Processamento de Sinais em Tempo Discreto

- Prof. Dr. Samuel Lourenço Nogueira

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

ufscar

Aula Anterior

- Teoria do Deslocamento para DFT
- Vazamento Espectral
- Harmônicos e a Transformada de Fourier

Conteúdo Programático

- Réplicas / Harmônicos de sinais
- Funcionamento da DFT

RÉPLICAS / HARMÔNICOS DO SINAL

Os sinais senoidais são periódicos, e portanto ao amostrá-lo, teremos repetições de suas frequências fundamentais.

$$x(t) = \cos(2\pi f t) = \cos(2\pi f t + 2\pi m), \text{ p/ } m = \text{inteiro}$$

$$x[n] = a \cdot \cos(2\pi f_0 n T_s + \overset{\text{Réplica}}{2\pi k n} + \phi)$$

Supondo
$a = 1$
$\phi = 0$

$$x[n] = \cos(2\pi n (f_0 T_s + k)) =$$

Subs. $T_s = 1/F_s$ $\quad F_s/F_s$

$$\boxed{x[n] = \cos(2\pi n (f_0/F_s + F_s/F_s \cdot k))}$$

RÉPLICAS / HARMÔNICOS DO SINAL

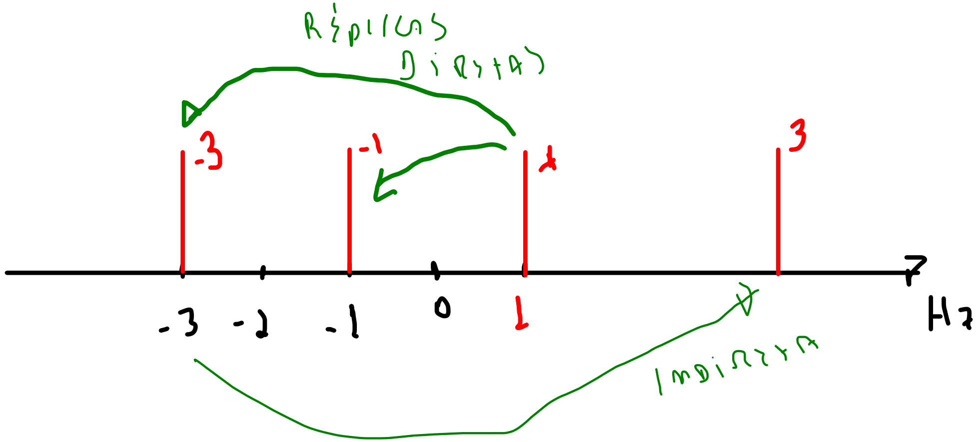
$$\boxed{x[n] = \cos\left(2\pi n\left(f_0/F_s + F_s/F_s \cdot K\right)\right)} \Rightarrow \text{p/ } K = -1 \Rightarrow \boxed{x[n]\left(2\pi n\left(f_0 - F_s\right).T_s\right)}$$

a) $f_0 = 1\,Hz$, $F_s = 4\,Hz$, $K = -1$

Réplicas

$$x[n] = \cos\left(2\pi n(-3).T_s\right) = \cos\left(2\pi n(3)\,T_s\right)$$

Sabemos $\{ \cos(\theta) = \cos(-\theta)$



* Original

$\Rightarrow$ Ao amostrarmos só distinguiríamos 1 e -1 Hz

RÉPLICAS / HARMÔNICOS DO SINAL

P/ CASA, TESTE OS DEMAIS CASOS:

b) $f_0 = 2{,}5\,Hz$, $F_s = 8\,Hz$ e $10\,Hz$, $k = -1$

c) $f_0 = 3\,Hz$, $F_s = 4\,Hz$, $k = -1$ ($f_0 > F_s/2$?)

d) $f_0 = 5\,Hz$, $F_s = 4\,Hz$, $k = -1$ ($f_0 > F_s$?)

nyquist!

FUNCIONAMENTO DFT

Como a DFT seleciona as frequências de um sinal e as mapeia para análise?

fórmula Euler (p/ casa)

$$x[n] = 2 \cdot \cos(2\pi f m T_s)$$

Sabe-se

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2} \cdot e^{j\theta} + \frac{1}{2} e^{-j\theta} \Longrightarrow$$

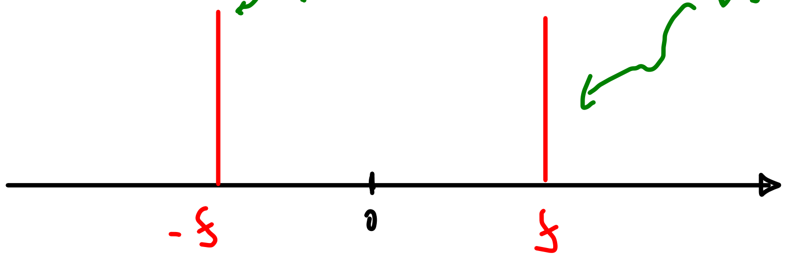
Demonstração

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} =$$

$$\boxed{x[n] = e^{j2\pi f m T_s} + e^{-j2\pi f m T_s}}$$

$DFT(e^{-j2\pi m T_s})$

$DFT(e^{j2\pi f m T_s})$



FUNCIONAMENTO DFT

Considerando somente a parte positiva:

$$x[n] = e^{j2\pi f n T_s}$$

$$DFT \Rightarrow X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \cdot e^{-j2\pi n \cdot m/N}$$

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi f n T_s} \cdot e^{-j2\pi n \cdot m/N}$$

$$\boxed{X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (f n T_s - n \cdot m/N)}}$$

$$f_{analise}[m] = m \cdot F_s / N$$

1.1) Existe m, que coincide com $f_{analise}$ do sinal.

