela expressão,

$$\Phi = \int_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

onde $d\vec{S} = \vec{n} \cdot dS$ representa o vector elemento de superfície escrito usando as coordenadas mais apropriadas. Determine o fluxo dos campos vectoriais a seguir indicados que atravessam uma superfície esférica de raio a :

- $\vec{F} = \vec{e}_r$
- $\vec{F} = 10 \sin(\theta) \vec{e}_r$

Exercício 1.7 : Um disco de espessura desprezável e raio a tem uma distribuição de carga na sua superfície dada, em coordenadas polares (r, θ) , pela expressão $\sigma = \sigma_0(1 - r/a) [C/m^2]$

- Escreva o elemento de superfície do disco em coordenadas polares.
- Determine a carga eléctrica total do disco.

Capítulo 1

Integrais de volume

Exercício 1.8 : Pretende-se determinar o volume de um cilindro de raio a e altura h .

- Escreva o elemento de volume em coordenadas cilíndricas, $d\mathbf{v}$.
- Determine o volume do cilindro.

Exercício 1.9 : Uma dada região do espaço possui a seguinte distribuição de densidade de carga eléctrica, expressa em coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) :

$$\rho = +5 \times 10^{-10} \frac{1}{r^2} \quad [C/m^3]$$

- Escreva o elemento de volume, $d\mathbf{v}$, em coordenadas esféricas.
- Determine a carga total existente na coroa esférica entre $1 < R < 10$ cm.

Exercício 1.10 : Uma esfera carregada de raio a tem no espaço à sua volta uma densidade de energia eletrostática descrita em coordenadas esféricas por $u_E = \frac{k}{r^4}$ $[J/m^3]$ em que k é uma constante positiva. Determine a energia existente em todo o espaço que envolve a esfera.

1.2 Soluções dos exercícios propostos

1.1 a) $d\vec{\ell} = dr\vec{e}_r + rd\theta\vec{e}_\theta$, para $r = \text{const.}$, $d\vec{\ell} =$
 $Rd\theta\vec{e}_\theta$

b) $C = \int d\ell = \int_0^{\pi/2} Rd\theta = 5\pi \times 10^{-3}m$

c) $d\vec{\ell} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y$
 $d\ell = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}$

1.2 $Q = 2\pi a\lambda$

1.3 b) $\int_a^\infty F dr = \frac{k}{a}$

1.4 a) $\oint_{OABCO} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 12$

b) $\int_{OAB} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 2F_0\sqrt{10}$

1.5 a) $dS = R^2 \sin(\theta) d\theta d\phi$

b) $A = 4\pi R^2 = 4\pi \times 10^{-4}m^2$

1.6 a) $\Phi = 4\pi a^2$

b) $\Phi = 10\pi^2 a^2$

1.7 a) $dS = r dr d\theta$

b) $Q = \frac{\pi}{3} a^2 \sigma_0$

1.8 a) $d\mathbf{v} = r dr d\theta dz$

b) $\mathbf{v} = \pi a^2 h$

1.9 a) $d\mathbf{v} = r^2 \sin(\theta) dr d\theta d\phi$

b) $Q = 1,8\pi \times 10^{-10}C$

1.10 $U_E = \frac{4k\pi}{a}$

Capítulo 1

Capítulo 2

Electrostática

2.1 Introdução

A interacção electromagnética, uma das quatro interacções fundamentais da Natureza, está associada à presença de cargas eléctricas. A existência de interacções traduz-se no aparecimento de forças a actuar os corpos. As quatro forças são a **força gravítica**, que rege o movimentos dos planetas por exemplo, a **força fraca**, responsável pelas desintegrações radioactivas, a **força electromagnética**, que é dominante ao nível atómico (ligações químicas) e a **força forte**, responsável pela coesão dos núcleos onde existem protões a repelir-se electromagneticamente.

Interacções

Tal como foi experimentalmente constatado por Coulomb em 1784, a força entre duas cargas eléctricas Q_1 e Q_2 separadas por uma distância r é proporcional ao produto das cargas $Q_1 Q_2$, inversamente proporcional ao quadrado da distância r^2 e a sua direcção encontra-se ao longo da linha que une as duas cargas:

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \vec{u}_r = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{r^3} \vec{r} \quad (2.1)$$

O vector \vec{r} aponta da carga Q_1 para a carga Q_2 no caso de se querer a força aplicada pela carga 1 sobre a 2, ou vice-versa no caso contrário. O factor $\frac{1}{4\pi\epsilon_0}$ aparece devido ao sistema **SI** de unidades escolhido (MKSA), onde a carga se expressa em **Coulomb (C)** e a distância em **metros (m)**.

Esta lei experimental é a lei fundamental da electrostática no sentido em que as outras leis são dela derivadas.

Lei de Coulomb



A constante ϵ_0 é conhecida como **constante dieléctrica ou permitividade do vácuo**. O seu valor poderia ser determinado a partir da medição da força entre duas cargas pontuais colocadas a uma distância conhecida, mas isso não é prático. Podemos mais facilmente fazer a sua determinação experimental a partir da medida da capacidade de um condensador, como se verá mais adiante.

Permitividade eléctrica

$$\begin{aligned} \epsilon_0 &= 8,8542 \times 10^{-12} [F.m^{-1}] \\ 4\pi\epsilon_0 &\simeq \frac{1}{9 \times 10^9} [F.m^{-1}] \end{aligned}$$

Capítulo 2

Quando existem mais que duas cargas, a força total sentida por uma das cargas \mathbf{Q} resulta da soma vectorial das forças aplicadas por cada uma das cargas existentes à sua volta \mathbf{Q}_i (princípio da sobreposição):

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} + \dots \\ &= Q \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i}\end{aligned}\quad (2.2)$$

Princípio da Sobreposição

É útil passar da ideia de força eléctrica entre cargas para a noção de campo eléctrico produzido por cargas. Admitamos que uma carga de teste estacionária \mathbf{Q}_0 colocada numa dada região do espaço sente uma força \vec{F} (aqui o facto da carga estar em repouso é importante porque evita a existência da força magnética como se verá mais adiante). Pode-se então afirmar que nessa região do espaço existe um campo eléctrico definido por:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{Q_0} \quad [V.m^{-1}] \equiv [N.C^{-1}] \quad (2.3)$$

As cargas eléctricas são pois as responsáveis pela existência do campo eléctrico. O campo eléctrico produzido por uma carga \mathbf{Q}_1 situada à distância r da carga de teste, é então dado por:

$$\vec{E}_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1}{r^2} \vec{u}_r \quad (2.4)$$

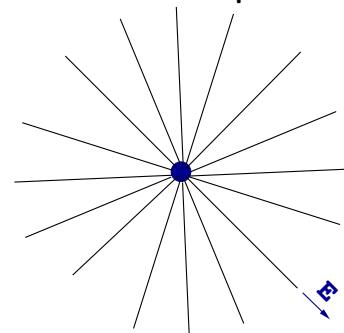
Um conjunto de cargas pontuais $\mathbf{Q}_1, \mathbf{Q}_2, \dots, \mathbf{Q}_i$ colocadas à distância r_1, r_2, \dots, r_i de um ponto \mathbf{P} produzirão o seguinte campo eléctrico, obtido a partir do princípio da sobreposição:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{Q_1}{r_1^2} \vec{u}_{r_1} + \frac{Q_2}{r_2^2} \vec{u}_{r_2} + \dots \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i \frac{Q_i}{r_i^2} \vec{u}_{r_i} \quad (2.5)$$

Campo Eléctrico

A visualização do campo eléctrico pode ser feita recorrendo a uma representação gráfica com linhas de campo, inventada por Faraday. Estas linhas são desenhadas de forma a que em cada ponto o campo eléctrico seja tangente à linha de campo. São também chamadas linhas de força uma vez que uma carga de teste colocada numa linha de campo, sentirá uma força também tangente à linha. A representação gráfica do campo eléctrico permite-nos ter quer uma visão da magnitude do campo, através da densidade de linhas de campo, quer uma visão da sua direcção, através da orientação das linhas. As linhas aproximam-se em regiões de campo mais intenso e afastam-se em regiões onde o campo seja menor.

Linhas de Campo



Capítulo 2

Quando a carga eléctrica se distribui de forma contínua, seja ao longo de um fio (λ [C.m $^{-1}$]), de uma superfície (σ [C.m $^{-2}$]) ou de um volume (ρ [C.m $^{-3}$]), o campo eléctrico pode ser calculado dividindo a carga em pequenos elementos dq . Cada um destes elementos de carga, à distância r de um ponto P , produz um campo eléctrico infinitesimal nesse ponto:

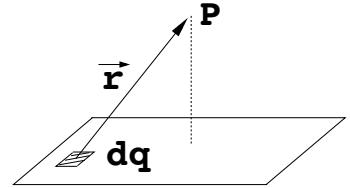
$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r \quad (2.6)$$

Para se obter o campo eléctrico total no ponto P , devem ser adicionados vectorialmente os campos eléctricos infinitesimais ($d\vec{E}$) criados por todos os elementos de carga dq (isto é, integrados): $\vec{E} = \sum_i d\vec{E}_i \rightarrow \int d\vec{E}$.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r^2} \vec{u}_r \quad \text{com : } dq = \lambda dx, \sigma dS, \rho dV \quad (2.7)$$

A simplicidade da resolução de problemas com distribuição contínua de cargas passa por uma escolha criteriosa do sistema de coordenadas a usar nas definições das distâncias e carga.

Distribuição contínua de carga



Como a força electrostática só depende da posição, o campo electrostático é do tipo conservativo. Isto pode ser facilmente verificado calculando o trabalho da força eléctrica que uma carga $+Q$ realiza sobre uma carga de teste $+Q_0$ num caminho fechado:

$$\begin{aligned} W &= \oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \oint_{\Gamma} Q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} d\vec{\ell} = Q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_P^P \frac{dr}{r^2} \\ &= Q_0 \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_P^P = 0 \end{aligned}$$

O princípio da sobreposição permite-nos generalizar esta conclusão para o campo electrostático criado por um conjunto arbitrário de cargas. Assim para um caminho macroscópico fechado podemos escrever,

$$\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = 0 \Rightarrow \oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$$

e localmente (em cada ponto do espaço), utilizando o teorema de Stokes,

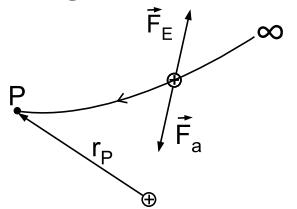
$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$$

É precisamente o facto de o campo electrostático ser conservativo que nos permitirá falar de energia potencial electrostática e de potencial eléctrico.

Campo conservativo

A energia potencial electrostática associada a um sistema de cargas eléctricas corresponde ao trabalho realizado para o constituir. Considera-se habitualmente que as cargas são trazidas do infinito. Nesta situação não há interacção entre as cargas e, portanto, a energia potencial electrostática é nula. No entanto, a escolha do infinito como ponto de referência é arbitrária, isto é, pode-se escolher um outro ponto do espaço e aí considerar a energia potencial nula. Em termos físicos o que é relevante é a variação da energia potencial do sistema.

Energia Potencial



Capítulo 2

Comecemos por considerar uma carga pontual estacionária $+Q_1$ colocada numa região livre de campo eléctrico. Esta pode ser deslocada desde o ponto de referência sem necessidade de aplicar uma força. A sua energia electrostática é portanto nula. Uma segunda carga, $+Q_2$, é trazida até um ponto \mathbf{P} a uma distância r_P da primeira. Neste caso foi necessário vencer a força de repulsão existente entre as cargas e aplicar uma força contrária à força eléctrica $\vec{F}_a = -Q_2 \vec{E}$. A energia do sistema de duas cargas corresponde então à energia gasta para trazer a segunda carga desde infinito:

$$U_E = W = \int_{\infty}^P \vec{F}_a \cdot d\vec{\ell} = -\frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{r_P} \frac{dr}{r^2} = +Q_2 \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0 r_P} \quad (2.8)$$

A expressão da energia potencial associada ao sistema de duas cargas dada pela expressão 2.8 pode ser escrita em termos de um potencial eléctrico criado pela carga Q_1 , \mathbf{V} e da carga Q_2 :

$$U_E = Q_2 V \quad (2.9)$$

Assim, em geral, o potencial eléctrico num dado ponto \mathbf{P} do espaço corresponde ao trabalho (por unidade de carga) que teria que ser realizado para trazer uma carga até aí desde um ponto de referência:

$$V_P = \int_{Ref}^P -\vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_P^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.10)$$

O ponto de referência do potencial é o ponto onde se considera que este se anula ($V(Ref) = 0$). Para cargas pontuais ou localizadas em regiões finitas do espaço, a escolha do infinito como ponto de referência é conveniente; a escolha de um outro ponto implicaria o aparecimento de uma constante na expressão do potencial.

O potencial eléctrico num ponto \mathbf{P} a uma distância r de uma carga pontual Q é dado por:

$$\begin{aligned} V_P &= \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_r^{\infty} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[-\frac{1}{r} \right]_r^{\infty} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Da mesma forma que para o campo eléctrico, se tivermos uma distribuição de cargas discreta ou contínua, aplicaremos o princípio da sobreposição para se obter o potencial eléctrico:

$$V_P = \sum_i V_i \rightarrow \int \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \quad (2.12)$$

Potencial eléctrico

A diferença de potencial entre dois pontos A e B é dada por:

Diferença de Potencial

$$\begin{aligned} V_{AB} &\equiv V_A - V_B \\ &= \int_A^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} - \int_B^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= \int_A^{Ref} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} + \int_{Ref}^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \end{aligned}$$

Capítulo 2

$$V_{AB} = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \quad (2.13)$$

Note-se que a escolha do ponto de referência não é relevante uma vez que não contribui para a diferença de potencial.

Tendo em conta a definição de diferença de potencial entre dois pontos A e B ,

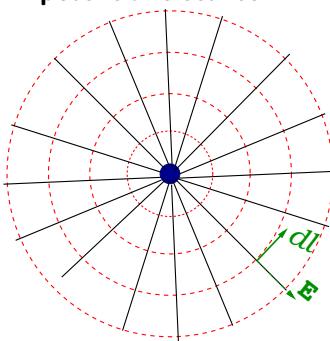
$$\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = V_A - V_B = - \int_A^B dV = - \int_A^B \frac{dV}{d\vec{\ell}} \cdot d\vec{\ell}$$

obtém-se uma relação entre o campo eléctrico e o potencial eléctrico:

$$\vec{E} = - \frac{dV}{d\vec{\ell}} \equiv -\vec{\nabla}V \quad (2.14)$$

As superfícies equipotenciais definem-se então como conjuntos de pontos ao longo dos quais o potencial se mantém constante: $dV = 0$. Conhecendo as linhas de campo eléctrico, as equipotenciais constróem-se facilmente unindo pontos vizinhos ($d\vec{\ell}$) em direcções perpendiculares ao campo eléctrico ($d\vec{\ell} \perp \vec{E}$).

Relação entre o campo e potencial eléctrico



As moléculas são bons exemplos de objectos electricamente neutros mas que no entanto produzem um campo eléctrico e interagem com campos eléctricos externos. O sistema mais simples deste tipo é o **dipolo eléctrico** que consiste em duas cargas iguais de sinal oposto $\pm Q$ e distanciadas de d . Uma aproximação habitualmente feita ao dipolo eléctrico é a de que a distância entre as cargas d é desprezável face à distância onde se pretende calcular o campo eléctrico (aproximação dipolar). Esta configuração de cargas pode ser caracterizada através do seu momento dipolar, definido como:

$$\vec{p} = \sum_i Q_i \vec{d}_i = Q (\vec{d}_+ - \vec{d}_-) = Q \vec{d} \quad (2.15)$$

O cálculo do campo eléctrico produzido por um dipolo num ponto P qualquer a uma distância $r \gg d$, pode ser feito a partir da expressão do potencial eléctrico em P produzido por ambas as cargas:

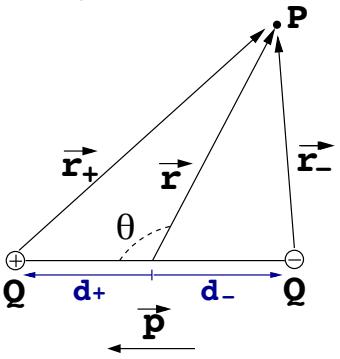
$$V_P = V_+ + V_- = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r_+} \left(\frac{1}{r_+} - \frac{1}{r_-} \right) \simeq \frac{Qd \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (2.16)$$

O campo eléctrico pode ser obtido tendo em conta a relação entre o potencial eléctrico e o campo eléctrico, dada por 2.14:

$$\begin{cases} E_r &= \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2p \cos \theta}{r^3} \\ E_\theta &= \frac{\partial V(r, \theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \sin \theta}{r^3} \end{cases} \quad (2.17)$$

Trata-se pois de um campo que, não se podendo considerar já nulo (quem estiver realmente distante vê uma carga eléctrica nula!), decresce no entanto mais rapidamente que o campo eléctrico criado por cada uma das cargas pontuais.

Dipolo eléctrico



Capítulo 2

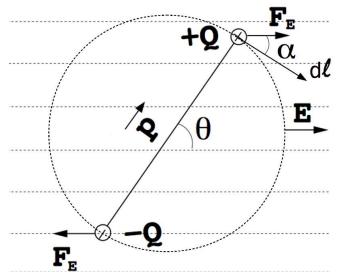
Quando um dipolo eléctrico é colocado na presença de um campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0 \hat{u}_x$, sente uma força total nula. Existe, no entanto, um momento da força eléctrica $\vec{N} = \sum_{i=\pm} \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ que o tenderá a alinhar com o campo eléctrico. A energia potencial do dipolo, calculada como sendo o trabalho realizado por uma força externa (contra o campo, portanto!) para levar o dipolo da posição angular $\theta = 90^\circ$ até uma posição angular qualquer (θ), é:

$$\begin{aligned} U_E &= \int_{90^\circ}^{\theta} (-\vec{F}_E) \cdot d\ell = 2 \int_{90^\circ}^{\theta} QE_0 \cos\alpha \frac{\ell}{2} d\theta \\ &= \int_{90^\circ}^{\theta} Q E_0 \sin\theta \ell d\theta = -Q \ell E_0 \cos\theta = -\vec{p} \cdot \vec{E} \end{aligned}$$

onde $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta$.

O ponto de partida $\theta = 90^\circ$ é escolhido uma vez que para esse ângulo a energia potencial do dipolo é nula: as cargas, simétricas, encontram-se ao mesmo potencial eléctrico (ver equação 2.12). O sinal negativo significa que o dipolo ao alinhar-se com o campo, diminui a sua energia potencial; esta energia é mínima quando o momento dipolar eléctrico se encontra paralelo ao campo eléctrico externo.

Energia potencial de um dipolo eléctrico num campo eléctrico exterior



A lei de Gauss é uma consequência da lei de Coulomb e resulta do facto do campo eléctrico criado por um elemento de carga dq diminuir com $1/r^2$, enquanto que o elemento de área (em coordenadas esféricas) aumenta com r^2 . Desta forma, o produto da carga pela área é independente da distância do elemento de área à carga eléctrica. Esta lei relaciona o fluxo do campo eléctrico (Φ_E) que atravessa uma superfície fechada com a carga eléctrica **total** existente no seu interior (Q_{int}):

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \quad (2.18)$$

Esta lei pode ser escrita na forma local como:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (2.19)$$

A lei de Gauss permite:

- determinar a carga eléctrica contida numa superfície fechada, se conhecermos o fluxo do campo eléctrico que a atravessa.
- determinar o módulo do campo eléctrico para distribuições de carga com simetria espacial, usando para tal uma superfície fechada conveniente.

No cálculo do campo eléctrico, a aplicabilidade da lei de Gauss encontra-se reduzida a três geometrias tipo, tal como se mostra adiante nos exemplos de aplicação:

- simetria esférica
- simetria cilíndrica
- plano infinito

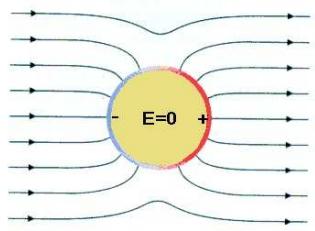
Lei de Gauss

Capítulo 2

No interior de um condutor em equilíbrio electrostático, o campo eléctrico tem de ser nulo ($\vec{E} = 0$), caso contrário ter-se-ia uma força eléctrica aplicada às suas cargas livres e estas mover-se-iam. Como se pode verificar facilmente com recurso à lei de Gauss, um fluxo nulo do campo eléctrico através de qualquer superfície fechada definida no interior do condutor implica a não existência de carga eléctrica no seu interior. Desta forma, uma carga eléctrica introduzida num meio condutor em equilíbrio electrostático desloca-se para a sua superfície exterior. Os tempos de relaxação da carga dependem da condutividade eléctrica do meio, sendo da ordem de 10^{-18} segundos num material bom condutor. O campo eléctrico é **normal** à superfície do condutor, dependendo a sua intensidade da densidade de carga superficial (σ) e pode ser derivado a partir da lei de Gauss como:

$$\vec{E} \equiv \vec{E}_\perp = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{n}_\perp \quad (2.20)$$

Equilíbrio electrostático nos condutores



Nenhum material é um isolante perfeito. Os materiais que se caracterizam por muito baixas condutividades eléctricas são chamados **materiais dieléctricos**. Um campo eléctrico aplicado a um dielétrico causa um deslocamento espacial da carga eléctrica positiva e negativa associada aos átomos ou moléculas (em sentidos opostos!), fazendo aparecer dipolos eléctricos. O vector polarização \vec{P} descreve a polarização do material num dado ponto do espaço e corresponde ao momento dipolar por unidade de volume ($d\vec{p}/dV$).

Um material dielétrico é caracterizado pela sua susceptibilidade eléctrica χ_E (grandeza adimensional) e é do tipo **linear** se a susceptibilidade não depender do campo aplicado, do tipo **homogéneo** se a susceptibilidade não depender da posição no dielétrico e do tipo **isotrópico** caso a susceptibilidade não dependa da direção. A polarização no dielétrico é proporcional ao campo eléctrico a que este está sujeito (\vec{E}) e que resulta da soma do campo exterior com o campo produzido pela distribuição de carga dipolar:

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dV} = \frac{\sum_i \vec{p}_i |_{dV}}{dV} = \epsilon_0 \chi_E \vec{E} \quad [C.m^{-2}] \quad (2.21)$$

Em geral, existe carga de polarização à superfície de um dielétrico. A **densidade de carga de polarização superficial** existente num dado ponto da superfície é dada por:

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext} \quad (2.22)$$

sendo \vec{n}_{ext} a normal exterior um vector unitário que aponta para o exterior do dielétrico.

Pode também existir carga de polarização em volume no caso de o dielétrico não ser uniforme ou no caso de existir carga eléctrica introduzida (que não é de polarização) no interior do dielétrico. A **densidade de carga de polarização em volume** existente numa dada região do dielétrico é dada por:

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} \quad (2.23)$$

e a carga de polarização contida numa superfície fechada é dada por,

$$Q_{pol} = \int_V \rho_{pol} dV = - \oint_S \vec{P} \cdot \vec{n} dS \quad (2.24)$$

Campo eléctrico em materiais dieléctricos

Capítulo 2

Portanto, um campo eléctrico \vec{E}_0 aplicado a um dielétrico origina uma polarização do dielétrico, isto é, induz uma dada carga de polarização seja em superfície, seja em volumezação induzida no material.

Recorrendo à lei Gauss, podemos calcular o campo eléctrico separando as cargas eléctricas em termos de cargas livres (Q_{liv}) e cargas de polarização (Q_{pol}):

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{\sum_i Q_i}{\epsilon_0} = \frac{Q_{liv} + Q_{pol}}{\epsilon_0} \quad (2.25)$$

O cálculo do campo eléctrico através da expressão 2.25 implica o conhecimento prévio quer das cargas livres, quer das cargas de polarização. No entanto, se substituirmos na equação 2.25 a carga polarização expressa em 2.24, obtem-se:

$$\oint_S (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) \cdot \vec{n} \, dS = Q_{liv} \quad (2.26)$$

Definindo o **vector Deslocamento do Campo Eléctrico** \vec{D} como:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 (1 + \chi_E) \vec{E} = \epsilon \vec{E} \quad (2.27)$$

obtém-se a **lei de Gauss generalizada** na forma integral:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS = Q_{liv} \quad (2.28)$$

e na forma local:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho_{liv} \quad (2.29)$$

A permitividade eléctrica do meio, ϵ , caracteriza a polarizabilidade do material.

A energia associada a um sistema de múltiplas cargas é, como se referiu anteriormente, o trabalho necessário para o constituir. Por exemplo, a energia de um sistema de três cargas pode ser calculada como se fez para o sistema de duas cargas (equação 2.8) tendo agora em conta que a terceira é trazida contrariando a repulsão exercida pelas outras duas:

$$\begin{aligned} U_E &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(Q_2 \frac{Q_1}{r_{12}} + Q_3 \frac{Q_1}{r_{13}} + Q_3 \frac{Q_2}{r_{12}} \right) \\ &= Q_2 V_{1 \rightarrow 2} + Q_3 (V_{1 \rightarrow 3} + V_{2 \rightarrow 3}) \end{aligned}$$

Este resultado pode ser reescrito em termos das cargas (Q_i) e dos potenciais a que cada uma se encontra (V_i) devido à presença das outras duas:

$$U_E = \frac{1}{2} (Q_1 V_1 + Q_2 V_2 + Q_3 V_3)$$

Generalizando para um sistema de N cargas:

$$U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i \quad (2.30)$$

Lei de Gauss generalizada

Energia Potencial electrotática de um sistema de cargas

Capítulo 2

Um condutor carregado gera um campo eléctrico à sua volta ficando a um certo potencial V em relação ao infinito. Define-se a capacidade do condutor como a relação entre a sua carga eléctrica Q e o potencial a que se encontra:

$$C = \frac{Q}{V} \quad [F] \quad (2.31)$$

Esta expressão traduz a relação de linearidade entre o campo eléctrico e a carga que lhe dá origem.

Num condensador, sistema de dois condutores ou armaduras que se encontram a uma diferença de potencial V , a capacidade é definida por:

$$C = \frac{Q}{V} \quad (2.32)$$

sendo Q a carga armazenada em cada um dos condutores ($+Q$ e $-Q$). A capacidade de um condensador só depende da sua geometria e do meio que os separa.

Condensadores



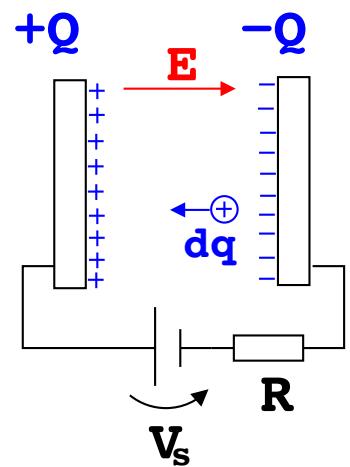
A energia (potencial electrostática) de um condensador corresponde ao trabalho necessário para o carregar. Para a calcular, tem que se contabilizar o trabalho realizado sobre cada elemento de carga dq para o transportar de uma armadura para a outra, contra a força eléctrica existente (cada vez maior, à medida que se carrega o condensador!).

$$U_E = \int \vec{F} \cdot d\vec{l} = \int dq \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{l}}_V = \int_0^Q V(q) dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq \quad (2.33)$$

Daqui resulta:

$$U_E = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 \quad (2.34)$$

Energia armazenada por um condensador



A capacidade equivalente de uma associação em série de n condensadores é dada por:

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_n} \quad (2.35)$$

e uma associação em paralelo de condensadores é dada por:

$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_n \quad (2.36)$$

Associação de condensadores

Capítulo 2

Sendo a carga eléctrica a criadora do campo electrostático e sendo necessária a realização de trabalho para constituir as distribuições de carga, ou seja, para criar os campos eléctricos, é natural que a própria expressão do campo eléctrico nos dê informações sobre a energia de um sistema. Com efeito, associado a um campo eléctrico \vec{E} existe associada uma densidade de energia dada por

$$u_E = \frac{1}{2} \epsilon E^2 [J/m^3] \quad (2.37)$$

e num volume V existe uma energia

$$U_E = \int_V u_E dV [J] \quad (2.38)$$

Energia do campo eléctrico

Consideremos um sistema de cargas isoladas e o campo eléctrico por estas produzido. Para se modificar a geometria do sistema movendo $d\vec{\ell}$ uma certa quantidade de carga, é necessário realizar trabalho contra a força eléctrica \vec{F}_E que actua essa carga:

$$dW = \vec{F}_a \cdot d\vec{\ell} = -\vec{F}_E \cdot d\vec{\ell}$$

Sendo o campo eléctrico conservativo e não havendo variação de energia cinética, esse trabalho traduz-se necessariamente na variação da energia potencial do sistema:

$$dU = -\vec{F}_E \cdot d\vec{\ell} \Rightarrow \vec{F}_E = -\frac{dU}{d\vec{\ell}}$$

De forma mais simplificada, a força eléctrica numa dada direcção \vec{u}_s pode ser calculada por:

$$(\vec{F}_E)_s = -\frac{dU(s)}{ds} \vec{u}_s \quad (2.39)$$

Consideremos agora que o sistema não está isolado e que existem fontes que mantêm as diferenças de potencial entre os componentes do sistema. Neste caso, ao modificar-se a geometria do sistema, as fontes realizam trabalho pondo e retirando carga de forma a manter os potenciais eléctricos. Contabilizando este trabalho adicional das fontes obtém-se:

$$(\vec{F}_E)_s = +\frac{dU(s)}{ds} \vec{u}_s \quad (2.40)$$

Estas expressões são um modo alternativo para calcular forças eléctricas quando se conhece a energia potencial do sistema. A uma alteração da geometria do sistema segundo a direcção em que se pretende calcular a força eléctrica corresponde uma variação da energia potencial. Sendo este um método de deslocamentos virtuais, qualquer uma das expressões anteriores 2.39, 2.40 conduzirá ao mesmo resultado.

Força e Energia Potencial

Capítulo 2

2.2 Exercícios Resolvidos

2.2.1 Distribuição discreta de carga eléctrica

Duas cargas eléctricas positivas Q_1 e Q_2 encontram-se a uma distância d uma da outra. Na sua vizinhança existe uma carga eléctrica de teste q_0 num ponto P , de coordenadas $(x, 0)$.

- **Campo eléctrico produzido pela carga Q_1 no ponto P**

Pela lei de Coulomb, o campo eléctrico vem:

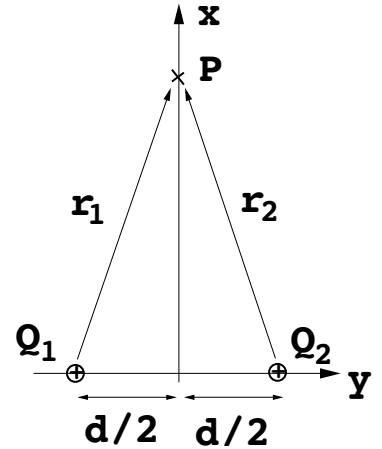
$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}_1}{r_1^3}$$

com o vector posição \vec{r}_1 , que une a carga Q_1 ao ponto P , a ser dado por:

$$\vec{r}_1 = x\vec{u}_x + \frac{d}{2}\vec{u}_y$$

Desta forma, vem para o campo eléctrico:

$$\vec{E}_1 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{u}_x + \frac{d}{2}\vec{u}_y}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}}$$



- **Campo eléctrico total em P**

O campo eléctrico total existente em P resulta da soma dos campos eléctricos produzidos pelas cargas Q_1 e Q_2 em P . Tem-se então:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{Q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{u}_x + \frac{d}{2}\vec{u}_y}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} + \frac{Q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{x\vec{u}_x - \frac{d}{2}\vec{u}_y}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left[(Q_1 + Q_2) \frac{x}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x + \right. \\ &\quad \left. + (Q_1 - Q_2) \frac{\frac{d}{2}}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_y \right] \end{aligned}$$

Vemos portanto que o campo eléctrico tem componentes E_x e E_y . No entanto, no caso em que $Q_1 = Q_2$, o campo eléctrico reduz-se uma expressão mais simples, possuindo somente componente E_x :

$$\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x$$

- **Força sobre a carga de teste quando $Q_1 = Q_2$**

$$\vec{F} = q_0 \vec{E} = q_0 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x$$

- **Linhas do campo eléctrico quando $Q_1 = Q_2$**

As linhas do campo eléctrico associadas a cada uma das cargas positivas, caso estas estivessem isoladas, corresponderiam a linhas radiais representadas na figura a traço interrompido. O campo eléctrico resultado das duas cargas, será diferente, tal como se calculou anteriormente. As linhas de campo eléctrico devem reflectir o facto de o campo eléctrico ser muito pequeno ou nulo, na região entre as duas cargas.

- **Trabalho realizado contra o campo eléctrico para trazer a carga q_0 para o ponto P**

As interacções existentes no campo eléctrico estão associadas a variações de energia. O trabalho realizado contra o campo eléctrico produzido pelas duas cargas positivas $+Q$, para transportar a carga de teste q_0 desde infinito até uma distância x do eixo das cargas por um caminho ao longo do eixo dos XX' , calcula-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\infty}^x (-\vec{F}) \cdot d\vec{\ell} = -q_0 \int_{\infty}^x \vec{E} \cdot d\vec{\ell} \\ &= -q_0 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^x \frac{x}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} \vec{u}_x \cdot d\vec{\ell} \\ &= -q_0 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^x \frac{x}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= -q_0 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{d}{2})^2}} \right]_{\infty}^x \\ &= q_0 \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{d}{2})^2}} \end{aligned}$$

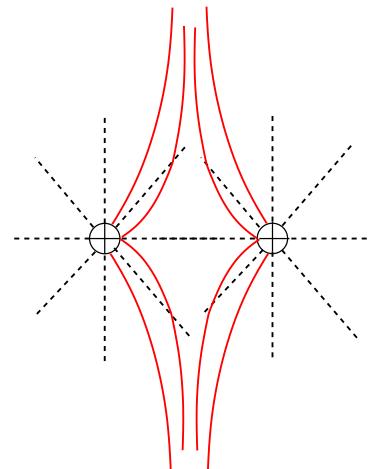
Vemos então que foi necessário realizar trabalho no transporte da carga q_0 para contrariar a força eléctrica aplicada. Desta forma, a carga de teste adquiriu energia potencial, que pode ser recuperada (sob a forma de energia cinética, por exemplo) caso fosse largada. De notar que o trabalho realizado não depende do caminho seguido; isto é característico de uma força conservativa, como é o caso da força eléctrica.

- **Potencial eléctrico**

Escolhendo o infinito como ponto de referência, o potencial eléctrico em P é dado por:

$$\begin{aligned} V_P &= \int_P^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_x^{\infty} \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{x}{[x^2 + (\frac{d}{2})^2]^{\frac{3}{2}}} dx \\ &= \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{d}{2})^2}} \right]_x^{\infty} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{d}{2})^2}} \end{aligned}$$

De notar que o potencial eléctrico em P se poderia ter calculado utilizando o princípio da sobreposição; isto é, somando os potenciais criados em P quer pela carga $+Q_1$, quer pela carga $+Q_2$:



$$V = \int_P^\infty \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_P^\infty \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}$$

- **Energia potencial da carga q_0**

Dado que o trabalho calculado anteriormente corresponde ao ganho de energia potencial da carga e que no infinito (ponto de referência) a energia potencial é nula, vem para a energia potencial da carga q_0 :

$$U_E = W = q_0 \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\sqrt{x^2 + (\frac{d}{2})^2}}$$

De notar que a energia potencial poderia ter sido calculada com recurso directo ao potencial eléctrico calculado anteriormente: $U_E = q_0 V$.

2.2.2 Distribuição contínua de carga eléctrica num fio

Considere uma distribuição contínua de carga positiva existente ao longo de um fio cuja densidade de carga é λ (C/m). Num ponto P , a uma distância d , encontra-se uma carga de teste q_0 .

- **Campo eléctrico produzido pelo fio de carga no ponto P**

A determinação do campo eléctrico produzido por uma distribuição contínua de carga num ponto P é feita tendo um conta o princípio da sobreposição; isto é, determina-se em primeiro lugar o campo eléctrico infinitesimal ($d\vec{E}$) produzido por um elemento infinitesimal de carga (dq) e depois somam-se (no limite da soma com um número infinito de termos, integram-se!) as contribuições dos diferentes elementos de carga ao longo do fio. De notar que não é relevante saber se a carga está distribuída em todo o volume do fio ou somente à sua superfície, uma vez vamos desprezar o raio do fio.

