Processamento de Sinais em Tempo Discreto

- Prof. Dr. Samuel Lourenço Nogueira

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

ufscar

- Aula anterior:
  - Transformada Discreta de Fourier
    - Algoritmo da Transformada Direta (DFT)
    - Traçado Espectral
      - Escala (amplitude e fase)
      - Fases com amplitude mínima ou nula
      - Análise do espectro
      - Componente DC do sinal
      - Espectro de Amplitude vs Espectro de Potência

Conteúdo Programático

- Transformada Discreta Inversa de Fourier
  - Algoritmo da Transformada Inversa (IDFT)
- Análise e Funcionamento
  - Resolução em Frequência
  - Preenchimento com Zeros (*Zero padding*):
    - Domínio do tempo
    - Domínio da frequência

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER

DFT ⇒

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

Ajuste de escala

Coef. DFT

Complexo conjugado

IDFT ⇒

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{m=0}^{N-1} X[m]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) + jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER

Coef. DFT

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{X[m]\overbrace{\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)+j\,sen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)}^{\text{Func. complexa}}}_{\text{Coef. multipl. pela função complexa}}$$

1 amostra

≠ outra forma de representar

Fórmula de Euler

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[m]\, e^{\frac{j2\pi nm}{N}}$$

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[m]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) + jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

```
function X = idft(X)

N = length(X);

for n = 0:N-1
    soma = 0;

    for m = 0:N-1
      soma = soma + X(m+1) * ...
        (cos(2*pi*n*m/N) + 1i*sin(2
        *pi*n*m/N));
    end
    x(n+1) = soma/N;
end
```

p/ fins de demonstração ⇒ na prática! FFT

Produto escalar

Coef. do DFT.

Complexo conjugado

Ajuste de escala

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[m]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) + jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

```
function X = idft(X)

N = length(X);

for n = 0:N-1
    soma = 0;

    for m = 0:N-1
      soma = soma + X(m+1) * ...
        (cos(2*pi*n*m/N) + 1i*sin(2
        *pi*n*m/N));
    end
    x(n+1) = soma/N;
end
```

comp. DFT

Ajustes de escala

x = [7 4 3 9]
X = dft(x); % [23, 4+5j, -3, 4-5j] ⇒ IDFT(X)

• p/n = 0, m de 0 a 3
cos 0 = 1
sen 0 = 0 ... * 1

• p/n = 1, m de 0 a 3
m = 0 ⇒ * 1
m = 1 ⇒ 90° ⇒ * j
m = 2 ⇒ -1
m = 3 ⇒ -j

n \ m	0	1	2	3	x[n]
0	23	4+5j	-3	4-5j	28/4 = 7
1	23	4j+5jj	3	-4j+5jj	16/4 = 4
2	23	-4-5j	-3	-4+5j	12/4 = 3
3	23	5-4j	3	5+4j	36/4 = 9

TRANSFORMADA DISCRETA INVERSA DE FOURIER

$$x[n] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} X[m]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) + jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

```
function X = idft(X)

N = length(X);

for n = 0:N-1
    soma = 0;

    for m = 0:N-1
      soma = soma + X(m+1) * ...
        (cos(2*pi*n*m/N) + 1i*sin(2
        *pi*n*m/N));
    end
    x(n+1) = soma/N;
end
```

n\m	0	1	2	3	x[n]
0	23	4+5j	-3	4-5j	28/4 = 7
1	23	4j + 5jj	3	-4j + 5jjj	16/4 = 4
2	23	-4 - 5j	-3	-4 + 5j	12/4 = 3
3	23	5 - 4j	3	5 + 4j	36/4 = 9

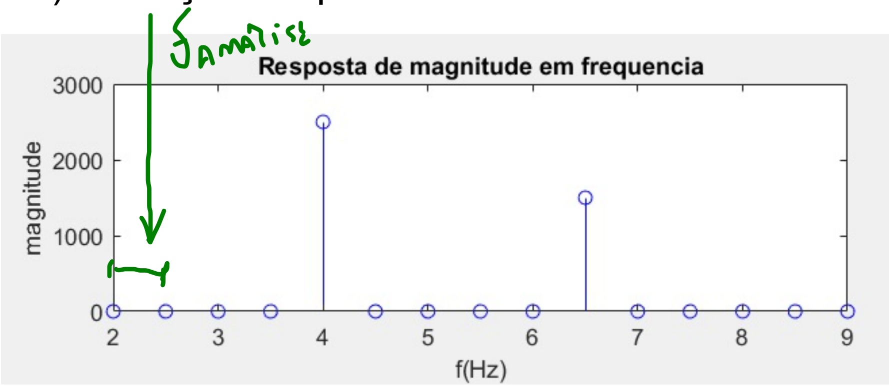
```
>> x = [7 4 3 9]
>> X = dft(x)
>> x_ = idft(X)
>> erro = sum(abs(x-x_))
```