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (\underbrace{m \cdot \cancel{F_s}/N \cdot n \cancel{T_s} - n \cdot m/N}_{0})}$$

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} 1 = N$$

Temos conteúdo na posição que coincide com a f do sinal

FUNCIONAMENTO DFT

$$\boxed{X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (f\, n T_s - m\cdot n/N)}}$$

$$f_{analisada}[m] = m\cdot F_s/N$$

1.2) P/ os demais m não coincidentes

$m \pm 1$, $m \pm 2$, ...

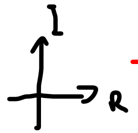
$$X[m+1] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi (m\cdot \cancel{F_s}/N \cdot n \cancel{T_s} - (m+1)\cdot n/N)}$$

$$X[m+1] = \sum_{n=0}^{N} e^{-j2\pi n/N}$$ ⤳ fórmula de Euler

Considerar $N = 4$ (amostras)

$$X[m+1] = e^0 + (\cos \pi/2 - j \operatorname{sen} \pi/2) + (\cos \pi - j \operatorname{sen} \pi) + (\cos 3\pi/2 - j \operatorname{sen} 3\pi/2)$$

$$X[m+1] = 1 + (0 - j) + (-1) + (0 + j)$$

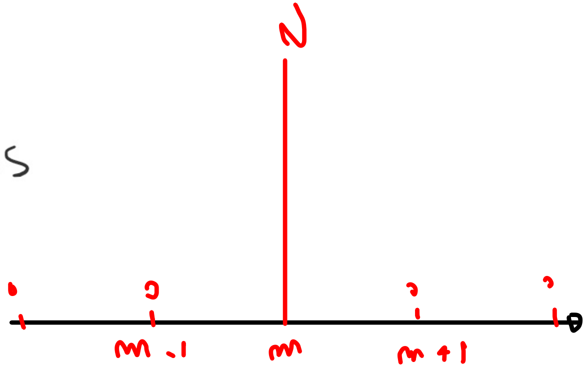


$\rightarrow$ $\quad \downarrow -j$ $\quad \leftarrow$ $\quad \uparrow j$

$$\boxed{X[m+1] = 0}$$

P/ casa, verifique p/ os casos

$$\begin{cases} X[m-1] = 1 + j - 1 - j = 0 \\ X[m+2] = 1 - 1 + 1 - 1 = 0 \end{cases}$$



FUNCIONAMENTO DFT

2.1) $f \neq m . F_s / N$, p/ m inteiro

Exemplo: $f = 21\,Hz$, $N = 100$ amostras
$F_s = 200\,Hz$

$m = 10 \Rightarrow f_{analise} = 20\,Hz$
$m = 11 \Rightarrow$ " $= 22\,Hz$

∴ ∄ existe m inteiro q forneça 21 Hz

Assim p/ $f = 21\,Hz$

$f = (m + 0{,}5) . F_s / N$

DFT p/ parte positiva:

$$\boxed{X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi(f n T_s - m n/N)}}$$

$$X[m+0{,}5] = \sum_{n=0}^{N-1} e^{j2\pi\, 0{,}5\, n/N}$$

Para testar valores considere:

```
>> N = 8;
>> n = 0:N-1;
>> comp_dft = sum(exp(2*1j*pi*0.5*n/N));
>> abs(comp_dft)
```

$\rightarrow \approx 5{,}13$ { é menor q N = 8 e portanto não representa completamente (vazamento)

```
>> comp_dft = sum(exp(2*1j*pi*k*0.5*n/N));\
>> abs(comp_dft)
```

$K = 3 \Rightarrow 1{,}8$
$K = 5 \Rightarrow 1{,}2$
$K = 7 \Rightarrow 1{,}02$

Para um teste mais amplo, considere:
>> Topico5Exemplo1.m

Referências Bibliográficas

- Utilizados da aula:

  - WEEKS, M.; Processamento Digital de Sinais, utilizando Matlab® e Wavelets; 2a.ed., LTC, 2012.Processamento em tempo discreto de sinais. Capítulos: 4 e 6.
  - OPPENNHEIM, A. V. SHAFFER, R. W.; Processamento em Tempo Discreto de Sinais, 3a.ed., Pearson, 2013. Capítulos: 8 e 9.
  - Cohen, Mike X.; Fundamentals of Time-Frequency Analyses in Matlab/Octave. Sinc(x) press. Capítulo 4.