Tendo em atenção a figura ao lado, podemos expressar os elementos infinitesimais de carga e campo eléctrico, tendo em conta o vector posição do ponto P em relação ao elemento de carga,

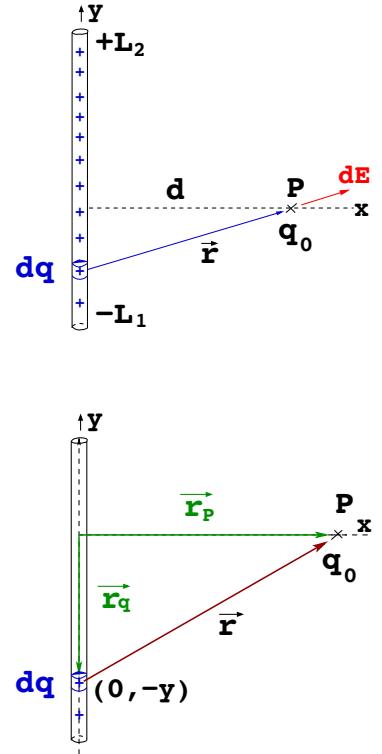
$$\vec{r}_P = \vec{r}_q + \vec{r} \Rightarrow \vec{r} = \vec{r}_P - \vec{r}_q = d\vec{e}_x - y\vec{e}_y = d\vec{e}_x - y\vec{e}_y$$

$$\begin{aligned} dq &= \lambda dy \\ d\vec{E} &= \frac{dq}{4\pi\epsilon_0 r^3} \vec{r} = \frac{\lambda dy}{4\pi\epsilon_0 (d^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

E portanto, o campo eléctrico obtém-se por integração ao longo do fio de limites $-L_1$ e $+L_2$:

$$\begin{aligned} \vec{E}_P &= \int d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_1}^{+L_2} \frac{d\vec{e}_x - y\vec{e}_y}{(d^2 + y^2)^{3/2}} dy \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[d \int_{-L_1}^{+L_2} \frac{dy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_x - \int_{-L_1}^{+L_2} \frac{y dy}{(d^2 + y^2)^{3/2}} \vec{e}_y \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left\{ d \left[\frac{1}{d^2} \frac{y}{\sqrt{d^2 + y^2}} \right]_{-L_1}^{+L_2} \vec{e}_x - \left[-\frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2}} \right]_{-L_1}^{+L_2} \vec{e}_y \right\} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{1}{d} \left(\frac{L_2}{\sqrt{d^2 + L_2^2}} + \frac{L_1}{\sqrt{d^2 + L_1^2}} \right) \vec{e}_x + \left(\frac{1}{\sqrt{d^2 + L_2^2}} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + L_1^2}} \right) \vec{e}_y \right] \end{aligned}$$

Como se vê, no caso de a carga se distribuir assimetricamente no fio em relação ao ponto P , o campo eléctrico possui componentes segundo x (E_x) e segundo y (E_y). No entanto, caso a carga se distribua simetricamente em relação ao ponto P , o que significa o fio ter limites $\pm L$, o campo eléctrico possui somente componente segundo x e vem:



$$\vec{E} = \frac{\lambda 2L}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d\sqrt{d^2 + L^2}} \vec{e}_x = \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{d^2 + L^2}} \vec{e}_x$$

Podemos agora analisar o que acontece nos casos extremos em que o fio é muito comprido ($L \gg d$) e muito pequeno ($L \ll d$), quando comparado com a distância ao ponto P :

– **Fio muito longo ($L \gg d$)**

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \frac{L}{\sqrt{d^2 + L^2}} \vec{u}_x = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \sqrt{\frac{L^2}{d^2 + L^2}} \vec{u}_x \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \sqrt{\frac{1}{1 + (\frac{d}{L})^2}} \vec{u}_x \rightarrow \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \vec{u}_x \end{aligned}$$

– **Fio muito pequeno ($L \ll d$)**

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \frac{L}{\sqrt{d^2 + L^2}} \vec{u}_x \\ &= \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d} \frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{L}{d})^2}} \vec{u}_x \rightarrow \frac{\lambda L}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \vec{u}_x \end{aligned}$$

Neste caso, o campo eléctrico obtido corresponde ao campo produzido por uma carga pontual de valor $q = 2\lambda L$. Isto era de esperar uma vez que um fio muito pequeno é em boa aproximação uma carga pontual.

- **Força eléctrica sobre a carga de teste q_0**

A força que actua a carga de teste q_0 é dada por: $\vec{F} = q_0 \vec{E}$.

- **Potencial eléctrico criado pelo fio**

O potencial eléctrico produzido pelo fio carregado pode ser determinado recorrendo à relação entre o campo e o potencial, $\vec{\nabla}V = -\vec{E}$; isto é, poder-se-ia obter o potencial por integração do campo eléctrico. No entanto, vamos fazer o cálculo do potencial, usando o princípio da sobreposição.

Comecemos por determinar o potencial produzido por um elemento infinitesimal de carga dq , utilizando o infinito como ponto de referência, e integre-se ao longo de todo o fio:

$$\begin{aligned} dV &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r} \\ V &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-L_1}^{+L_2} \frac{\lambda dy}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(y + \sqrt{x^2 + y^2}) \right]_{-L_1}^{+L_2} \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left[\ln(L_2 + \sqrt{x^2 + L_2^2}) - \ln(-L_1 + \sqrt{x^2 + L_1^2}) \right] \\ &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L_2 + \sqrt{x^2 + L_2^2}}{-L_1 + \sqrt{x^2 + L_1^2}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(L_2 + \sqrt{x^2 + L_2^2}) (+L_1 + \sqrt{x^2 + L_1^2})}{(-L_1 + \sqrt{x^2 + L_1^2}) (+L_1 + \sqrt{x^2 + L_1^2})} \right] \\
 &= \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(L_2 + \sqrt{x^2 + L_2^2}) (+L_1 + \sqrt{x^2 + L_1^2})}{x^2} \right]
 \end{aligned}$$

No caso de termos um fio com uma distribuição de carga simétrica em relação ao ponto, vem:

$$V = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \ln \left[\frac{(L + \sqrt{x^2 + L^2})^2}{x^2} \right] = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln \left(\frac{L + \sqrt{x^2 + L^2}}{x} \right)$$

- **Energia potencial da carga de teste**

A energia potencial da carga de teste q_0 num ponto P a uma distância x do fio, corresponde à energia gasta (ou recebida) para a lá colocar, partindo de um ponto de referência onde a energia potencial seja nula (habitualmente o infinito, mas nem sempre!). No nosso caso, esta pode ser calculada conhecendo o potencial eléctrico no ponto P :

$$U = q_0 V_P$$

- **Campo eléctrico calculado pela Lei de Gauss**

Para o caso do fio muito comprido (também dito vulgarmente infinito), a determinação do campo eléctrico no ponto P pode ser feita recorrendo à lei de Gauss. Para tal, recorre-se a uma superfície cilíndrica que passe por P e tira-se partido do facto do campo eléctrico (que para o fio *infinito*, só depende da distância radial) ser constante em toda a superfície da superfície lateral do cilindro. Calculemos primeiro o fluxo do campo eléctrico. Este resulta da integração do campo eléctrico ao longo das diferentes superfícies (duas tampas mais superfície lateral) que compõem o cilindro.

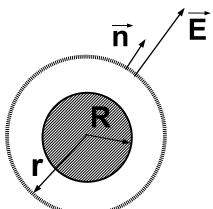
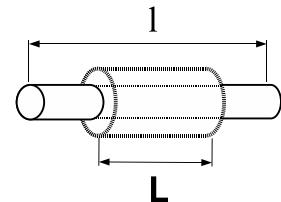
$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{\text{tampas}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

Uma vez que as linhas de campo eléctrico não atravessam as tampas do cilindro, o fluxo do campo aí é nulo, vindo portanto:

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS$$

A lei de Gauss pode então escrever-se como:

$$\begin{aligned}
 \int_{\text{lateral}} \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \\
 E \int dS &= E 2\pi r L = \frac{\lambda L}{\epsilon_0} \\
 E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} &\Rightarrow \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{r} \vec{u}_r
 \end{aligned}$$



2.2.3 Distribuição contínua de carga eléctrica num plano infinito

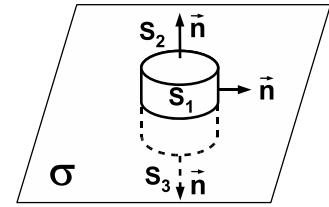
Considere-se um plano muito grande (*plano infinito*) carregado com uma densidade de carga σ [$C \cdot m^{-2}$].

- **Campo eléctrico pela lei de Gauss**

O campo eléctrico pode ser facilmente calculado utilizando a lei de Gauss (o plano infinito é uma das três geometrias em que a aplicação da lei de Gauss é o método mais simples para calcular o campo eléctrico).

Como primeiro passo é necessário verificar que as linhas de campo são perpendiculares ao plano. Para chegar a esta conclusão basta pensar que todos os pontos do plano infinito são o seu centro. E no centro as componentes do campo eléctrico no plano do próprio plano infinito anulam-se devido à simetria do problema. Resta-nos assim a componente perpendicular ao plano (em todos os pontos!).

Conhecida a direcção do campo há que escolher a superfície adequada para aplicar a lei de Gauss. Neste caso pode utilizar-se uma superfície cilíndrica, tal como se mostra na figura. Na superfície lateral do cilindro (superfície S_1) a normal é perpendicular ao campo enquanto que nas "tampas" (superfícies S_2 e S_3 , de área A) a normal é paralela ao campo. Assim sendo, e constatando que esta superfície fechada contém no seu interior uma carga $Q_{int} = \sigma A$, tem-se:



$$\begin{aligned}\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \\ \int_{S_1} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{E} \cdot \vec{n} dS + \int_{S_3} \vec{E} \cdot \vec{n} dS &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ \int_{S_1} 0 dS + \int_{S_2} E dS + \int_{S_3} E dS &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E \int_{S_2} dS + E \int_{S_3} dS &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ 2E A &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E \int_{S_2} dS + E \int_{S_3} dS &= \frac{\sigma A}{\epsilon_0} \\ E &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\end{aligned}$$

Agora que calculámos o módulo do campo eléctrico podemos escrever a sua expressão final:

$$\vec{E} = \begin{cases} +\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z > 0 \\ -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \vec{u}_z & z < 0 \end{cases}$$

2.2.4 Condutores em equilíbrio electrostático

Um condutor cilíndrico de raio R , comprimento ℓ ($\ell \gg R$) e que se encontra imerso no ar, está uniformemente carregado e possui uma carga total Q .

- **Densidade de carga no condutor**

Tratando-se de um condutor em regime electrostático, a sua carga está distribuída na sua superfície, pois só deste modo o campo eléctrico se anula no seu interior. A densidade de carga será:

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{Q}{2\pi R \ell}$$

ou, se preferirmos utilizar uma densidade de carga linear já que o condutor tem a forma de um fio,

$$\lambda = \frac{Q}{\ell}$$

- **Campo eléctrico**

Dentro do condutor o campo é nulo, como já se referiu. Fora do condutor, tratando-se de uma distribuição de carga com geometria cilíndrica, as linhas de campo são radiais em coordenadas cilíndricas. Deste modo, utiliza-se uma superfície também cilíndrica para a aplicação da lei de Gauss. Nessa superfície, a normal tal como o próprio campo, é radial, excepto nos topo da superfície cilíndrica onde a normal é perpendicular ao campo e o integral se anula ($\vec{E} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{E} \cdot \vec{n} = 0$). Além disso, como o problema tem simetria cilíndrica, o módulo do campo é constante para a superfície em que o integral não se anula.

$$r < R$$

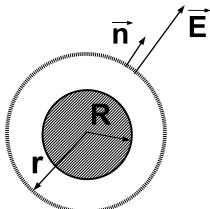
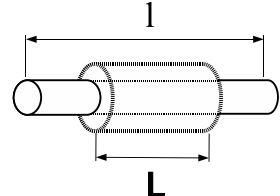
$$\vec{E} = \vec{0}$$

$$r > R$$

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

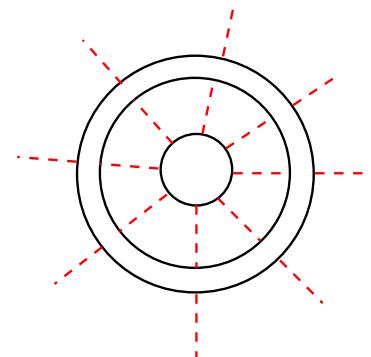
$$E 2\pi r L = L \frac{\lambda}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{\lambda}{r} \vec{u}_r$$



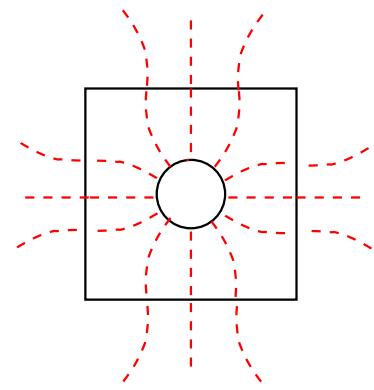
- **Influência de um condutor externo de forma cilíndrica**

O condutor cilíndrico externo não se encontra carregado. No entanto, na presença do campo eléctrico do cilindro condutor interno, existe carga negativa na sua superfície interna e carga simétrica positiva na superfície externa. De notar, que a carga existente em ambas as superfícies (interna e externa) é em módulo igual à carga existente no cilindro condutor interior $+Q$; isto resulta do facto do campo eléctrico ser nulo no interior dos condutores. Como o condutor exterior não destruiu a simetria cilíndrica do problema e não está carregado, o campo permanece igual, quer no espaço entre os condutores quer na região exterior aos condutores.



- **Influência de um condutor externo de forma paralelipípedica**

Neste caso o condutor exterior *destruiu* a simetria cilíndrica do problema, apesar de não estar carregado. O campo altera-se de forma a garantir que as linhas de campo são perpendiculares à superfície do condutor exterior e anula-se no seu interior. Longe (com rigor matemático, no infinito) dos condutores o campo recupera a sua forma radial uma vez que o conjunto volta a *parecer* um fio com densidade de carga λ .



2.2.5 Campo eléctrico num dielétrico

Uma esfera de material isolante, de constante dielétrica ϵ e raio R , está uniformemente carregada em volume, com uma densidade de carga ρ , encontrando-se imersa no vácuo.

- **Campo eléctrico**

Para determinar o campo eléctrico no interior do material dielétrico vamos usar a lei de Gauss generalizada. Uma vez que o campo eléctrico produzido pela esfera é radial e o seu módulo só depende da distância ao seu centro, pode-se utilizar uma superfície de Gauss esférica de raio r . Nesta superfície o vector \vec{D} será sempre paralelo à normal e terá módulo constante.

$$r < R$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int \rho dV$$

$$D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3$$

$$D = \frac{\rho r}{3}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0} \vec{u}_r$$

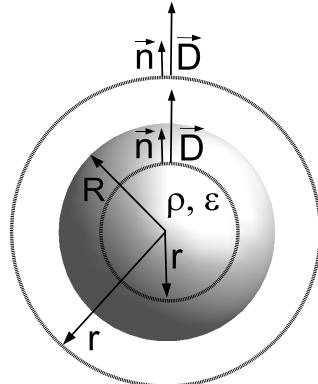
$$r > R$$

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = \int \rho dV$$

$$D4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3$$

$$D = \frac{\rho R^3}{3r^2}$$

$$\vec{E} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$



- **Potencial eléctrico**

Consideremos como ponto de referência o infinito já que neste caso o potencial se vai *naturalmente* anular naquele ponto.

para $r > R$:

$$V = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r}$$

para $r = R$:

$$V = \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

para $r < R$:

$$\begin{aligned} V &= \int_r^R \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_R^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ &= \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} dr = \frac{\rho}{3} \left[\frac{R^2 - r^2}{2\varepsilon} + \frac{R^2}{\varepsilon_0} \right] \end{aligned}$$

- **Cargas de polarização em volume:**

$$\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \chi_e \vec{E})$$

Capítulo 2

$$= -\varepsilon_0 \chi_e \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\rho r}{3\varepsilon} \right) \right) = - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \rho$$

Note que em alternativa poderia ter chegado a este resultado de uma forma mais simples, tendo em conta que $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$:

$$\begin{aligned} \rho_{pol} &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P} = -\vec{\nabla} \cdot (\varepsilon_0 \chi_e \vec{E}) \\ &= -\vec{\nabla} \cdot \left(\varepsilon_0 \chi_e \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \right) = -\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \chi_e \vec{\nabla} \cdot \vec{D} = - \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \rho \end{aligned}$$

em superfície:

$$\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \vec{n}_{ext} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} \cdot \vec{n}_{ext} = \varepsilon_0 \chi_e \frac{\rho R}{3\varepsilon} = \left(1 - \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} \right) \frac{\rho R}{3}$$

Nota: $\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{pol} + 4\pi R^2 \sigma_{pol} = 0$

2.2.6 Condensador plano

Dois planos paralelos condutores com uma área A muito maior do que a distância d que os separam, estão ligados a uma bateria de diferença de potencial V .

- **O campo eléctrico entre as placas**

A ligação à bateria induz transferência de carga de um plano para outro, ficando os planos com uma distribuição uniforme de carga (σ). Na aproximação do plano infinito, o campo eléctrico criado pelo plano não depende da distância ao plano. Desta forma é tendo em conta que uma das placas se carrega com carga positiva ($+Q$) e a outra com carga negativa ($-Q$), na região entre os planos o campo eléctrico será uniforme. Fora desta região, o campo eléctrico anula-se.

$$V = \int_0^d \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = \int_0^d \vec{E} d\ell = E d$$

$$E = \frac{V}{d}$$

- **A carga armazenada pelas placas**

O campo eléctrico existente entre as placas condutoras é função da carga existente. Uma vez que o campo eléctrico entre as placas é conhecido, pode-se utilizar a lei de Gauss para determinar a densidade de carga nas placas. Para superfície de Gauss considera-se uma superfície cilíndrica com uma das “tampas” situada no interior da armadura (onde o campo eléctrico é nulo) e a outra na região entre as armaduras (ver figura). O fluxo do campo eléctrico que atravessa a superfície de Gauss é somente aquele que atravessa a “tampa” situada na região entre as armaduras.

$$\oint_S \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$$

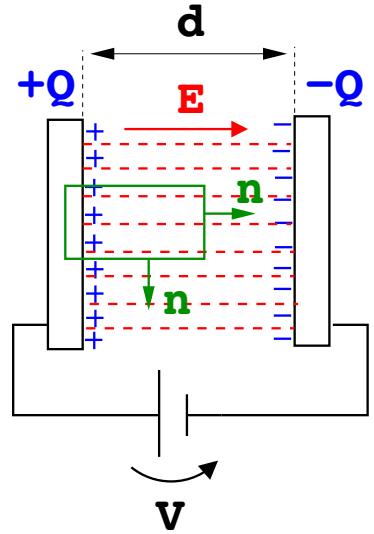
$$ES = \frac{\sigma S}{\epsilon_0}$$

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

Como $Q = \sigma A$, tem-se:

$$E = \frac{Q}{\epsilon_0 A} = V d$$

$$Q = A \epsilon_0 \frac{V}{d}$$



- **A capacidade do condensador**

A capacidade do condensador vem:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{A \epsilon_0}{V} \frac{V}{d} = \epsilon_0 \frac{A}{d}$$

- **A energia armazenada pelo condensador**

A energia armazenada pelo condensador corresponde ao trabalho realizado para o carregar com uma carga Q . De acordo com a equação 2.34, tem-se:

Capítulo 2

$$U_E = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d} V^2$$

2.2.7 Associação de condensadores em série

Dois condensadores (1 e 2) de faces paralelas associados em série encomtram-se ligados a uma diferença de potencial V . Ambos os condensadores possuem armaduras de área A , espessura a e distanciadas entre si de d . O espaço entre as armaduras está preenchido por ar num dos condensadores e por material dielétrico de permitividade eléctrica ϵ , no outro.

- **Campo eléctrico**

Submetidas à diferença de potencial V , as placas extremas carregam-se com uma carga Q ($+Q$ de um lado e $-Q$ do outro). A placa intermédia possui uma carga total nula, existindo no entanto uma carga negativa $-Q$ de um lado e uma carga positiva $+Q$ no outro. A carga existente na placa intermédia situa-se à superfície (condutor em equilíbrio!) e pode ser determinada a partir da lei de Gauss. Para tal fazemos passar uma superfície cilíndrica com as “tampas” colocadas no interior de duas das armaduras. Dado que o campo eléctrico é nulo no interior das armaduras condutoras e que o campo eléctrico existente entre as armaduras é paralelo à superfície lateral do cilindro, tem-se um fluxo do campo eléctrico nulo. Ou seja, a lei de Gauss permite concluir que a carga total contida no cilindro é nula. Isto significa que cargas opostas ($+Q$ e $-Q$) se encontram nas superfícies interiores das armaduras.

O determinação do campo eléctrico no interior dos condensadores (entre as armaduras) pode fazer-se com o auxílio da lei de Gauss generalizada, utilizando a metodologia empregue no exemplo 2.2.6:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} dS = Q_{liv}$$

$$D = \frac{Q}{A}$$

O vector Deslocamento eléctrico (\vec{D}) é igual em ambos os condensadores, pois só depende das cargas livres existentes nas armaduras:

$$D_1 = D_2$$

O campo eléctrico em cada um dos condensadores obtém-se como:

$$E_1 = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

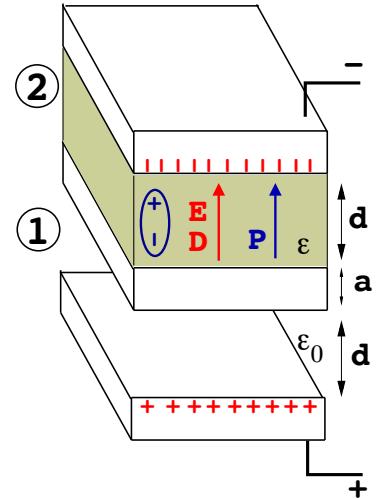
$$E_2 = \frac{Q}{\epsilon A} = \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_1$$

A diferença de potencial pode ser escrita como:

$$V = \int_0^d \vec{E}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_d^{d+a} \vec{0} \cdot d\vec{\ell} + \int_{d+a}^{2d+a} \vec{E}_2 \cdot d\vec{\ell}$$

$$= \int_0^d E_1 d\ell + \int_{d+a}^{2d+a} \frac{\epsilon_0}{\epsilon} E_1$$

$$= E_1 d \left(1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)$$



Pelo que,

$$E_1 = \frac{V}{d \left(1 + \frac{\epsilon_0}{\epsilon}\right)}$$

$$E_2 = \frac{V}{d \left(1 + \frac{\epsilon}{\epsilon_0}\right)}$$

- **Carga eléctrica armazenada**

A carga eléctrica armazenada nas placas condutoras obtém-se como:

$$Q = A \epsilon_0 E_1$$

$$Q = \frac{\frac{A}{d} V}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon}}$$

- **Capacidade do condensador**

A capacidade do condensador calcula-se a partir da carga armazenada Q e da diferença de potencial a que está sujeito V , como sendo:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\frac{A}{d}}{\frac{1}{\epsilon_0} + \frac{1}{\epsilon}}$$

Note-se que poderíamos ter obtido a capacidade do condensador, a partir da associação em série de duas capacidades C_1 e C_2 . Relembrando o resultado obtido no exemplo 2.2.6, tem-se:

$$\frac{1}{C} = \frac{d}{A \epsilon_0} + \frac{d}{A \epsilon} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

2.2.8 Condensador cilíndrico

Um cabo coaxial é constituído por um condutor cilíndrico interior de raio R_1 , e uma película exterior condutora de raio R_2 , existindo no espaço que separa os condutores um material dielétrico de permitividade ϵ . O cabo está ligado a uma fonte de tensão V . Consideremos o comprimento do cabo, ℓ , muito maior que R_2 .

- **Campo eléctrico no espaço entre os condutores**

Tal como se viu no exemplo 2.2.4 pode-se aplicar a este problema a lei de Gauss para uma geometria cilíndrica. Neste caso iremos aplicar a lei de Gauss generalizada já que existe um dielétrico a separar os condutores. Como superfície de Gauss utilizamos uma superfície cilíndrica que envolve um pedaço de condutor interior de comprimento L . As linhas de campo do vector deslocamento eléctrico serão radiais em coordenadas cilíndricas, sendo o campo paralelo às normais na superfície lateral do cilindro (\vec{S}_3) e perpendicular às normais nas “tampas” (\vec{S}_1 e \vec{S}_2). Na superfície lateral do cilindro o módulo de \vec{D} é constante.

Neste problema, como não se conhece a carga que está nos condutores vamos assumir que existe uma densidade de carga por unidade de comprimento do condutor interior λ . A lei de Gauss generalizada escreve-se então:

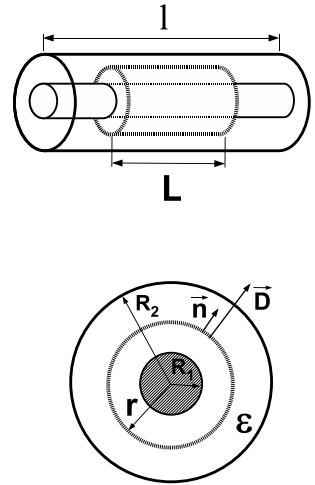
$$\begin{aligned} \oint_S \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS &= Q_{\text{int}} \\ \int_{S_1} \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{S_2} \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS + \int_{S_3} \vec{D} \cdot \vec{n} \, dS &= \lambda L \\ \int_{S_1} 0 \, dS + \int_{S_2} 0 \, dS + \int_{S_3} D \, dS &= \lambda L \\ D \int_{S_3} dS &= \lambda L \\ D 2\pi r L &= \lambda L \\ D &= \frac{\lambda}{2\pi r} \end{aligned}$$

pelo que,

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r}$$

Agora que se conhece a expressão do módulo do campo eléctrico pode-se relacioná-lo com a diferença de potencial entre os condutores e calcular a densidade de carga:

$$\begin{aligned} V &= \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon r} dr \\ &= \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} [\ln(r)]_{R_1}^{R_2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \\ \lambda &= \frac{2\pi\epsilon V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \end{aligned} \tag{2.41}$$



Substituindo na expressão do campo eléctrico obtém-se:

$$E = \frac{V}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

- **Capacidade do cabo coaxial**

A capacidade é dada por:

$$C = \frac{Q}{V}$$

Multiplicando pelo comprimento do cabo a equação 2.41, temos uma relação entre a carga do cabo coaxial e a tensão aplicada:

$$Q = \lambda\ell = \frac{2\pi\epsilon V\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

$$C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

- **Energia potencial electrostática armazenada no cabo coaxial**

Conhecida a capacidade do cabo, a energia armazenada por este vem:

$$U_E = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}V^2$$

A energia potencial armazenada pelo cabo poderia ter sido calculada, determinando a densidade de energia potencial electrostática associada ao campo eléctrico que existe dentro do cabo coaxial e integrando em todo o volume onde existe campo (volume do cabo):

$$u_E = \frac{1}{2}\epsilon E^2 = \frac{1}{2}\epsilon \left(\frac{V}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right)^2$$

$$U_E = \int_v u_E dv = \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2} \epsilon \left(\frac{V}{r \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \right)^2 r dr d\theta dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon V^2}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr d\theta dz$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\epsilon V^2}{\ln^2\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} 2\pi\ell \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

$$= \frac{\pi\epsilon\ell V^2}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$$

2.3 Exercícios Propostos

Campo eléctrico no vácuo

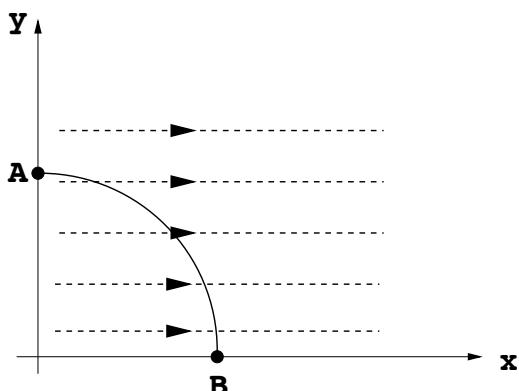
Exercício 2.1 : Dois pêndulos de comprimento ℓ , massa m e carga Q , encontram-se suspensos num mesmo ponto. Considere que os pêndulos se encontram na sua posição de equilíbrio e que o ângulo que os fios fazem com a vertical do lugar, θ , é muito pequeno. Determine:

- as forças que actuam as duas massas.
- a distância entre as duas massas.

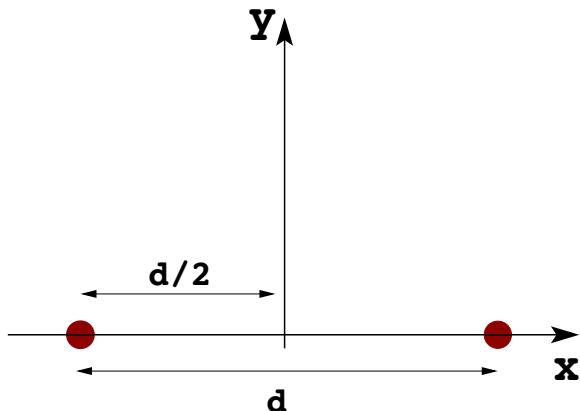
Exercício 2.2 : Uma carga Q_1 de $-3 \mu C$ é colocada num ponto de posição $\vec{r}_1 = (1, 3, 0)$ cm num dado referencial e uma segunda carga Q_2 de $5 \mu C$ é colocada na origem desse referencial.

- Qual a força exercida pela carga Q_1 sobre a carga Q_2 ?
- Qual o ponto do espaço em que o campo eléctrico causado pelas duas cargas é nulo? Existe mais algum ponto nessas condições?
- Sugestão: comece por mudar de sistema de eixos.
- Que valor de massa colocada à superfície da Terra sofreria uma força gravítica de módulo igual à da força sofrida pela carga Q_2 ?

Exercício 2.3 : Determine o trabalho necessário para transportar uma carga eléctrica q desde um ponto **A** $(0, y_A)$ a um ponto **B** $(x_B, 0)$, na presença de um campo eléctrico uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ (ver figura).

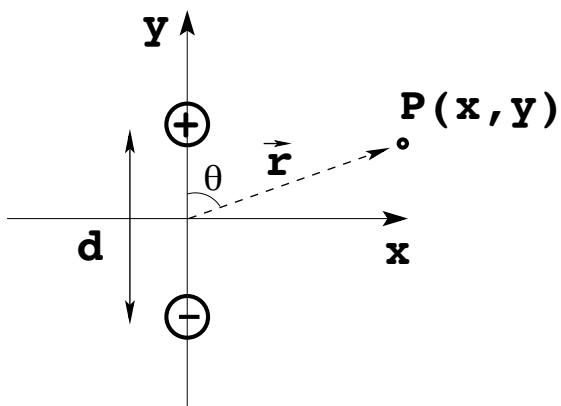


Exercício 2.4 : Dois protões estão separados de uma distância $d = 4$ fm, tal como é mostrado na figura.



- Qual é a direcção do campo eléctrico em qualquer ponto do eixo yy?
- Determine o potencial eléctrico num ponto situado entre os protões no eixo xx.
- Esboçe as linhas do campo eléctrico.
- Determine o ponto de equilíbrio de um outro protão que se traz para a vizinhança dos dois protões, considerando que as três cargas estão confinadas ao eixo xx. Trata-se de um ponto de equilíbrio estável ou instável?

Exercício 2.5 : Um dipolo eléctrico é definido por um conjunto de duas cargas eléctricas simétricas ($+q$ e $-q$) separadas de uma distância d .

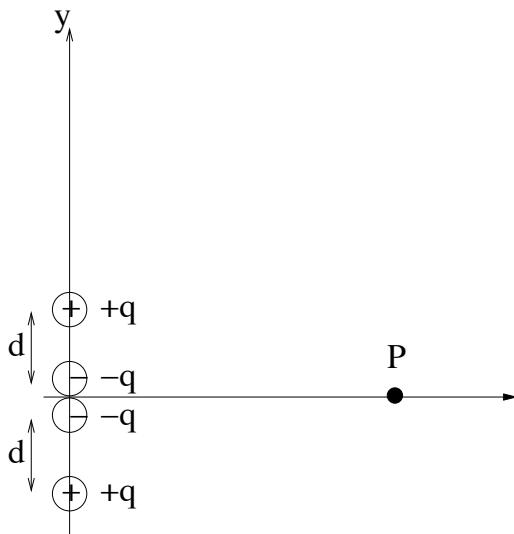


- Determine a expressão do potencial criado pelas cargas em qualquer ponto do espaço.
- Determine a expressão do campo eléctrico criado pelas duas cargas em qualquer ponto do espaço.
- Particularize a expressão obtida na alínea b) para os pontos situados ao longo do eixo xx e do eixo yy e obtenha as expressões válidas para $x, y \gg d$.

Capítulo 2

- d) Sabendo que o momento dipolar eléctrico de uma distribuição de N cargas q_i é definido por $\vec{p} = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i q_i$, sendo \vec{r}_i o vector posição da carga q_i , calcule o momento dipolar eléctrico e escreva as equações obtidas na alínea c) em função de \vec{p} .
- e) Esboce as linhas do campo eléctrico e as equipotenciais.

Exercício 2.6 : Um quadripolo eléctrico é constituído por dois dipolos eléctricos de igual momento dipolar e sentidos opostos.



- a) Calcule o momento dipolar do quadripolo.
- b) Determine o campo eléctrico no ponto P situado a uma distância x do centro do quadripolo (origem dos eixos).
- c) Determine o campo eléctrico para pontos no eixo dos xx muito afastados da origem ($x \gg d$).

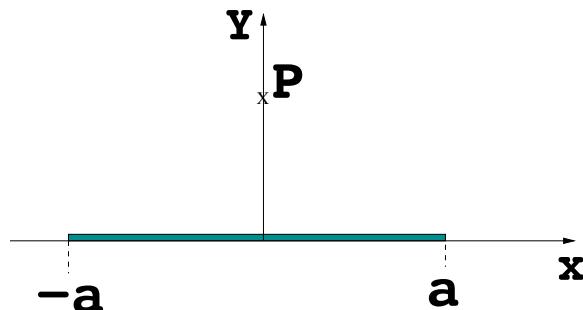
Exercício 2.7 : Um aro circular de raio R encontra-se linearmente carregado com uma densidade de carga $\lambda(C.m^{-1})$.

- a) Determine, a partir da lei de Coulomb, a expressão do campo eléctrico num qualquer ponto da recta perpendicular ao plano definido pelo aro e que passa no seu centro.
- b) Determine a expressão do potencial eléctrico, V , num qualquer ponto da mesma recta.
- c) Determine a expressão do campo eléctrico a partir do potencial calculado na alínea anterior.

Exercício 2.8 : Um disco de raio a encontra-se uniformemente electrizado em superfície, com uma densidade de carga $\sigma(C.m^{-2})$.

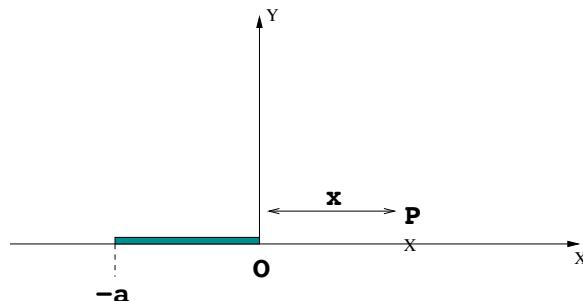
- a) Determine a expressão do potencial num ponto qualquer do eixo perpendicular ao disco que passa pelo seu centro.
- b) Determine a expressão do campo eléctrico num ponto qualquer do eixo perpendicular ao disco que passa pelo seu centro.
- c) Utilizando o resultado da alínea anterior, determine a expressão do campo eléctrico criado por um plano infinito uniformemente electrizado em superfície, com uma densidade de carga σ . Comente se poderia utilizar a mesma estratégia para o cálculo do potencial criado pelo plano infinito.

Exercício 2.9 : Um fio de comprimento $2a$, encontra-se carregado com uma densidade de carga eléctrica $\lambda(C.m^{-1})$.



- a) Determine a expressão do campo eléctrico num ponto P a uma distância y do fio e situado no eixo que o divide ao meio.
- b) Determine a expressão do campo eléctrico, no ponto P , no caso de o fio ser infinito.
- c) Como se sabe não há fios infinitos. Contudo, esta pode ser uma boa aproximação na resolução de determinados problemas envolvendo fios finitos. Verifique em que medida se trata de uma boa aproximação no caso de um fio carregado de comprimento $2a = 50$ cm e o ponto P situado às seguintes distâncias: i) $y = 10$ cm, ii) $y = 5$ cm, iii) $y = 1$ cm;

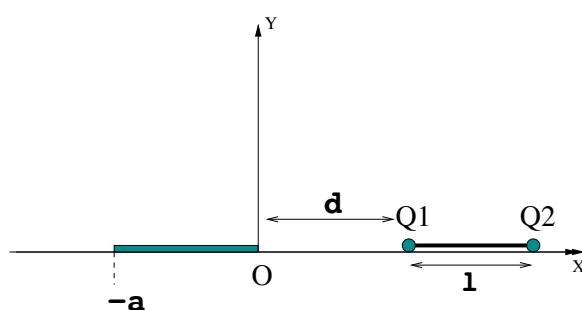
Exercício 2.10 : Uma barra de comprimento a cm e densidade linear de carga λ C/m é colocada alinhada com o eixo xx . Determine:



Capítulo 2

- a expressão do potencial eléctrico no ponto P .
- a expressão do campo eléctrico no ponto P .
- a expressão aproximada do campo eléctrico para pontos do semi-eixo positivo xx muito afastados da barra ($x \gg a$). Comente a expressão obtida.