ERRO foi DA ORDEM 10^{-15}

RESOLUÇÃO EM FREQUÊNCIA

A resolução em frequência é a distância/ou espaçamento entre frequências (Eixo X) no traçado espectral

$$f_{análise}[m] = \frac{m \cdot F_s}{N}$$



Exemplo:

$F_s = 1\,kHz$
$N = 2000$ } 2 s (de sinal)

Resolução de freq $= F_s/N = 1/2$ Hz

RESOLUÇÃO EM FREQUÊNCIA

(R_f)

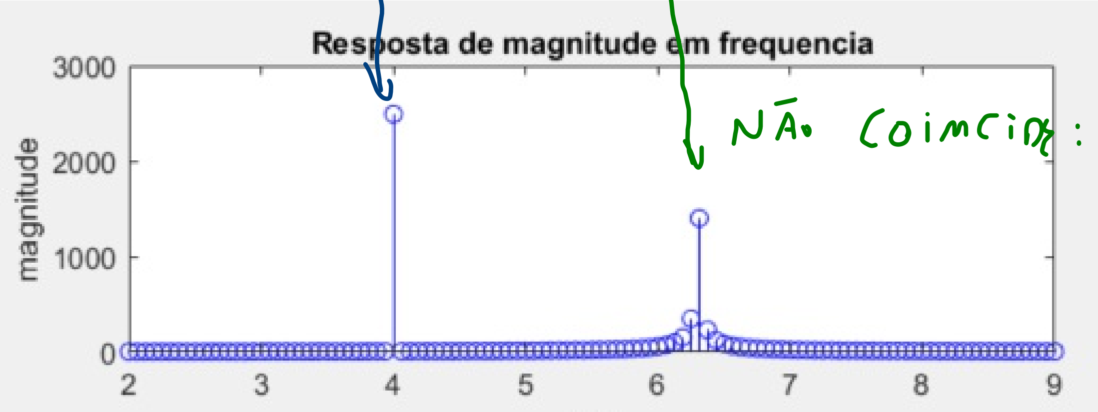
>> Topico4Exemplo1.m

```
% sinal de exemplo
x =  2.5*cos(2*pi*4*n*Ts) + ...
     1.5*cos(2*pi*6.3*n*Ts);
```

Coincide: Resolução aparente é quase única

$F_s = 125\,Hz$

$R_f = F_s / N$



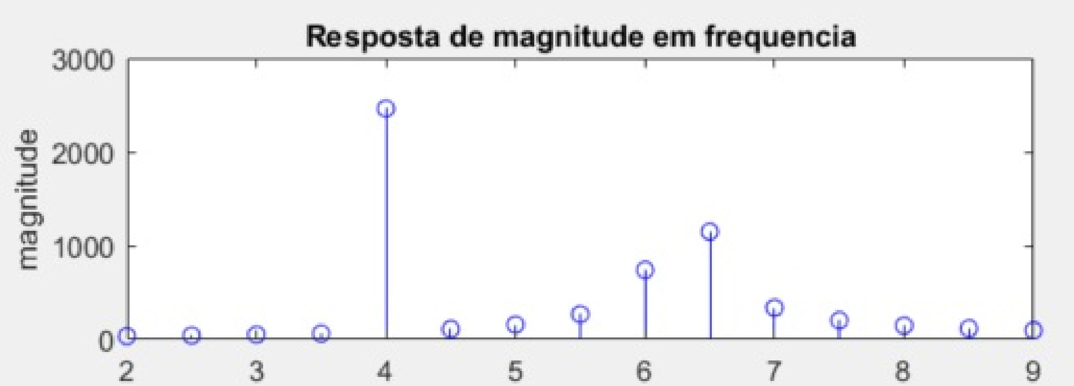
Não coincide: A resolução aparente não é única

Mesmo que

Diferente da precisão da DFT

Ficará mais claro com zero padding!

