Processamento de Sinais em Tempo Discreto

Prof. Dr. Samuel Lourenço Nogueira

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

ufscar

Aula Anterior

- Revisão:
  - Sinais e Sistemas
  - Transformadas
- Introdução à Transformada de Fourier
- Fundamentos:
  - Números Complexos
  - Fórmula de Euler

Conteúdo Programático

- Transformada Discreta de Fourier
  - Algoritmo da Transformada Direta (DFT)
  - Traçado Espectral
    - Escala (amplitude e fase)
    - Fases com amplitude mínima ou nula
    - Análise do espectro
    - Componente DC do sinal
    - Espectro de Amplitude vs Espectro de Potência

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER:

ALGORITMO DA TRANSFORMADA DIRETA (DFT)

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Cada valor de n fornece uma
amostra do sinal no domínio tempo

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

A soma das amostras no tempo multiplicadas
pela função complexa, fornece uma componente
da Fourier Discreta.

Existindo uma componente para valor de m.
Sendo: $m = 0 \ldots N - 1$

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

Cada valor de n fornece uma amostra do sinal no domínio tempo

Fórmula de Euler

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}$$

A soma das amostras no tempo multiplicadas (produto escalar) pela função complexa, fornece uma componente da Fourier Discreta para cada valor de m.

Sendo: $m = 0 \ldots N-1$

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\left(\cos\left(\frac{2\pi nm}{N}\right) - jsen\left(\frac{2\pi nm}{N}\right)\right)$$

Algoritmo:

```
function X = dft(x)

N = length(x);

for m = 0:N-1
    soma = 0;

    for n = 0:N-1
        soma = soma + x(n+1) * ...
           (cos(2*pi*n*m/N) - 1i*sin(2*pi*n*m/N));
    end
    X(m+1) = soma;
end
```

Somente para fins de demonstração. Não é computacionalmente eficiente.

Produto escalar

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

```matlab
function X = dft(x)

N = length(x);

for m = 0:N-1
    soma = 0;

    for n = 0:N-1
        soma = soma + x(n+1) * ...
            (cos(2*pi*n*m/N) - ...
                1i*sin(2*pi*n*m/N));
    end
    X(m+1) = soma;
end
```

Somente para fins de demonstração. Não é computacionalmente eficiente.

```matlab
>> x = [7 4 3 9];
>> X = dft(x);  % use o dft_debug(x) para ver a tabela
```

Valores de n

Valores de m

m\n	0	1	2	3	dft(x)
0	$7*(1+0j)$	$4*(1+0j)$	$3*(1+0j)$	$9*(1+0j)$	$X(0)$
1	$7+0j$	$4*(0-1j)$	$3*(-1-0j)$	$9*(0+1j)$	$X(1)$
2	$7+0j$	$4*(-1-0j)$	$3*(1+0j)$	$9*(-1-0j)$	$X(2)$
3	$7+0j$	$4*(0+1j)$	$3*(-1-0j)$	$9*(0-1j)$	$X(3)$

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER

```
function X = dft(x)

N = length(x);

for m = 0:N-1
    soma = 0;

    for n = 0:N-1
           soma = soma + x(n+1) * ...
               (cos(2*pi*n*m/N) - ...
                   1i*sin(2*pi*n*m/N));
    end
    X(m+1) = soma;
end
```

Somente para fins de demonstração. Não é computacionalmente eficiente.

Valores de n

Valores de m

m\n	0	1	2	3	
0	7	4	3	9	$X(0)$
1	7	$-4j$	-3	$9j$	$X(1)$
2	7	-4	3	-9	$X(2)$
3	7	$4j$	-3	$-9j$	$X(3))$

>> x = [7 4 3 9];
>> X = dft(x);

$$X(0) = 7 + 4 + 3 + 9 = 23$$
$$X(1) = 7 - 4j - 3 + 9j = 4 + 5j$$

$$X(2) = 7 - 4 + 3 - 9 = -3$$
$$X(3) \ = 7 + 4j - 3 - 9j = 4 - 5j$$

$$X = \begin{bmatrix} 23 \\ 4+5j \\ -3, \\ 4-5j \end{bmatrix}$$

$$M = abs(X)$$
$$\phi = angle(X)$$
$$M \angle \phi * 180/\pi$$

$$X = \begin{bmatrix} 23\angle 0^o \\ 6.4\angle 51.3^o \\ 3\angle -180 \\ 6.4\angle -51.3^o \end{bmatrix}$$