Exercício 2.11 : Uma barra carregada de comprimento $a=3$ cm e densidade linear de carga $\lambda = 2$ C/m é colocada alinhada com o eixo xx . A uma distância $d=4$ cm e ao longo do mesmo eixo, é colocada uma barra isolante de comprimento $\ell=2$ cm com duas cargas pontuais Q_1 e Q_2 nas extremidades.

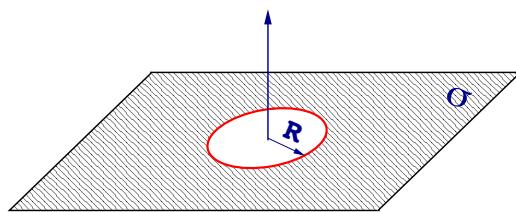


- Sabendo que $Q_2 = 1 \mu\text{C}$, determine o valor de Q_1 que permite à barra isolante permanecer imóvel.
- O movimento da barra isolante poderia ser estudado considerando todas as forças aplicadas no seu centro de massa e toda a massa do sistema aí concentrada. Atendendo ao resultado da alínea anterior, indique justificando se faz sentido definir um *centro de cargas*.

Exercício 2.12 : O campo eléctrico numa vasta região da atmosfera terrestre é vertical e dirigido para baixo, sendo o seu valor 60 V.m^{-1} a 300 m de altitude e 100 V.m^{-1} a 200 m. Determine a carga total existente num cubo de 100 m de lado, localizado entre 200 m e 300 m de altitude. Despreze a curvatura da Terra.

Exercício 2.13 : Considere um plano infinito carregado uniformemente com uma densidade de carga σ .

- Determine, usando a lei de Gauss, o campo eléctrico a uma distância r do plano.
 - Considere agora o plano infinito inicial com um buraco circular de raio R (ver figura). Calcule o campo eléctrico num ponto qualquer do eixo desse buraco (eixo zz).
- NOTA: recorra também ao resultado do exercício 8.*



Condutores em equilíbrio electrostático

Exercício 2.14 : Utilizando a lei de Gauss e a lei das malhas ($\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$) verifique que junto à superfície de um condutor se tem:

- a componente tangencial do campo eléctrico ($E_{||}$) é nula.
- a componente perpendicular do campo eléctrico é dada por: $E_{\perp} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$

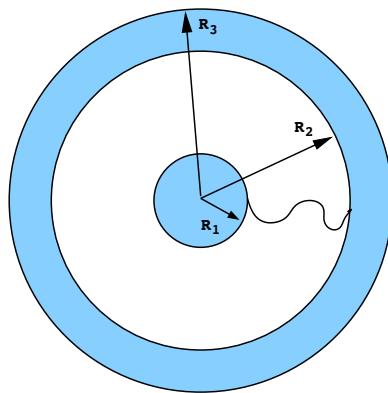
Exercício 2.15 : Considere uma esfera condutora de raio a , carregada com uma carga $+Q$, na situação de equilíbrio electrostático.

- Calcule as distribuições de carga em volume, ρ , e em superfície, σ , existentes na esfera.
- Obtenha a expressão do campo eléctrico nas diferentes regiões do espaço ($r < a$ e $r > a$).
- Calcule a energia necessária para trazer uma carga $+q$ desde o infinito até ao centro da esfera.

Exercício 2.16 : Considere duas esferas condutoras de raios R_A e R_B e relativamente afastadas uma da outra pelo que a influência recíproca dos campos pode ser desprezada. Cada uma das esferas tem uma carga Q .

- Diga como está distribuída a carga nas esferas condutoras e calcule a sua densidade em função de Q e dos seus raios.
- Calcule o campo eléctrico junto à superfície das duas esferas em função de Q e dos seus raios.
- Suponha que se ligavam as esferas através de um fio condutor. Calcule a carga que existiria em cada esfera após se atingir a situação de equilíbrio, Q_A e Q_B , em função de Q e dos seus raios.

Exercício 2.17 : Um condutor esférico oco de raios interior e exterior respectivamente R_2 e R_3 , tem no seu interior um outro condutor esférico maciço de raio R_1 . As duas esferas estão inicialmente ligadas por um fio condutor. Coloca-se uma carga positiva Q na esfera exterior e, passado algum tempo, retira-se o fio condutor que unia as duas esferas.



- Qual a diferença de potencial entre as duas esferas?
- Qual a distribuição de carga nas duas esferas após se ter retirado o fio? Justifique.
- O resultado da alínea anterior modificava-se se inicialmente se tivesse carregado a esfera interior em vez da exterior? Justifique.

Exercício 2.18 : O campo eléctrico máximo que o ar suporta sem se ionizar e sem que haja disruptão é $3 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}$. Determine o raio mínimo de uma esfera metálica que possa estar ao potencial de 1 milhão de Volts sem que haja disruptão do ar.

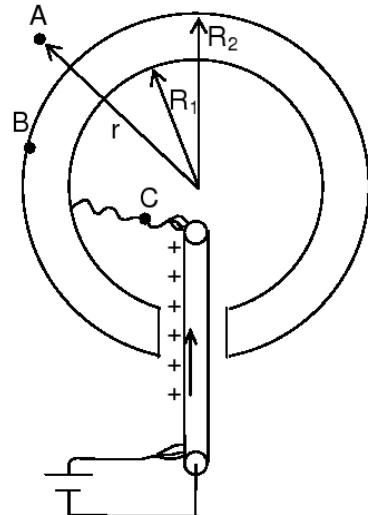
Exercício 2.19 : Um cabo coaxial de comprimento muito grande quando comparado com a sua espessura (infinito), é constituído por um condutor cilíndrico de raio R_1 e por uma malha cilíndrica condutora, de raios interno e externo respectivamente R_2 e R_3 ($R_3 > R_2 > R_1$). O cabo foi ligado a uma bateria que carregou o cabo interior com uma densidade de carga $\lambda (\text{C.m}^{-1})$, sendo a malha ligada à terra.

- Determine o campo eléctrico nas várias regiões do espaço. Esboce o gráfico de $E(r)$.
- Calcule a diferença de potencial entre os condutores e desenhe as linhas equipotenciais.
- Calcule a diferença de potencial entre a malha condutora e um ponto exterior a uma distância radial R_4 do centro do cabo ($R_4 > R_3$).
- Se a malha exterior não estivesse neutra antes de se ligar à bateria e à terra, como se alteravam os resultados deste problema?

Exercício 2.20 : O gerador de Van der Graaf foi inventado para produzir um potencial eléctrico elevado e desta forma funcionar como acelerador de partículas (electrostático). Pretende-se carregar electricamente uma coroa esférica metálica de raios interno e externo $R_1 = 0,25$

m e $R_2 = 0,30$ m. Como para carregar a coroa a partir de um outro gerador eléctrico seria necessária uma diferença de potencial muito elevada, a carga neste caso é transportada através de um sistema mecânico constituído por correia de borracha accionada por um motor, que transporta cargas eléctricas até ao interior da coroa esférica. Uma vez no interior estas cargas são recolhidas por um fio condutor que liga a correia à coroa. A correia é por sua vez eletrizada, longe da influência do campo criado pela coroa metálica.

Considere que, apesar da abertura existente na parte inferior do gerador para que a correia de borracha possa passar, é uma boa aproximação considerar que há simetria esférica no problema, desde que não se esteja a considerar a região junto à abertura. Considere também que a contribuição da correia para o campo eléctrico no exterior do gerador da carga, é desprezável, face à carga depositada na coroa.

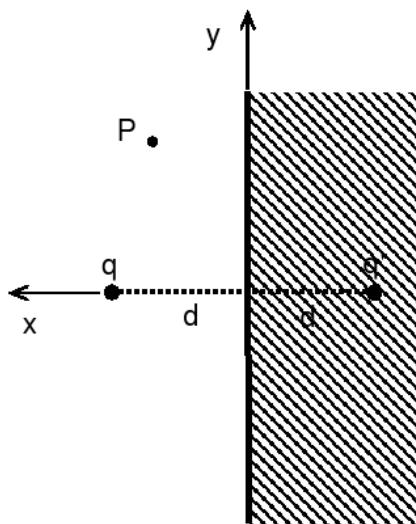


- Determine o campo eléctrico num ponto A , a uma distância $r > R_2$ do centro da coroa esférica condutora, em função da carga depositada na coroa, Q .
- Sabendo que o campo eléctrico máximo que o ar suporta sem que haja disruptão é $E_{ar} = 3 \times 10^6 \text{ V.m}^{-1}$, calcule o potencial máximo a que pode ficar a coroa metálica.
- A diferença de potencial entre os pontos B e C será nula? Porque razão se dirigem as cargas da correia para o exterior da coroa esférica?

Exercício 2.21 : Uma carga pontual q encontra-se a uma distância d de um condutor semi-infinito, que se encontra ligado à Terra ($V = 0$) e portanto todos os pontos do plano ($x = 0, y, z$) estão a um potencial

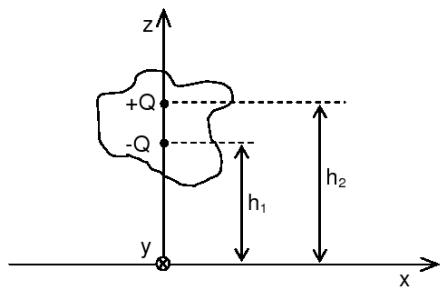
Capítulo 2

nulo. A resolução deste problema pode ser feita com o denominado método das imagens que consiste em substituir o condutor por uma carga imagem, q' , colocada simetricamente em relação à superfície do condutor. Os dois problemas serão equivalentes do ponto de vista do potencial criado no exterior do condutor **desde que o potencial na superfície do condutor seja também nulo**.



- Determine a carga imagem, q' .
- Determine o potencial criado pela carga q e pelo condutor num ponto P fora do condutor, na sua proximidade $V_P(x < d, y, 0)$.
- Determine o campo eléctrico no mesmo ponto, \vec{E}_P . Particularize para $x = 0$, ou seja, para a superfície do condutor.
- Determine a densidade de carga na superfície do condutor, $\sigma(y)$, e esboce as linhas de campo eléctrico.
- Calcule a força exercida pelo condutor sobre a carga q .

Exercício 2.22 : Uma nuvem num dia de tempestade pode ser representada por um dipolo eléctrico com uma carga de $\pm 10\text{ C}$. A parte inferior da nuvem está a uma altura de $h_1 = 5\text{ km}$ acima do solo e a parte superior a $h_2 = 8\text{ km}$ acima do solo. O solo está molhado e pode-se considerar um bom condutor. Utilizando o método descrito no problema 21, determine:



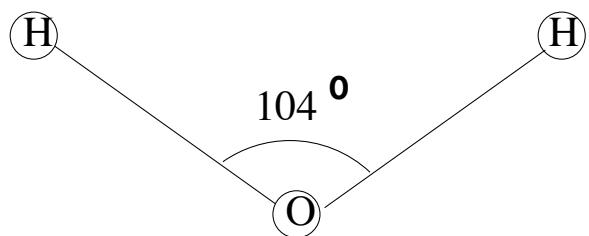
- a expressão do potencial eléctrico $V(x, y, z)$, na região $0 < z < h_1$;
- o campo eléctrico na vizinhança da Terra;
- a densidade de carga induzida na Terra.

Exercício 2.23 : Utilizando a lei de Gauss generalizada e a lei das malhas ($\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = 0$) verifique que junto à superfície de separação entre dois materiais de constantes dieléctricas ϵ_1 e ϵ_2 :

- a componente do campo paralela à superfície é contínua: $E_{1\parallel} = E_{2\parallel}$
- componente do campo perpendicular à superfície não é contínua e, se existir uma densidade de carga σ , verifica-se a relação: $\epsilon_1 E_{1\perp} - \epsilon_2 E_{2\perp} = \sigma$.

Campo eléctrico nos materiais dieléctricos

Exercício 2.24 : Uma molécula de água é composta por dois grupos OH. Num grupo OH um átomo de Hidrogénio (H) liga-se a um átomo de Oxigénio (O) comportando-se o conjunto como um dipolo eléctrico, com uma carga $+q$ no hidrogénio e uma carga $-q$ no oxigénio, em que $q = 0,316\text{ e}$.



- Calcule o momento dipolar do conjunto OH formado pelos átomos, sabendo que a distância entre os dois núcleos é $d=0,97\text{\AA}$.
- Uma molécula de água é constituída por dois grupos OH fazendo um ângulo de 104° . Calcule o momento dipolar da molécula da água.

Capítulo 2

- c) Determine o campo eléctrico criado pela molécula para distâncias (r) muito maiores que as distâncias internucleares e na direcção do momento dipolar. Calcule o seu valor a 10 Å de distância.

Exercício 2.25 : Uma esfera condutora de raio R_1 é revestida com material isolante de constante dielétrica relativa $\epsilon_r = 5$, de forma a obter-se uma esfera de raio R_2 . Durante o processo de fabrico a superfície interior do isolante adquiriu uma carga electrostática Q .

- Determine o campo \vec{D} em função da distância ao centro da esfera, r .
- Determine o campo \vec{E} em função da distância ao centro da esfera, r .
- Represente graficamente \vec{D} e \vec{E} .
- Determine as cargas de polarização nas superfícies do isolante.

Exercício 2.26 : Uma esfera de material isolante de constante dielétrica ϵ e raio a está uniformemente carregada em volume, com uma densidade de carga ρ e imersa no vácuo.

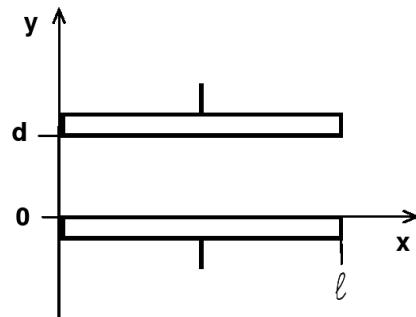
- Determine, explicando detalhadamente todos os cálculos efectuados, o campo eléctrico \vec{E} dentro e fora da esfera.
- Determine a expressão do potencial eléctrico dentro e fora da esfera.
- Calcule as cargas de polarização (em volume e superfície) existentes na esfera.

Exercício 2.27 : A permitividade eléctrica de um meio infinito depende da distância radial (r) a um centro de simetria segundo a expressão $\epsilon = \epsilon_0(1 + a/r)$ com $a > 0$. Uma esfera condutora de raio R e carga Q é colocada naquele meio e centrada em $r = 0$. Determine:

- o campo eléctrico em função de r ;
- o potencial eléctrico em função de r ;
- o vector de polarização, \vec{P} , em função de r ;
- a densidade volúmica de carga de polarização existente no dielétrico;
- a densidade de carga superficial de polarização no dielétrico;
- a carga total de polarização existente no dielétrico.

Condensadores

Exercício 2.28 : Um condensador plano tem armaduras quadradas de lado ℓ separadas de uma distância d , sendo $\ell \gg d$. No seu interior existe um dielétrico linear e não homogéneo com uma constante dielétrica relativa $\epsilon_r = 1 + ay$, sendo a uma constante positiva. Determine:



- o campo eléctrico dentro do condensador, \vec{E} , supondo que o condensador está ligado a uma bateria de tensão V (armadura positiva em $y = 0$);
- a capacidade do condensador;
- as densidades de carga de polarização em função da tensão da bateria, V .

Exercício 2.29 : Considere um condensador esférico constituído por duas superfícies condutoras concéntricas. O condutor interior tem um raio R_1 e condutor exterior com a forma de uma coroa esférica, tem raios R_2 e R_3 . Antes de se colocar o condutor exterior, que se encontra neutro, carregou-se o condutor interior com uma carga Q .

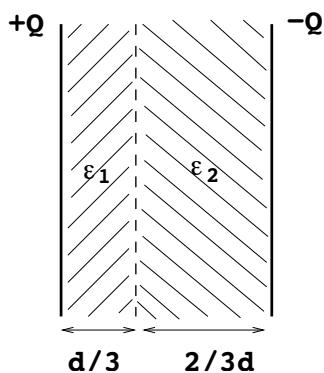
- Determine a capacidade do condensador.
- Determine o potencial do condutor exterior em relação à terra.
- Admita agora que se liga o condutor exterior à terra.
 - Determine a carga total existente no condutor externo e o campo eléctrico na região exterior do dispositivo.
 - A capacidade do condensador altera-se? justifique.

Exercício 2.30 : Os iões no interior e no exterior de um neurónio estão separados por uma membrana plana de 10^{-8} m de espessura, que se comporta como um isolante com uma permitividade eléctrica $\epsilon = 8\epsilon_0$.

Capítulo 2

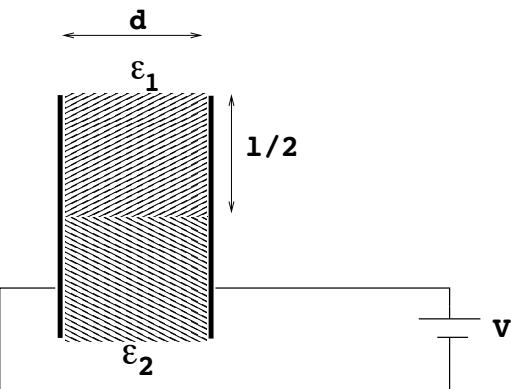
- a) Qual é a capacidade de 1 cm^2 desse neurónio?
- b) Qual a capacidade de 1 cm^2 de neurónio no caso de a membrana ter uma permitividade eléctrica igual à do ar.
- c) Sabendo que o campo eléctrico devido aos iões que se acumulam à superfície da membrana neuronal é da ordem 10^6 N/C , calcule a diferença de potencial a que está sujeito o neurónio.
- d) Determine a carga por unidade de superfície da membrana neuronal.

Exercício 2.31 : Um condensador de faces paralelas de área A e separadas de uma distância d ($d \ll A$) encontra-se carregado com uma carga eléctrica Q . Dois materiais dielétricos de permitividades eléctricas ϵ_1 e ϵ_2 são colocados entre as placas condutoras, de acordo com a figura.



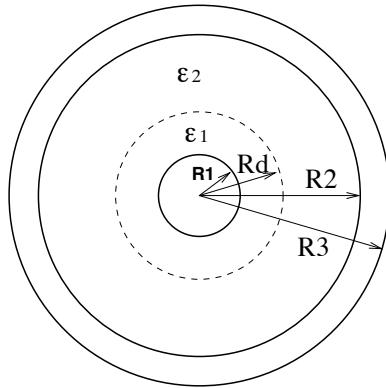
- a) Determine os vectores deslocamento eléctrico, \vec{D} , e campo eléctrico, \vec{E} , no interior dos dois dieléctricos do condensador.
- b) Determine a capacidade do condensador.
- c) Determine a densidade de carga de polarização nas superfícies dos dieléctricos.

Exercício 2.32 : Um condensador plano é constituído por duas armaduras paralelas de lado ℓ separadas de uma distância d . O espaço entre as placas está preenchido por dois dielécticos lineares e homogéneos de permitividades ϵ_1 e ϵ_2 , de acordo com a figura. O condensador está ligado a uma fonte de tensão cuja diferença de potencial aplicada é V .



- a) Determine o campo eléctrico no espaço entre as armaduras.
- b) Determine a distribuição de carga na superfície das armaduras.
- c) Determine a densidade de carga de polarização na superfície dos dieléctricos.
- d) Determine a capacidade do condensador.

Exercício 2.33 : Um condensador esférico é constituído por um condutor de raio R_1 e uma cavidade esférica condutora de raio interno R_2 e externo R_3 . O espaço entre as armaduras metálicas está preenchido por dois dielécticos de permitividade ϵ_1 e ϵ_2 ($\epsilon_1 > \epsilon_2$), cuja superfície esférica de separação possui raio R_d . Suponha que a armadura interna do condensador foi carregada inicialmente com uma carga $+Q$.



- a) Determine o campo eléctrico existente em todas as regiões do espaço e esboce num gráfico a sua magnitude em função de r .
- b) Determine o potencial eléctrico existente nas várias regiões e faça a sua representação gráfica.
- c) Determine a capacidade do condensador.
- d) Calcule o vector polarização nas várias regiões.
- e) Identifique as regiões onde existe carga de polarização e determine as densidades de carga de polarização.

Capítulo 2

Exercício 2.34 : Um cabo coaxial é constituído por um condutor cilíndrico interior de raio R_1 , e uma coroa cilíndrica condutora de raios R_2 e R_3 , existindo no espaço que separa os condutores um material dielétrico de permitividade ϵ . Consideremos o comprimento do cabo , ℓ , muito maior que R_3 .

- Determine a capacidade do cabo por unidade de comprimento.
- Determine as distribuições de carga de polarização por unidade de comprimento no caso de ligar o cabo a uma fonte de tensão V .

Energia electrostática e Forças

Exercício 2.35 : Considere uma gota de chuva de forma esférica, com um raio $R = 2\text{ mm}$ e uma carga $Q = 10^{-9}\text{ C}$ uniformemente distribuída pela sua superfície.

- Calcule o potencial eléctrico a que se encontra a gota em relação ao infinito e a sua energia potencial electrostática.
- Suponha que em determinado momento a gota se divide em duas gotas iguais, igualmente esféricas e que estas se afastam muito. Averigue se esta nova situação corresponde a um ganho ou uma perda de energia electrostática.

Exercício 2.36 : Duas cargas q_1 e q_2 são colocadas respectivamente em dois pontos A e B que estão separados por uma distância d .

- Determine o potencial eléctrico nos pontos A e B, assumindo o potencial nulo no infinito.
- Determine a energia potencial electrostática do sistema de duas cargas.
- Utilizando o resultado da alínea b) determine a força eléctrica que a carga q_1 exerce sobre a carga q_2 .
- Diga, justificando a sua resposta, no caso de termos $q_1 = -q_2$, como poderíamos adicionar uma terceira carga q_3 ao sistema sem realizar trabalho.

Exercício 2.37 : Os ossos humanos são piezoelectrinos, ou seja, quando sujeitos a uma pressão produzem uma diferença de potencial. Esta diferença de potencial é fundamental no processo de fixação do cálcio. Por exemplo, para não descalcificarem quando estão em órbita, os astronautas fazem exercício físico. Pessoas com ossos partidos não os podem exercitar e uma terapia utilizada para promover a fixação do cálcio nestas situações

é a aplicação de uma diferença de potencial exterior. Considere a aplicação de uma diferença de potencial a um braço, de acordo com a figura. Embora a aproximação só seja válida na zona central dos eléctrodos, para efeitos deste problema vamos considerar a aproximação do condensador de placas infinitas. Os eléctrodos estão isolados mas a espessura do isolante pode ser desprezada.

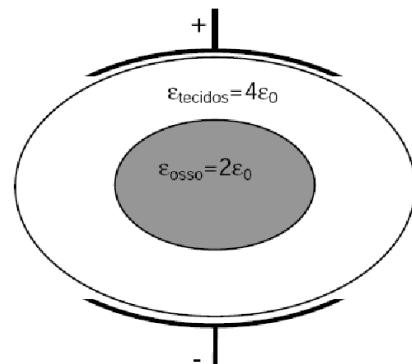


Fig 1

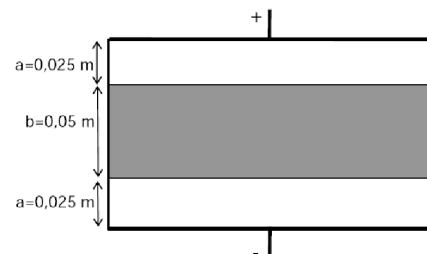


Fig 2

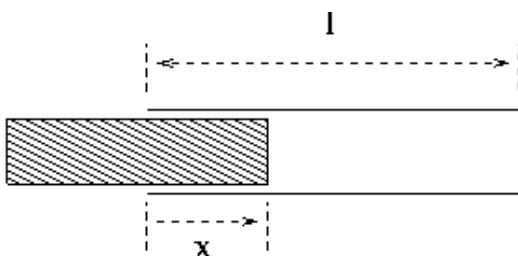
- Sabendo que a tensão aplicada aos eléctrodos é 45 V, calcule o campo eléctrico no interior do osso.
- Sabendo que a área dos eléctrodos é 45cm^2 , calcule a capacidade do sistema.
- A densidade de energia eléctrica é maior no osso ou nos tecidos? Justifique.

Exercício 2.38 : Uma placa condutora de lado ℓ é carregada com uma carga Q .

- Determine o campo eléctrico num ponto a uma distância d muito próximo da placa.
Nota: Pode considerar a aproximação do plano infinito.
- Uma segunda placa condutora, também de lado ℓ e carregada com uma carga $-Q$, é colocada a uma distância d da primeira, formando um condensador de faces paralelas. Determine a força exercida sobre esta segunda placa.

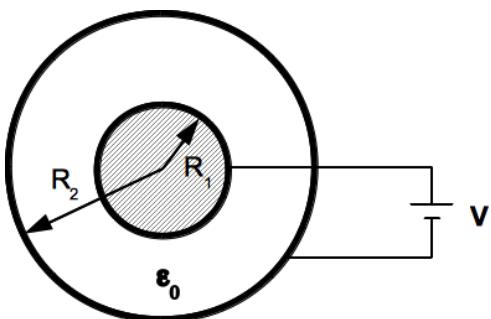
Capítulo 2

Exercício 2.39 : Um condensador plano com armaduras quadradas de lado ℓ e distanciadas de d ($d \ll \ell$), é ligado a uma fonte de tensão V . O espaço entre as armaduras do condensador encontra-se parcialmente preenchido com uma material dielétrico de permitividade ϵ . O material dielétrico pode mover-se segundo a direcção do eixo dos xx .



- Determine a capacidade do condensador em função da posição do dielétrico.
- Determine a energia armazenada pelo condensador em função da posição do dielétrico. Esboce a curva da energia em função da posição do dielétrico.
- Determine a força exercida sobre o dielétrico.

Exercício 2.40 : Um condensador esférico é composto por um condutor de raio R_1 envolvido por uma película condutora de forma esférica de raio R_2 . O espaço entre os condutores está preenchido por ar (ϵ_0). O condensador está ligado a uma fonte de tensão que carrega o condutor interior com uma carga Q .



- Calcule a energia armazenada no condensador.
- Calcule a pressão exercida sobre a película devida ao campo eléctrico.

Atenção

Nesta versão não há páginas 50-53

Soluções dos exercícios propostos

- 2.1 a) $\vec{P} = m\vec{g}$
 $\vec{F}_e = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \frac{Q^2}{\ell^2 \sin^2\theta} \vec{e}_x$
 $\vec{T} + \vec{F}_e + \vec{P} = \mathbf{0}$
- b) $\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta} = \frac{1}{16\pi\varepsilon_0} \frac{1}{mg} (\frac{Q}{\ell})^2$
no caso de pequenos ângulos, $x = \left(\frac{Q^2\ell}{2\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}$
- 2.2 a) $\vec{F} = +42, 7(\vec{e}_x + 3\vec{e}_y)$ [N]
- b) Ponto que dista 14 cm da origem segundo a direcção $\vec{r} = \vec{u}_x + 3\vec{u}_y$
- c) 13,8 kg
- 2.3 $W = -qE_0 x_B$
- 2.4 a) $\vec{E} = E\vec{e}_y$
- b) $V(x) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x} \frac{1}{1 - (\frac{d}{2x})^2}$
- d) $x = 0$, equilíbrio estável
- 2.5 a) $V_P = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left\{ [x^2 + (y - d/2)^2]^{-1/2} - [x^2 + (y + d/2)^2]^{-1/2} \right\}$
- b) $\vec{E}(x, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{\vec{r}_+}{r_+^3} - \frac{\vec{r}_-}{r_-^3} \right)$
 $\vec{r}_+ = x\vec{e}_x + (y - \frac{d}{2})\vec{e}_y$
 $\vec{r}_- = x\vec{e}_x + (y + \frac{d}{2})\vec{e}_y$
- c) $\vec{E}(x, 0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{(x^2 + (\frac{d}{2})^2)^{3/2}} \vec{e}_y$
 $\vec{E}(x >> d, 0) = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{d}{x^3} \vec{e}_y$
 $\vec{E}(0, y) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{(y - \frac{d}{2})^2} - \frac{1}{(y + \frac{d}{2})^2} \right) \vec{e}_y$
 $\vec{E}(0, y >> d) = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{d}{y^3} \vec{e}_y$
- d) $\vec{p} = q\vec{d}$
 $\vec{E}(x >> d, 0) = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}}{x^3}$
 $\vec{E}(0, y >> d) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0} \frac{\vec{p}}{y^3}$
- 2.6 a) $\vec{p} = \vec{0}$
- b) $\vec{E} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} \left[1 - \frac{1}{[1 + (\frac{d}{x})^2]^{3/2}} \right] (-\vec{e}_x)$
- c) $\vec{E} = -\frac{3}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qd^2}{x^4} \vec{e}_x$
- 2.7 a) $\vec{E} = E\vec{e}_z$
 $E(z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} R z (z^2 + a^2)^{-3/2}$
- b) $V(z) = \frac{\lambda}{2\varepsilon_0} R (z^2 + a^2)^{-1/2}$
- c) $\vec{E} = -\vec{\nabla} V$
- 2.8 a) $V(z) = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\sqrt{a^2 + z^2} - |z| \right)$
- b) $E_z = -\frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \left(\frac{z}{|z|} - \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \right)$
- c) $\lim_{a \rightarrow \infty} E_z = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|}$
Não, porque o potencial da solução anteriormente apresentada tem o ponto de referência no ∞ .
- 2.9 a) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a}{y\sqrt{a^2 + y^2}} \vec{e}_y$
- b) $\vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \frac{1}{y} \vec{e}_y$

- c) i) $\frac{E_\infty}{E_{finito}} = 1.08$
ii) $\frac{E_\infty}{E_{finito}} = 1.02$
iii) $\frac{E_\infty}{E_{finito}} = 1.00$
- 2.10 a) $V = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \frac{x+a}{x}$
- b) $\vec{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{1 + \frac{a}{x}} \right) \vec{e}_x$
- c) $\vec{E} = \frac{\lambda a}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{x^2} \vec{e}_x$
- 2.11 a) $Q_1 = -Q_2 \left(\frac{d}{d+\ell} \right) \left(\frac{d+a}{d+a+\ell} \right)$
 $Q_1 \simeq -0,5 \times 10^{-6}$ [C]
- b) Não faz sentido.
- 2.12 $Q = 3,6 \mu C$
- 2.13 a) $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{|z|} \vec{e}_z$
- b) $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \frac{z}{\sqrt{a^2 + z^2}} \vec{e}_z$
- 2.15 a) $\rho = 0$; $\sigma = \frac{Q}{4\pi a^2}$
- b) $r < a : \vec{E} = \vec{0}$
 $r > a : \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \left(\frac{a}{r} \right)^2 \vec{e}_r$
- c) $U_E = qV(r = a) = q \frac{\sigma a}{\varepsilon_0}$
- 2.16 a) $\sigma_A = \frac{Q}{4\pi R_A^2}$
 $\sigma_B = \frac{Q}{4\pi R_B^2}$
- b) $\vec{E}_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_A^2} \vec{e}_{r_A}$
 $\vec{E}_B = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_B^2} \vec{e}_{r_B}$
- c) $Q_A = \frac{2R_A Q}{R_A + R_B}$
 $Q_B = \frac{2R_B Q}{R_A + R_B}$
- 2.17 a) $V = 0$
- b) Na superfície exterior do condutor ôco.
- c) Não.
- 2.18 $R = 33$ cm.
- 2.19 a) $r < R_1 : E = 0$
 $R_1 < r < R_2 : \vec{E} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r$
 $R_2 < r < R_3 : E = 0$
 $r > R_3 : E = 0$
- b) $V = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}$
- c) $V = 0$
- d) Não se alteravam pois as cargas no condutor interior (R_1) e na superfície interior da malha (R_2) são necessariamente simétricas (verificar com a lei de Gauss) e qualquer carga que se movesse para a superfície exterior da malha (R_3) escoar-se-ia para a terra (é o que a ligação da malha à terra está a assegurar!).
- 2.20 a) $\vec{E}_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r$
- b) $V(R_2) = 900$ KV

- c) A diferença de potencial entre os pontos B e C na realidade não é nula pois existe um campo elétrico no interior da coroa devido ao facto de a correia estar constantemente mecanicamente a trazer carga para essa zona; podemos assim pensar que em cada instante, a ideia de equilíbrio eletrostático (anular o campo nos condutores, fio e coroa) implica que a carga que é recolhida pelo fio em contacto com a correia, distribui-se por todo a região condutora e em particular dirige-se para a superfície exterior da coroa.
- 2.21 a) $q' = -q$
 b) $V(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{\sqrt{(d-x)^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{(d+x)^2+y^2}} \right)$
 c) $\vec{E} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left[\left(\frac{d-x}{((d-x)^2+y^2)^{3/2}} + \frac{d+x}{((d+x)^2+y^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_x - \left(\frac{y}{((d-x)^2+y^2)^{3/2}} - \frac{y}{((d+x)^2+y^2)^{3/2}} \right) \vec{e}_y \right]$
 Para $x = 0$, $\vec{E}(y) = \frac{qd}{2\pi\epsilon_0} \frac{1}{(d^2+y^2)^{3/2}} \vec{e}_x$
 d) $\sigma(y) = \epsilon_0 E(y)$
 e) $\vec{F} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{(2d)^2} \vec{e}_x$
- 2.22 a) $V(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left[(x^2 + y^2 + (h_2 - z)^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + (h_1 - z)^2)^{-1/2} + (x^2 + y^2 + (h_1 + z)^2)^{-1/2} - (x^2 + y^2 + (h_2 + z)^2)^{-1/2} \right]$
 b) $\vec{E} = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0} \left[h_1 (x^2 + y^2 + h_1^2)^{-3/2} - h_2 (x^2 + y^2 + h_2^2)^{-3/2} \right] \vec{e}_z$
 c) $\sigma = \epsilon_0 E$
- 2.24 a) $p = 5 \times 10^{-30}$ C.m
 b) $\vec{p} = 6 \times 10^{-30} \vec{e}_y$ C.m; vectorialmente, corresponde à soma dos momentos dipolares das duas ligações OH.
 c) $\vec{E} = \frac{10^{-19}}{r^3} \text{ V/m}; \vec{E}(r = 10 \text{ A}) = 10^8 \text{ V/m}$
- 2.25 a) $D = 0$ ($r < R_1$)
 $\vec{D} = \frac{Q}{4\pi r^2} \vec{e}_r$ ($r > R_1$)
 b) $r < R_1 : E = 0$
 $R_1 < r < R_2 : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r r^2} \vec{e}_r$
 $r > R_2 : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$
 d) $Q_{pol}(R_1) = -\frac{4}{5}Q$
 $Q_{pol}(R_2) = +\frac{4}{5}Q$
- 2.26 a) $r < a : \vec{E} = \frac{\rho r}{3\epsilon} \vec{e}_r$
 $r > a : \vec{E} = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r^2} \vec{e}_r$
 b) $r > a : V = \frac{\rho a^3}{3\epsilon_0 r}$
 $r = a : V = \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$
 $r < a : V = \frac{\rho}{3\epsilon} \left(\frac{a^2 - r^2}{2} \right) + \frac{\rho a^2}{3\epsilon_0}$
 c) $\sigma_{pol} = (1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon}) \frac{\rho a}{3}$
 $\rho_{pol} = -\left(\frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon}\right) \rho$
- 2.27 a) $r < R : E = 0$
 b) $r > R : \vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r(r+a)} \vec{e}_r$
 c) $r < R : V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{R+a}{R} \right)$
 $r > R : V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{a} \ln \left(\frac{r+a}{r} \right)$
 d) $r > R : \rho_{pol} = \frac{Q}{4\pi} \frac{a}{r^2(r+a)^2}$
 e) $r = R : \sigma_{pol} = -\frac{Q}{4\pi} \frac{a}{R^2(R+a)}$
 f) $Q_{pol} = 0$
- 2.28 a) $\vec{E} = \frac{Va}{(1+ay) \ln(1+ad)} \vec{e}_y$
 b) $C = \frac{\ell^2 a \epsilon_0}{\ln(1+ad)}$
 c) $\rho_{pol} = -\frac{a^2 \epsilon_0 V}{(1+ay)^2 \ln(1+ad)}$
 $\sigma_{pol}(0) = 0$
 $\sigma_{pol}(d) = \frac{a^2 \epsilon_0 V d}{(1+ad) \ln(1+ad)}$
- 2.29 a) $C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$
 b) $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R_3}$
 c.1) $Q_{ext} = -Q$
 $E = 0$
 c.1) Não se altera.
- 2.30 a) $C = 710 \text{ nF}$
 b) $C = 89 \text{ nF}$
 c) $V = 10^{-2} \text{ V}$
 d) $\sigma = 7 \text{ nC.cm}^{-2}$
- 2.31 a) $\vec{D} = \frac{Q}{A} \vec{e}_x$
 $\vec{E}_1 = \frac{Q}{A\epsilon_1} \vec{e}_x$
 $\vec{E}_2 = \frac{Q}{A\epsilon_2} \vec{e}_x$
 b) $C = \frac{3A}{d} \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{2\epsilon_1 + \epsilon_2}$
 c) $\sigma_{pol}(0) = -\frac{Q}{A} \frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1}$
 $\sigma_{pol}(d/3) = +\frac{Q}{A} \left(\frac{\epsilon_1 - \epsilon_0}{\epsilon_1} - \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2} \right)$
 $\sigma_{pol}(d) = +\frac{Q}{A} \frac{\epsilon_2 - \epsilon_0}{\epsilon_2}$
- 2.32 a) $E_1 = E_2 = \frac{V}{d}$
 b) $\sigma_1 = \frac{\epsilon_1 V}{d}$
 $\sigma_2 = \frac{\epsilon_2 V}{d}$
 c) $(\sigma_{1pol})^- = -(\epsilon_1 - \epsilon_0) \frac{V}{d}$
 $(\sigma_{2pol})^- = -(\epsilon_2 - \epsilon_0) \frac{V}{d}$
 d) $C = \frac{\ell^2}{d} \left(\frac{\epsilon_1}{2} + \frac{\epsilon_2}{2} \right)$
 $C = C_1 + C_2$
- 2.33 a) $\vec{E} = \vec{0}, \quad r < R_1$
 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_1} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad R_1 < r < R_d$
 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_2} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad R_d < r < R_2$
 $\vec{E} = \vec{0}, \quad R_2 < r < R_3$
 $\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{r^2} \vec{e}_r, \quad r > R_3$
 b) $(r < R_1) :$
 $V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_d} \right) \right]$
 $(R_1 < r < R_d) :$

$$V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_d} \right) \right]$$

$(R_d < r < R_2)$:

$$V = \frac{Q}{4\pi} \left[\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{R_3} + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R_2} \right) \right]$$

$(R_2 < r < R_3)$:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{R_3}$$

$(r > R_3)$:

$$V = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \frac{1}{r}$$

c) $C = \frac{4\pi}{\frac{1}{\epsilon_1} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_d} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \left(\frac{1}{R_d} - \frac{1}{R_2} \right)}$

d) $\vec{P} = (\epsilon_1 - \epsilon_0) \vec{E}$, no dielétrico 1;
 $\vec{P} = (\epsilon_2 - \epsilon_0) \vec{E}$, no dielétrico 2.

e) $\sigma_{pol}(r = R_1) = - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right) \frac{Q}{4\pi R_1^2}$

$$\sigma_{pol}(r = R_d^-) = + \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_1} \right) \frac{Q}{4\pi R_d^2}$$

$$\sigma_{pol}(r = R_d^+) = - \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right) \frac{Q}{4\pi R_d^2}$$

$$\sigma_{pol}(r = R_2) = + \left(1 - \frac{\epsilon_0}{\epsilon_2} \right) \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

2.34 a) $C' = \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$

b) $\lambda_{pol}(R_1) = - \frac{2\pi V}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)} (\epsilon - \epsilon_0)$
 $\lambda_{pol}(R_2) = -\lambda_{pol}(R_1)$

2.35 a) $V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{R}$
 $U_E = 2, 2 \mu J$

b) A uma perda.