$F_s = 1\,kHz$



PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

$x[n]$

-Consiste na inserção de zeros no domínio do tempo ou da frequência $X[m]$

-Promover uma resolução aparente mais suave do sinal no tempo ou no espectro após a aplicação da DFT ou IDFT

- Não eleva a precisão da FT

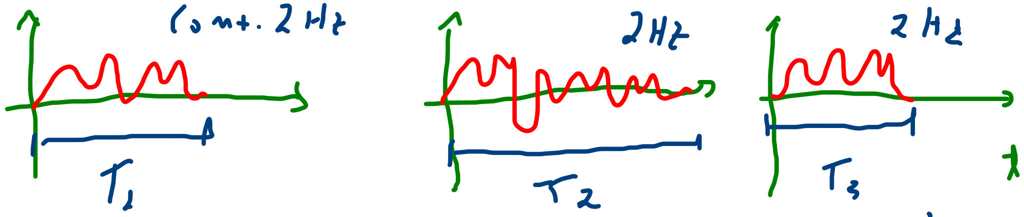
Existem duas formas de Zero Padding:

- Domínio do tempo (mais usual)
- Domínio da frequência ← com cuidado!

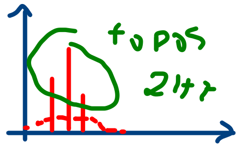
Motivos p/ uso

*1- obter uma frequência específica que não está presente na resolução atual

*** 2- Fazer com que o tamanho do vetor do DFT coincida com outros vetores, para análise.



F_s = p/ todos!



3 - Fazer com que o espectro de potência aparente mais suave. (melhora aparente mais não real)

PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

⇒ No domínio do tempo: (Aumentar a resolução da freq).

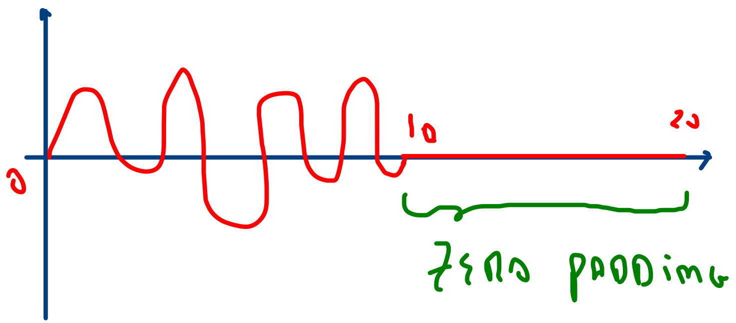
Diminuir as dist. entre as comp. f.t.

O que muda?

$$F_{analise}[m] = m * \frac{F_S}{N}$$

Quantidade de amostras

Aumentando artificialmente a qtd de amostras



PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

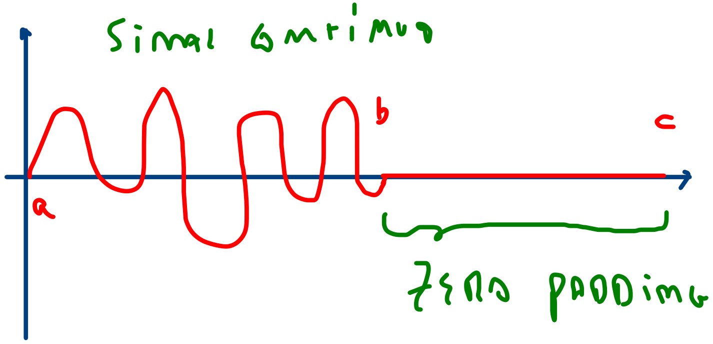
Considere a Transformada de Fourier Contínua para $w = 2\pi f$ em radianos

$$F(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-jwt}dt$$

Sabe-se que o sinal $f(t)$ é nulo fora do intervalo $[a, b]$, sendo $a < b < c$, temos:

ZERO P/ INTERVALO

$$F(w) = \int_{a}^{b} f(t)e^{-jwt}dt + \int_{b}^{c} f(t)e^{-jwt}dt$$



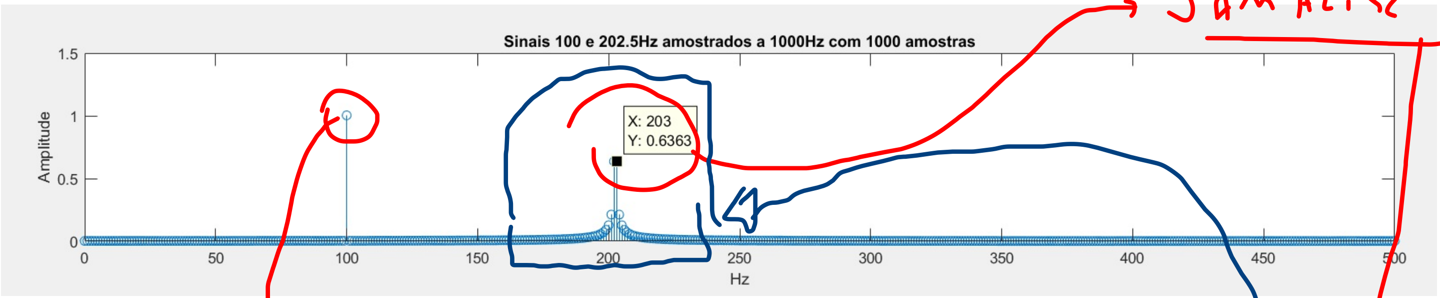
Portanto, $F(W)$ no intervalo $[a, c]$ é o mesmo que no intervalo $[a, b]$

PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

>> Topico4Exemplo2.m % Parte I

```
x = cos(2*pi*100*n*Ts)+sin(2*pi*202.5*n*Ts);
```

$f_{análise} \neq 202{,}5$



$f_{análise} = 100Hz$ (freq. do sinal)

Promove o vazamento espectral!

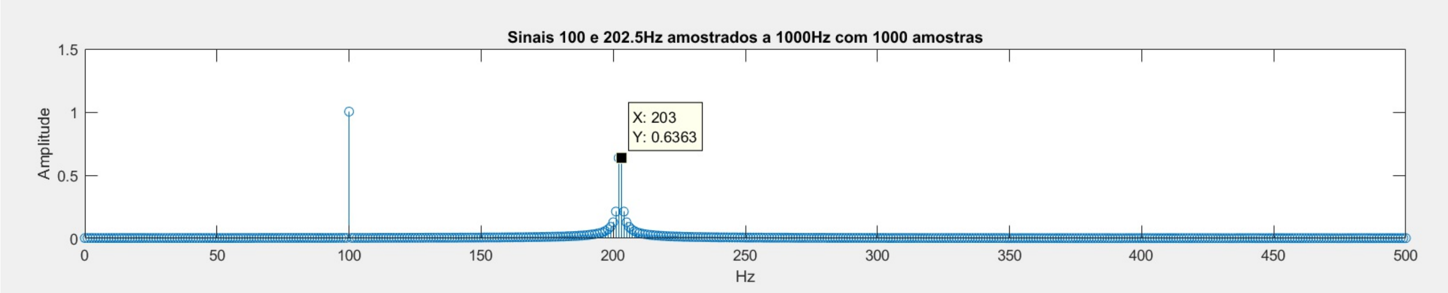
A freq de 202,5 está distribuída no espectro

Como melhorar?

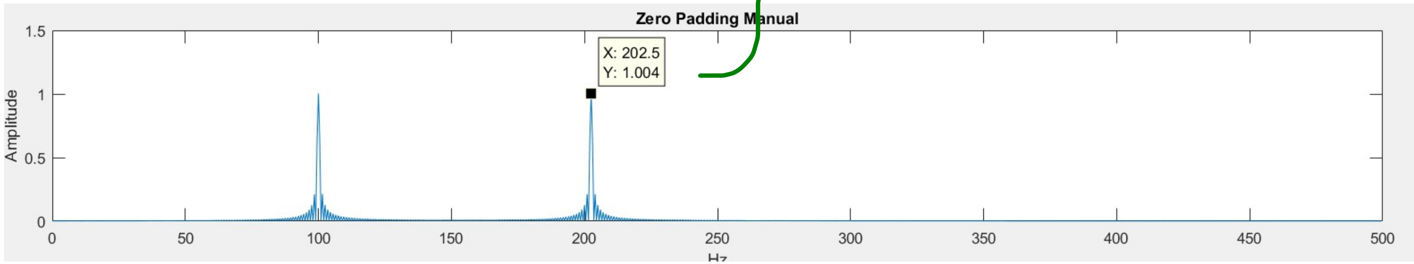
PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

>> Topico4Exemplo2.m % Parte 1

```
x = cos(2*pi*100*n*Ts)+sin(2*pi*202.5*n*Ts);
```



>> Topico4Exemplo2.m % Parte 2 (manual) Incluímos 1000 zeros no sinal.