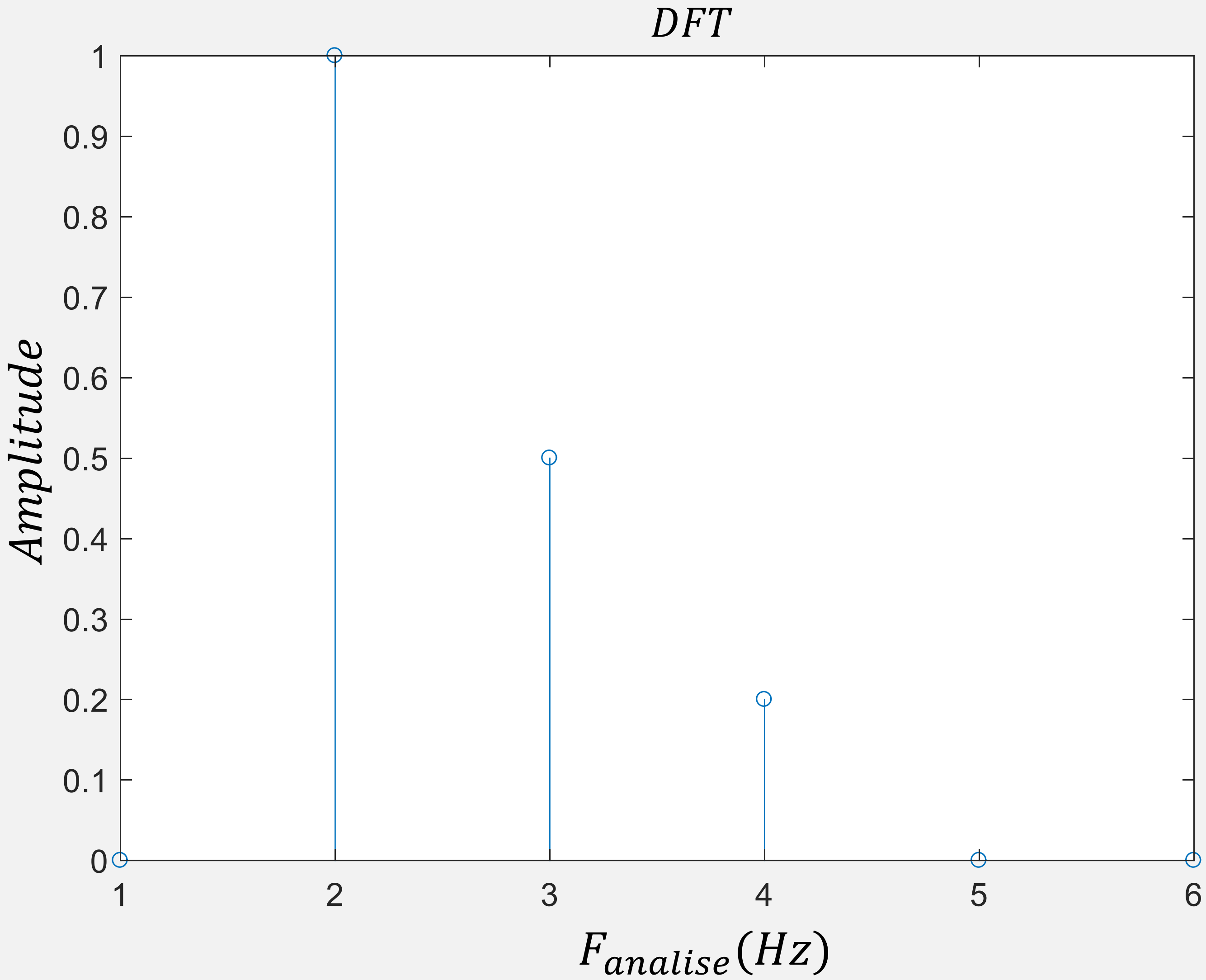
TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER:

TRAÇADO ESPECTRAL

TRAÇADO ESPECTRAL

$$Amplitude = 2 * abs\left(\frac{X[m]}{N}\right)$$

$$F_{analise}[m] = m * \frac{F_s}{N}$$



TRAÇADO ESPECTRAL: "SEQUÊNCIA"

Exemplo: $$x(t) = \cos\left(2\pi 20t + \frac{pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(2\pi 40t - \frac{2\pi}{4}\right) + 2 * \cos\left(2\pi 60t + \frac{\pi}{8}\right)$$

Discretização

$$x[n] = \cos\left(2\pi 20nT_s + \frac{pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(2\pi 40nT_s - \frac{2\pi}{4}\right) + 2 * \cos\left(2\pi 60nT_s + \frac{\pi}{8}\right)$$

