



UNIVERSIDADE FEDERAL DE UBERLÂNDIA

FEMEC 42060

CONTROLE DE SISTEMAS LINEARES

7ª - Resposta em frequência

Prof. Pedro Augusto

18 de agosto de 2020

1 Introdução

Na sequência uma breve revisão sobre resposta em frequência será realizada. Posteriormente, mostrar-se-á como características importantes dessa resposta podem ser determinadas e utilizadas para mudar o comportamento do sistema em malha fechada (MF).

1.1 Resposta em frequência

A resposta em frequência de um sistema linear e invariante no tempo (SLIT) é definida como a resposta em regime permanente a uma entrada do tipo senoidal. No caso particular de SLITs, é possível demonstrar que a saída da planta também é uma senoide de mesma frequência da entrada. Com esse propósito, considere um processo com dinâmica descrita da seguinte forma:

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{m(s)}{(s + p_1)(s + p_2) \cdots (s + p_n)} \quad (1)$$

em que $m(s)$ é um polinômio de grau m e p_1, p_2, \dots, p_n são maiores do que zero, isto é, o sistema é estável

Uma vez que a entrada é do tipo senoidal, $u(t) = A \cdot \sin(\omega t)$, tem-se que

$$U(s) = A \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (2)$$

Substituindo (2) em (1) e expandindo em frações parciais, é possível escrever

$$Y(s) = \frac{a_1}{s + p_1} + \frac{a_2}{s + p_2} + \cdots + \frac{a_n}{s + p_n} + \frac{a_0}{s - j\omega} + \frac{\bar{a}_0}{s + j\omega} \quad (3)$$

Aplicando a Transformada Inversa de Laplace em (3), obtém-se

$$y(t) = \underbrace{a_1 e^{-p_1 t} + a_2 e^{-p_2 t} + \cdots + a_n e^{-p_n t}}_{\text{resp. natural}} + \underbrace{a_0 e^{j\omega t} + \bar{a}_0 e^{-j\omega t}}_{\text{resp. forçada}}$$

sendo a_0 e \bar{a}_0 complexos conjugados¹.

Em regime permanente, os termos exponenciais se anulam. Portanto,

$$y(t) = 2|a_0| \sin(\omega t + \phi + \pi/2) \quad (4)$$

sendo que $\phi = \tan^{-1}(\text{Im}\{a_0\}/\text{Re}\{a_0\})$.

¹Esses termos são obtidos fazendo-se $s \rightarrow \pm j\omega$

A constante a_0 pode ser calculada a partir de (3), como resultado, tem-se que

$$|a_0| = \left| G(j\omega) \frac{A}{2j} \right| = \frac{A}{2} |G(j\omega)| \quad (5)$$

$$\angle a_0 = \phi = \angle \left(G(j\omega) \frac{A}{2j} \right) = \angle G(j\omega) - \pi/2 \quad (6)$$

Finalmente, substituindo (5) e (6) em (4), chega-se a

$$y(t) = A|G(j\omega)| \sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

De fato, verifica-se que a saída do sistema é uma senoide de mesma frequência da entrada. Adicionalmente, o módulo e a fase da entrada são modificados pelo módulo e pela fase da planta calculados na frequência de entrada ω .

A resposta em frequência pode ser caracterizada experimentalmente com certa facilidade. Então, é possível identificar modelos que descrevem razoavelmente o comportamento do sistema. Nesse processo, representações gráficas da resposta em frequência são de grande importância.

Dentre as diferentes formas de representação, o diagrama de Bode é composto por duas figuras: uma contendo os valores $|G(j\omega)|_{dB}^2$ e outra de $\angle G(j\omega)^\circ$. Já o eixo das abscissas é constituído por uma escala logarítmica da frequência. A Figura 1 ilustra o diagrama de Bode de um determinado sistema.