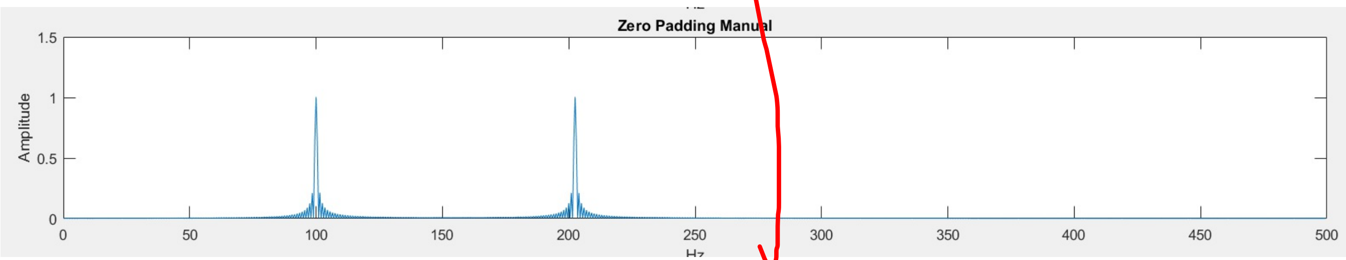


Não é ideal, fazer isso manualmente!

PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

>> Topico4Exemplo2.m % Parte 3 (Auto)

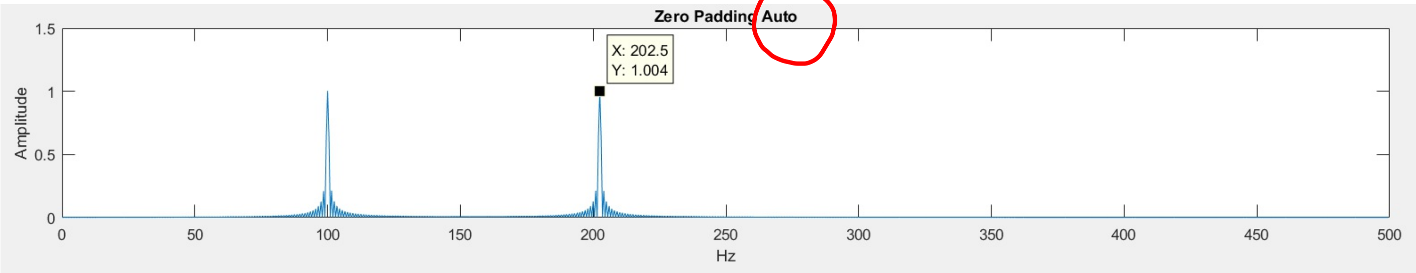
```
x = cos(2*pi*100*n*Ts)+sin(2*pi*202.5*n*Ts);
```



fft(x_zpad)

N*2

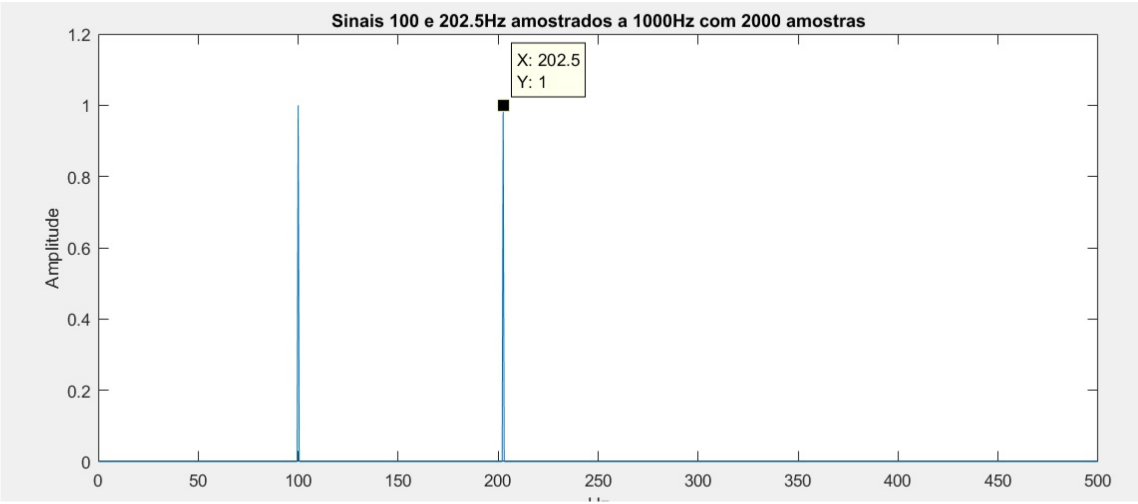
fft(x, zpad)



PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

```
>> Topico4Exemplo2.m
```

% PARTE 4: AUMENTAR AS AMOSTRAS DE COLETA SEM ZERO PADDING.