2.36 a) $V_A = \frac{q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$
 $V_B = \frac{q_1}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$

b) $U_E = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d}$

c) $\vec{F} = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0} \frac{1}{d^2} \vec{e}_r$

d) Trazendo a carga para um ponto da superfície equipotencial $V = 0$, constituída pelos pontos equidistantes das duas cargas.

2.37 a) $E = 600 \text{ V/m}$.

b) $C = 1 \text{ pF}$.

c) $u_E = \frac{\sigma^2}{4\epsilon_0}$, ossos.
 $u_E = \frac{\sigma^2}{8\epsilon_0}$, tecido.

2.38 a) $E = \frac{Q}{2\ell^2\epsilon_0}$

b) $F = \frac{Q^2}{2\ell^2\epsilon_0}$ (atractiva)

2.39 a) $C = \frac{\epsilon_0\ell}{d} (\epsilon_r x + (\ell - x))$
 $C = \frac{\epsilon_0\ell}{d} (\ell + x(\epsilon_r - 1))$
 $C = C_1 + C_2$

b) $U_E(x) = \frac{1}{2}C(x)V^2$

c) $F_x = \frac{1}{2}V^2 \frac{\ell}{d} \epsilon_0 (\epsilon_r - 1)$

2.40 a) $U_E = 2\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} V^2$

b) $P = -\frac{\epsilon_0}{2} V^2 \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^2 \frac{1}{(R_2 - R_1)^2}$ (para dentro)

Atenção

A numeração voltou duas páginas atrás

Capítulo 3

Corrente eléctrica

3.1 Introdução

Uma corrente eléctrica consiste no movimento ordenado de cargas eléctricas num dado meio. Em termos físicos, podemos pensar no movimento de deriva ordenado das cargas eléctricas sobreposto a um comportamento aleatório devido à agitação térmica; não se esqueça, o mundo quântico é um mundo agitado!

O número de cargas eléctricas que atravessam uma dada superfície por unidade de tempo, corresponde à intensidade de corrente eléctrica que atravessa essa superfície:

$$I = \frac{dQ}{dt} [A] \quad (3.1)$$

A quantidade de carga eléctrica que atravessa a superfície num intervalo de tempo t , será dada por:

$$Q = \int_0^t I dt [C] \quad (3.2)$$

Por convenção o sentido da corrente é definido pelo movimento das cargas positivas. Isto significa que num condutor, caso em que as cargas que se movem são negativas (electrões), o sentido da corrente eléctrica é contrário ao do movimento das cargas: porquê? não se esqueça que a carga do electrão ($-e$) é negativa e por isso a força eléctrica ($\vec{F} = -e\vec{E}$), aponta no sentido contrário ao do campo eléctrico, \vec{E} .

A densidade de corrente eléctrica num dado ponto do meio material, depende da densidade de carga portadora da corrente, $\rho [C.m^{-3}]$ e da velocidade associada à carga, \vec{v} :

$$\vec{J} = \rho \vec{v} [A/m^2] \quad (3.3)$$

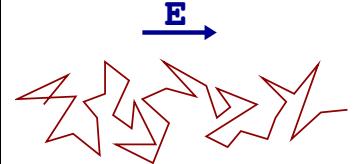
Se um material possuir uma densidade de portadores de carga $N [m^{-3}]$ e se cada portador possuir uma carga $q [C]$, a densidade de corrente eléctrica pode escrever-se:

$$\vec{J} = Nq \vec{v} \quad (3.4)$$

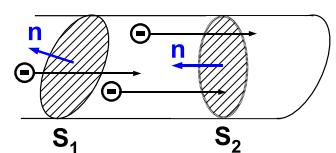
A corrente eléctrica que atravessa uma superfície S é o fluxo da densidade de corrente através dessa superfície:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} ds \quad (3.5)$$

Corrente eléctrica



Densidade de corrente eléctrica



Capítulo 3

Nos anos de 1825 - 1827 Georg Simon Ohm verificou experimentalmente que a densidade de corrente eléctrica que percorre um condutor é proporcional ao campo eléctrico aplicado, sendo a constante de proporcionalidade a condutividade do condutor, $\sigma_c [\Omega^{-1} \cdot m^{-1}]$:

$$\vec{J} = \sigma_c \vec{E} \quad (3.6)$$

Esta lei é conhecida como lei de Ohm local, uma vez que é válida em cada ponto de um meio condutor, e pode também ser escrita em função do inverso da condutividade, a resistividade do condutor $\rho = 1/\sigma_c [\Omega \cdot m]$:

$$\vec{E} = \rho \vec{J} \quad (3.7)$$

A sua correspondente lei macroscópica, a conhecida lei de Ohm, relaciona as grandezas também macroscópicas V e I mas pressupõe o conhecimento da resistência do condutor, $R [\Omega]$, cujo cálculo abordaremos mais à frente

$$V = R I \quad (3.8)$$

Ainda que menos usual é também possível escrever esta lei com o inverso da resistência, a condutância, $G [S]$

$$I = G V \quad (3.9)$$

Lei de Ohm



Para manter a corrente eléctrica estacionária o campo eléctrico tem de realizar trabalho nos condutores reais (meios em que existe uma resistência à passagem da corrente). Consideremos os portadores de carga existentes num elemento de volume $d\mathbf{v}$. Sendo N a densidade volémica destes portadores e q a sua carga eléctrica individual, no elemento $d\mathbf{v}$ existirá uma carga

$$dQ = Nq d\mathbf{v}$$

e a força que o campo eléctrico exerce sobre essa carga será

$$d\vec{F} = dQ \vec{E} = Nq \vec{E} d\mathbf{v}$$

relembrando que a potência de uma força pode ser obtida pelo seu produto interno com a velocidade do deslocamento, \vec{v} , podemos escrever a potência dispendida pela força eléctrica sobre o volume $d\mathbf{v}$:

$$dP = d\vec{F} \cdot \vec{v} = Nq \vec{v} \cdot \vec{E} d\mathbf{v} = \vec{J} \cdot \vec{E} d\mathbf{v}$$

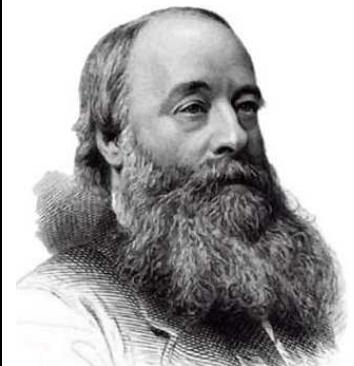
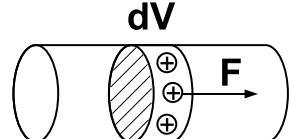
ou, definindo a densidade de potência como a potência por unidade de volume,

$$p \equiv \frac{dP}{d\mathbf{v}} = \vec{J} \cdot \vec{E} = JE \quad (3.10)$$

Esta é a densidade de potência despendida por efeito de Joule localmente e a potência total despendida por efeito de Joule pode ser calculada em todo o volume de um condutor somando a contribuição de todos os seus elementos de volume:

$$P = \int_v p d\mathbf{v} = \int_V JE d\mathbf{v} \quad (3.11)$$

Lei de Joule



Capítulo 3

O princípio físico de que a carga é uma grandeza que é conservada em todos os processos e transformações permite-nos encontrar um equação importante que caracteriza a densidade de corrente eléctrica. Considere-se um certo volume v que contém no seu interior uma carga Q cuja densidade de carga é ρ . Se houver um fluxo de carga positivo que atravessa a superfície fronteira desse volume, S , isso significará que a carga dentro do volume vai variar no tempo (vai diminuir!):

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{dQ}{dt} \quad (3.12)$$

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv$$

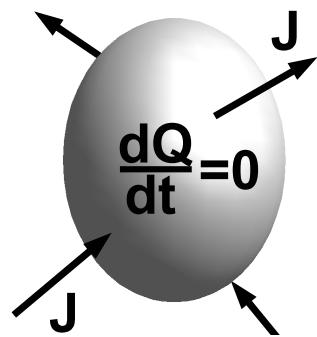
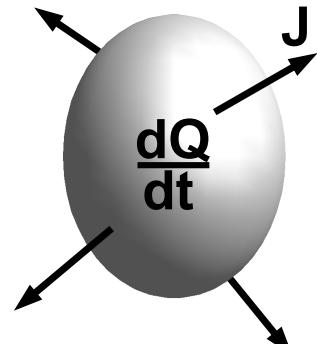
$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.13)$$

As equações da conservação da carga no caso do regime estacionário, em que pode existir variação de carga eléctrica no espaço, $\rho(x, y, z)$, mas não existe variação de carga no tempo, $\partial\rho/\partial t = 0$, apresentam uma forma mais simples:

$$\oint_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = 0 \quad , \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0 \quad (3.14)$$

Em consequência deste lei, vemos que a corrente eléctrica que passa num condutor, numa sua secção transversa ou outra superfície qualquer atravessada pela corrente, não varia (é constante!). Então o que é que se passa, se o condutor tiver uma secção variável ao longo do seu comprimento, uma vez que a corrente eléctrica mantém-se constante? O campo electrostático no interior do condutor vai variar (estamos a admitir que a condutividade eléctrica se mantém constante - condutor homogéneo)!!!! Não se esqueça que, $I = \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma_c \int \vec{E} \cdot d\vec{S}$.

Conservação da carga eléctrica



A equação da conservação da carga em regime estacionário não é mais que a lei dos nós e descreve matematicamente o facto de a corrente que entra numa superfície fechada (um nó) ser exactamente igual à corrente que de lá sai (fluxo total zero):

$$\sum_i I_i = 0 \quad (3.15)$$

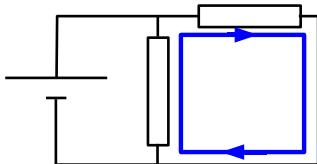
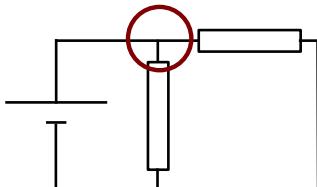
A lei das malhas foi já encontrada na electrostática e mantém-se válida para a corrente estacionária (em rigor, é válida desde que não existam campos magnéticos variáveis):

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad , \quad \nabla \times \vec{E} = 0 \quad (3.16)$$

Esta lei estabelece que num circuito fechado (uma malha) a soma de todas as tensões será igual a zero:

$$\sum_i V_i = 0 \quad (3.17)$$

Leis de kirchhoff



Capítulo 3

Como no exterior de um condutor não há corrente elétrica, junto à sua superfície a densidade de corrente elétrica tem de lhe ser paralela (a corrente não pode sair do condutor!):

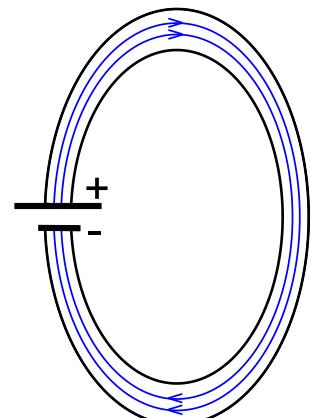
$$\vec{J} = \vec{J}_{||} \quad (3.18)$$

E, pela lei de Ohm, a densidade de corrente é paralela ao campo eléctrico pelo que também o campo eléctrico junto à superfície do condutor lhe é paralelo, ficando as linhas de campo eléctrico *encerradas* no interior do condutor:

$$\vec{E} = \vec{E}_{||} \quad (3.19)$$

Desta forma, os condutores comportam-se como *caminhos* para o campo eléctrico (para fornecer a tensão de uma bateria a uma lâmpada basta ligá-los com cabos condutores, não importa a sua geometria).

Campo eléctrico dentro dos condutores



O cálculo de uma resistência eléctrica, quando não se trata de um condutor de secção constante, pode não ser simples. Como método geral pode afirmar-se o cálculo da resistência eléctrica de um condutor passa por calcular a corrente, I , que o percorre em função da tensão que lhe é aplicada, V . Depois de determinadas estas duas grandezas, a resistência eléctrica é dada simplesmente por:

$$R = \frac{V}{I} \quad (3.20)$$

Quando temos dois condutores de resistências R_1 e R_2 ligados em série a resistência total do sistema é dada por

$$R = R_1 + R_2 \quad (3.21)$$

Quando temos dois condutores de resistências R_1 e R_2 ligados em paralelo a resistência total do sistema é dada por:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1 + R_2} \quad (3.22)$$

Resistência eléctrica de um condutor



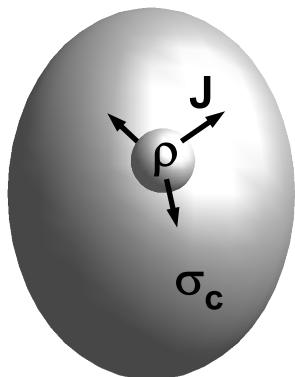
Partindo da equação local da conservação da carga pode encontrar-se a equação diferencial que rege o escoamento de carga num meio de condutividade não nula. Considere-se um meio de condutividade σ_c que tem no seu interior um elemento de volume $d\mathbf{v}$ com uma quantidade infinitesimal de carga, de densidade ρ ($dQ = \rho d\mathbf{v}$). A equação local de conservação da carga relaciona o fluxo de carga através da superfície infinitesimal fechada que envolve o elemento de volume, S , com a variação no tempo da densidade de carga existente dentro desta:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Tendo em conta que a relação entre campo eléctrico e densidade de corrente existente no condutor obedece à lei de Ohm local, $\vec{J} = \sigma_c \vec{E}$, obtém-se:

$$\sigma_c \vec{\nabla} \cdot \vec{E} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

Escoamento de carga



Capítulo 3

Uma vez que o fluxo do vector deslocamento eléctrico através da superfície infinitesimal S , se pode obter a partir da lei de Gauss generalizada, $\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$, e que o campo eléctrico se relaciona com o vector deslocamento eléctrico a partir da relação constitutiva do meio, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, pode-se escrever:

$$\sigma_c \frac{\rho}{\epsilon} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

A solução desta equação diferencial é

$$\rho = \rho_0 e^{-\frac{\sigma_c}{\epsilon} t} \quad (3.23)$$

A constante de tempo associada ao escoamento da carga dQ é então

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma_c} \quad (3.24)$$

Esta constante de tempo é da ordem de 10^{-19} s nos condutores (escoamento instantâneo!), da ordem das décimas de segundo em papel, da ordem das dezenas de minutos em borrachas comuns e de milhares de anos em plásticos especiais como é o caso do PTFE (Teflon).

3.2 Exercícios Resolvidos

3.2.1 Velocidade de deriva dos electrões

Num fio de cobre com uma secção S de 2 mm de diâmetro passa uma corrente eléctrica $I = 16\text{ A}$. Sabendo que a densidade do cobre é $\rho = 8,95\text{ g.cm}^{-3}$, que o seu número de massa é $A = 63,5\text{ g.mole}^{-1}$ e considerando que existe 1 electrão livre por átomo, pretende-se calcular a velocidade de deriva dos electrões (a componente da velocidade dos electrões que, sendo ordenada, cria a corrente eléctrica)

- **A densidade de corrente no condutor**

Sendo o fio de cobre homogéneo, a corrente eléctrica está uniformemente distribuída e a densidade de corrente é constante no seu interior. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned} I &= \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} \, dS = \int_S J \, dS = J \, S \\ J &= \frac{I}{S} = \frac{I}{\pi R^2} = \frac{16}{\pi (1 \times 10^{-3})^2} \\ &= 5,1 \times 10^6 \text{ A.m}^{-2} \end{aligned}$$

- **A velocidade de deriva dos electrões**

Conhecida a densidade de corrente eléctrica, a velocidade dos electrões pode ser calculada se soubermos qual a densidade de portadores e a carga de cada portador da corrente eléctrica. A densidade de portadores de carga é

$$\begin{aligned} N &= \frac{\rho}{A} N_A \times 1 = \frac{8,95 \times 10^3}{63,5 \times 10^{-3}} 6,022 \times 10^{23} \\ &= 8,5 \times 10^{28} \text{ electrões.m}^{-3} \end{aligned}$$

A velocidade dos electrões será então,

$$\begin{aligned} J &= Nq v \\ v &= \frac{J}{Nq} = \frac{5,1 \times 10^6}{8,5 \times 10^{28} \times 1,6 \times 10^{-19}} \\ &= 0,38 \text{ mm.s}^{-1} (!) \end{aligned}$$

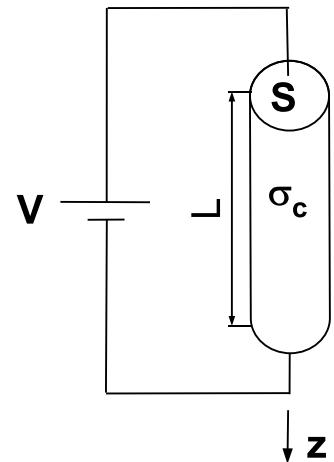
3.2.2 Resistência de um condutor cilíndrico

Consideremos o condutor cilíndrico de secção S , comprimento L e condutividade σ_c , representado na figura. O condutor está ligado a uma fonte de tensão V que lhe impõe uma corrente estacionária I .

- **Campo eléctrico no interior do condutor**

Se o material condutor for homogéneo, de condutividade constante, a corrente eléctrica está uniformemente distribuída e a densidade de corrente, tal como o campo eléctrico (lei de Ohm), são constantes. As linhas de campo são então paralelas ao eixo longitudinal do condutor e têm a direcção da corrente eléctrica (\vec{u}_z). Podemos então escrever:

$$V = \int_0^L \vec{E} \cdot d\ell = \int_0^L E dz = E \int_0^L dz = E L$$



- **Corrente eléctrica**

A corrente eléctrica que percorre o condutor é o fluxo da densidade de corrente através de uma secção do condutor. Sendo a normal à secção do condutor paralela à densidade de corrente temos:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_S J dS = J \int_S dS = J S$$

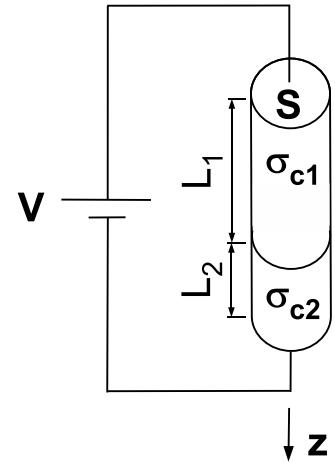
- **Resistência eléctrica**

A resistência eléctrica do condutor pode agora ser encontrada utilizando a lei de Ohm:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{E L}{J S} = \frac{1}{\sigma_c} \frac{L}{S}$$

3.2.3 Adição de resistências em série

Consideremos a associação de dois condutores cilíndricos de secção S , comprimentos L_1 e L_2 e condutividades σ_{c1} e σ_{c2} , representada na figura. Os condutores estão ligados a uma fonte de tensão V que lhes impõe uma corrente estacionária I .



- **Relação entre as densidade de corrente nos condutores**

Se os materiais condutores forem homogéneos, de condutividade constante, a corrente eléctrica está uniformemente distribuída. Por outro lado, a corrente que atravessa os condutores é igual. Deste modo, e como os condutores têm secção igual, as densidades de corrente são idênticas e constantes nos dois condutores. As linhas de campo são paralelas ao eixo longitudinal do condutor e têm a direcção da corrente eléctrica (\vec{u}_z). Podemos então escrever:

$$\vec{J}_1 = \vec{J}_2 = \vec{J} = J \vec{u}_z$$

- **Relação entre os campos eléctricos nos dois condutores**

Conhecida a densidade de corrente, a relação entre os campos eléctricos pode ser obtida pela lei de Ohm:

$$\vec{J} = \sigma_{c1} \vec{E}_1 = \sigma_{c2} \vec{E}_2 \Leftrightarrow \frac{E_1}{E_2} = \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{c1}}$$

- **Corrente eléctrica**

A corrente eléctrica que percorre o condutor é o fluxo da densidade de corrente através de uma secção do condutor. Sendo a normal à secção do condutor paralela à densidade de corrente temos:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int_S J dS = J \int_S dS = J S$$

a corrente pode ser também expressa em função dos campos eléctricos:

$$\begin{aligned} I &= \sigma_{c1} E_1 S \\ I &= \sigma_{c2} E_2 S \end{aligned}$$

- **Relação entre os campos eléctricos e a tensão aplicada**

A tensão aplicada ao sistema pode ser relacionada com os dois campos eléctricos existentes ou mesmo com cada um deles:

$$\begin{aligned} V &= \int_0^{L_1} \vec{E}_1 \cdot d\ell + \int_{L_1}^{L_1+L_2} \vec{E}_2 \cdot d\ell \\ &= \int_0^{L_1} E_1 dz + \int_{L_1}^{L_1+L_2} E_2 dz \\ &= E_1 L_1 + E_2 L_2 = E_1 L_1 + E_1 \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} L_2 \\ &= E_1 (L_1 + \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} L_2) = E_2 \frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{c1}} L_1 + E_2 L_2 \\ &= E_2 (\frac{\sigma_{c2}}{\sigma_{c1}} L_1 + L_2) \end{aligned}$$

- **Resistência do sistema**

Com as expressões obtidas para a corrente eléctrica e para a tensão podemos agora calcular a resistência eléctrica. Por exemplo, utilizando as expressões que estão expressas em função de E_1 :

$$R = \frac{V}{I} = \frac{E_1 (L_1 + \frac{\sigma_{c1}}{\sigma_{c2}} L_2)}{\sigma_{c1} E_1 S} = \frac{L_1}{\sigma_{c1} S} + \frac{L_2}{\sigma_{c2} S}$$

comparando esta expressão com a obtida para a resistência de um único condutor verificamos que

$$R = R_1 + R_2$$

3.2.4 Adição de resistências em paralelo

Consideremos a associação de dois condutores cilíndricos de secções S_1 e S_2 , comprimento L e condutividades σ_{c1} e σ_{c2} , representada na figura. Os condutores estão ligados a uma fonte de tensão V .

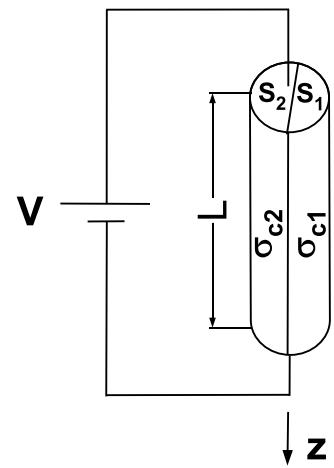
- **Relação entre os campos eléctricos nos dois condutores e a tensão V**

Se os materiais condutores forem homogéneos, de condutividade constante, a corrente eléctrica está uniformemente distribuída em cada um deles. As linhas de campo são paralelas ao eixo longitudinal do condutor e têm a direcção da corrente eléctrica (\vec{u}_z). Como ambos os condutores estão ligados directamente à fonte de tensão a diferença de potencial entre os seus extremos é a mesma. Desta forma,

$$V = \int_0^L \vec{E}_1 \cdot d\ell = \int_0^L \vec{E}_2 \cdot d\ell$$

$$V = E_1 L = E_2 L$$

$$E_1 = E_2 = E$$



- **A densidade de corrente nos condutores e a corrente eléctrica total**

Utilizando o resultado anterior e a lei de Ohm temos:

$$\vec{J}_1 = \sigma_{c1} E \vec{u}_z$$

$$\vec{J}_2 = \sigma_{c2} E \vec{u}_z$$

A corrente eléctrica total que percorre os condutores é o fluxo de cada uma das densidades de corrente através da respectiva secção. Sendo as normais às secções dos condutores paralelas às densidades de corrente temos:

$$\begin{aligned} I &= \int_{S_1} \vec{J}_1 \cdot \vec{n} dS + \int_{S_2} \vec{J}_2 \cdot \vec{n} dS \\ &= J_1 S_1 + J_2 S_2 = \sigma_{c1} E S_1 + \sigma_{c2} E S_2 \\ &= E (\sigma_{c1} S_1 + \sigma_{c2} S_2) \end{aligned}$$

- **Resistência do sistema**

Com as expressões obtidas para a corrente eléctrica e para a tensão podemos agora calcular a resistência eléctrica:

$$\begin{aligned} R &= \frac{V}{I} = \frac{E L}{E (\sigma_{c1} S_1 + \sigma_{c2} S_2)} \\ &= \frac{L}{\sigma_{c1} S_1 + \sigma_{c2} S_2} \end{aligned}$$

comparando esta expressão com a obtida para a resistência de um único condutor verificamos que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

3.2.5 Corrente eléctrica numa coroa esférica

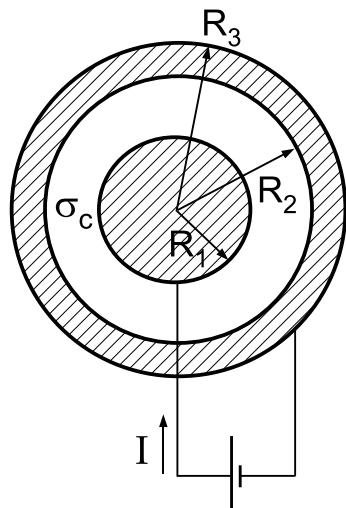
O espaço existente entre um condutor esférico de raio R_1 e uma coroa esférica condutora de raios R_2 e R_3 , está preenchido com um material de condutividade eléctrica σ_c . Os condutores estão ligados a uma fonte que assegura a passagem de uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I , do condutor interior para o exterior.

- **A densidade de corrente eléctrica**

Tendo o sistema simetria esférica e sendo o material homogéneo (σ_c é constante), a corrente eléctrica dirige-se radialmente do condutor interior para o condutor exterior, pelo $\vec{J} = J\vec{u}_r$. Para calcular o módulo da densidade de corrente podemos usar uma secção que é uma superfície esférica de raio r ($R_1 < r < R_2$). Nesta superfície \vec{J} será sempre paralelo à normal à superfície e além disso, devido à simetria do problema, J será constante. Deste modo,

$$I = \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS = \int J dS = J 4\pi r^2$$

$$\vec{J} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{u}_r$$



- **A resistência eléctrica do sistema**

Calculando a diferença de potencial a partir da lei de Ohm temos:

$$\begin{aligned} V &= \int \vec{E} \cdot d\ell = \int_{R_1}^{R_2} \frac{J}{\sigma_c} dr \\ &= \frac{I}{\sigma_c 4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \end{aligned}$$

$$R = \frac{V}{I} = \frac{1}{\sigma_c 4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

- **Densidade de potência dissipada por efeito de Joule**

$$p = J E = \frac{J^2}{\sigma_c} = \frac{1}{\sigma_c} \left(\frac{I}{4\pi r^2} \right)^2$$

- **Potência dissipada por efeito de Joule**

Como a densidade de potência não é constante (depende de r) não podemos obter a potência total multiplicando a sua densidade pelo volume da coroa esférica. Temos, isso sim, de integrar a densidade de potência no volume da coroa esférica (em coordenadas esféricas):

$$\begin{aligned} P &= \int_V p dV \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{\sigma_c} \left(\frac{I}{4\pi r^2} \right)^2 r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi \\ &= \frac{I^2}{\sigma_c 4\pi} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} = R I^2 = VI \end{aligned}$$

3.3 Exercícios Propostos

Exercício 3.1 : Um feixe de partículas alpha (constituídas por dois protões e dois neutrões), com carga eléctrica $q = 2e$, massa $m = 4m_p$, energia cinética 20 MeV/partícula e de secção $S = 1 \text{ mm}^2$, transporta uma corrente eléctrica de $0,25 \mu\text{A}$.

- Determine a densidade de corrente eléctrica, \tilde{J} .
- Determine a densidade de partículas existente no feixe, n .
- Determine o número de partículas alpha, N , que atravessam uma superfície plana perpendicular ao feixe, em cada segundo.
- Que diferença de potencial foi aplicada às partículas para as levar do estado de repouso ao estado cinético do feixe?

Exercício 3.2 : Um cabo de cobre com um comprimento $\ell = 1 \text{ km}$ e uma secção de $S = 10^{-4} \text{ m}^2$ tem aplicado um campo eléctrico de módulo $E = 0,05 \text{ V.m}^{-1}$. A condutividade eléctrica do cobre é $\sigma_c = 5,8 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{.m}^{-1}$. Determine:

- a densidade de corrente no cabo.
- a diferença de potencial entre as extremidades do cabo.
- a corrente transportada pelo cabo.
- a potência dissipada pelo cabo.

Exercício 3.3 : Um disco de espessura $\ell = 0,5 \text{ cm}$ e raio $R = 50 \text{ cm}$ está carregado uniformemente com uma densidade de carga $\rho = 10^{-6} \text{ C.m}^{-3}$. O disco roda com uma frequência angular $\omega = 50 \text{ r.p.m}$. Determine:

- a densidade de corrente eléctrica existente no disco.
- a corrente total que atravessa uma secção do disco.

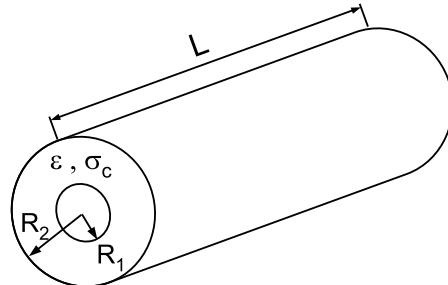
Exercício 3.4 : Um pára-raios termina num condutor esférico meio enterrado no solo. Uma pessoa dirige-se na sua direcção quando este recebe uma descarga de 2000 A. Sabendo que quando se dá a descarga a pessoa está a dar um (grande!) passo, estando o seu pé da frente a 50 metros do pára-raios e o seu pé de trás a 51 metros do pára-raios, calcule a diferença de potencial entre os

seus pés.

(Nota: $\sigma_{solo} = 10^{-2} \Omega^{-1}\text{.m}^{-1}$)

Exercício 3.5 : Para colocar o toner no papel uma fotocopiadora deposita primeiro uma certa quantidade de carga sobre uma superfície de selénio. Quando a superfície de selénio é iluminada com a imagem da cópia as zonas claras (com luz) tornam-se condutoras, escoando-se a carga que lá estava. As zonas negras (sem luz) mantêm-se isolantes, não escoando imediatamente a carga depositada. São essas as zonas escuras que vão atrair o toner e depois transferi-lo para o papel. A velocidade do processo está limitada pelo tempo de residência da carga no local em que foi colocada. Sabendo que a resistividade do selénio utilizado numa determinada fotocopiadora é $\rho = 10^{11} \Omega\text{.m}$ e que a sua permitividade eléctrica é $\epsilon = 6 \epsilon_0$, calcule o tempo durante o qual a carga depositada se reduz para metade.

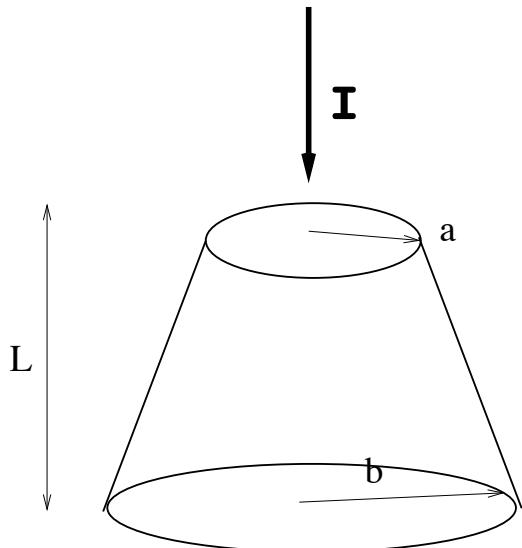
Exercício 3.6 : Um condensador cilíndrico de comprimento L e raios R_1 e R_2 ($L \gg R_2$), possui entre os condutores um material de permitividade eléctrica ϵ e de condutividade eléctrica σ_c . O condensador foi carregado electricamente por uma fonte de tensão V , com o terminal positivo ligado ao condutor interior do condensador, encontrando-se agora desligado.



- Determine a capacidade do condensador.
- Determine a corrente de fuga (I) do condensador através do material que separa os condutores, imediatamente após se ter desligado a fonte de tensão (quando o condensador possui a carga máxima).
- Verifique que a constante de tempo associada à descarga do condensador através da corrente de fuga, $\tau_{fuga} = R_{fuga}C$, é independente das dimensões do condensador e relacione o resultado obtido com a equação diferencial que descreve o escoamento de carga num meio condutor.

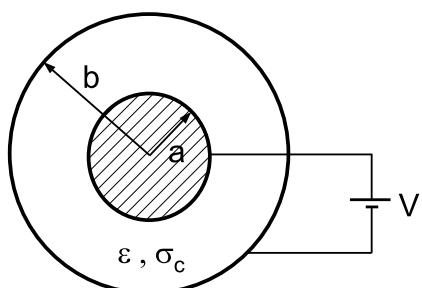
Capítulo 3

Exercício 3.7 : Uma resistência eléctrica, constituída por um material de condutividade eléctrica σ_c , possui uma forma cónica de altura L em que o topo superior possui um raio a e o topo inferior um raio b . A inclinação do cone é pequena ($b \sim a$), pelo que se pode considerar a densidade de corrente uniforme ao longo do cone. Sabendo que a resistência é percorrida por uma corrente I , determine:



- a) o campo eléctrico ao longo do condutor.
- b) a diferença de potencial na resistência.
- c) a resistência do dispositivo; particularize o resultado para um dispositivo cilíndrico ($b = a$).

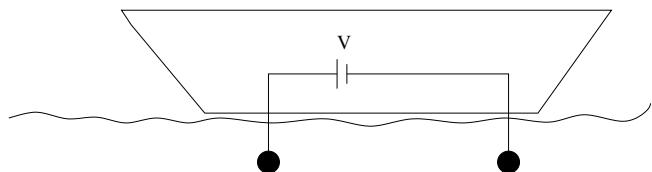
Exercício 3.8 : Considere o sistema da figura em que um condutor esférico de raio a está separado por um líquido de condutividade eléctrica σ_c e permitividade eléctrica ϵ , de um outro condutor cuja superfície interna de forma esférica, possui raio b . Os condutores estão ligados a uma bateria que mantém uma diferença de potencial V . Determine:



- a) o campo eléctrico, \vec{E} , no espaço entre os condutores (em função de V).

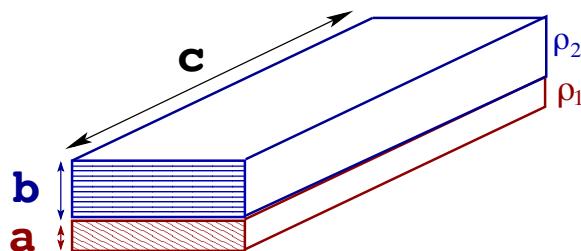
- b) a corrente eléctrica, I , que percorre o circuito.
- c) a resistência do sistema; esboce o gráfico da resistência do sistema em função do raio b .
- d) a resistência do sistema quando $b \gg a$; qual a relação entre a e b para a qual a resistência do sistema é 90% da máxima possível (quando $b \rightarrow \infty$)?