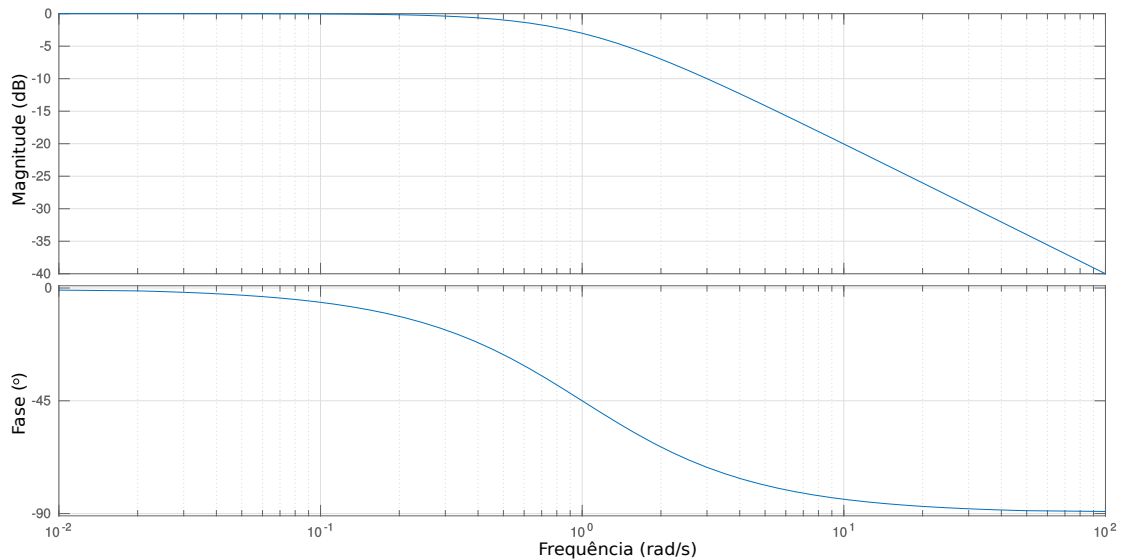


Figura 1: Representação da resposta em frequência no diagrama de Bode.

² $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \log(|G(j\omega)|)$.

1.2 Cálculo de módulo e fase da planta para uma dada frequência a partir de dados experimentais

Considere que foi aplicada uma entrada senoidal em um SLIT (Figura 2). Mais ainda, que foram medidas entrada e saída com auxílio de um osciloscópio. A tela do osciloscópio é ilustrada na Figura 3.

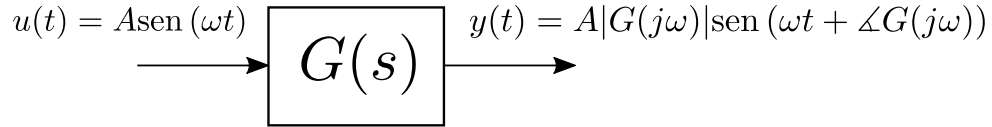


Figura 2: Diagrama de blocos para obtenção da resposta em frequência de um sistema estável.

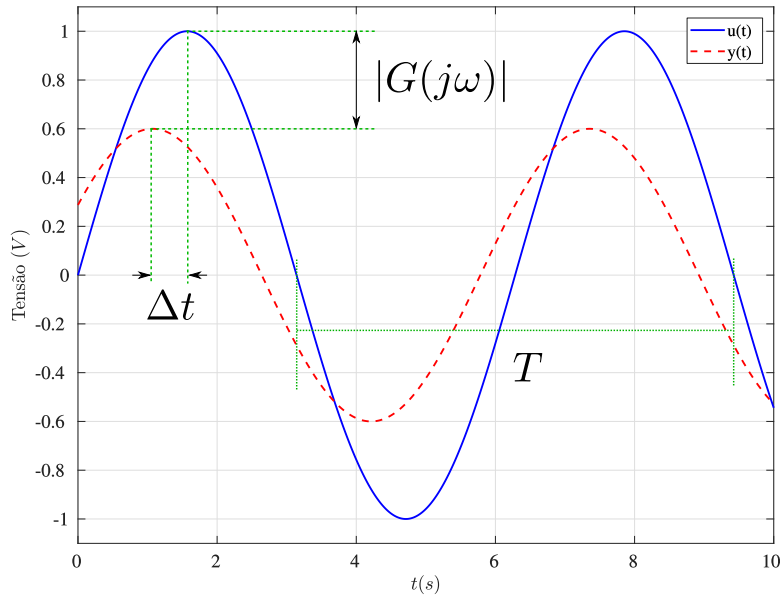


Figura 3: Sinais observados no osciloscópio.