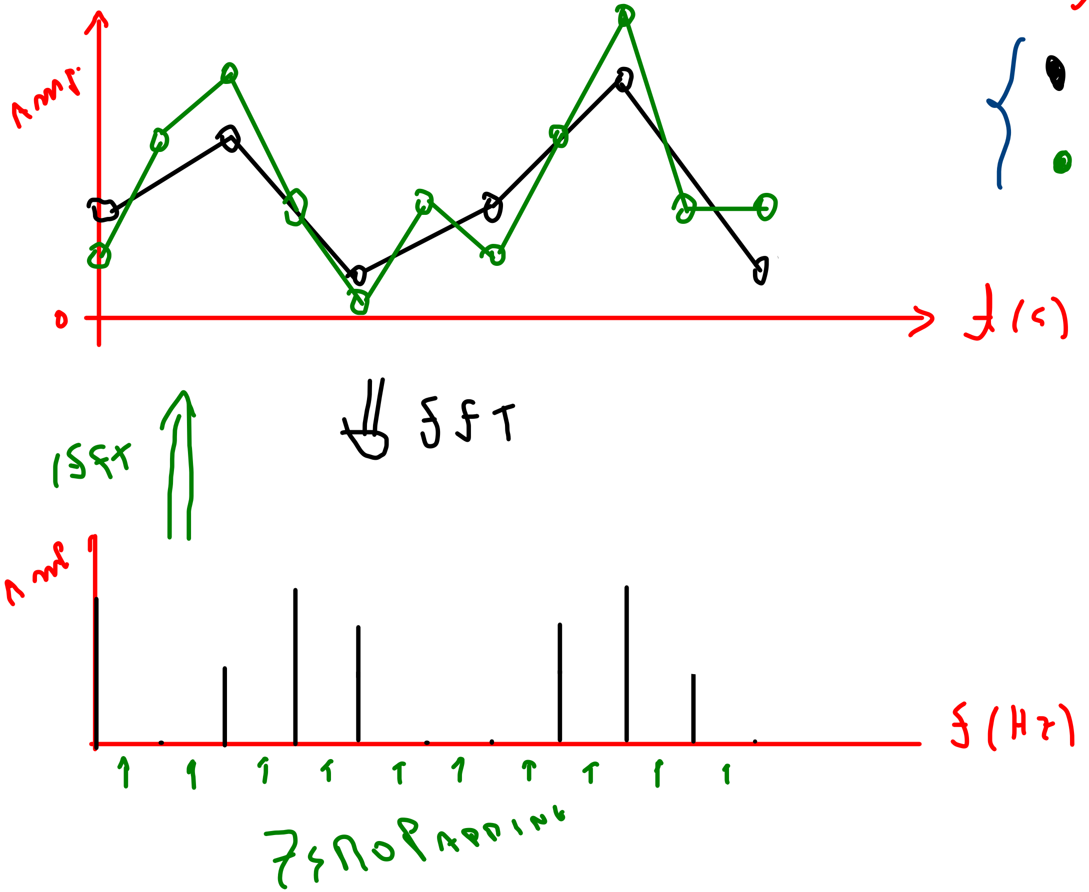


SOMENTE ASSIM MELHORAMOS A PRECISÃO + RESOLUÇÃO DE FREQ.

PREENCHIMENTO COM ZEROS (ZERO PADDING)

⇒ No domínio da frequência: aumenta a resolução temporal do sinal

- Amostra do sinal real (6 amostras)
- Sinal com ZP na frequência



EPC5 – Transformada Discreta Inversa de Fourier (IDFT)

2 semanas!

Referências Bibliográficas

- Utilizados da aula:
  - WEEKS, M.; Processamento Digital de Sinais, utilizando Matlab® e Wavelets; 2a.ed., LTC, 2012.Processamento em tempo discreto de sinais. Capítulos: 4 e 6.
  - OPPENNHEIM, A.V. SHAFFER, R.W.; Processamento em Tempo Discreto de Sinais, 3a.ed., Pearson, 2013. Capítulos: 8 e 9.
  - Cohen, Mike X.; Fundamentals of Time-Frequency Analyses in Matlab/Octave. Sinc(x) press. Capítulo 4.