Exercício 3.9 : A medição da condutividade da água do mar pode fazer-se recorrendo a duas esferas metálicas de raio a , imersas na água e suficientemente afastadas, que se encontram ligas a uma fonte de tensão V .



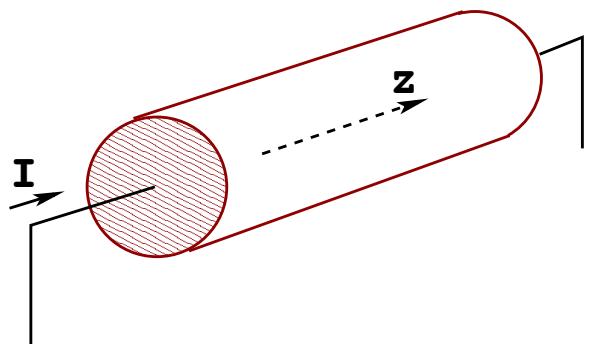
- a) Determine a resistência eléctrica do circuito.
Nota: despreze a resistência dos condutores e utilize o resultado do problema anterior.
- b) Admitindo que a leitura da corrente é I_0 , determine a condutividade eléctrica do água do mar.

Exercício 3.10 : Um condutor em forma de paralelepípedo com as dimensões apresentadas na figura abaixo é constituído por dois materiais com condutividades eléctricas diferentes σ_1 e σ_2 . Este dispositivo é atravessado por uma corrente eléctrica estacionária longitudinal (ao longo do comprimento do condutor).



- a) Relacione o campo eléctrico nas duas regiões do condutor.
- b) Determine a razão das correntes eléctricas nas duas regiões.
- c) Determine a resistência do condutor.

Exercício 3.11 : Um condutor de forma cilíndrica e raio R é feito de um material condutor cuja resistividade aumenta linearmente com a distância, sendo no início do cilindro $\rho(z=0) = \rho_1$ e no final do cilindro, $\rho(z=d) = \rho_2$. O condutor cilíndrico é atravessado por uma corrente eléctrica estacionária, I .



Determine:

- a expressão da resistividade do cilindro, $\rho(z)$.
- o campo eléctrico no interior cilindro.
- a resistência eléctrica do cilindro condutor.
- a carga eléctrica existente no cilindro condutor.

Atenção

Nesta versão não há páginas 69-70

Soluções

- 3.1 a) $J = 0,25 \text{ A.m}^{-2}$
 b) $n = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ partículas.m}^{-3}$
 c) $N = 7,8 \cdot 10^{11} \text{ partículas}$
 d) $V = 10 \text{ MV}$
- 3.2 a) $J = 29 \times 10^5 \text{ A.m}^{-2}$
 b) $V = 50 \text{ V}$
 c) $I = 290 \text{ A}$
 d) $P = 14,5 \text{ kW}$
- 3.3 a) $J = 5,2 \cdot 10^{-6} r (\text{A.m}^{-2})$
 b) $I = 3,25 \cdot 10^{-9} \text{ A}$
- 3.4 **12,5 V**
- 3.5 **3,7 s**
- 3.6 a) $C = \frac{2\pi\epsilon\ell}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$
 b) $I = V \frac{2\pi\ell\sigma_c}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}$
 c) $\tau_{fuga} = \frac{\epsilon}{\sigma_c}$, isto é, não depende da geometria do condensador e é idêntica à constante de tempo de escoamento de carga, como seria de esperar.
- 3.7 a) $E = \frac{I}{\sigma_c} \frac{1}{\pi \left(a + \frac{b-a}{L}y\right)^2}$
 b) $V = \frac{I}{\sigma_c} \frac{L}{\pi ab}$
 c) $R_{cone} = \frac{1}{\sigma_c} \frac{L}{\pi ab}; R_{cil} = \frac{1}{\sigma_c} \frac{L}{\pi R^2};$
- 3.8 a) $\vec{E} = V \frac{ab}{b-a} \frac{1}{r^2} \vec{u}_r$
 b) $I = V \sigma_c \frac{4\pi ab}{b-a}$
 c) $R = \frac{1}{\sigma_c} \frac{b-a}{4\pi ab}$
 d) $R_{max}(b \gg a) = \frac{1}{\sigma_c} \frac{1}{4\pi a};$
 $R = 0,9R_{max} \Rightarrow b = 10a$
- 3.9 a) $R = \frac{1}{2\pi a \sigma_c}$
 b) $\sigma_c = \frac{I_0}{2\pi a V}$

CAPÍTULO 4

Magnetostatica

Introdução

Em 1784 Coulomb estudou não só a força entre cargas eléctricas mas também a força entre ímanes. As suas experiências levaram-no a concluir que existe uma certa semelhança entre os fenómenos eléctricos e magnéticos: *o fluido magnético parece ter, pela sua natureza ou pelas suas propriedades, uma analogia com o fluido eléctrico.* No início de 1820, ano mágico do magnetismo, Oersted leva mais longe a intuição de Coulomb ao verificar que *as bússolas são desviadas na presença de uma corrente eléctrica; um fio com uma corrente é uma espécie de íman.* Esta constatação pode ser considerada como o início da unificação dos fenómenos eléctricos e dos fenómenos magnéticos, ou seja, o início do electromagnetismo. Hoje sabe-se que de facto os dois fenómenos são diferentes manifestações de uma mesma interacção física e que tudo depende do referencial. No entanto, por simplicidade, na maior parte das aplicações continua a ser mais conveniente estudar os fenómenos magnéticos enquanto tal.

Magnetismo

Foi também no ano de 1820, após as experiências de Oersted, que Ampère realizou experiências que o levam a concluir que a força existente entre dois fios rectilíneos de comprimentos L_1 e L_2 percorridos por correntes eléctricas I_1 e I_2 e distanciados de d é descrita por

$$\mathbf{F} = \mathbf{K}_m \frac{I_1 L_1 I_2 L_2}{d} \quad (4.1)$$

Ampère concluiu ainda que *dentro dos ímanes devem haver muitos circuitos muito pequenos percorridos por correntes eléctricas.*

Definindo um elemento de corrente $I d\vec{l}$ como o produto da corrente eléctrica que percorre um circuito por um elemento infinitesimal desse circuito, sabemos hoje que a força exercida por um elemento de corrente de um circuito 1 sobre um elemento de corrente de um circuito 2, distanciado de r , é dada por

$$d^2 \vec{F}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_2 d\vec{l}_2 \times I_1 d\vec{l}_1 \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (4.2)$$

Força magnética

em que

$$\frac{\mu_0}{4\pi} = 10^{-7} \text{ N.A}^{-2} \quad (4.3)$$

sendo μ_0 é a permitividade magnética do vácuo (e do ar!).

A força entre dois circuitos, da qual o resultado obtido por Ampère é um caso particular, pode ser obtida somando a contribuição de todos os elementos de corrente de cada um dos circuitos,

$$\vec{F}_{12} = \oint_2 \oint_1 d^2 \vec{F}_{12} \quad (4.4)$$

Um facto curioso é o de em geral $d^2 \vec{F}_{12} \neq -d^2 \vec{F}_{21}$, parecendo à primeira vista que a terceira lei de Newton não se aplica à força magnética. No entanto, é preciso lembrar que elementos de corrente não existem sozinhos mas sim integrados em circuitos fechados. A terceira lei de Newton aplica-se à força magnética mas na forma $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Uma abordagem mais eficaz ao cálculo das forças magnéticas, e que se revelaria mais tarde imprescindível para a descrição dos fenómenos electromagnéticos, foi proposta ainda no mesmo ano de 1820 por Biot e por Savart. Estes, a partir dos resultados de Ampère, propuseram a existência de um campo magnético, \vec{B} , e de uma lei que é conhecida pelos seus nomes: lei de Biot-Savart. À semelhança da definição de campo eléctrico, o campo magnético é obtido como a força por unidade de elemento de corrente sobre o qual é exercida, ou seja, isolando o efeito que o elemento de corrente gerador da força exerce sobre o espaço. Assim, um elemento de corrente do circuito 1 cria um campo magnético sobre um ponto P a uma distância r dado por

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I_1 d\vec{\ell}_1 \times \vec{u}_r}{r^2} \quad (4.5)$$

O campo magnético criado por todo o circuito 1 no ponto P é obtido somando (integrando) a contribuição de todos os seus elementos de corrente:

$$\vec{B}_1 = \oint_1 d\vec{B}_1 \quad (4.6)$$

A força exercida por este campo magnético sobre um elemento de corrente do circuito 2 é dada por

$$d\vec{F}_{12} = I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 \quad (4.7)$$

E, finalmente, a força que o campo magnético do circuito 1 exerce sobre todo o circuito 2 é dada por

$$\vec{F}_{12} = \oint_2 I_2 d\vec{\ell}_2 \times \vec{B}_1 \quad (4.8)$$

Campo magnético - Lei de Biot-Savart

Capítulo 4

A lei de Ampère é uma consequência da lei de Biot-Savart e resulta do facto de o campo magnético criado por um elemento de corrente finito diminuir com $1/r$, enquanto que o arco que corresponde a uma variação angular $d\theta$ aumenta com r . Desta forma, para caminhos fechados em torno de correntes, o produto do campo pelo comprimento do caminho é independente da distância à corrente que deu origem ao campo.

A lei de Ampère relaciona o integral de linha do campo magnético num caminho fechado com a corrente eléctrica que atravessa qualquer superfície que tenha como fronteira esse caminho fechado. Em geral, e por conveniência de cálculo, considera-se a superfície plana que se "apoia" no caminho fechado:

$$\oint_{\Gamma} \vec{B} \cdot d\ell = \mu_0 \int \vec{J} \cdot \vec{n} dS \quad (4.9)$$

Esta lei pode ser escrita na forma local, tendo em conta o teorema de Stokes, como:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (4.10)$$

Note que na aplicação da lei de Ampère, a escolha do sentido de circulação no cálculo do integral de linha do campo magnético define o sentido da normal à superfície plana delimitada pelo caminho fechado; uma circulação percorrida no sentido anti-horário resulta, aplicando a regra da mão direita, numa normal a apontar para "cima".

A lei de Ampère é útil para determinar:

- o módulo do campo magnético para certas distribuições de corrente, utilizando-se para tal um caminho fechado conveniente;
- a densidade de corrente eléctrica se se conhecer a expressão que descreve o campo magnético numa certa região do espaço

No cálculo do módulo do campo magnético, a aplicabilidade da lei de Ampère encontra-se reduzida a quatro geometrias tipo de distribuição de corrente:

- simetria cilíndrica
- bobina infinita
- corrente em torno de um toróide
- plano infinito de corrente

Um dipolo magnético consiste num circuito fechado percorrido por uma corrente eléctrica, sendo o anel de corrente um bom exemplo. O campo magnético produzido por um anel de corrente de raio a e corrente eléctrica I , em pontos existentes ao longo do seu eixo (assume-se o eixo dos zz coincidente com o eixo do anel), foi objecto de resolução na aplicação resolvida ??, tendo-se obtido:

$$B_z = \frac{\mu_0}{2} I a^2 \frac{1}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.11)$$

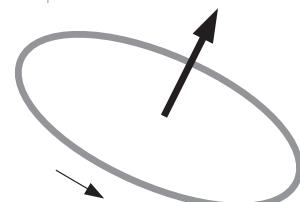
Definindo o **momento dipolar magnético** como,

$$\vec{m} = I \vec{A} \quad (4.12)$$

em que \vec{A} é a área do dipolo, cuja direcção e sentido, são definidos respectivamente pela normal ao plano do anel de corrente e pelo sentido de circulação da corrente (recordar a regra da mão direita!), pode-se reescrever o campo magnético como:

Campo magnético - Lei de Ampère

Dipolo magnético



$$B_z = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{m}{(a^2 + z^2)^{3/2}} \quad (4.13)$$

Os planetas do sistema solar possuem campos magnéticos que variam de planeta para planeta mas em primeira aproximação, a configuração do campo magnético corresponde ao produzido por um dipolo magnético. O momento dipolar magnético da Terra é de $m = 8 \times 10^{22}$ A.m². O campo magnético à superfície da Terra, calculado com o auxílio da expressão anterior, é da ordem de $0.1 \mu T$.

A aplicação de um campo magnético \vec{B} sobre um circuito eléctrico de comprimento L e percorrido por uma corrente eléctrica I , tem como consequência a existência de uma força:

$$\vec{F} = \int_L d\vec{\ell} \times \vec{B} \quad (4.14)$$

Caso a corrente eléctrica esteja distribuída em volume e tendo em conta que

$$I d\vec{\ell} = \vec{J} dS d\ell = \vec{J} dvol \quad (4.15)$$

a força pode-se re-escrever como sendo:

$$\vec{F} = \int_{vol} (\vec{J} \times \vec{B}) dvol \quad (4.16)$$

Para se compreender o funcionamento do motor de corrente contínua, importa estudar o comportamento de uma espira quadrada de lado ℓ percorrida por uma corrente I e submetida a um campo $B\vec{e}_x$. Os quatro lados da espira possuem forças aplicadas. As forças existentes sobre os troços da espira perpendiculares ao papel colocam a espira em rotação e as forças existentes sobre os outros dois troços exercem forças deformadoras da espira e anulam-se globalmente. A força sobre cada um dos dois troços perpendiculares ao papel é $\vec{F} = I\ell\vec{B}$. Sendo o momento dipolar magnético da espira dado por $\vec{m} = i\ell^2$, pode-se calcular o momento da força sobre a espira como sendo:

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \sum \vec{r} \times \vec{F} = \ell/2F \sin \alpha + \ell/2F \sin \alpha = I\ell^2 B \sin \alpha \\ &= mB \sin \alpha = \vec{m} \times \vec{B} \end{aligned} \quad (4.17)$$

Portanto, o momento da força aplicado à espira fá-la rodar de forma a alignar o seu momento dipolar magnético com o campo magnético externo.

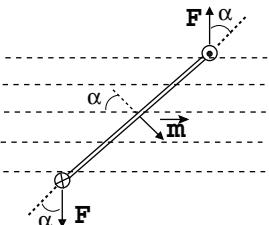
Em termos gerais, a aplicação de forças sobre um corpo pode ter como consequência um movimento de translação ou de rotação, no caso da existência de um momento da força. Desta forma, o trabalho infinitesimal realizado é dado por:

$$\begin{aligned} dW &= \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{r}) dt = (\vec{r} \times \vec{F}) \cdot \vec{\omega} dt \\ &= \vec{N} \cdot d\vec{\alpha} \end{aligned} \quad (4.18)$$

A energia da espira no campo magnético corresponderá assim ao trabalho que uma força exterior terá que realizar para a fazer rodar (contra o momento da força devido ao campo).

Interacção do dipolo magnético com campo \vec{B}

Energia potencial do dipolo magnético



Admitindo, por exemplo, que a espira esteja na posição de equilíbrio em que o seu momento dipolar magnético se encontra alinhado com o campo \vec{B} ($\alpha = 0$) e que a força exterior a pretende rodar de um ângulo θ no sentido anti-horário, o trabalho realizado vem:

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\theta (-\vec{N}) \cdot d\vec{\alpha} = \int_0^\theta (-N)(-d\alpha) = mB \int_0^\theta \sin \alpha d\alpha \\ &= -mB(\cos \theta - 1) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Este trabalho, corresponde à energia potencial do dipolo magnético na presença de um campo magnético uniforme. Por razões de simplicidade, uma vez que o zero do potencial ou da energia potencial é completamente arbitrário, a parte constante da expressão ($+mB$) pode ser eliminada, ficando então a energia potencial do dipolo como:

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B} \quad (4.20)$$

De notar que a posição de energia mínima $U = -mB$ se obtém quando $\theta = 0$, isto é, quando o momento dipolar magnético se encontra alinhado com o campo \vec{B} .

A presença de um meio material (que não o ar!) produz efeitos no campo magnético, tal como acontecia com o campo eléctrico. Do ponto de vista microscópico, a matéria é formada por átomos e estes são constituídos por um núcleo feito de protões e neutrões (carga total positiva) e electrões que numa visão clássica orbitam em torno do núcleo. Ao movimento orbital de raio r dos electrões com velocidade angular ω e carga eléctrica e , corresponde uma corrente eléctrica:

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{dq}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{e}{2\pi r} \underbrace{\omega r}_v = \frac{e}{2\pi} \omega \quad (4.21)$$

e portanto um momento dipolar magnético, $\vec{m} = \frac{1}{2}er^2\omega$. Tendo em conta que o momento angular associado ao electrão é $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m_e r^2 \omega$, vem para o momento dipolar magnético:

$$\vec{m} = \frac{e}{2m_e} \vec{L} \quad (4.22)$$

Além do mais, existe o número quântico *spin* associado à partícula cuja tradução clássica pode ser vista como uma rotação da partícula em torno de si própria, a que corresponde também um momento dipolar magnético. Donde, o momento dipolar magnético atómico resultará da soma dos diferentes momentos dipolares magnéticos associados ao átomo. Por exemplo, o emparelhamento dos electrões nos átomos com spins opostos $\uparrow\downarrow$ resulta na soma de dois momentos dipolares magnéticos simétricos, cujo resultado é zero. Uma nota adicional ainda para o facto do momento angular ser quantificado (mecânica quântica!), isto é, só pode assumir determinados valores múltiplos da unidade $\frac{h}{2\pi}$, onde h é a constante de Planck. O momento dipolar do electrão de 1ª ordem é $9,274^{-24} Am^2$.

Do ponto de vista magnético, os materiais dividem-se entre os que possuem átomos ou moléculas com momento dipolar magnético - **paramagnéticos** e **ferromagnéticos** - e aqueles que não possuem - **diamagnéticos**. Nos materiais ferromagnéticos, a interacção entre átomos resulta na existência de um alinhamento colectivo dos dipolos magnéticos, em domínios magnéticos.

Campo magnético na matéria

Capítulo 4

O comportamento de um material do ponto de vista magnético resulta do facto de este ser formado por átomos e estes possuirem dipólos magnéticos. O momento dipolar dos átomos ou moléculas do material pode ser nulo ou não. Admitamos no entanto estar na presença de um material paramagnético ou ferromagnético ao qual é aplicado um campo magnético B_0 . Tal como vimos anteriormente, os momentos dipolares magnéticos da substância tendem-se a alinhar com a direcção do campo magnético. Olhando para o material como um contínuo de dipólos, em cada volume microscópico do material pode-se definir um momento magnético dipolar,

$$d\vec{m} = \vec{M} dVol \quad (4.23)$$

onde \vec{M} é o vector magnetização cuja unidade é A/m . Desta forma, a contribuição dos dipólos para o campo magnético total poderia ser obtida integrando o campo magnético produzido por cada elemento dipolar $d\vec{m}$ sobre todo o volume magnetizado.

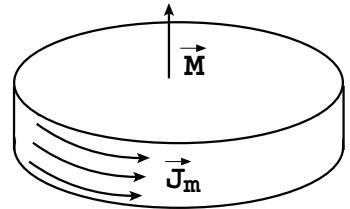
Os elementos dipolares da substância podem ser vistos como anéis de corrente eléctrica que caso a magnetização seja uniforme, se anulam no interior do material. Do ponto de vista do campo magnético, o efeito magnetização pode ser calculado a partir destas correntes eléctricas equivalentes - **correntes de magnetização** - que se formam no material seja à sua superfície, seja no seu interior. A densidade de corrente de magnetização é dada por:

à superfície do material, $\vec{J}_m = \vec{M} \times \vec{n}$ [A/m]

onde \vec{n} é o vector unitário normal à superfície do material e que aponta para fora deste.

no interior do material, $\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ [A/m^2]

Magnetização



Se colocarmos um enrolamento de espiras percorrido por corrente eléctrica I em volta de um cilindro feito de material magnetizável de permeabilidade μ , o campo magnético \vec{B} no interior do material resultará das contribuições das correntes eléctricas *livre* existente no enrolamento e de *magnetização* existente no material.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{tot} = \mu_0 \left(I_{livre} + \int_S \vec{J}_m \cdot d\vec{S} \right) \quad (4.24)$$

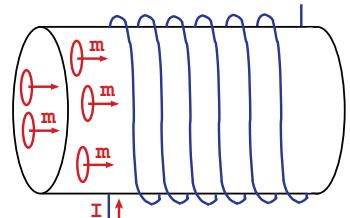
Tendo em conta que $\vec{J}_m = \vec{\nabla} \times \vec{M}$ e usando o teorema de Stokes obtemos a seguinte igualdade: $\int_S (\vec{\nabla} \times \vec{M}) \cdot d\vec{S} = \oint \vec{M} \cdot d\vec{l}$. Obtém-se assim a lei de Ampère generalizada,

$$\oint \underbrace{\left(\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right)}_{\vec{H}} \cdot d\vec{l} = I_{livre} \quad (4.25)$$

onde \vec{H} é o vector intensidade de campo magnético. Em meios lineares, a magnetização do material é proporcional à corrente eléctrica que circula no enrolamento: $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$. Em materiais do tipo paramagnético, $\chi_m > 0$ e materiais diagnéticos, $\chi_m < 0$. A relação entre o campo magnético \vec{B} e a intensidade de campo magnético \vec{H} , obtém-se então:

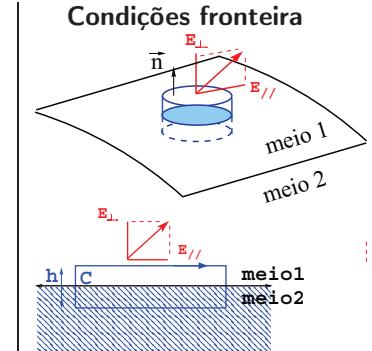
$$\frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0(+\chi_m)\vec{H} = \mu\vec{H} \quad (4.26)$$

Lei de Ampère generalizada



1.0

Força magnética



Continuidade da componente normal do campo \vec{B} Suponhamos dois meios, 1 e 2, e a sua superfície de separação. Pela lei de conservação do fluxo, o fluxo do campo magnético \vec{B} através de uma superfície cilíndrica, cujo eixo é paralelo à normal à superfície de separação dos meios é nulo. Designemos para tal, S_1 a superfície do topo do cilindro no meio 1, S_2 a superfície do topo do cilindro no meio 2 e S_l a superfície lateral do cilindro.

$$\Phi_B = \int_{S_1} B_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} B_2 \cdot \vec{n}_2 dS + \int_{S_l} B \cdot \vec{n} dS = 0$$

Se fizermos tender a altura do cilindro para zero ($h \rightarrow 0$), o terceiro termo no cálculo do fluxo anula-se uma vez que a superfície lateral do cilindro tende para zero. Ficamos então com:

$$\begin{aligned} \Phi_B &= \int_{S_1} B_1 \cdot \vec{n}_1 dS + \int_{S_2} B_2 \cdot \vec{n}_2 dS = 0 \\ &= \int_S (B_1 - B_2) \cdot \vec{n} dS = 0 \end{aligned}$$

Obtém-se então a continuidade da componente normal do campo \vec{B} na transição de meios, mesmo se a superfície de separação possuir correntes eléctricas superficiais.

$$(\vec{B}_1 - \vec{B}_2) \cdot \vec{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1^\perp = B_2^\perp \quad (4.27)$$

Descontinuidade da componente tangencial do campo \vec{B} Consideremos agora um plano perpendicular à superfície de separação e neste desenhemos um caminho fechado C de altura $h \rightarrow 0$. A aplicação do teorema de Ampère generalizado ao caminho fechado resulta em:

$$\begin{aligned} \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{\ell} &= I_{liv} \\ \int_{C_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{\ell} + \int_{C_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{\ell} &= \int (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot d\vec{\ell} = \int \vec{J}_s \cdot (\vec{n} \times d\vec{\ell}) \end{aligned}$$

onde \vec{J}_s é a corrente eléctrica superficial que passa na superfície de separação e atravessa o caminho C definido. Resulta então:

$$H_1^{\parallel} - H_2^{\parallel} = J_s \quad (4.28)$$

Exercícios Resolvidos

Força entre dois fios rectilíneos infinitos

Neste exemplo vamos calcular a força por unidade de comprimento que dois fios infinitos e paralelos, percorridos por correntes eléctricas I de igual sentido e distanciados de d , exercem um sobre o outro.

- **O campo magnético criado por um fio infinito**

Vamos começar por calcular o campo magnético que um fio infinito cria num ponto que esteja a uma distância r (ver figura). Cada elemento de corrente $I d\vec{z}$ do fio infinito cria um campo $d\vec{B}$ que é dado pela lei de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{z} \times \vec{u}_\rho}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin(\alpha) dz}{\rho^2} \vec{u}_\theta$$

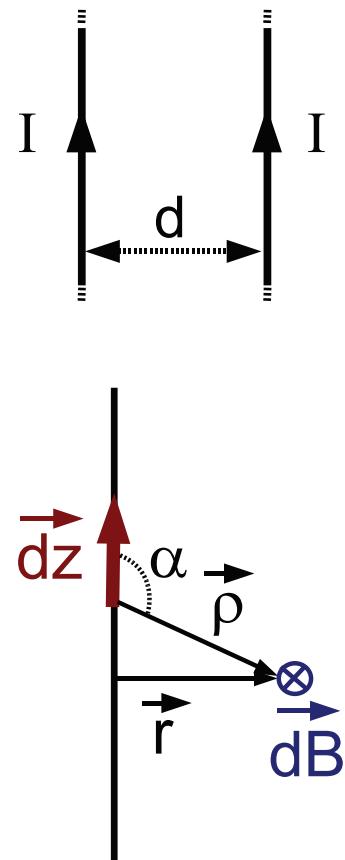
É fácil constatar que todos os elementos de corrente do fio irão criar um campo magnético com a direcção \vec{u}_θ pelo que podemos calcular o campo total tomando apenas o módulo de B :

$$\vec{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} dB \vec{u}_\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \sin(\alpha) dz}{\rho^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I r dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}}$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + r^2)^{3/2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I r}{4\pi} \left[\frac{z}{r^2 \sqrt{z^2 + r^2}} \right]_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \end{aligned}$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$



- A força do campo magnético de um fio infinito sobre um elemento de corrente do outro fio infinito

A força que o fio infinito cujo campo se calculou exerce sobre um elemento de corrente do outro fio, $d\vec{F}$, pode ser calculada pela lei de Laplace:

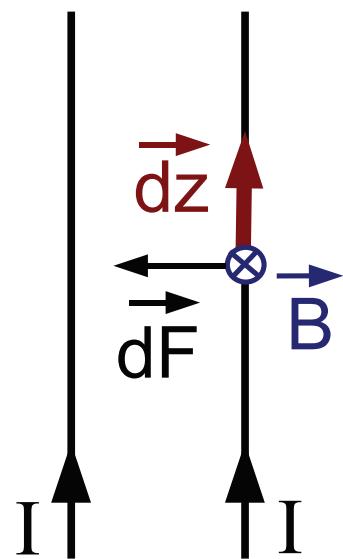
$$d\vec{F} = I d\vec{z} \times \vec{B} = I \frac{\mu_0 I}{2\pi d} d\vec{z} \times \vec{u}_\theta = \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} dz (-\vec{u}_r)$$

- A força do campo magnético de um fio infinito sobre uma unidade de comprimento do outro fio infinito

A força do campo magnético de um fio infinito sobre uma unidade de comprimento do outro fio pode agora ser obtida integrando para uma unidade de comprimento a expressão obtida para a força sobre um elemento de corrente:

$$\vec{F} = \int_0^1 \frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} dz (-\vec{u}_r) = -\frac{\mu_0 I^2}{2\pi d} \vec{u}_r$$

Como corolário deste exemplo verifica-se que dois fios percorridos por correntes de igual sentido se atraem.



Motor de corrente contínua

Uma espira quadrada de lado L é percorrida por uma corrente eléctrica I . A espira encontra-se numa zona do espaço em que existe um campo magnético descrito por $\vec{B} = B\vec{u}_x$ e, tal como é mostrado na figura, o plano da espira faz um ângulo α com o campo magnético. Pretende-se calcular as forças a que cada um dos lados da espira está sujeito e verificar como se pode construir um motor de corrente contínua com um sistema deste tipo.

- A força exercida sobre cada um dos lados da espira**

A força que o campo magnético exerce sobre os elementos de corrente da espira pode ser calculada pela expressão da força de Laplace:

$$d\vec{F} = Id\ell \times \vec{B}$$

Utilizando a numeração da figura relativamente a cada lado da espira,

$$d\vec{F}_1 = Idy(-\vec{u}_y) \times B\vec{u}_x = IBdy\vec{u}_z$$

$$d\vec{F}_2 = Id\ell_2 \vec{u}_{d\ell_2} \times B\vec{u}_x = -IB\text{sen}(\alpha)d\ell_2\vec{u}_y$$

$$d\vec{F}_3 = Idy\vec{u}_y \times B\vec{u}_x = -IBdy\vec{u}_z$$

$$d\vec{F}_4 = Id\ell_4 \vec{u}_{d\ell_4} \times B\vec{u}_x = IB\text{sen}(\alpha)d\ell_4\vec{u}_y$$

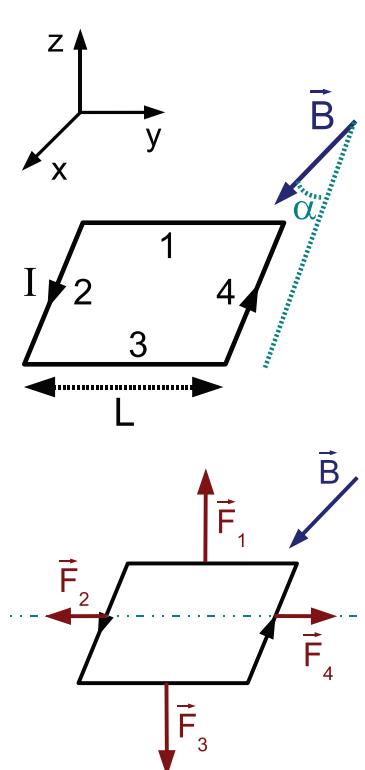
As forças sobre cada um dos lados da espira calculam-se integrando as equações anteriores:

$$\vec{F}_1 = \int_0^L IBdy\vec{u}_z = IBL\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_2 = - \int_0^L IB\text{sen}(\alpha)d\ell_2\vec{u}_y = -IBL\text{sen}(\alpha)\vec{u}_y$$

$$\vec{F}_3 = - \int_0^L IBdy\vec{u}_z = -IBL\vec{u}_z$$

$$\vec{F}_4 = \int_0^L IB\text{sen}(\alpha)d\ell_4\vec{u}_y = IBL\text{sen}(\alpha)\vec{u}_y$$



Vai então existir um binário devido às forças \vec{F}_1 e \vec{F}_3 que vai fazer a espira rodar em torno do eixo YY. As forças \vec{F}_2 e \vec{F}_4 tenderão a distorcer o circuito caso este não tenha a resistência mecânica suficiente para manter a sua forma.

- Pontos de equilíbrio e funcionamento do motor**

Os pontos de equilíbrio do sistema são atingidos quando o momento das forças aplicadas é nulo. O momento de cada uma das quatro forças é

$$\vec{N}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 = IB \frac{L^2}{2} \sin(\vec{r}_1 \hat{\vec{F}}_1) \vec{u}_y$$

$$\vec{N}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = 0$$

$$\vec{N}_3 = \vec{r}_3 \times \vec{F}_3 = IB \frac{L^2}{2} \sin(\vec{r}_3 \hat{\vec{F}}_3) \vec{u}_y$$

$$\vec{N}_4 = \vec{r}_4 \times \vec{F}_4 = 0$$

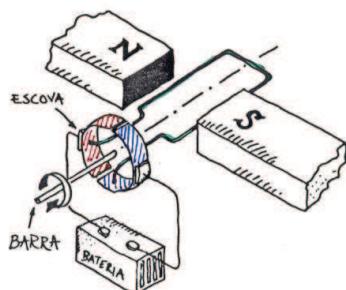
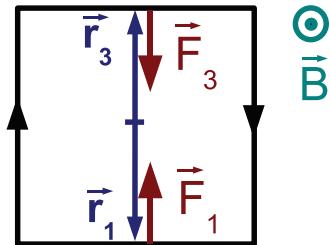
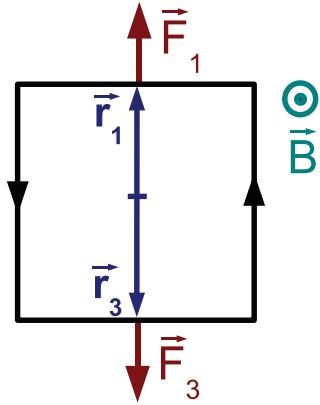
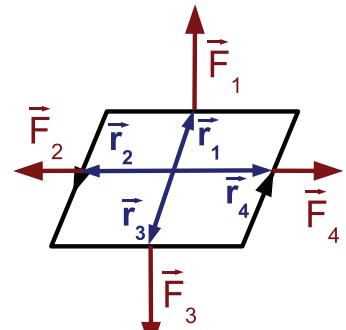
Vão existir dois ângulos possíveis para se obter um momento total nulo, com as forças paralelas ou anti-paralelas aos vectores posição:

$$(\vec{r}_1 \hat{\vec{F}}_1) = (\vec{r}_3 \hat{\vec{F}}_3) = 0^\circ$$

e

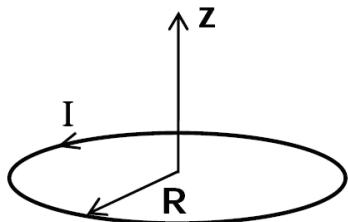
$$(\vec{r}_1 \hat{\vec{F}}_1) = (\vec{r}_3 \hat{\vec{F}}_3) = 180^\circ$$

Contudo apenas a primeira das situações conduz a um ponto de equilíbrio estável. Quando o ângulo entre a força e o vector posição é 180° um pequeno desvio em relação a essa posição faz com que a espira rode para atingir o ponto de equilíbrio estável, com um ângulo de 0° . Este resultado é o que está na base do funcionamento dos motores de corrente contínua. Os terminais do circuito estão ligados a uma fonte de tensão contínua através de um sistema de escovas que inverte a polaridade da corrente quando se atinge o ponto de equilíbrio estável. Ao inverter-se a direcção da corrente a força troca de sentido e o ponto de equilíbrio que era estável passa a instável. Mas como a inércia do movimento do circuito faz com que o ponto de equilíbrio (agora instável) seja sempre ultrapassado, o circuito prossegue a sua rotação em busca do ponto de equilíbrio estável. Quando lá chega a polaridade torna a inverter, e assim sucessivamente.

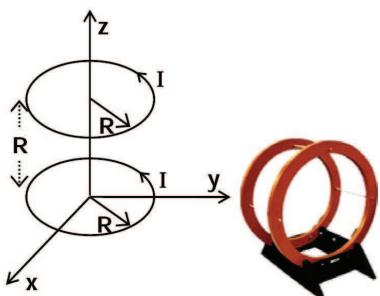


Exercícios Propostos

Exercício 4.1 : Uma espira circular de raio R situada no plano XY e centrada na origem é percorrida por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I . Determine o campo magnético \vec{B} num ponto do eixo zz , à distância genérica z do plano da espira.



Exercício 4.2 : Uma forma de gerar um campo magnético relativamente uniforme numa dada zona do espaço é através de um sistema composto por duas espiras circulares de raio R , separadas por uma distância R também e percorridas por uma corrente I com igual sentido, tal como se mostra na figura (bobinas de Helmholtz).



- a) Verifique que o campo magnético criado por uma espira circular de raio R e percorrida por uma corrente I , num ponto do eixo que passa pelo seu centro a uma distância z da espira, é dado pela expressão:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 (z^2 + R^2)^{-3/2} \vec{u}_z$$

- b) Verifique que o campo magnético criado pelo sistema de duas espiras representado na figura é dado por:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} IR^2 \left((z^2 + R^2)^{-3/2} + ((z - R)^2 + R^2)^{-3/2} \right) \vec{u}_z$$

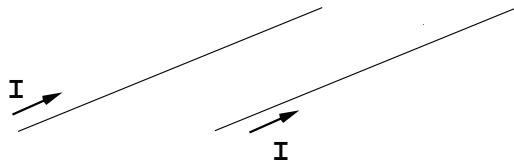
- c) Verifique que para $z = \frac{R}{2}$, se tem $\frac{dB}{dz} = 0$.

Nota: Derivando mais uma vez obter-se-ia, $\frac{d^2B}{dz^2} = 0$, o que é indicador de que o campo magnético é aproximadamente constante (até à segunda ordem) na região entre as espiras.

Exercício 4.3 : Determine, utilizando a lei de Biot-Savart, o campo magnético criado por um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária I , a uma distância r do fio.