A razão entre as amplitudes das ondas senoidais é $|G(j\omega)|$. Então, da Figura 3, pode-se escrever

$$|G(j\omega)| = \frac{V_{pp}^y}{V_{pp}^u} \quad (7)$$

em que V_{pp}^y é o valor de pico a pico da saída e V_{pp}^u é o valor de pico a pico da entrada.

A fase está relacionada com a defasagem entre as ondas. Em particular, pode-se determinar $\angle G(j\omega)$ a partir da seguinte relação:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{\angle G(j\omega^\circ)}{360^\circ} \quad (8)$$

em que T é o período da senoide de entrada ou de saída e t é o atraso entre as ondas. Nota: Cuidado com o sinal do atraso.

2 Objetivos

Os objetivos da presente aula são

- Determinar características importantes da resposta em frequência. Mais especificamente, ganho em baixas frequências e frequência de corte ω_c
- Estimar o erro de regime estacionário e_{ss} pra uma operação em MF com um compensador unitário
- Projeto de compensador para reduzir o erro de regime sem afetar ω_c

3 Metodologia

3.1 Caracterização da resposta em frequência

Utilizando o procedimento a seguir, determinar-se-ão o ganho em baixas frequências e a frequência de corte da resposta em frequência.

- Copie o arquivo `MA_id_resp_freq.py` fornecido no Google Classroom para uma pasta em seu computador. Esse *script* será a base para a simulação dessa seção
- Modifique o código para aplicar uma senoide com frequência $\omega = 0,1$ rad/s e amplitude 80 na entrada do motor. Adote um tempo de simulação $T_{sim} = 100$ s (linha 22 do código)
- A partir do gráfico obtido, calcule o ganho em baixas frequências, isto é, $|G(j0.1)|_{dB} = V_{pp}^y/V_{pp}^u$

- Sem alterar a amplitude de entrada, aumente a frequência de excitação ω até que os sinais de entrada e saída tenham **aproximadamente** a mesma amplitude, conforme ilustrado a seguir. **Nota:** Para facilitar a visualização deve-se adequar o tempo de simulação (T_{sim} na linha 22) conforme a frequência for aumentando

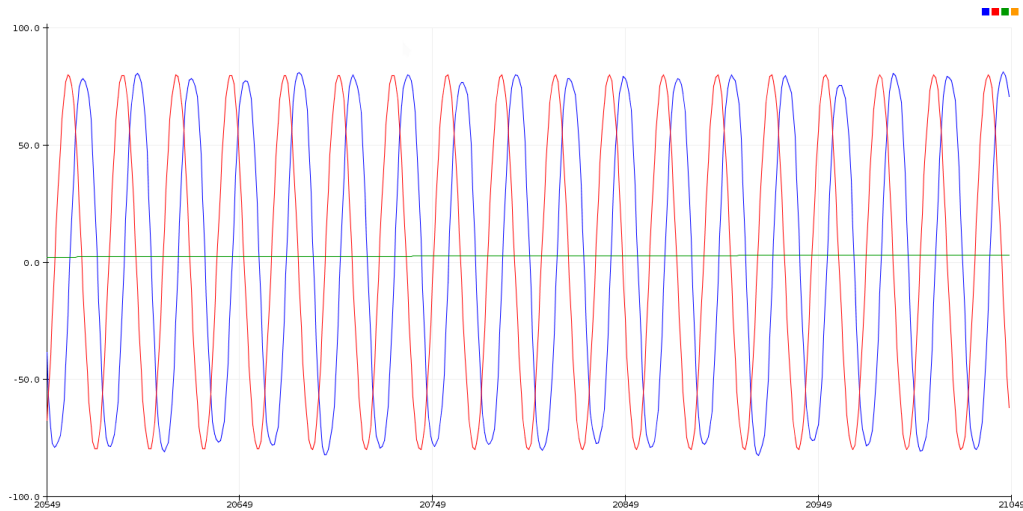


Figura 4: Resposta da planta para determinação de ω_c . Nesse ponto, tem-se que $\omega = \omega_c$, pois $|G(j\omega_c)|_{dB} = 0$ (i.e. $|G(j\omega_c)| = 1$).