DFT

$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}$$

Traçado Espectral

$$F_{analise}[m] = m * \frac{F_s}{N}$$

$$Amplitude = 2 * abs\left(\frac{X[m]}{N}\right)$$

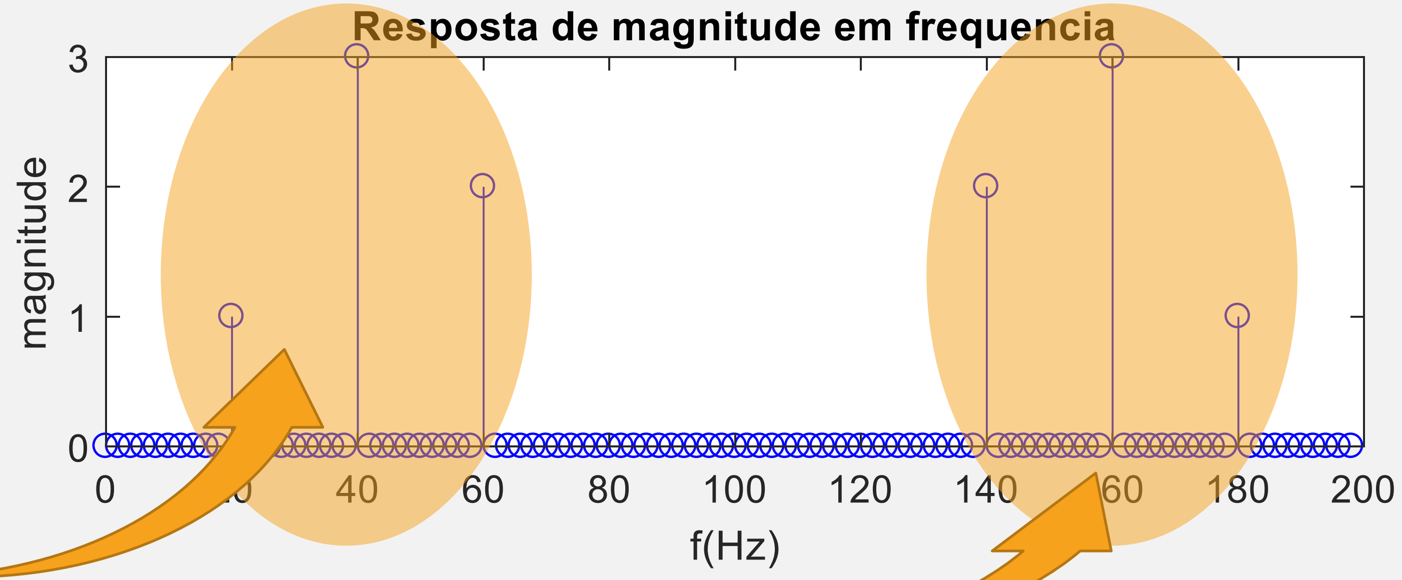
TRAÇADO ESPECTRAL: ESCALA DA AMPLITUDE

Exemplo: $x[n] = \cos\left(2\pi 20 n T_s + \frac{pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(2\pi 40 n T_s - \frac{2\pi}{4}\right) + 2 * \cos\left(2\pi 60 n T_s + \frac{\pi}{8}\right)$