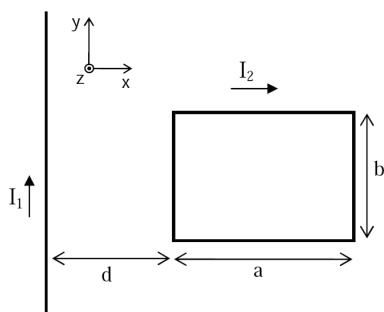
Exercício 4.4 : Uma espira quadrada de lado ℓ , colocada no plano xy é percorrida por uma corrente eléctrica I . Determine o campo magnético existente no seu centro geométrico.

Exercício 4.5 : Dois fios paralelos muito compridos transportam correntes de $I = 10\text{ A}$ no mesmo sentido e encontram-se separados por uma distância de $\ell = 1\text{ mm}$.



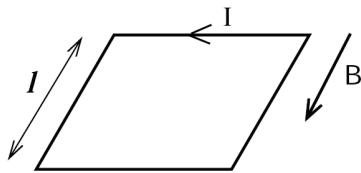
Determine a força que actua em 2 metros de cada um dos fios.

Exercício 4.6 : Um fio rectilíneo muito longo transporta uma corrente I_1 e na sua proximidade e à distância d é colocada uma espira rectangular, que é percorrida por uma corrente eléctrica I_2 . Determine:



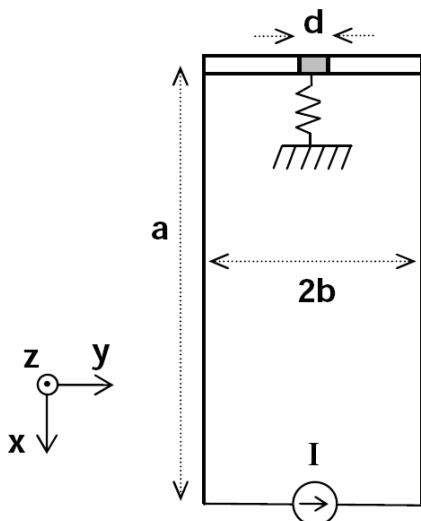
- a) a força que o fio rectilíneo exerce sobre a espira.
 b) a força que a espira exerce sobre o fio.
 c) o momento das forças que actuam os lados da espira em relação ao seu centro geométrico.

Exercício 4.7 : Um motor de corrente contínua é constituído por um circuito quadrado de lado ℓ , percorrido por uma corrente I , na presença de um campo magnético uniforme, B . A normal ao circuito forma um ângulo de 90° com a direcção do campo magnético.



- Determine a força exercida em cada um dos lados do circuito.
- Determine a resultante das forças que actuam no circuito.
- Determine o momento das forças (\vec{N}) que actuam o circuito relativamente ao seu centro.
- Define-se o momento do dipolo magnético como $\vec{m} = IA\vec{n}$, sendo A a área do circuito. Mostre que poderia escrever o momento das forças aplicadas ao circuito como $\vec{N} = \vec{m} \times \vec{B}$.

Exercício 4.8 : Um corta-circuitos de correntes industriais é formado por dois fios muito longos de comprimento a , ligados por uma barra metálica de comprimento $2b \ll a$, como se mostra na figura. A barra contém a meio uma parte móvel de comprimento $d \ll 2b$, que está ligada a um ponto fixo através de uma mola. Para deslocar a parte móvel e interromper o circuito é necessário exercer uma força $\vec{F} = -F\vec{u}_x$.



- Determine a expressão do campo magnético, \vec{B} , no ponto médio da parte móvel da barra, em função da intensidade de corrente que circula no corta-circuitos, I . Despreze a contribuição do troço inferior do circuito.
- Admitindo que o campo calculado em a) é aproximadamente constante na parte móvel da barra, obtenha a expressão para o valor da intensidade de corrente acima do qual o circuito é interrompido.

- Utilizando qualitativamente os resultados das alíneas anteriores diga, justificando, qual a forma geométrica que tomaria um circuito constituído por um fio extremamente flexível, percorrido por uma corrente, na ausência de qualquer força exterior.

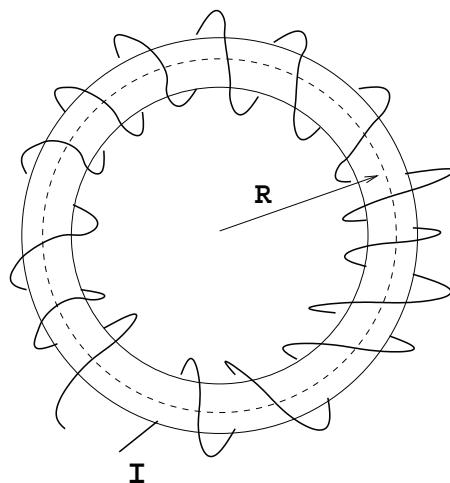
Exercício 4.9 : Um disco isolante de raio R , que está uniformemente carregado com uma densidade de carga superficial σ , encontra-se a rodar com uma velocidade angular ω . Determine o campo magnético no centro do disco.

Exercício 4.10 : Numa fábrica de plásticos, devido à fricção do plástico nos rolos cilíndricos ao longo dos quais é arrastado, gerou-se no plástico uma carga superficial $+\sigma$. Sabendo que o plástico se desloca com uma velocidade v , determine o campo magnético junto ao plástico.

Exercício 4.11 : Determine, utilizando a lei de Ampère, o campo magnético criado por um fio infinito percorrido por uma corrente estacionária I , a uma distância r do fio.

Exercício 4.12 : Um solenóide bastante longo (comprimento $L \gg R$) possui uma densidade de espiras n e é percorrido por uma corrente estacionária I . Determine o campo magnético no interior do solenóide.

Exercício 4.13 : O tokamak, acrônimo russo para câmara magnética toroidal, é usado no confinamento do plasma quente ionizado na fusão nuclear. O enrolamento eléctrico tem uma forma toroidal de raio médio R , possui N espiras e é percorrido por uma corrente eléctrica I .



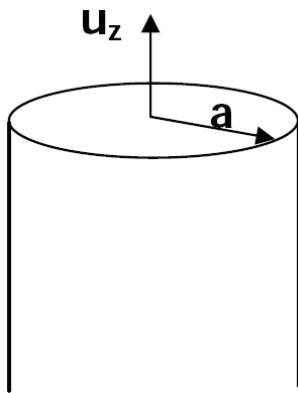
- Determine o campo magnético na circunferência de raio R , que passa pelo centro das espiras.

- b) Verifique que se utilizar a densidade de espiras, n , referida ao comprimento da circunferência de raio R , a expressão do campo não depende de R . Diga qual será o campo magnético criado por uma bobina infinita.

Exercício 4.14 : Um cabo coaxial tem um condutor central de raio a separado por um material isolante de um tubo condutor concêntrico de raios interno e externo b e c , respectivamente. Os dois condutores transportam correntes eléctricas com sentidos opostos, uniformemente distribuídas e paralelas aos respectivos eixos. A intensidade da corrente em cada um dos condutores é I. Determine o campo magnético nas seguintes regiões:

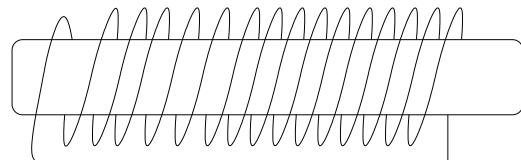
- Interior do condutor central ($r < a$).
- Espaço entre os dois condutores ($a < r < b$).
- Interior do condutor exterior ($b < r < c$).
- Exterior do cabo coaxial ($r > c$).

Exercício 4.15 : Um condutor cilíndrico muito comprido, de raio a e preenchido por um material de permeabilidade magnética μ_0 , é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária não uniforme cuja densidade de corrente é descrita por $\vec{J} = J_0 r \vec{u}_z$.



- Determine a intensidade de corrente que atravessa a secção transversal do condutor.
- Desenhe as linhas de campo magnético e obtenha a sua expressão para todo o espaço ($r < a$ e $r > a$). Faça um gráfico de $B(r)$.
- Sabendo que a corrente é mantida por uma fonte que aplica ao condutor uma diferença de potencial por unidade de comprimento V' , determine a condutividade do cilindro, σ .

Exercício 4.16 : Um cilindro com um comprimento $\ell = 20$ cm, muito estreito e feito de um material com uma susceptibilidade magnética $\chi_m = 2$, constitui o núcleo de um enrolamento com 150 espiras que são percorridas por uma corrente $I = 2$ A. Determine:

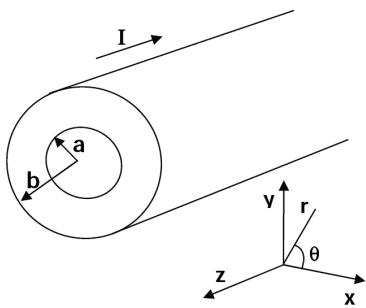


- a permeabilidade magnética μ do material.
- a intensidade do campo magnético, \vec{H} , a magnetização produzida no material \vec{M} e o campo magnético \vec{B} , no interior do cilindro.
- as correntes de magnetização no material.

Exercício 4.17 : Um material condutor cilíndrico muito comprido de raio R e permeabilidade magnética μ , é percorrido por uma corrente eléctrica estacionária, uniformemente distribuída, de intensidade I .

- Determine o campo magnético, \vec{B} , criado pelo condutor no seu exterior a uma distância r do seu eixo (não muito afastado do condutor).
- Determine o campo magnético, \vec{B} , criado pelo condutor no seu interior.
- Determine a densidade de corrente de magnetização no condutor, \vec{J}_M .

Exercício 4.18 : Um condutor de cobre, de secção circular, comprido e rectilíneo, de raio a , está coberto com uma camada de ferro de raio exterior b ($b = a + \text{espessura}$). Este condutor compósito é percorrido por uma intensidade de corrente I . Sendo a permeabilidade magnética do cobre μ_0 e a do ferro μ e sendo as suas condutividades eléctricas respectivamente σ_{Cu} e σ_{Fe} , determine:

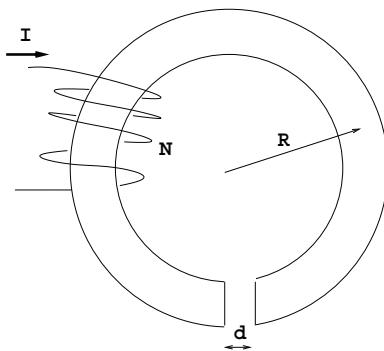


- a densidade de corrente existente no Cobre (J_{Cu}) e no Ferro (J_{Fe}).
- b) a intensidade do campo magnético, \vec{H} e o campo magnético \vec{B} , em todas as regiões do espaço, em função de J_{Cu} e J_{Fe} .

Exercício 4.19 : Utilize as condições fronteira do campo magnético na ausência de correntes para verificar que os materiais ferromagnéticos se comportam como condutores das linhas de campo.

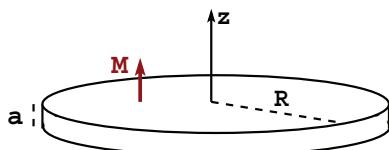
Sugestão: utilize a aproximação $\mu \gg \mu_0$.

Exercício 4.20 : Nas cabeças de gravação magnéticas os campos são criados por correntes pequenas e para se obterem campos intensos, utilizam-se entreferros (aberturas em núcleos de materiais ferromagnéticos). Um caso simples de um entreferro está representado na figura abaixo, em que um núcleo de material ferromagnético com a forma de um anel cilíndrico de raio médio $R = 1\text{ cm}$, possui um enrolamento de $N = 20$ espiras, percorridas por uma corrente de $I = 1\text{ mA}$. Nesse núcleo foi aberto um espaço de largura $d = 10\text{ }\mu\text{m}$.



- a) Utilizando as equações que descrevem o campo magnético, verifique que na fronteira de separação entre o ar e o ferro, se verifica a condição $B_{\perp ar} = B_{\perp Fe}$.
- b) Calcule o campo magnético no entreferro, B_{ar} , na linha de campo média ($r = R$), assumindo que o material ferromagnético apresenta para estas condições uma permeabilidade magnética $\mu = 10^5 \mu_0$.

Exercício 4.21 : Um cilindro de espessura $a = 1\text{ mm}$ e raio $R = 1\text{ cm}$ encontra-se magnetizado uniformemente ao longo do eixo zz , sendo a sua magnetização $M = 10^5\text{ A.m}^{-1}$.



- a) Calcule as correntes equivalentes de magnetização no cilindro, \vec{J}_m . Esboce as correntes no cilindro.
- b) Fazendo as aproximações que considerar convenientes, calcule o campo magnético \vec{B} no eixo do cilindro, para $z = 0$.
- c) Esboce as linhas de campo magnético no interior do disco e no espaço à sua volta.

Soluções

4.1 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}} \vec{u}_z$

4.3 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta$

4.4 $\vec{B} = \frac{2\sqrt{2}\mu_0}{\pi} \frac{I}{L} \vec{u}_z$

4.5 $F = 4 \cdot 10^{-2}$ N (atractiva)

4.6 a) $\vec{F}_{12} = -\frac{\mu_0}{2\pi} I_1 I_2 b \left(\frac{1}{d} - \frac{1}{d+a} \right) \vec{u}_x$

b) $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$

c) $\vec{M} = 0$

4.7 a) $\vec{F} = 0$, nos lados paralelos a \vec{B}
 $\vec{F} = \pm I B \ell \vec{n}$, nos dois outros lados

b) $\sum_i \vec{F}_i = 0$

c) $N = I \ell^2 B$

4.9 $B = \frac{\mu_0}{2} \sigma \omega R$

4.10 $B = \frac{\mu_0}{2} \sigma V$, paralelo à superfície do plástico e perpendicular à sua velocidade.

4.11 $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta$

4.12 $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_z$

4.13 a) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{NI}{R} \vec{u}_\theta$

b) $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{u}_\theta$

4.14 a) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ir}{a^2} \vec{u}_\theta$

b) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \vec{u}_\theta$

c) $\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r} \left(1 - \frac{r^2-b^2}{c^2-b^2} \right) \vec{u}_\theta$

d) $B = 0$

4.15 a) $I = J_0 \frac{2\pi}{3} a^3$

b) $r < a, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{3} J_0 r^2 \vec{u}_\theta$
 $r > a, \quad \vec{B} = \frac{\mu_0}{3} \frac{J_0}{r} a^3 \vec{u}_\theta$

c) $\sigma(r) = \frac{J_0}{V} r$

4.16 a) $\mu = 3,8 \text{ } \mu\text{H.m}^{-1}; \mu_r = 3$

b) $H = 1500 \text{ A.m}^{-1}$
 $M = 3000 \text{ A.m}^{-1}$
 $B = 5,7 \text{ mT}$

c) $J_M = 3000 \text{ A.m}^{-1}$

4.21 a) $\vec{J}_M = 10^5 \vec{u}_\theta \text{ A.m}^{-1}$

c) $\vec{B} = 6,3 \vec{u}_z \text{ mT}$

Atenção

Nesta versão não há páginas 89-94

CAPÍTULO 5

Partículas e campos

Introdução

As propriedades da força eléctrica já foram estudadas no capítulo da electrostática. Recapitulemos os aspectos relevantes da sua acção sobre uma partícula carregada. Na presença de um campo eléctrico \vec{E} uma partícula de carga q sofre uma força descrita por

$$\vec{F} = q\vec{E} \quad (5.1)$$

O trabalho que esta força realiza sobre a carga ao longo de um percurso entre dois pontos a e b é

$$W_e = \int_a^b \vec{F} \cdot d\ell = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\ell = qV_{ab} \quad (5.2)$$

Ou seja, o campo eléctrico realiza um trabalho sobre as cargas que depende apenas da diferença de potencial aplicada e que vai acelerar as cargas.

No capítulo da magnetostática verificou-se que a força que um campo magnético \vec{B} exerce sobre um elemento de corrente $I\vec{d}\ell$ é dada pela expressão de Laplace:

$$d\vec{F} = I\vec{d}\ell \times \vec{B} \quad (5.3)$$

Esta é a força exercida sobre um conjunto de cargas em movimento existentes no elemento $d\ell$. A questão que agora se põe é saber qual a força exercida sobre uma única carga.

A um elemento $d\ell$ corresponde um elemento de volume $dV = Sd\ell$, em que S é a secção onde passa a corrente eléctrica. O número de partículas carregadas num elemento de volume dV será então $N_p = NdV$ em que N é a densidade de portadores de carga, ou seja, o número de cargas existentes por unidade de volume. A força que o campo magnético exerce sobre uma partícula carregada será então a força que o campo magnético exerce sobre um elemento de corrente a dividir pelo número de partículas carregadas existentes nesse elemento de corrente:

Força eléctrica sobre uma partícula carregada

Força magnética sobre uma partícula carregada

$$\vec{F} = \frac{I\vec{d}\ell}{N_p} \times \vec{B} = \frac{\vec{J}Sd\ell}{NSd\ell} \times \vec{B} = \frac{Nq\vec{v}}{N} \times \vec{B} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (5.4)$$

Uma primeira propriedade desta força magnética pode ser encontrada decompondo a velocidade numa componente paralela ao campo magnético, $\vec{v}_{||}$, e numa componente perpendicular ao campo magnético, \vec{v}_{\perp} . A equação da força magnética pode então ser reescrita na forma

$$\vec{F} = q(\vec{v}_{||} + \vec{v}_{\perp}) \times \vec{B} = q(0 + \vec{v}_{\perp} \times \vec{B}) = q\vec{v}_{\perp} \times \vec{B} \quad (5.5)$$

Isto significa que a força magnética depende apenas da componente da velocidade perpendicular ao campo.

Vamos agora calcular o trabalho que esta força realiza sobre a carga ao longo de um percurso entre dois pontos a e b :

$$W_m = \int_a^b \vec{F} \cdot d\ell = q \int_{t_a}^{t_b} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 \quad (5.6)$$

Podemos então concluir que a força magnética não realiza trabalho sobre as partículas carregadas. Isto significa que, em todos os instantes, a força magnética é perpendicular ao deslocamento da partícula, alterando a direcção da sua velocidade mas não o seu módulo (a energia cinética mantém-se constante). Por outras palavras, a força magnética é uma força centrípeta que obriga as partículas a curvarem as suas trajectórias.

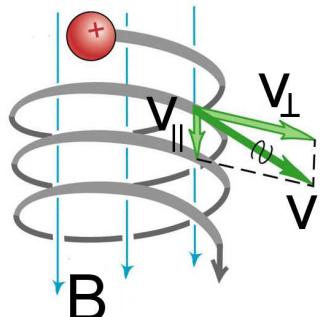
O raio de curvatura da trajectória de uma partícula carregada sujeita a um campo magnético pode ser encontrado igualando a expressão da força magnética à expressão de uma força centrípeta (segundo a direcção radial de um sistema de coordenadas):

$$qvB_{\perp} = m\frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{mv}{qB_{\perp}} \quad (5.7)$$

Uma partícula carregada que se move com energia cinética constante na presença de um campo magnético terá, em geral, uma trajectória que é uma hélice. Esta trajectória helicoidal resulta da sobreposição de uma trajectória que é uma circunferência, devido à sua velocidade perpendicular ao campo magnético, com um trajectória linear, devido à sua velocidade paralela ao campo magnético que se mantém inalterada.

Trajectória de uma partícula carregada e sujeita a um campo magnético



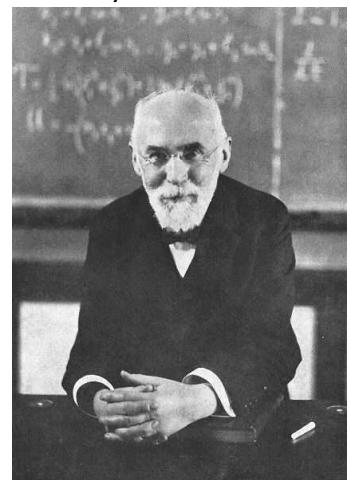
Capítulo 5

A força de Lorentz não é mais que o princípio da sobreposição aplicado a uma partícula que se move num campo eléctrico e num campo magnético:

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (5.8)$$

A equação foi desenvolvida por Lorentz em 1895 e, apesar da sua aparência simples, foi um avanço científico significativo para a época. Havia já 10 anos que se conheciam as ondas electromagnéticas, corolário do trabalho de "finalização" da teoria do electromagnetismo de Maxwell, mas ainda não existiam partículas em física. A força de Lorentz foi confirmada pelos trabalhos de Thomson dois anos mais tarde, em 1897.

A força de Lorentz



Exercícios Resolvidos

Partículas aceleradas

Num cinescópio de uma televisão são acelerados electrões, a partir do estado de repouso, por uma diferença de potencial de 20 kV.

Para além do campo eléctrico, os electrões estão também sujeitos ao campo magnético terrestre. Vamos admitir que a componente do campo magnético terrestre que é perpendicular ao movimento dos electrões é $B_{\perp} = 30 \mu T^1$.

- **A velocidade atingida pelos electrões**

O trabalho realizado pelo campo eléctrico é integralmente convertido em energia cinética dos electrões, que partem de um estado de energia cinética nula. Deste modo

$$\begin{aligned} W &= \int \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = q \int \vec{E} \cdot d\vec{\ell} = q V \\ &= 1,6 \times 10^{-19} \times 20 \times 10^3 = 3,2 \times 10^{-15} J \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{2W}{m}} \\ v &= \sqrt{\frac{2 \times 3,2 \times 10^{-15}}{9,1 \times 10^{-31}}} = 0,28 c \end{aligned}$$

- **Raio da trajectória dos electrões devido ao campo magnético terrestre**

O campo magnético terrestre não realizará trabalho mas exercerá uma força centripeta que fará com que os electrões tenham uma trajectória curva. Vamos calcular o raio da trajectória quando os electrões atingem a sua velocidade máxima. A relação entre o raio da trajetória e a velocidade dos electrões pode encontrar-se igualando o módulo da força magnética à força centripeta:

$$qvB_{\perp} = m \frac{v^2}{R} \Leftrightarrow R = \frac{mv}{qB_{\perp}}$$

$$R = \frac{9,1 \times 10^{-31} \times 0,28 \times 3 \times 10^8}{1,6 \times 10^{-19} \times 30 \times 10^{-6}} = 16 m$$

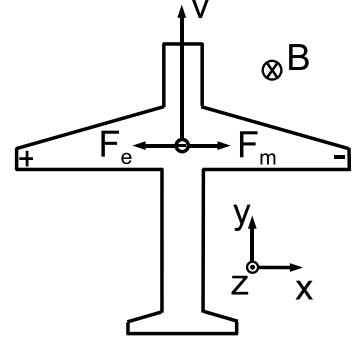
Condutor em movimento

Um avião, com uma envergadura de asas de 40 m, desloca-se horizontalmente com uma velocidade de cruzeiro de $\vec{v} = 900 \hat{u}_y \text{ km.h}^{-1}$. No local em que se encontra, o campo magnético terrestre tem uma componente perpendicular à sua velocidade de $B_{\perp} = -35 \hat{u}_z \mu\text{T}$.

- **A força magnética que actua sobre os electrões**

Os electrões livres do avião deslocam-se com a sua velocidade e estão sujeitos a uma força magnética dada por

$$\begin{aligned}\vec{F}_m &= q\vec{v} \times \vec{B}_{\perp} = -qvB_{\perp} \hat{u}_x \\ \vec{F}_m &= evB_{\perp} \hat{u}_x\end{aligned}$$



Onde e representa a carga unitária (positiva). Conclui-se então que os electrões são "puxados" para uma das pontas da asa, ficando naturalmente em falta na outra ponta. Esta distribuição de carga cria por sua vez um campo eléctrico que actua sobre os electrões através de uma força que tem a mesma direcção mas sentido contrário ao da força magnética.

- **O campo eléctrico que actua sobre os electrões**

Enquanto a força magnética que actua os electrões livre do metal for maior que a força eléctrica devida à distribuição de carga os electrões continuarão a ser "puxados" para a ponta da asa, aumentando a distribuição de carga. Deste modo, o campo eléctrico irá aumentando até que a força eléctrica iguala em módulo a força magnética. A partir desse momento a força total sobre os electrões é nula e atinge-se um equilíbrio electrostático. A partir da condição de equilíbrio obtemos:

$$\begin{aligned}\vec{F}_e + \vec{F}_m &= 0 \Leftrightarrow \vec{F}_e = -\vec{F}_m \\ \vec{F}_e &= -evB_{\perp} \hat{u}_x = qvB_{\perp} \hat{u}_x\end{aligned}$$

O campo eléctrico é a força por unidade de carga:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}_e}{q} = vB_{\perp} \hat{u}_x$$

- **A diferença de potencial entre as suas extremidades**

A diferença de potencial entre as pontas das asas do avião pode ser calculada a partir do campo eléctrico:

$$V = \int_0^L \vec{E} \cdot d\ell = \int_0^{40} vB_{\perp} dx = 40 \times vB_{\perp}$$

$$V = 40 \frac{900 \times 10^3}{3600} 35 \times 10^{-6} = 0,35 \text{ V}$$

Efeito de Hall

Uma sonda de efeito de Hall é utilizada para medir um campo magnético criado por uma bobine. A sonda tem uma secção quadrada de lado $\ell = 1\text{ mm}$ e é constituída por um material semi-condutor cujos portadores de carga são lacunas, com uma densidade $N = 10^{26}\text{ lacunas.m}^{-3}$. Quando é injectada uma corrente de 10 A na sonda, o valor da diferença de potencial máxima medida entre as duas faces da sonda é $V = 5\text{ }\mu\text{V}$. Pretende-se determinar o campo magnético criado pela bobine.

- **A direcção do campo magnético**

A tensão máxima que é possível medir com a sonda corresponde ao caso em que o campo é perpendicular à sonda: as cargas que se movem devido à corrente eléctrica sofrem uma força que é proporcional à componente do campo magnético que é perpendicular ao seu movimento. Deste modo, movendo a sonda até se atingir a leitura máxima no voltímetro podemos ficar a saber qual a direcção do campo.

- **O módulo do campo magnético**

Tal como no exemplo anterior, também neste caso a situação de equilíbrio será alcançada quando os módulos das forças eléctrica e magnética aplicadas às lacunas forem iguais. Note-se que neste caso, ao contrário do exemplo do avião, a sonda está parada e é a corrente eléctrica que move as cargas:

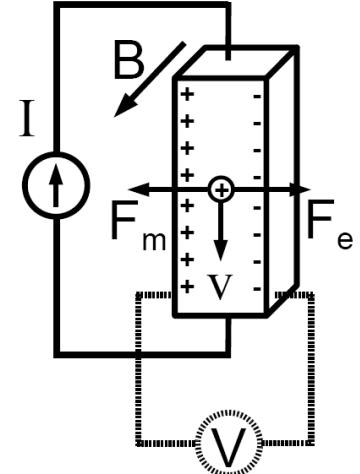
$$F_e = F_m \Leftrightarrow E = \frac{F_e}{q} = \frac{F_m}{q} = vB$$

$$V = \int_0^\ell Ed\ell = \ell vB$$

$$B = \frac{V}{v\ell} = \frac{V}{\ell} \frac{Nq}{J} = \frac{V}{\ell} \frac{Nq\ell^2}{I} = \frac{NqV\ell}{I}$$

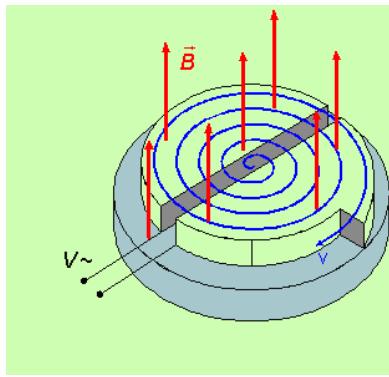
$$B = \frac{10^{26} \times 1,6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-6} \times 10^{-3}}{10} =$$

$$= 80\text{ mT}$$



Exercícios Propostos

Exercício 5.1 : Num ciclotrão (acelerador de partículas), partículas carregadas são sujeitas a um campo magnético \vec{B} perpendicular à sua velocidade, sendo a sua trajectória circular. Para além do campo magnético, ao fim de cada semi-volta aplica-se às partículas uma tensão sinusoidal dada por $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$. O campo eléctrico aplicado às partículas aumenta a sua velocidade, deixando a trajectória de ser circular e passando a consistir em troços semicirculares de raio cada vez maior. Neste exercício pretende-se *dimensionar* um ciclotrão que acelera partículas alfa (núcleos de átomos de hélio que possuem 2 protões e 2 neutrões).



- Para que haja sincronia entre o efeito da aceleração do campo eléctrico e o movimento de rotação das partículas, qual deve ser a frequência da tensão sinusoidal aplicada (em função do campo B , da carga q e da massa m das partículas)?
- Suponha que a frequência da tensão sinusoidal $V(t) = V_0 \operatorname{sen}(\omega t)$ é de 10 kHz. Qual deve ser então, de acordo com a alínea a), o valor do campo magnético aplicado?
- Qual é a energia ganha por uma partícula em cada volta completa se lhe for aplicada a amplitude máxima da tensão, V_0 ?
- Suponha que o raio da órbita de extracção (raio da última volta) é $R = 1\text{m}$. Qual a energia cinética com que saem do ciclotrão as partículas alfa?
- Suponha que a partícula que menos tempo permanece no ciclotrão percorre 12 voltas no seu interior. A partir das alíneas c) e d) calcule a diferença de potencial máxima V_0 que é aplicada às partículas alfa.

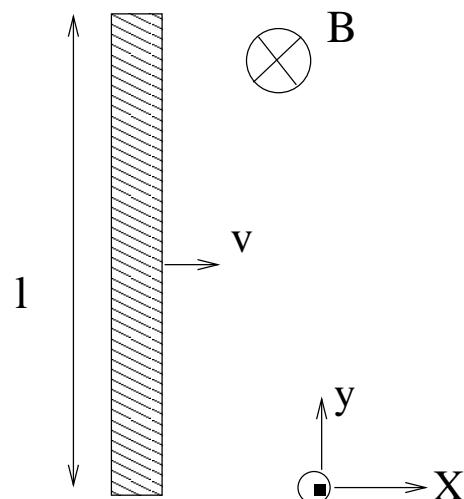
Exercício 5.2 : Um feixe pulsado (*bunch*) de 10^{10} electrões inicialmente em repouso é acelerado numa **zona 1**

por aplicação de uma diferença de potencial de 20 kV. Seguidamente, após entrar numa **zona 2**, o feixe é submetido à acção de um campo magnético perpendicular à sua velocidade.

- Calcule a velocidade do feixe de electrões quando sai da **zona 1**.
- Obtenha a intensidade do campo magnético aplicado na **zona 2**, sabendo que o feixe passa a ter uma trajectória circular de raio $R = 12\text{ cm}$.
- Calcule a intensidade da corrente eléctrica I criada pelo movimento circular do feixe electrónico na **zona 2**.
- Calcule a intensidade do campo magnético criado pela corrente I no centro da trajectória do feixe electrónico e compare-a com a intensidade do campo magnético aplicado.

Exercício 5.3 : Uma corrente marinha tem uma velocidade de $v = 1\text{ m.s}^{-1}$ numa zona em que a componente vertical do campo magnético terrestre tem uma amplitude $B_\perp = 3,5 \times 10^{-5}\text{ T}$. Sabendo que a condutividade eléctrica da água do mar é $\sigma_c = 0,04\text{ }\Omega^{-1}.\text{cm}^{-1}$, determine a densidade de corrente eléctrica perpendicular à direcção da corrente marítima.

Exercício 5.4 : Uma barra metálica de comprimento $\ell = 1\text{ m}$ move-se com uma velocidade $\vec{v} = 10\text{ }\vec{u}_x\text{ m.s}^{-1}$ numa zona onde existe, perpendicularmente à sua velocidade, um campo magnético $\vec{B} = -\vec{u}_z\text{ mT}$.

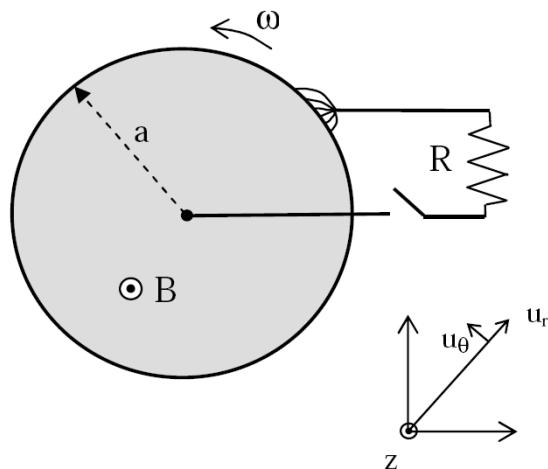


- Determine o módulo e o sentido da força magnética que actua nos electrões de condução da barra.

- b) Calcule a diferença de potencial entre as extremidades da barra após se ter atingido o equilíbrio.
- c) Se os extremos da barra fossem ligados com um condutor de resistência 100Ω , solidário com a barra, qual seria a corrente no circuito?

Exercício 5.5 : Numa experiência de efeito de Hall, uma corrente de intensidade $I = 10 \text{ A}$ percorre um condutor de secção quadrada com $\ell = 0,5 \text{ cm}$ de lado. Um campo magnético transversal ao condutor de amplitude $B = 2 \text{ T}$ induz uma tensão $V = 2,5 \times 10^{-4} \text{ V}$. Supondo que os portadores de carga são electrões, calcule a densidade destes no condutor.

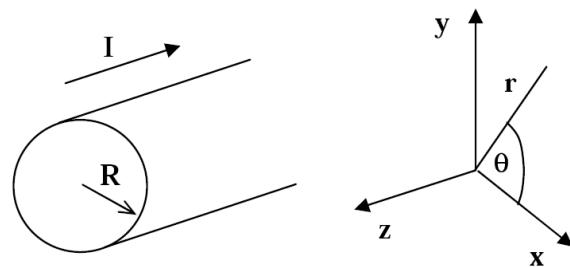
Exercício 5.6 : O primeiro gerador de corrente foi inventado por Faraday em 1831 e consiste num disco metálico que é posto a rodar na presença de um campo magnético perpendicular à sua superfície. Após se fechar um interruptor, o centro do disco e a sua periferia ficam ligados por um circuito imóvel que é percorrido por corrente. O disco, que possui raio a e espessura b , é posto a rodar com uma velocidade angular ω e encontra-se sujeito a um campo magnético $\vec{B} = B_0 \vec{u}_z$.



- a) Determine a expressão da força a que ficam sujeitos os electrões livres do metal devido ao campo magnético, \vec{F}_m .
- b) Determine a expressão do campo electrostático dentro do disco, devido à distribuição de carga do disco, após se ter atingido o equilíbrio electrostático, \vec{E} .
- c) Determine a densidade de carga no interior do disco e na sua superfície exterior, em equilíbrio electrostático.
- d) Determine a diferença de potencial (V) a que vai ficar sujeita a resistência R após se fechar o interruptor.

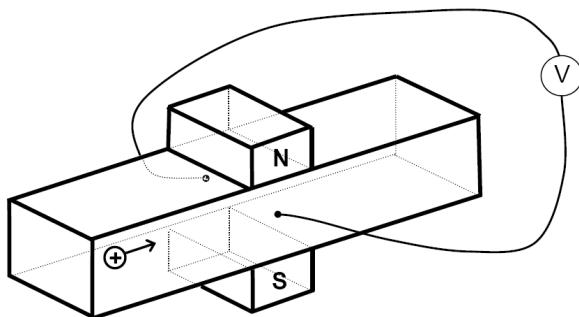
- e) Determine a potência mecânica fornecida ao disco para o manter a rodar com velocidade angular constante, após se fechar o interruptor e a resistência R passar a ser percorrida por uma corrente.

Exercício 5.7 : Considere um condutor de cobre muito comprido, cilíndrico e de raio $R = 1 \text{ mm}$, que transporta uma corrente estacionária e uniformemente distribuída $I = 10 \text{ A}$ (segundo $-\vec{u}_z$). Vamos verificar até que ponto a lei de Ohm é válida (ignorando-se as forças magnéticas) no período transitório em que se estabelece a corrente eléctrica.



- a) Calcule o campo magnético (B) criado pela corrente eléctrica dentro do condutor.
- b) Calcule a força por unidade de carga a que ficam sujeitos os electrões devido ao campo magnético. Descreva sucintamente, de acordo com o resultado obtido, o que se passa no condutor no período transitório em que se estabelece a corrente e como se atinge o regime estacionário.
Sugestão: escreva primeiro a velocidade dos electrões (v) em função de \vec{J} , de N_{cobre} e de q .
- c) Calcule a força por unidade de carga a que ficam sujeitos os electrões devido ao campo electrostático que cria a corrente. Compare o resultado obtido com o da alínea b) e conclua da importância do período transitório.

Exercício 5.8 : O caudalímetro electromagnético representado na figura está ser utilizado para medir o caudal volumétrico (volume por unidade de tempo) de um líquido que contém iões NaCl+ ($q = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$).



O líquido passa numa zona do tubo de secção quadrangular em que existe um campo magnético uniforme criado por um íman (de Norte para Sul). A diferença de potencial que surge entre as paredes do tubo é medida com um voltímetro. No presente caso o líquido tem um caudal volumétrico $\dot{V} = 2 \text{ L.s}^{-1}$, o campo magnético tem uma intensidade $B = 2 \text{ mT}$, o tubo tem de lado $d = 2 \text{ cm}$ e a densidade de iões é $N = 2 \times 10^{10} \text{ iões.m}^{-3}$.