- Complete os quadros da Figura 5. Nota: Considerou-se que a dinâmica do sistema é de primeira ordem devido aos resultados observados no Lab 3

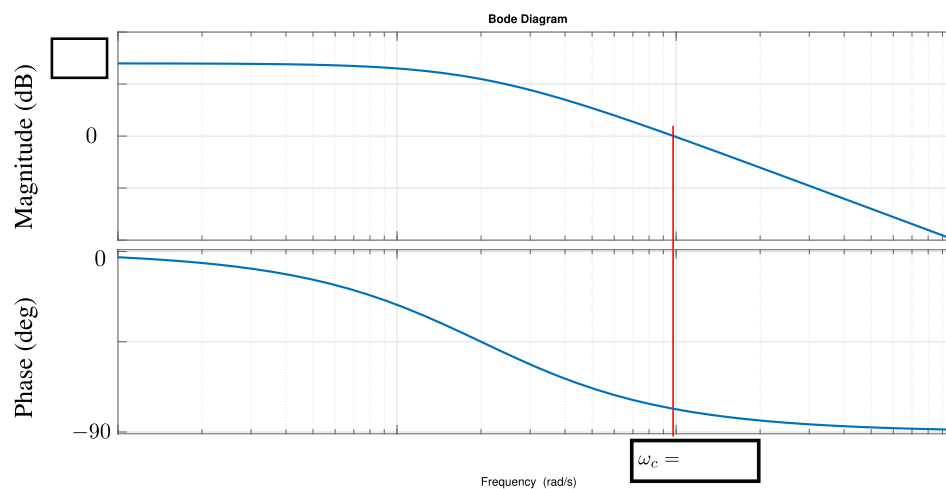


Figura 5: Resposta em frequência da planta.

- Responda à Seção 1 do relatório

3.2 Comportamento da planta em MF

Realize as atividades a seguir considerando a estrutura de controle mostrada na Figura 6.

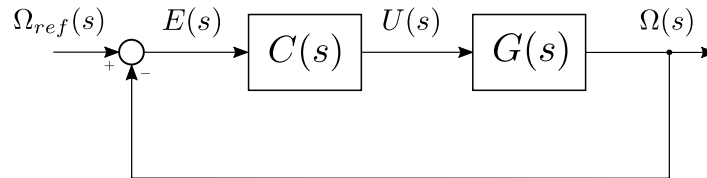


Figura 6: Estrutura de controle em malha fechada com um compensador $C(s)$. A entrada é uma velocidade de referência e o sinal de realimentação é a velocidade medida do motor.

Controlador proporcional com ganho unitário

- Copie os arquivos `MF_cont.py` e `discre_compens.py` fornecidos no Google Classroom para uma pasta em seu computador. Esses *scripts* serão a base para a simulação dessa seção
- Modifique o arquivo `MF_cont.py` para implementar um controlador em MF com $C(s) = 1$, isto é, um controlador proporcional
- Aplique um degrau de referência de $\omega_{ref} = 200$ rad/s e verifique o erro de regime estacionário obtido
- Responda à Seção 2 do relatório

Projeto de compensador

- Projete um compensador

$$C_2(s) = \frac{s + a}{s + b},$$

de modo que $e_{ss} \leq 5$ rad/s, sendo e_{ss} o erro de regime estacionário para a entrada degrau. Mais ainda, **não** se deve alterar significativamente o comportamento transitório, isto é, não se pode modificar ω_c nem a margem de fase.

- Para implementação, determine um compensador digital $C_d(z)$ utilizando o arquivo `discre_compens.py`. Basta substituir os valores de a e b calculados no código.

Como resultado, determinar-se-á um controlador digital na seguinte forma:

$$\frac{U(z)}{E(z)} = C_d(z) = \frac{\bar{a}_1 z + \bar{a}_2}{z + \bar{b}}$$

o que corresponde a seguinte **equação a diferenças**:

$$u(k) = -\bar{b}u(k-1) + \bar{a}_1 e(k) + \bar{a}_2 e(k-1) \quad (9)$$

em que k é o índice de tempo discreto.

- Modifique o código `MF_cont.py` para implementar a lei de controle (9) para a velocidade do motor
- Aplique um degrau de referência de $\omega_{ref} = 200$ rad/s e verifique o erro de regime estacionário obtido em simulação