- Calcule a velocidade dos iões, v , e a intensidade de corrente eléctrica no tubo, I .
- Calcule a força magnética que actua sobre cada ião, F_m .
- Calcule a diferença de potencial medida pelo voltímetro, V , e indique a sua polaridade.
- Diga, justificando a sua resposta, como se alterava a medida do voltímetro se se tratasse de um outro líquido com o mesmo caudal mas com outro tipo e/ou densidade de iões.

Soluções

- 5.1 a) $f = \frac{qB}{2\pi m}$
 b) $B = 1,3 \text{ mT}$
 c) $\Delta T = 2qV_0 =$
 d) $T = 1,3 \times 10^{-17} \text{ J}$
 e) $V_0 = 1,7 \text{ V}$
- 5.2 a) $v = 0,28 \text{ c}$
 b) $B = 4 \text{ mT}$
 c) $I = 178 \text{ mA}$
 d) $B = 0,9 \mu\text{T}$
- 5.3 $J = 1,4 \times 10^{-4} \text{ A.m}^{-1}$
- 5.4 a) $\vec{F} = -1,6 \times 10^{-21} \vec{u}_y [\text{N}]$
 b) $V = 10 \text{ mV}$
 b) $I = 0$
- 5.5 $N = 10^{26} \text{ electrões.m}^{-3}$
- 5.6 a) $\vec{F}_m = -e\omega r B_0 \vec{u}_r$
 b) $\vec{E} = -\omega r B_0 \vec{u}_r$
 c) $\rho = -2\varepsilon_0 \omega B_0$
 $\sigma = +\varepsilon_0 \omega B_0 a$
 d) $V = \frac{1}{2}\omega B_0 a^2$
 e) $P = \frac{\omega^2 B_0^2 a^4}{4R}$
- 5.7 a) $\vec{B} = -2 r \vec{u}_\theta$
 b) $\vec{F}_m/q = 0,4 \times 10^{-3} r \vec{u}_r \text{ N.C}^{-1}$
 c) $\vec{F}_e/q = 5 \times 10^{-2} \vec{u}_z \text{ V.m}^{-1}$
 $F_m^{max}/q = 4 \times 10^{-7} \text{ V.m}^{-1} << F_e/q$
- 5.8 a) $v = 5 \text{ m.s}^{-1}; I = 6,4 \times 10^{-12} \text{ A}$
 b) $Fm = 16 \times 10^{-22} \text{ N}$
 c) $V = 0,2 \text{ mV}$, da face posterior para a face anterior do tubo.
 d) Não se alterava. Este é um dos interesses destes caudalímetros (até a água da torneira tem iões!).

Capítulo 6

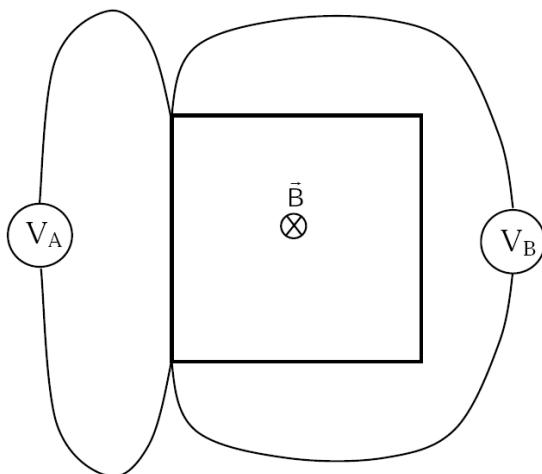
Ley de Faraday e Indução

Atenção: Nesta versão não há páginas
105-115

Exercícios Propostos

Exercício 6.1 : Um circuito de área A e resistência eléctrica R encontra-se numa zona do espaço em que existe um campo magnético que lhe é perpendicular e que é uniforme. O campo tem uma variação temporal descrita por $B(t) = B_0 e^{-\alpha t}$. Determine a intensidade da corrente eléctrica que percorre o circuito.

Exercício 6.2 : Para medir um campo magnético que existe apenas numa zona confinada do espaço cuja secção é um quadrado de lado ℓ , colocou-se em seu redor uma espira condutora quadrada também de lado $\ell = 1$ cm, cujos quatro lados têm a mesma resistência. O campo magnético teve uma variação temporal expressa por $B = B_0 t$ Tesla e a diferença de potencial entre dois vértices consecutivos da espira foi medida por dois voltímetros, V_A e V_B , de acordo com a figura.



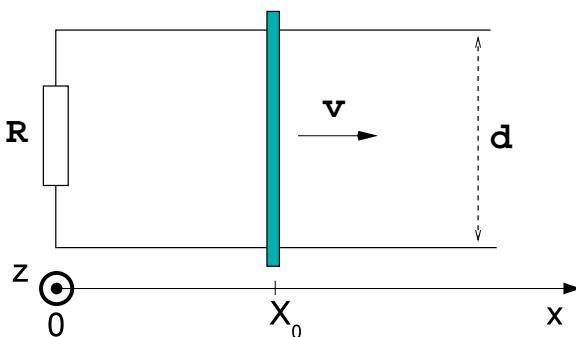
- Determine a expressão da força electromotriz induzida na espira quadrada e indique o sentido da corrente induzida.
- Sabendo que a tensão medida por V_A é $5 \mu V$, calcule o valor de B_0 .
- Qual é o valor medido pelo voltímetro V_B ?

Exercício 6.3 : Um circuito quadrado de resistência $R = 20 \Omega$ e de lado $\ell = 0,2$ m roda 100 vezes por segundo em torno de um eixo horizontal que o divide ao meio. Existe no local em que se encontra o circuito um campo magnético uniforme, de intensidade $B = 1$ T e perpendicular à posição ocupada pelo circuito quando $t = 0$ s. Determine:

- o fluxo do campo magnético através da espira, em função do tempo.

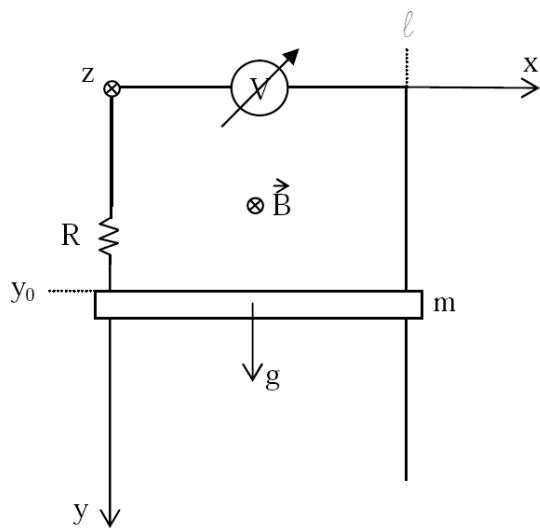
- a corrente induzida.
- a energia dissipada na espira, por efeito de Joule, ao fim de 2 minutos.

Exercício 6.4 : Dois carris condutores paralelos entre si, que se encontram a uma distância d , estão unidos numa das extremidades por um condutor. A resistência equivalente deste sistema é R . Uma barra condutora de resistência desprezável desliza apoiada nos carris com uma velocidade constante $\vec{v} = v_0 \vec{u}_x$, sem atrito, sob acção de uma força exterior. Existe um campo $\vec{B} = B \vec{u}_z$ uniforme em toda a região ocupada pelo sistema. No instante inicial a barra encontra-se na posição X_0 . Determine:



- a intensidade e sentido da corrente induzida no circuito.
- a potência dissipada por efeito de Joule.
- a força que o campo \vec{B} exerce sobre a barra móvel.
- a potência correspondente ao trabalho da força aplicada sobre a barra para a movimentar.

Exercício 6.5 : Considere o circuito da figura, constituído por uma fonte de tensão variável V , uma resistência R e uma barra móvel de comprimento ℓ e de massa m . O circuito está colocado na vertical, estando a barra sujeita à aceleração da gravidade g . Perpendicularmente ao circuito existe um campo magnético uniforme de intensidade $\vec{B} = B \vec{u}_z$. No instante inicial a barra encontra-se na posição y_0 .

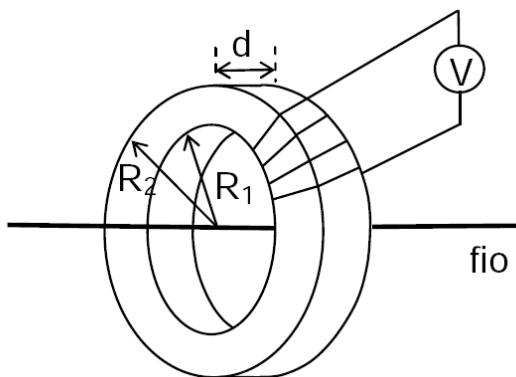


- Admita que a barra tem uma velocidade segundo y (para baixo) $\vec{v} = v_0 \hat{u}_y$. Determine a intensidade e sentido da corrente que percorre o circuito.
- Admita que a barra é deixada cair sem velocidade inicial. Determine a tensão que terá de ser imposta pela fonte em cada instante, $V(t)$, para que não exista corrente no circuito (indique também a polaridade da fonte).
- Admita que a barra é largada sem velocidade inicial. Determine a tensão que terá de ser imposta pela fonte, V , para que a barra fique suspensa sem cair (indique também a polaridade da fonte).
- Admita agora que a barra é largada com uma velocidade inicial v_0 . Se a tensão imposta ao circuito for semelhante à da alínea c) que tipo de movimento terá a barra? Justifique qualitativamente.

Exercício 6.6 : Uma bobina muito comprida, com um diâmetro $D = 20$ cm e uma densidade de espiras $n = 1000$ espiras.m $^{-1}$, é percorrida por uma corrente eléctrica de intensidade I . Em torno do seu eixo vertical existe um anel de um material condutor com um diâmetro $D' = 40$ cm.

- Calcule a força electromotriz induzida no anel quando a corrente na bobina varia de $I_1 = 10$ A para $I_2 = 1$ A numa décima de segundo.
- Se o anel tiver uma secção $S = 1\text{ cm}^2$ e uma condutividade $\sigma_c = 6 \times 10^8 \Omega^{-1}\cdot\text{m}^{-1}$, qual a corrente que o percorre?
- Qual a resposta à alínea b) se o anel tiver 1 m de diâmetro? É importante que os eixos estejam coincidentes?

Exercício 6.7 : Um amperímetro clip-on é um dispositivo para medir correntes alternadas em cabos sem ter que cortar o cabo. Consiste num enrolamento em torno de um núcleo metálico de permeabilidade magnética μ com a forma de um anel cilíndrico, de secção quadrada. O dispositivo é colocado de modo a que a normal que passa pelo centro do anel esteja alinhada com o fio e possui um voltímetro que mede a diferença de potencial aos terminais do enrolamento. Considere um destes dispositivos com um anel de raios $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 11$ cm, uma espessura $d = 2$ cm e um enrolamento de $N = 5000$ espiras.



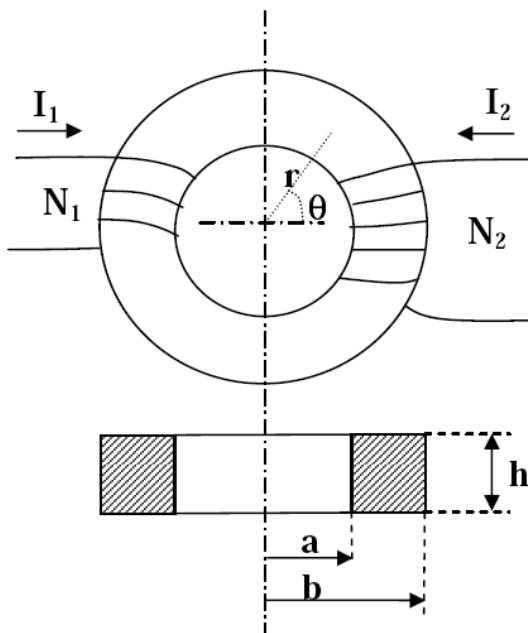
- Determine a expressão do campo magnético produzido pelo fio no núcleo metálico, em função da corrente I que o percorre.
- Determine a expressão do fluxo do campo magnético criado pelo fio no enrolamento.
- Calcule a diferença de potencial medida pelo voltmímetro, sabendo que a corrente que passa pelo fio é $I = 16\cos(100\pi t)$ A e que o núcleo metálico tem uma permeabilidade magnética relativa $\mu_r = 1000$.

Exercício 6.8 : Determine o coeficiente de auto-indução externo por unidade de comprimento de dois fios condutores infinitos de raio $R = 1$ mm cujos centros se encontram a uma distância $d = 1$ cm um do outro.

Exercício 6.9 : Considere uma bobina de comprimento ℓ e raio R em que $\ell \gg R$, com n espiras por unidade de comprimento. Esta é percorrida por uma corrente variável $I = I_0\cos(\omega t)$. Determine:

- o coeficiente de auto-indução da bobina.
- a força electromotriz induzida num anel condutor concêntrico com a bobina, de raio $r < R$.
- o campo eléctrico existente num ponto P a uma distância $r < R$ do eixo da bobina.

Exercício 6.10 : Na figura que se segue está representado um transformador de núcleo circular e de secção quadrada. Este núcleo é constituído por um material ferromagnético linear de permeabilidade μ . Os enrolamentos primário e secundário são atravessados por correntes I_1 e I_2 e possuem N_1 e N_2 espiras, respectivamente. Determine:



- a) o campo magnético (\vec{B}) no interior do núcleo;
- b) o coeficiente de indução mútua entre os enrolamentos;
- c) as forças electromotrices induzidas em cada um dos enrolamentos, ε_1 e ε_2 , em função do fluxo do campo magnético (Φ) que atravessa uma secção do núcleo e do número de espiras. Calcule a razão entre as tensões no circuito primário e secundário do transformador.

Exercício 6.11 : Considere uma bobina de comprimento ℓ e diâmetro D em que $\ell \gg D$, com n espiras por unidade de comprimento e um núcleo de ar, possui uma resistência R . Em torno da bobina existe uma espira quadrada de lado a que é percorrida por uma corrente $I = I_0 \cos(\omega t)$. Determine:

- a) o coeficiente de indução mútua entre a espira e o solenóide;
- b) a expressão da equação diferencial que permite determinar a corrente induzida no solenóide.

Exercício 6.12 : Considere uma bobina de comprimento ℓ , raio R_1 , N_1 espiras e núcleo de ar, percorrida por

uma corrente $I = I_0 e^{-at}$. Esta bobina está colocada dentro de uma segunda bobina de comprimento ℓ , de raio R_2 , N_2 espiras e de resistência R . Os eixos das duas bobinas estão coincidentes e considera-se que $\ell \gg R_2$.

- a) Determine o coeficiente de indução mútua do sistema das duas bobinas.
- b) Determine a corrente induzida na bobina exterior.

Exercício 6.13 : Considere um condutor rectilíneo de comprimento infinito e secção circular de raio a , com uma permeabilidade magnética μ_0 e estando a ser percorrido por uma corrente eléctrica estacionária de intensidade I_1 . Determine:

- a) a densidade de energia magnética no interior do condutor;
- b) a energia magnética do condutor por unidade de comprimento;
- c) o coeficiente de auto-indução interno do condutor por unidade de comprimento. Compare com o resultado do exercício 86;

Exercício 6.14 : Considere um cabo coaxial condutor rectilíneo de comprimento infinito e raios a e b , em que o espaço entre os condutores está preenchido com ar. No caso de o cabo ser percorrido por uma corrente I , determine:

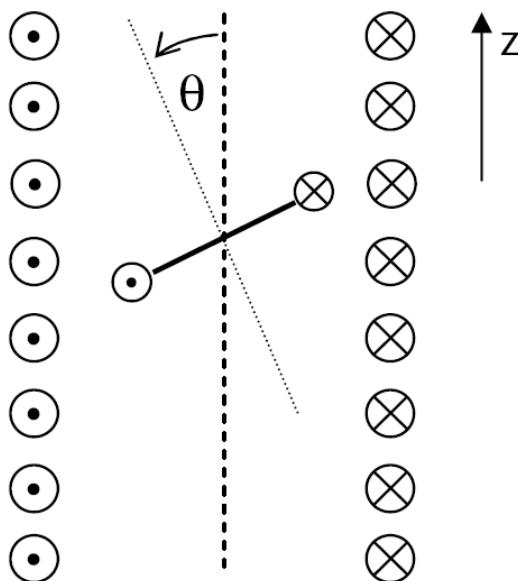
- a) a densidade de energia magnética no espaço entre os condutores;
- b) a energia magnética por unidade de comprimento, no espaço entre os condutores;
- c) O coeficiente de auto-indução do cabo, por unidade de comprimento.

Exercício 6.15 : As bobinas projectadas para campos magnéticos fortes têm problemas mecânicos de construção devido às pressões a que ficam sujeitas. Considere uma bobina de comprimento ℓ e raio R ($\ell \gg R$), com n espiras por unidade de comprimento, núcleo de ar e percorrida por uma corrente I . Determine:

- a) a densidade de energia magnética armazenada no interior da bobina;
- b) a energia magnética armazenada na bobina;
- c) o coeficiente de auto-indução da bobina, a partir da energia magnética;
- d) qualitativamente se a bobina fica sujeita a uma força de implosão ou de explosão;

- e) a pressão sobre os enrolamentos em função do campo magnético, B .

Exercício 6.16 : Uma bobina de N espiras colocada na vertical, tem um comprimento ℓ e um raio a ($\ell \gg a$) e é percorrida por uma corrente estacionária I_1 . No seu interior é colocada uma espira de raio $b < a$ cujo eixo faz um ângulo θ com o eixo da bobina.



- a) Determine o coeficiente de auto-indução (L) da bobina.
 b) Determine o coeficiente de indução mútua (M) do sistema.
 c) Desprezando a auto-indução da espira, determine a expressão da energia magnética do sistema quando a espira também é percorrida por uma corrente estacionária I_2 com o mesmo sentido de I_1 .
 d) Determine o momento da força que actua a espira. Identifique o ponto de equilíbrio estável.
Nota: Recorde que a derivada de uma energia em ordem a um ângulo não é uma força mas sim o momento de uma força.

Exercício 6.17 : Considere duas espiras circulares paralelas e alinhadas coaxialmente com raios a e b cujos planos estão distanciados de z , a serem percorridas por correntes eléctricas I_a e I_b . Admitindo que uma das espiras é muito mais pequena que a outra ($a \ll b$) e que a distância a que se encontram seja grande quando comparada com os seus raios ($z \gg a, b$), determine:

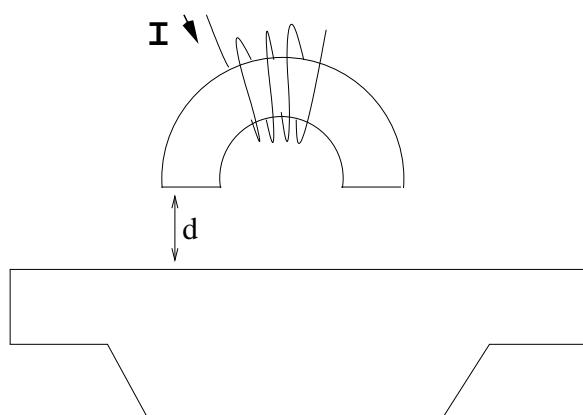
- a) o coeficiente de indução mútua do sistema em função dos sentidos das correntes;

- b) designando os coeficientes de auto-indução das espiras por L_a e L_b , a energia magnética do sistema;
 c) a força existente entre as espiras em função dos sentidos das correntes; utilize o resultado para discutir qualitativamente as forças entre ímanes.

Exercício 6.18 : Considere um enrolamento de comprimento ℓ , raio R_2 ($\ell \gg R_2$) e densidade de espiras n , percorrido por uma corrente I_2 . No seu interior, colocado coaxialmente existe um segundo enrolamento de comprimento ℓ , raio R_1 , a mesma densidade de espiras n e percorrido por uma corrente I_1 que tem o mesmo sentido de I_2 . Este segundo enrolamento possui um núcleo de material ferromagnético, que nas condições de funcionalidade descritas, tem uma permeabilidade magnética μ . Determine:

- a) o campo magnético existente no várias regiões interiores aos enrolamentos: $r > R_2$, $R_1 < r < R_2$ e $r < R_1$;
 b) os coeficientes de auto-indução dos dois enrolamentos e o coeficiente de indução mútua do sistema composto pelos dois enrolamentos;
 c) a energia magnética do sistema;
 d) a pressão aplicada sobre cada um dos enrolamentos;

Exercício 6.19 : Um electroíman é constituído por um enrolamento de espiras em torno de um núcleo ferromagnético com a forma indicada na figura e cuja secção $S = 400 \text{ cm}^2$. Admitindo que a distância entre o objecto a elevar e o núcleo ferromagnético seja pequena, pode-se considerar uniforme o campo magnético existente nessa região e de valor $B = 1 \text{ T}$. Determine:



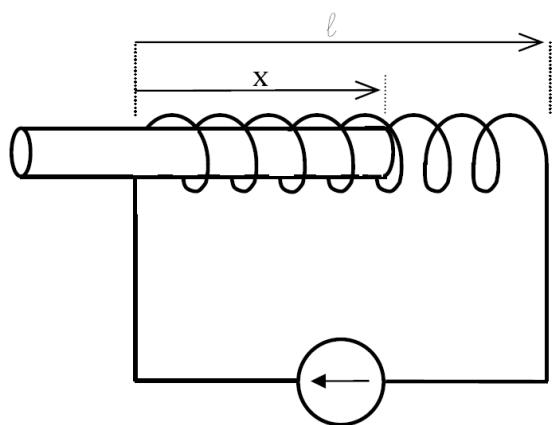
- a) a energia magnética existente no espaço entre o núcleo ferromagnético e o objecto que se pretende elevar, em função da distância (x) que separa o electroíman do objecto;

- b) a força exercida pelo electroímán sobre o objecto a elevar.

Exercício 6.20 : Considere uma bobina de raio R , comprimento $\ell >> R$ e densidade de espiras n , preenchida com ar.

- a) Determine o campo magnético (B) no interior da bobina se esta for percorrida por uma corrente I .

Suponha agora que a bobina está parcialmente preenchida com um núcleo de material ferromagnético de raio R e permeabilidade magnética μ (como um relé). Determine:



- b) o coeficiente de auto-indução da bobina;
Nota: para efeitos de cálculo, considere como válida a aproximação da bobina infinita quer do lado do material ferromagnético quer do lado do ar.
- c) a potência média fornecida pela fonte ao sistema para estabelecer a corrente no circuito (partindo da situação $I = 0$) num intervalo de tempo Δt ; despreze as resistências dos condutores;
- d) a força a que fica sujeito o núcleo ferromagnético após se ter estabelecido a corrente I .

Soluções

- 6.1 $I = \frac{B_0}{R} A \alpha e^{-\alpha t}$
- 6.3 a) $\Phi = B \ell^2 \cos(\omega t)$, com $\omega = 200\pi$
 b) $I = 1,3 \sin(\omega t)$
 c) $E = 3,8 \text{ kJ}$
- 6.4 a) $I = \frac{Bdv_0}{R}$, sentido \odot .
 b) $P = \frac{(Bdv_0)^2}{R}$
 c) $\vec{F} = \frac{B^2 d^2 v_0}{R} (-\vec{u}_x)$
 d) $P = \frac{(Bdv_0)^2}{R}$
- 6.6 a) $\varepsilon = 3,6 \text{ mV}$
 b) $I = 171 \text{ A}$
 c) $I = 72 \text{ A}$; não.
- 6.7 a) $B = \frac{\mu}{2\pi} \frac{I}{r}$
 b) $\Phi = N \frac{\mu}{2\pi} I d \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$
 c) $\varepsilon = 9,6 \sin(100\pi t) \vee$
- 6.8 $L' = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{d-R}{R}\right) = 0,9 \text{ } \mu\text{H.m}^{-1}$
- 6.9 a) $L = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2$
 b) $\varepsilon = \mu_0 n \omega I_0 \sin(\omega t) \pi r^2$
 c) $E = \frac{\varepsilon}{2\pi r}$
- 6.11 a) $M = \mu n \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$
 b) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i = \frac{M}{L} I_0 \omega \sin(\omega t)$
- 6.12 a) $M = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{\ell} \pi R_1^2$
 b) $i_2(t) = \frac{M a I_0}{R - a L} (e^{-at} - e^{-R/L})$
- 6.13 a) $u_m = \frac{\mu_0}{8} \left(\frac{I_r}{\pi a^2}\right)^2$
 b) $W_m = \frac{\mu_0}{16\pi} I^2$
 c) $L' = \frac{\mu_0}{8\pi}$
- 6.14 a) $u_m = \frac{\mu_0}{8} \left(\frac{I}{\pi r}\right)^2$
 b) $W_m = \frac{\mu_0}{4\pi} I^2 \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
 c) $L' = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right)$
- 6.15 a) $u_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$
 b) $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \pi R^2 \ell$
 c) $L = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2$
 d) explosão.
 e) $P = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2$
- 6.16 a) $L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2$
 b) $L = \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \cos(\theta)$
 c) $W_m = \frac{1}{2} \mu_0 \frac{N^2}{\ell} \pi a^2 I_1^2 + \mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \cos(\theta) I_1 I_2$
- d) $N = -\mu_0 \frac{N}{\ell} \pi b^2 \sin(\theta) I_1 I_2$; o sinal negativo significa que q diminui, ou seja, a espira roda em sentido horário; Os pontos de equilíbrio são $\theta = 0$ e $\theta = \pi$ mas apenas $\theta = 0$ é estável.
- 6.17 a) $M = \frac{\mu_0}{2z^3} \pi a^2 b^2$
 b) $W_m = \frac{1}{2} L_a I_a^2 + \frac{1}{2} L_b I_b^2 + M I_a I_b$
 c) $F_z = \frac{3}{2} I_a I_b \frac{\mu_0}{z^4} \pi (ab)^2$ atractiva se as correntes tiverem o mesmo sentido e repulsiva se as correntes tiverem sentidos diferentes.
- 6.18 a) $B = \mu n (I_1 + I_2) \quad (r < R_1)$
 $B = \mu_0 n I_2 \quad (R_1 < r < R_2)$
 $B = 0 \quad (r > R_2)$
 b) $L_2 = \mu \pi R_2^2 n^2 \ell + \mu_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) n^2 \ell$
 $M = L_1 = \mu \pi R_1^2 n^2 \ell$
 c) $W_m = \frac{1}{2} \mu \pi R_1^2 n^2 \ell (I_1 + I_2)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \pi (R_2^2 - R_1^2) n^2 \ell I_2^2$
 d) $P_1 = \frac{1}{2} [\mu n^2 (I_1 + I_2)^2 - \mu_0 n^2 I_2^2]$
 $P_2 = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I_2^2$
- 6.19 a) $W_m = 3,2 \times 10^4 \text{ J}$
 b) $F_x = -3,2 \times 10^4 \text{ N}$
 3,2 toneladas para cima.

- 6.2 a) $e = -\ell^2 B_0$ a corrente tem o sentido anti-horário (em relação ao desenho)
- b) $V_A = \frac{e}{4} = 5 \mu V$, $B_0 = 0,2 T$
- c) $V_B = -\frac{3}{4}e = -15 \mu V$
- 6.5 a) $I = \frac{B\ell v_0}{R}$, com sentido anti-horário
- b) $V(t) = B\ell g t$, polaridade que criaria uma corrente com sentido horário
- c) $V = R \frac{mg}{Bl}$
- d) Movimento retardado até parar. A corrente na barra será a soma de duas correntes anti-horárias: a da alínea c), que contrariará sempre a força gravítica; uma corrente antihorária devido à indução, tal como na alínea a) que criará uma força adicional para cima. Esta força adicional fará a barra parar, uma vez que, ao contrário da alínea a), não existe a força exterior que garante a velocidade constante da barra. Quando a barra parar esta segunda corrente desaparece, desaparecendo com ela a força exterior e a barra ficará suspensa.
- 6.10 a) $\vec{B} = \mu \frac{N_1 I_1 + N_2 I_2}{2\pi r} (-\vec{e}_\theta)$
- b) $M = \mu \frac{N_1 N_2}{2\pi} h \ln(\frac{b}{a})$
- c) $\frac{e_1}{e_2} = \frac{N_1}{N_2}$
- 6.20 a) $\vec{B} = \mu_0 n I \vec{e}_x$
- b) $L = n^2 \pi R^2 [\mu_0 (\ell - x) + \mu x]$
- c) $\bar{P} = \frac{\frac{1}{2} L I^2}{\Delta t}$
- d) $F_x = \frac{1}{2} n^2 \pi R^2 (\mu - \mu_0)$

Capítulo 7

Circuitos Eléctricos

Atenção: Nesta versão não há páginas
122-128

Exercícios Propostos

Exercício 7.1 : Considere um circuito RC com uma fonte de tensão constante V_f . No instante inicial o condensador encontra-se descarregado.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a carga no condensador, $q(t)$, a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão no condensador, $v_C(t)$, e a tensão na resistência, $v_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{\alpha t}$.
- Determine a expressão da energia fornecida pela fonte ao circuito durante a carga do condensador.
- Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante a carga do condensador e da energia armazenada no condensador após este se encontrar carregado.
Nota: o resultado não depende do valor da resistência utilizada e que a energia fornecida pela fonte se reparte em partes iguais pelo condensador e pela resistência!
- Sabendo que a tensão da fonte é $V_f = 9$ V, que a capacidade do condensador é $C = 1 \mu\text{F}$ e que a resistência é $R = 100 \Omega$, esboce os gráficos de $q(t)$, $i(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$.
- Quanto tempo demora o condensador a atingir uma fracção $q/q_0 = 0,9$ da sua carga final?

Exercício 7.2 : Considere um circuito RC em que o condensador se descarrega através da resistência. No instante inicial o condensador tem uma carga $q(0) = q_0$.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a carga no condensador, $q(t)$, a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão no condensador, $v_C(t)$ e a tensão na resistência, $v_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{\alpha t}$.
- Determine a expressão da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante a descarga do condensador.
- Sabendo que a capacidade do condensador é $C = 10 \mu\text{F}$ e que a resistência é $R = 1 \text{ K}\Omega$, esboce os gráficos de $q(t)$, $i(t)$, $v_C(t)$ e $v_R(t)$.

Exercício 7.3 : Considere um circuito RL com uma fonte de tensão constante V_f . No instante inicial a corrente no circuito é $i(0) = 0$.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão na indutância, $v_L(t)$ e a tensão na resistência, $v_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{\alpha t}$.
- Determine a expressão da energia fornecida pela fonte ao circuito durante o período de estabelecimento da corrente no circuito ("carga" da indutância).
- Determine as expressões da energia dissipada por efeito de Joule na resistência durante o período de estabelecimento da corrente no circuito e da energia armazenada na indutância.
- Sabendo que a tensão da fonte é $V_f = 9$ V, que a indutância é $L = 1 \text{ mH}$ e que a resistência é $R = 100 \Omega$, esboce os gráficos de $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_R(t)$.
- Quanto tempo demora o circuito a atingir uma fracção $i/i_0 = 0,9$ da sua corrente final?

Exercício 7.4 : Considere um circuito RL onde uma fonte estabelece uma corrente i_0 sendo de seguida retirada a fonte.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão na indutância, $v_L(t)$ e a tensão na resistência, $v_R(t)$.
- Encontre as equações que descrevem $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_R(t)$.
Sugestão: experimente soluções do tipo $a + be^{\alpha t}$.
- Determine a expressão da energia dissipada por efeito de Joule na resistência até a corrente cessar no circuito.
- Sabendo que a indutância é $L = 10 \text{ mH}$ e que a resistência é $R = 100 \Omega$, esboce os gráficos de $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_R(t)$

Exercício 7.5 : Considere um circuito LC em que no instante inicial o condensador está carregado com uma carga $q(0) = q_0$ e a corrente no circuito é $i(0) = 0$.

- Escreva as equações diferenciais que descrevem a carga do condensador $q(t)$, a corrente no circuito, $i(t)$, a tensão na indutância, $v_L(t)$ e a tensão no condensador, $v_C(t)$.

- b) Encontre as equações que descrevem $q(t)$, $i(t)$, $v_L(t)$ e $v_C(t)$. Sugestão: experimente soluções do tipo $\alpha \sin(\omega t + \beta)$.
- c) Se o valor da capacidade for $C = 10 \mu\text{F}$ e o valor da indutância for $L = 1 \text{ mH}$, qual a frequência de oscilação do circuito?
- d) Determine as expressões da energia armazenada no condensador, U_C , da energia armazenada na indutância, U_L , e da energia total do sistema, $U = U_C + U_L$. Esboce os seus gráficos em função do tempo.

Exercício 7.6 : Um circuito RLC em que $R = 1 \text{ k}\Omega$, $L = 1 \text{ mH}$ e $C = 1 \mu\text{F}$, encontra-se ligado a uma fonte de tensão sinusoidal $V(t) = V_0 \sin(\omega t)$, sendo $V_0 = 5 \text{ V}$.

- a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito, $i(t)$.

Sabendo que a solução da equação diferencial encontrada na alínea a) para o regime forçado (após ter desaparecido o regime livre) é

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t + \phi) =$$

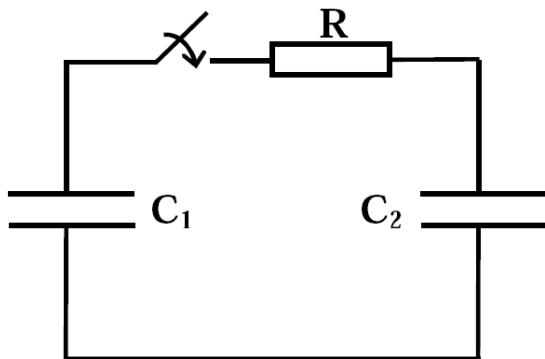
$$\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}} \sin(\omega t + \phi)$$

com, $\operatorname{tg}(\phi) = \frac{1}{\omega RC} - \frac{\omega L}{R}$,

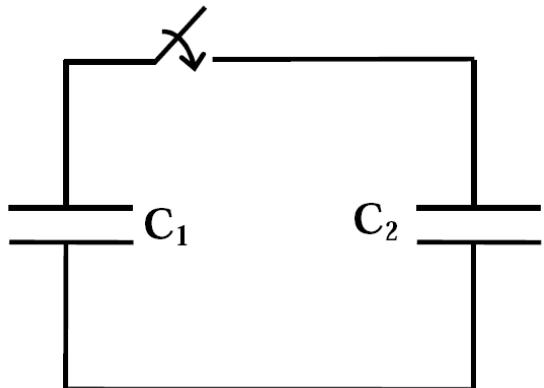
- b) Determine as expressões que descrevem $v_R(t)$, $v_L(t)$ e $v_C(t)$.
- c) Calcule a frequência angular da fonte, ω , e a correspondente frequência, f , que tornam máxima amplitude da corrente no circuito, e calcule o seu valor. Escreva neste caso a expressão da corrente no circuito.
- d) Nas condições da alínea anterior, determine as expressões da energia armazenada no condensador, U_C e da energia armazenada na indutância, U_L . Verifique que a energia total armazenada no sistema é constante. Esboce os gráficos de U_C , U_L e da energia total.

Exercício 7.7 : Um circuito que permite sintonizar um receptor de rádio é constituído por uma indutância de 10 mH e por uma capacidade variável. Qual o valor da capacidade quando o circuito está sintonizado para receber uma estação que emite em $1,4 \text{ MHz}$?

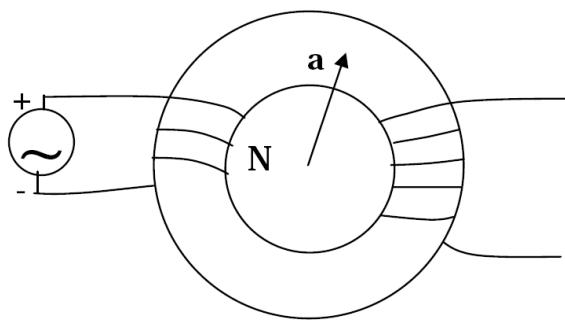
Exercício 7.8 : Considere o circuito da figura em que $C_1 = C_2 = 1 \mu\text{F}$ e $R = 100 \Omega$. Inicialmente o interruptor encontra-se aberto, o condensador C_1 tem uma tensão de 10 V e o condensador C_2 está descarregado.



- a) Calcule a carga e a energia inicial do condensador C_1 .
- b) Após se ter fechado o interruptor e se ter atingido o regime estacionário:
 - b1) Calcule a tensão de cada condensador.
 - b2) Calcule a energia dissipada na resistência.
- c) Considere agora o mesmo circuito mas sem resistência (utilizaram-se materiais supercondutores, não existem resistências de contacto, etc). Tendo em conta os resultados da alínea b) e o facto de não haver energia dissipada (não existe resistência), discuta qualitativamente o comportamento do circuito quando se fecha o interruptor.



Exercício 7.9 : Um transformador (dois enrolamentos com um núcleo de ferro comum, como mostrado na figura) encontra-se ligado à rede eléctrica mas no seu circuito secundário não está ligado qualquer equipamento. O circuito primário do transformador constitui um circuito RL (resistência interna R e indutância L do enrolamento) ligado a uma fonte de tensão alternada ($v(t) = V_0 \sin(\omega t)$) com $V_0 = \sqrt{2} \times 230 \text{ V}$ e frequência $f = 50 \text{ Hz}$.



- a) Escreva a equação diferencial que descreve a corrente no circuito primário do transformador.
- b) Verifique que a corrente no circuito primário, no regime forçado, é descrita pela equação

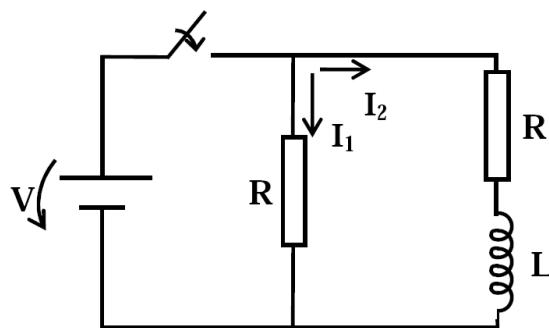
$$i(t) = i_0 \sin(\omega t - \phi)$$

com, $i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$ e $\phi = \text{atan}(\frac{\omega L}{R})$.

- c) Sabendo que o núcleo de ferro tem uma secção $S = 1 \text{ cm}^2$ e um raio médio $a = 4 \text{ cm}$, que o ferro tem $\mu = 10^5 \mu_0$ e que circuito primário tem $N = 200$ espiras, calcule um valor aproximado para o coeficiente de autoindução do enrolamento do circuito primário, L , baseado no raio médio do núcleo.
- d) Sabendo que a resistência interna do enrolamento do circuito primário é $R = 0,1 \Omega$, determine a potência média dissipada na resistência. Compare com a potência que seria dissipada na resistência no caso de não haver indução magnética no enrolamento do primário.
- e) Existe força electromotriz aos terminais do enrolamento do circuito secundário?

Exercício 7.10 : Considere o circuito da figura em que a fonte tem uma tensão de 10 V, a resistência $R_1 = 10 \text{ k}\Omega$, a resistência $R_2 = 1 \Omega$ e a indutância $L = 10 \text{ mH}$. O interruptor encontra-se fechado há muito tempo.

- a) Determine a força electromotriz induzida na bobine e as correntes eléctricas I_1 e I_2 . Justifique a sua resposta.
- b) Num dado instante abre-se o interruptor.
- b1) Escreva a equação diferencial que descreve a tensão na bobine. Marque no circuito as direcções da tensão na bobine e da força electromotriz induzida na bobine.
- b2) Qual será a energia dissipada por efeito de Joule nas resistências até a corrente que percorre o circuito se anular?



Atenção

Nesta versão não há páginas 132-133

Soluções

- 7.1 a) $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{V_f}{R}$
 $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$
 $\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = \frac{V_f}{RC}$
 $\frac{dv_R}{dt} + \frac{v_R}{RC} = 0$
- b) $q(t) = q_0 (1 - e^{-t/RC})$
 $i(t) = i_0 e^{-t/RC}$
 $v_C(t) = V_f (1 - e^{-t/RC})$
 $v_R(t) = V_f e^{-t/RC}$
- c) $U_f = CV_f^2$
- d) $U_R = \frac{1}{2}CV_f^2$
 $U_C = \frac{1}{2}CV_f^2$
- e) $t = 230 \mu s$
- 7.2 a) $\frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = 0$
 $\frac{di}{dt} + \frac{i}{RC} = 0$
 $\frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{RC} = 0$
 $\frac{dv_R}{dt} + \frac{v_R}{RC} = 0$
- b) $q(t) = q_0 e^{-t/RC}$
 $i(t) = i_0 e^{-t/RC}$
 $v_C(t) = V_{C0} e^{-t/RC}$
 $v_R(t) = V_{C0} e^{-t/RC}$
- d) $U_R = \frac{1}{2}CV_{C0}^2$
- 7.3 a) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_f}{L}$
 $\frac{dv_L}{dt} + \frac{R}{L}v_L = 0$
 $\frac{dv_R}{dt} + \frac{R}{L}v_R = \frac{R}{L}V_f$
- b) $i(t) = i_0 (1 - e^{-R/L t})$
 $v_L(t) = V_f e^{-R/L t}$
 $v_R(t) = V_f (1 - e^{-R/L t})$
- c) $U_f = \int_0^\infty V_f i_0 dt - Li_0^2$
- d) $U_L = \frac{1}{2}Li_0^2$
 $U_R = \int_0^\infty V_f i_0 dt - \frac{3}{2}Li_0^2$
- f) $t = 23 \mu s$
- 7.4 a) $\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$
 $\frac{dv_L}{dt} + \frac{R}{L}v_L = 0$
 $\frac{dv_R}{dt} + \frac{R}{L}v_R = 0$
- b) $i(t) = i_0 e^{-R/L t}$
 $v_L(t) = R i_0 e^{-R/L t}$
 $v_R(t) = R i_0 e^{-R/L t}$
- d) $U_R = \frac{1}{2}Li_0^2$
- 7.5 a) $\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$
 $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{i}{LC} = 0$
 $\frac{d^2v_C}{dt^2} + \frac{v_C}{LC} = 0$
 $\frac{d^2v_L}{dt^2} + \frac{v_L}{LC} = 0$
- b) $q(t) = q_0 \cos(\omega t)$
 $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$
 $v_C(t) = V_{C0} \cos(\omega t)$
 $v_L(t) = V_{C0} \cos(\omega t)$
- c) $f = 1,6 \text{ KHz}$

- d) $U_C = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \cos^2(\omega t)$
 $U_L = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} \sin^2(\omega t)$
 $U = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C} = \frac{1}{2} CV_{C0}^2 = U_C = \frac{1}{2} Li_0^2$
- 7.6 a) $\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{V_0}{L} \omega \cos(\omega t)$
- b) $v_R(t) = RI_0 \sin(\omega t + \phi)$
 $v_L(t) = \omega L I_0 \cos(\omega t + \phi)$
 $v_C(t) = -\frac{I_0}{\omega C} \cos(\omega t + \phi)$
- c) I_0^{max} quando $\omega^2 LC = 1$
 $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 3,2 \times 10^5 \text{ rad.s}^{-1}$
 $f = 5 \text{ KHz}$
 $I_0^{max} = \frac{V_0}{R} = 5 \text{ mA}$
 $i(t) = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t)$
- d) $U_C(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \cos^2(\omega t)$
 $U_L(t) = \frac{1}{2} LI_0^2 \sin^2(\omega t)$
 $U = \frac{1}{2} LI_0^2$
- 7.7 $C = 1,29 \mu F$
- 7.8 a) $Q = 10 \mu C; U_C = 50 \mu J$
- b.1) $V_{C1} = V_{C2} = 5 \text{ V}$
- b.2) $U_R = 25 \mu J$
- c) O circuito ficará a oscilar com toda a energia em C1 ou em C2.
- 7.10 a) $\epsilon = 0; I_1 = 1 \text{ mA}; I_2 = 10 \text{ A}$
- b) $\frac{dv_L}{dt} + \frac{R_1+R_2}{L} v_L = 0;$
 v_L tem a direcção de cima para baixo na figura mas a força electromotriz tem a direcção de baixo para cima.
- c) $U_R = 0,5 \text{ J}$

7.9

- a) O circuito equivalente do primário do transformador é um circuito RL com fonte pelo que a lei das malhas nos dá:

$$V = V_R + V_L = Ri + L \frac{di}{dt} \iff \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{V_0}{L} \sin(\omega t)$$

b)

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt} &= i_0 \omega \cos(\omega t - \phi) \\ i_0 \omega \cos(\omega t - \phi) + \frac{R}{L} i_0 \sin(\omega t - \phi) &= \frac{V_0}{L} \sin(\omega t - \phi) \end{aligned}$$

Desenvolvendo,

$$\sin(\omega t) = \sin[(\omega t - \phi) + \phi] = \sin(\omega t - \phi)\cos(\phi) + \cos(\omega t - \phi)\sin(\phi)$$

e igualando os termos em $\sin(\omega t - \phi)$ e $\cos(\omega t - \phi)$,

$$\frac{R}{L} i_0 \sin(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{L} \sin(\omega t - \phi) \cos(\phi) \iff \frac{R}{L} i_0 = \frac{V_0}{L} \cos(\phi) \quad (9.1)$$

$$i_0 \omega \cos(\omega t - \phi) = \frac{V_0}{L} \cos(\omega t - \phi) \sin(\phi) \iff i_0 \omega = \frac{V_0}{L} \sin(\phi) \quad (9.2)$$

Dividindo (6.2) por (6.1),

$$\frac{\omega L}{R} = \tan(\phi) \implies \left(\frac{\omega L}{R} \right)$$

Tendo em conta que,

$$\cos(\phi) = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

e substituindo por exemplo em (6.1), vem:

$$\frac{R}{L} i_0 = \frac{V_0}{L} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \implies i_0 = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}}$$

- c) Utilizando a lei de Ampère com um caminho fechado que é a linha de campo de raio médio criada pelo enrolamento do circuito primário temos,

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{\ell} = \sum I = NI \implies \vec{H} = \frac{NI}{2\pi a}$$

sendo I a corrente estacionária no enrolamento utilizada para este cálculo. O fluxo do campo magnético será o fluxo através de uma espira vezes o número de espiras do enrolamento,

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = BNS = \mu \frac{N^2 I}{2\pi a} S$$

E o coeficiente de autoindução é,

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu \frac{N^2 I}{2\pi a} S = 2$$

[H]

d)

$$P = R i^2 = R \left(\frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi) \right)^2$$

Como o valor médio da função $\sin^2(\omega t - \phi)$ no tempo é $1/2$,

$$\bar{P} = \frac{R}{2} \frac{V_0^2}{R^2 + \omega^2 L^2} = 13$$

mW Se não houvesse indução o circuito apresentaria uma resistência de **0,1 Ω** ligada à fonte e,

$$P = \frac{V_0^2}{R} \sin^2(\omega t)$$

$$\bar{P} = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R} = 530$$

KW e o circuito não resistiria. *Nota: Para além da dissipação na resistência, mesmo com o secundário desligado, existem ainda perdas devidas às correntes de EddyFocault (ver, por exemplo, Popovic pág. 247) e devidas à histerese (ver, por exemplo, Popovic pág. 282)*

- e) Sim. Apesar de não haver corrente e, portanto, não existir no núcleo de ferro um campo magnético criado pelo enrolamento secundário, as linhas do campo magnético criado pelo primário atravessam o circuito do secundário induzindo-lhe uma força electromotriz, ou seja, uma tensão aos seus terminais.

Capítulo 8

Equações de Maxwell e ondas electromagnéticas

Atenção

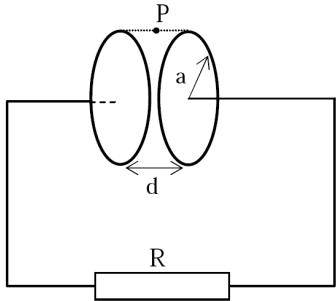
Nesta versão não há páginas 135-136

Exercícios Propostos

Exercício 8.1 : Um condensador plano de placas circulares de raio a , em que as armaduras estão separadas por ar de uma distância $d \ll a$ possui uma carga inicial Q_0 e descarrega-se através de uma resistência R , de acordo com a expressão:

$$Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Considere que é válida a aproximação do condensador de placas infinitas em todo o condensador.



- a) Determine o campo eléctrico (E_P) no ponto P.
- b) Determine o campo magnético (B_P) no ponto P.
- c) Determine o vector de Poynting (\vec{S}) no ponto P e o fluxo do vector de Poynting que atravessa a superfície lateral do condensador.
- d) Como se relaciona aquele fluxo do vector de Poynting com a potência fornecida pelo condensador à resistência?

Exercício 8.2 : Um condutor de comprimento ℓ , secção circular de raio a e condutividade σ_c está ligado a uma fonte de tensão V.

- a) Determine o vector de Poynting (\vec{S}), junto à superfície do condutor, no seu exterior.
- b) Determine o fluxo do vector de Poynting através da superfície do condutor e compare-o com a potência dissipada no condutor por efeito de Joule.

Exercício 8.3 : Um cabo coaxial com condutores de raios a e b , liga uma fonte de tensão V a uma resistência R .

- a) Determine os campos eléctrico e magnético na região entre os condutores.
- b) Determine a magnitude e direcção do vector de Poynting.

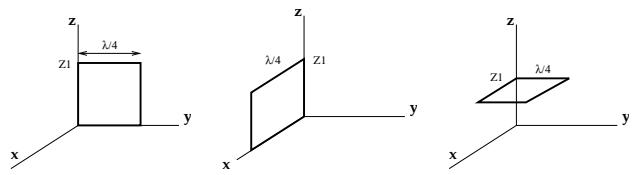
- c) Determine o fluxo do vector de Poynting através da secção recta do cabo.
- d) Calcule a potência dissipada por efeito de Joule na resistência.

Exercício 8.4 : Uma onda plana monocromática de frequência $f = 50$ MHz viaja no vácuo na direcção dos zz, estando o campo magnético \vec{B} polarizado segundo a direcção xx com uma amplitude B_0 .

- a) Qual o seu comprimento de onda?
- b) Qual a direcção de polarização do campo eléctrico?
- c) Admita que usa uma espira condutora para detectar o campo magnético da onda. Em que plano deve ser colocada a espira para que a eficiência de detecção seja máxima?
- d) Se a espira, de diâmetro muito menor que o comprimento de onda, tiver uma área A e uma resistência R , qual a amplitude da corrente induzida?

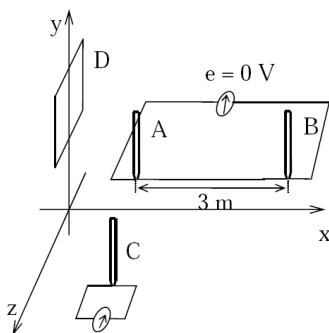
Exercício 8.5 : Uma onda electromagnética plana, monocromática e sinusooidal propaga-se no vácuo segundo o eixo dos zz e tem um comprimento de onda $\lambda = 500$ nm. O seu campo eléctrico encontra-se polarizado segundo o eixo xx. A amplitude do campo eléctrico é $1 \mu\text{V} \cdot \text{m}^{-1}$.

- a) Escreva a expressão do campo eléctrico segundo as coordenadas x, y e z.
- b) Calcule o campo magnético.
- c) Calcule o vector de Poynting.
- d) Colocaram-se 3 espiras quadradas de lado $\lambda/4$ nos planos xy, xz e yz, como indica a figura. Calcule a força electromotriz induzida devido ao campo eléctrico nas três espiras no instante em que o campo é máximo em $z = z_1$.



Exercício 8.6 : Uma onda electromagnética plana de frequência desconhecida e polarizada linearmente, propaga-se no sentido positivo do eixo xx. Para determinar a

sua frequência realizou-se a montagem experimental indicada na figura. Por tentativa e erro, concluiu-se que a força electromotriz induzida nas espiras A, B e C era máxima quando estas estavam paralelas ao plano xy . Fazendo variar a distância entre as espiras A e B, verificou-se que a força electromotriz induzida no circuito a que pertencem era nula quando a distância era 3,0 m. Ao mesmo tempo, mediu-se na espira C, cuja coordenada em x é idêntica à da espira A, uma força electromotriz máxima, que oscilava entre 31,4 nV e -31,4 nV.



- Calcule a frequência da onda electromagnética.
- Sabendo que a área da espira C é $0,01\text{ m}^2$ e admitindo que as espiras são suficientemente estreitas para se poder considerar o campo uniforme no seu interior, obtenha a expressão do campo magnético, \vec{B} .
- Sugestão: comece por calcular a força electromotriz induzida no circuito da espira C.*
- Obtenha a expressão do campo eléctrico (\vec{E}).
- Calcule o valor médio da potência transportada pela onda através da espira D, que tem a área de $0,05\text{ m}^2$ e é paralela ao plano yz .

Exercício 8.7 : Se a velocidade da luz fosse infinita e o campo eléctrico fosse caracterizado pela mesma constante, $(1/4\pi\epsilon_0)$, qual seria o valor do campo magnético? Existiriam ímanes? E disquetes ou compact flash drives?

Exercício 8.8 : Uma onda plana monocromática de frequência $f = 1\text{ GHz}$ propaga-se no vácuo e é descrita pelo seguinte campo eléctrico:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y \\ E_x &= E_0 \cos(\omega t - \kappa z) \\ E_y &= E_0 \sin(\omega t - \kappa z)\end{aligned}$$

Determine, para esta onda:

- o comprimento de onda e o período;
- a direcção de propagação;
- a polarização da onda;
- o campo magnético;
- a densidade de energia transportada;
- o vector de Poynting.

Exercício 8.9 : O campo magnético de uma onda electromagnética plana que se propaga num meio com permeabilidade magnética μ_0 é dada por:

$$\begin{aligned}B_x &= 7,5 \times 10^{-9} \sin(7,5 \times 10^6 t - 3 \times 10^{-2} y) [T] \\ B_y &= 0 [T] \\ B_z &= -7,5 \times 10^{-9} \sin(7,5 \times 10^6 t - 3 \times 10^{-2} y) [T]\end{aligned}$$

- Calcule a velocidade de propagação da onda.
- Qual a permitividade e o índice de refracção do meio?
- Qual a direcção de propagação da onda?
- Descreva o estado de polarização da onda.

Exercício 8.10 : Uma onda electromagnética plana propaga-se num meio não condutor com permeabilidade magnética μ_0 . O seu campo eléctrico é dado por:

$$E = 0,5 \cos [6,5 \times 10^6 t - 3.1 \times 10^{-2} (0,5 \times \sqrt{3} y - 0,5 z)] \vec{u}_x [\text{V.m}^{-1}]$$

- Qual a direcção de propagação da onda?
- Qual o índice de refracção do meio?
- Determine o campo magnético da onda, \vec{B} .
- Qual a polarização da onda?
- Determine o vector de Poynting e a intensidade da onda.

Exercício 8.11 : Uma fonte de radiação electromagnética radia isotropicamente (todas as direcções são equivalentes) com uma potência média de 1000 W.

- Determine a intensidade de radiação à distância de 10 metros.
- Qual o valor médio da densidade de energia transportada pela onda?
- Relacione os campos eléctrico e magnético existentes a essa distância com a densidade de energia transportada pela onda.

Capítulo 8

Exercício 8.12 : Uma onda electromagnética plana e monocromática propaga-se no ar e incide com um ângulo de 60° numa placa de cristal de área $A = 2\text{ m}^2$, sendo a placa totalmente iluminada pela onda. A densidade média da potência transportada pela onda é $I = 10^{-4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{ W.m}^{-2}$ e o seu campo eléctrico é descrito por:

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_x \vec{u}_x + E_z \vec{u}_z \\ E_x &= E_0 \cos(\omega t - k y) \\ E_z &= E_0 \sin(\omega t - k y)\end{aligned}$$

- a) Qual a polarização da onda?
- b) Quais as equações que descrevem o seu campo magnético \vec{B} ?
- c) Qual o valor de E_0 ?
- d) Sabendo que 50% da potência transportada pela onda atravessa a placa, qual a energia que a atravessou ao fim de 1 hora?

Exercício 8.13 : Um feixe de ondas electromagnéticas de frequência f propaga-se no ar ao longo do eixo dos xx . O seu campo eléctrico tem uma amplitude E_0 e encontra-se polarizado linearmente fazendo um ângulo de 45 graus com o eixo dos yy . Este feixe é detectado por um fotomultiplicador cuja eficiência de detecção é de 20%.

- a) Escreva as equações que descrevem o campo eléctrico do feixe.
- b) Escreva as equações que descrevem o campo magnético do feixe.
- c) Sabendo que a intensidade de radiação detectada é de 200 mW.m^{-2} , determine a intensidade de radiação emitida pela fonte e calcule a amplitude do campo eléctrico, E_0 .

Exercício 8.14 : Uma onda electromagnética plana, monocromática e sinusooidal propaga-se no vácuo e possui um campo eléctrico dado pela expressão:

$$\vec{E} = E_0 \cos(\omega t + 2x - 2y + z) \left(\frac{a \vec{e}_x + \vec{e}_y + \vec{e}_z}{\sqrt{a^2 + 2}} \right) [\text{V/m}]$$

- a) Determine o vector de ondas \vec{k} e o seu módulo.
- b) Calcule o comprimento de onda, λ .
- c) Calcule a frequência angular da onda, ω .
- d) Determine a constante a existente na expressão do campo eléctrico.

- e) Determine o valor de E_0 , sabendo que a intensidade da onda é de $I = \langle |\vec{S}| \rangle = \epsilon_0 c$ [W/m^2].
- f) Determine o campo magnético \vec{B} da onda (direcção e amplitude).

Exercício 8.15 : Uma onda electromagnética plana incide numa interface ar-água que separa estes dois meios dielétricos de permitividades eléctricas relativas $\epsilon_r^{ar} = 1$ e $\epsilon_r^{água} = 81$. Determine:

- a) os índices de refracção dos meios dieléctricos.
- b) a velocidade de propagação nos meios dieléctricos.
- c) o ângulo de Brewster (θ_B) e o ângulo de refracção correspondente.
- d) os coeficientes de reflexão e transmissão, para $\theta_i = \theta_B$, para o caso em que a onda possui polarização paralela ao plano de incidência.
- e) os coeficientes de reflexão e transmissão, para $\theta_i = \theta_B$, para o caso em que a onda possui polarização perpendicular ao plano de incidência.
- f) a transmitância (T) para ambos os casos (paralela e perpendicular) de polarização da onda.

Eqs de Fresnel:

(paralelo ao plano de incidência)

$$\left(\frac{E_R}{E_I} \right)_\parallel = \frac{n_2 \cos \theta_i - n_1 \cos \theta_t}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_T}{E_I} \right)_\parallel = \frac{2n_1 \cos \theta_i}{n_2 \cos \theta_i + n_1 \cos \theta_t}$$

(perpendicular ao plano de incidência)

$$\left(\frac{E_R}{E_I} \right)_\perp = \frac{n_1 \cos \theta_i - n_2 \cos \theta_t}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

$$\left(\frac{E_T}{E_I} \right)_\perp = \frac{2n_2 \cos \theta_i}{n_1 \cos \theta_i + n_2 \cos \theta_t}$$

Atenção

Nesta versão não há páginas 140-141

Soluções

- 8.2 a) $\vec{S} = -\frac{\sigma V^2 a}{2\ell^2} \vec{u}_r$
 b) $\Phi_S = \frac{V^2 \sigma \pi a^2}{\ell} = \frac{V^2}{R}$
- 8.3 a) $\vec{E} = \frac{V}{r \ln(b/a)} \vec{u}_r; \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$
 b) $\vec{S} = \frac{VI}{2\pi r^2 \ln(b/a)} \vec{u}_z$
 c) $\Phi_S = VI$
 d) $P = VI$
- 8.5 a) $\vec{E} = 10^{-6} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x \text{ V.m}^{-1}$
 $\omega = 12\pi \times 10^{14} \text{ rad.s}^{-1}$
 $k = 4\pi \times 10^6 \text{ rad.m}^{-1}$
 b) $\vec{B} = 3,3 \times 10^{-15} \cos(\omega t - kz) \vec{u}_y \text{ T}$
 c) $\vec{S} = 2,6 \times 10^{-15} \cos^2(\omega t - kz) \vec{u}_z \text{ W.m}^{-2}$
 d) $yz : \epsilon = 0; xz : \epsilon = 0,125 \text{ pV}; xy : \epsilon = 0.$
- 8.7 $B = 0$
- 8.8 a) $\lambda = 0,3 \text{ m}; T = 10^{-9} \text{ s.}$
 b) $\vec{u}_k = \vec{u}_z$
 c) polarização circular direita (\odot)
 d) $\vec{B} = \frac{1}{c} (E_x \vec{u}_y - E_y \vec{u}_x)$
 e) $u = \epsilon_0 E_0^2$
 f) $\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \vec{u}_z$
- 8.9 a) $v = 0,83c$
 b) $\epsilon = 1,44\epsilon_0; n = 1,2.$
 c) \vec{u}_y
 d) polarização linear no plano xz, fazendo um ângulo de -45° com o eixo xx.
- 8.10 a) $\vec{u}_k = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{u}_y - \frac{1}{2} \vec{u}_z$
 b) $n = 1,43$
 c) $B_x = 0$
 $B_y = -\frac{0,5}{2v} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \text{ [T]}$
 $B_z = -\frac{0,5\sqrt{3}}{2v} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \text{ [T]}$
 d) linear
 e) $\vec{S} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} 0,5^2 \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}) \vec{u}_k \text{ W/m}^2$
 $I \equiv <\vec{S}> = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu_0}} 0,5^2 \frac{1}{2} \text{ W/m}^2$
- 8.11 a) $I = \frac{10}{4\pi} \text{ W.m}^{-2}$
 b) $< u_T > = \frac{10^{-7}}{12\pi} \text{ J.m}^{-3}$
 c) $< E^2 > = \frac{< u_T >}{\epsilon}$
- 8.12 a) circular esquerda
 b) $\vec{B} = \frac{1}{c} (E_z \vec{u}_x - E_x \vec{u}_z)$
 c) $E_0 = 10^{-2} \text{ V.m}^{-1}$
 d) Energia $= 180 \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \text{ mJ}$

8.1

- a) Sendo $a \gg d$ pode-se considerar a aproximação do condensador de placas infinitas, ou seja, pode-se considerar o campo eléctrico uniforme dentro do condensador e até à sua superfície lateral. Podemos de seguida usar a lei de Gauss para calcular o campo dentro do condensador, recorrendo a uma superfície cilíndrica de raio a com tampas dentro e fora do condensador. A tampa de fora não terá fluxo pois $\vec{E} = 0$ e as superfícies laterais do cilindro também não terá fluxo pois $\vec{E} \perp \vec{n}$. Ficamos então com,

$$\oint \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0} \iff \epsilon_0 E \pi a^2 = Q(t) \implies E = \frac{Q(t)}{\epsilon_0 \pi a^2}$$

Considerando como positiva a placa da esquerda e a direcção \vec{u}_z como da placa da esquerda para a placa da direita:

$$\vec{E} = \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\epsilon_0 \pi a^2} \vec{u}_z$$

- b) Dentro do condensador não há corrente eléctrica mas há corrente de deslocamento. Como as linhas de campo magnético são circunferência em trono do eixo zz (centrado nos eixos das placas do condensador), vamos aplicar a lei de Ampère escolhendo como caminho uma linha de campo que passe no ponto P. Para sentido de circulação vamos escolher o que nos dá a normal com a direcção de \vec{E} :

$$\begin{aligned} \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} \left(\int \vec{E} \cdot \vec{n} dS \right) \iff B 2\pi a = \mu_0 \epsilon_0 \frac{d}{dt} (E \pi a^2) \\ \implies B &= \frac{\mu_0}{2} \epsilon_0 a \frac{d}{dt} \left(\frac{Q(t)}{\epsilon_0 E \pi a^2} \right) = \frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{dQ}{dt} \\ \vec{B} &= -\frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

c)

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} = \vec{E} \times \frac{\vec{B}}{\mu_0} = E \frac{B}{\mu_0} (\vec{u}_r)$$

sendo \vec{u}_r a direcção radial em relação ao eixo das placas do condensador.

$$\vec{S} = \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\epsilon_0 \pi a^2} \frac{\frac{\mu_0}{2\pi a} \frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\tau}}{\mu_0} (\vec{u}_r) = \frac{\left(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{2\pi^2 a^3 \epsilon_0 \tau} \vec{u}_r$$

O fluxo através da superfície que envolve o condensador só existe na sua superfície lateral, já que o vector de Poynting é radial. Deste modo, e notando que o valor de S é constante nessa superfície:

$$\Phi_S = \int \vec{S} \cdot \vec{n} dS = \frac{\left(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{2\pi^2 a^3 \epsilon_0 \tau} A = \frac{\left(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{2\pi^2 a^3 \epsilon_0 \tau} 2\pi a d = \frac{\left(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{\pi a^2 \epsilon_0 \tau} d$$

- d) O resultado da alínea anterior diz-nos que existe uma potência a sair do condensador (fluxo positivo). Isto acontece porque um condensador a descarregar fornece potência ao circuito a que está ligado.

A potência fornecida pelo condensador ao circuito, $P = VI$, depende da tensão aos terminais do condensador $V = Ed$ e da corrente eléctrica devido à diminuição da carga nas armaduras do condensador, $I = -\frac{dQ}{dt}$.

$$P = VI = -Ed \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}}{\epsilon_0 E \pi a^2} d \frac{d}{dt} \left(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right) = \frac{\left(Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{\pi a^2 \epsilon_0 \tau} d = \Phi_S$$

8.4

- a) $\lambda = \frac{c}{f} = \frac{3 \times 10^8}{5 \times 10^7} = 6 \text{ m}$
- b) $\vec{n} = \vec{u}_E \times \vec{u}_B \iff \vec{u}_z = \vec{u}_E \times \vec{u}_x \implies \vec{u}_E = -\vec{u}_y$
- c) A detecção do campo magnético da onda faz-se através da corrente induzida na espira. Para que o fluxo do campo magnético seja máximo, o plano da espira deve ser perpendicular ao campo, ou seja, deve estar em yz .
- d) Sendo a espira muito pequena em relação ao comprimento de onda (6 m) podemos considerar a amplitude do campo, em cada instante, constante no plano da espira. Assim, sendo o campo magnético, $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t - kz) \vec{u}_x$, vem:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -\frac{d}{dt} \left(\int \vec{B} \cdot \vec{n} dS \right) = -\frac{d}{dt} (BA) = -A \frac{dB}{dt} = -A\omega B_0 (-\sin(\omega t - kz)) \\ I_{max} &= \frac{\varepsilon_{max}}{R} = \frac{A\omega B_0}{R}\end{aligned}$$

8.6

- a) Do enunciado depreende-se que $\lambda/2 = 3 \text{ m}$ pois assim o campo está em oposição de fase nas espiras A e B e $\varepsilon = 0$. Donde:

$$\lambda = 6 \text{ m}$$

$$v = \frac{c}{\lambda} = 5 \times 10^7 \text{ Hz}$$

- b) Do enunciado sabe-se que na espira C a força electromotriz induzida é $\varepsilon = 31,4 \times 10^{-9} \sin(\omega t + \alpha)$.

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt}$$

$$\Phi = \frac{31,4 \times 10^{-9}}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) = \frac{31,4 \times 10^{-9}}{2 \times 31,4 \times 5 \times 10^7} \cos(\omega t + \alpha) = 10^{-16} \cos(\omega t + \alpha)$$

$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n} dS = BA$, uma vez que esta força electromotriz é máxima e portanto o campo é perpendicular à superfície da espira.

$$B = \frac{\Phi}{A} = 10^{-14} \cos(\omega t + \alpha) [\text{T}]$$

Podemos então concluir que: $\vec{B} = B_0 \cos \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) \vec{u}_B$, com:

$$B_0 = 10^{-14} \text{ T}$$

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = kx, \text{ pois a onda progaga-se segundo } xx.$$

$\vec{u}_B = \vec{u}_z$, pois, como já se referiu, a força electromotriz é máxima quando o campo é perpendicular à espira, que está no plano xy .

- c) $\vec{u}_x = \vec{u}_E \times \vec{u}_B \implies \vec{u}_E = \vec{u}_y$ e $E = cB$, pelo que:

$$\vec{E} = cB_0 \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) \vec{u}_y = 3 \times 10^{-6} \cos(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) \vec{u}_y \text{ V.m}^{-1}$$

d)

$$\begin{aligned}I &= \langle \vec{S} \cdot \vec{n} \rangle = \langle S \vec{u}_x \cdot \vec{u}_x \rangle = \langle EH \rangle = \left\langle E \frac{B}{\mu_0} \right\rangle = \left\langle \frac{E^2}{c\mu_0} \right\rangle \\ &= \frac{9 \times 10^{-12}}{3 \times 10^8 \times 4\pi \times 10^{-7}} \langle \cos^2(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r} + \delta) \rangle = \frac{9 \times 10^{-12}}{2 \times 360} = 1,25 \times 10^{-14} \text{ W.m}^{-2} \\ \langle P \rangle &= 1,25 \times 10^{-14} \times 5 \times 10^{-2} = 6,25 \times 10^{-16} \text{ W}\end{aligned}$$

8.13 a) $E_y = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos(2\pi f - kx)$; $E_z = \frac{\sqrt{2}}{2} E_0 \cos(2\pi f - kx)$
 b) $B_y = -\frac{\sqrt{2}}{2c} E_0 \cos(2\pi f - kx)$; $B_z = \frac{\sqrt{2}}{2c} E_0 \cos(2\pi f - kx)$
 c) $I = 1 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}$; $E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}}$

8.14 a) $\vec{k} = (-2, 2, -1)$; $k = 3 \text{ rad/m}$

b) $\lambda = \frac{2\pi}{3} \text{ m}$
 c) $\omega = 9 \times 10^9 \text{ rad/s}$
 d) Sabendo que $\vec{k} \cdot \vec{E} = 0$, $a = \frac{1}{2}$
 e) $E_0 = \sqrt{2} \text{ V/m}$
 f) $\vec{B} = \frac{E_0}{c} \cos(\omega t + 2x - 2y + z) \left(\frac{2}{3} \vec{e}_x + \frac{1}{3} \vec{e}_y - \frac{2}{3} \vec{e}_z \right)$

Capítulo 9

Óptica

Exercícios Propostos

Exercício 9.1 : Uma onda electromagnética monocromática de frequência $f = 10^{14}$ Hz propaga-se no ar e entra num material com um índice de refracção $n = 2$.

- Qual a velocidade de propagação da onda no material?
- Qual a frequência da onda no material?
- Qual o comprimento de onda no material?

Exercício 9.2 : Um raio de luz monocromático incide com um ângulo de 30° numa das faces de uma placa de vidro com índice de refracção $n = 1,5$ (para esse comprimento de onda).

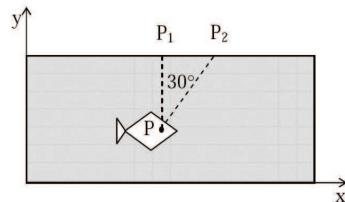
- Qual o ângulo da onda transmitida através do vidro? (faça um esquema)
- O que se alterava se em vez de vidro a luz atravessasse uma placa diamante de índice de refracção $2,4$?

Exercício 9.3 : Um raio de sol (luz branca) incide sobre uma janela de vidro de 4 mm com um ângulo de 45° . Sabendo que o índice de refracção do vidro para a cor vermelha é de $1,5885$ e para a cor azul é de $1,5982$, determine a separação espacial das duas cores após o raio atravessar o vidro.

Exercício 9.4 : Uma onda electromagnética plana monocromática propaga-se dentro de um material caracterizado por $\epsilon_r = 1,5$ e $\mu_r = 1$.

- Verifique em que condições de incidência da onda na superfície de separação do material com o ar não existe onda propagada no ar.
- O fenômeno descrito em a) (reflexão total) poderia ser verificado se a onda incidisse na superfície de separação dos meios mas propagando-se no ar?

Exercício 9.5 : Um pescador procura observar na água ($n_{\text{agua}} \gg 1,5$) um peixe, sendo este visível caso a luz nele reflectida atinja os olhos do pescador. Considere que a luz proveniente do ponto P de um peixe (imóvel) está linearmente polarizada, com o seu campo eléctrico no plano xy (ver figura).



- Determine a velocidade da luz na água e escreva uma expressão para o campo eléctrico associado à componente da luz com $\lambda = 500\text{nm}$ da onda que se propaga na direcção do ponto P_2 . Considere que a amplitude do campo eléctrico é E_0 .
- Determine as direcções de propagação da luz transmitida para o ar dos raios luz que incidem na superfície da água nas posições P_1 e P_2 .
- Qual o ângulo de incidência máximo que a luz proveniente do peixe pode ter para que possa ser observada pelo pescador?

Exercício 9.6 : Uma onda electromagnética plana monocromática e polarizada circularmente desloca-se no ar e incide segundo um dado ângulo de incidência θ_i sobre a superfície plana de um dieléctrico ($\epsilon_r = 2,7$ e $\mu_r = 1$). Determine o ângulo de incidência para o qual a onda reflectida está polarizada linearmente.

Atenção

Nesta versão não há páginas 146-148.
A numeração das soluções está 8.xx
quando devia estar 9.xx

Soluções

8.1 a) $1,5 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1}$

b) 10^{14} Hz

c) $\lambda = 1,5 \mu\text{m}$

8.2 a) 30°

b) Saía com o mesmo ângulo mas mais perto do ponto de incidência.

8.3 $d = 14,8 \mu\text{m}$

8.4 a) $\theta_i = 54,7^\circ$

b) não

8.5 a) $\vec{E} = E_x \vec{u}_x + E_y \vec{u}_y$
 $E_x = \frac{\sqrt{3}}{2} E_0 \cos(8\pi \times 10^{14} t - 4\pi \times 10^6 (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y))$
 $E_y = -\frac{1}{2} E_0 \cos(8\pi \times 10^{14} t - 4\pi \times 10^6 (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y))$

b) $\vec{n}_{ar_1} = \vec{u}_y$
 $\vec{n}_{ar_2} = 0,75 \vec{u}_x + 0,66 \vec{u}_y$

c) $\theta_{max} = 41,8^\circ$

8.6 $58,7^\circ$