Traçado Espectral

$$F_{analise}[m] = m * \frac{F_s}{N}$$

$$Amplitude = 2 * abs\left(\frac{X[m]}{N}\right)$$



Distribuída na parte positiva e negativa do espectro

>> Topico3Exemplo1.m % Parte 1

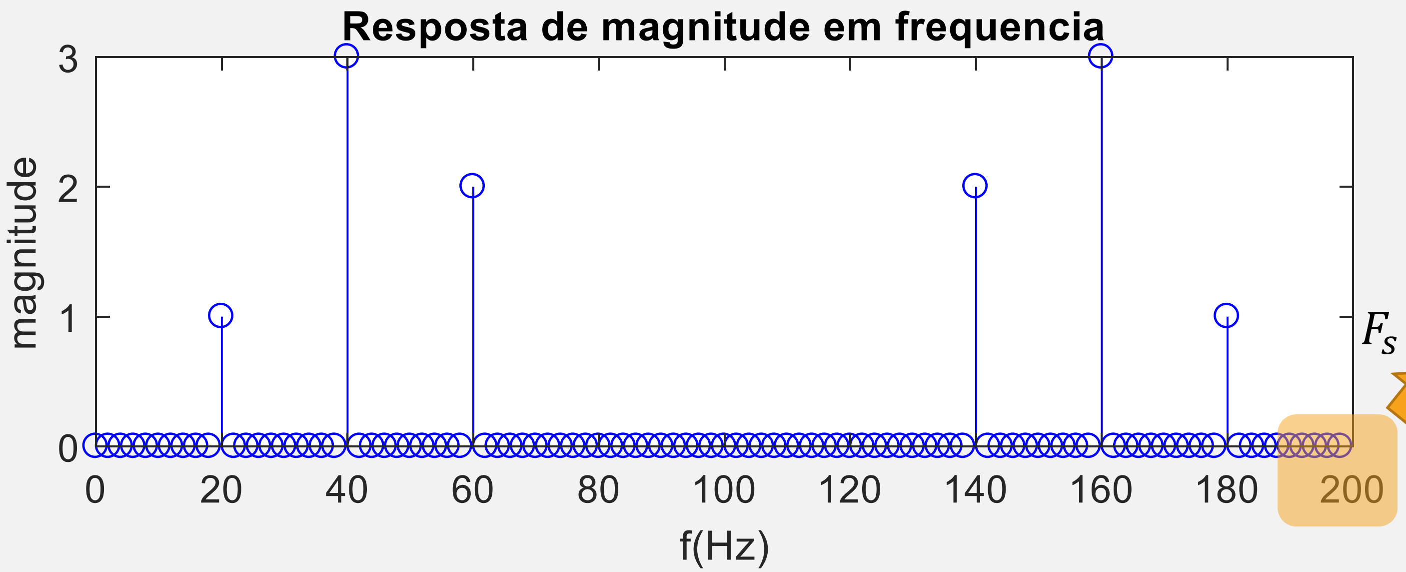
TRAÇADO ESPECTRAL: ESCALA DA FREQUÊNCIA

Exemplo: $x[n] = \cos\left(2\pi 20 n T_s + \frac{pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(2\pi 40 n T_s - \frac{2\pi}{4}\right) + 2 * \cos\left(2\pi 60 n T_s + \frac{\pi}{8}\right)$

Traçado Espectral

$$F_{analise}[m] = m * \frac{F_s}{N}$$

$$Amplitude = 2 * abs\left(\frac{X[m]}{N}\right)$$



$F_s = 200\ Hz$

$$F_{analise}[0] = 0\ Hz$$

$$F_{analise}[1] = 1 * \frac{200}{100} = 2\ Hz$$

$$F_{analise}[2] = 2 * \frac{200}{100} = 4\ Hz$$

$$F_{analise}[99] = 99 * \frac{200}{100} = 198\ Hz$$

Portanto a resolução de frequência será de aproximadamente 2 Hz

>> Topico3Exemplo1.m % Parte 1

TRAÇADO ESPECTRAL: AMPLITUDE E FASE

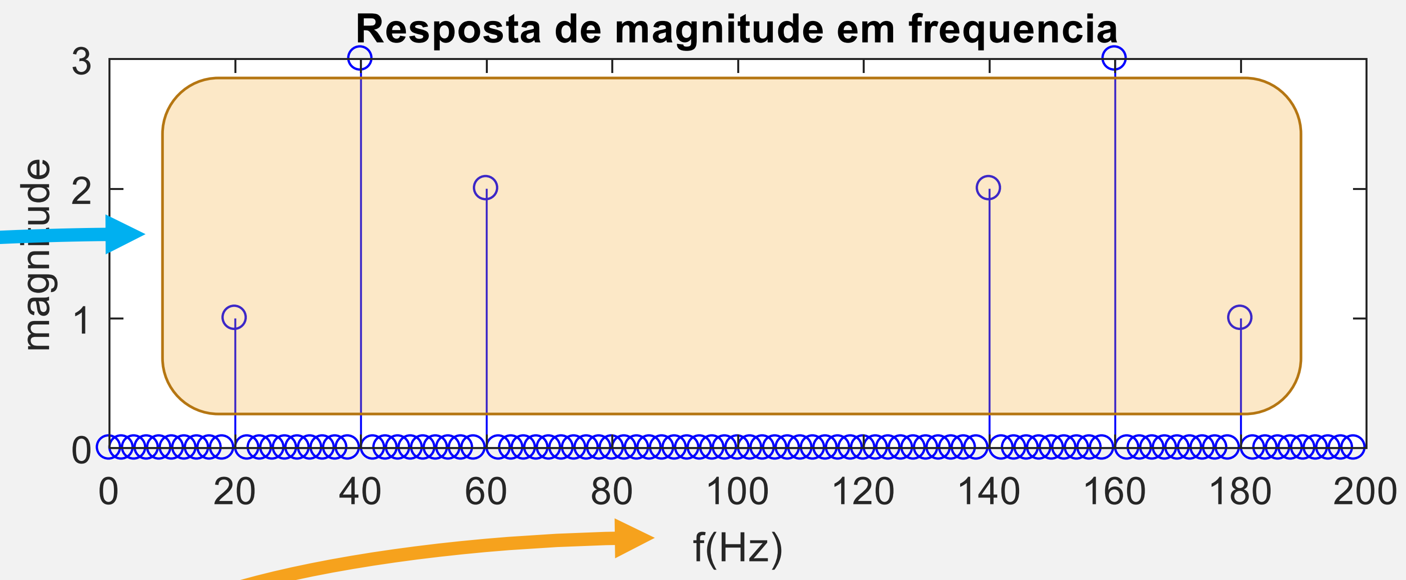
Exemplo:

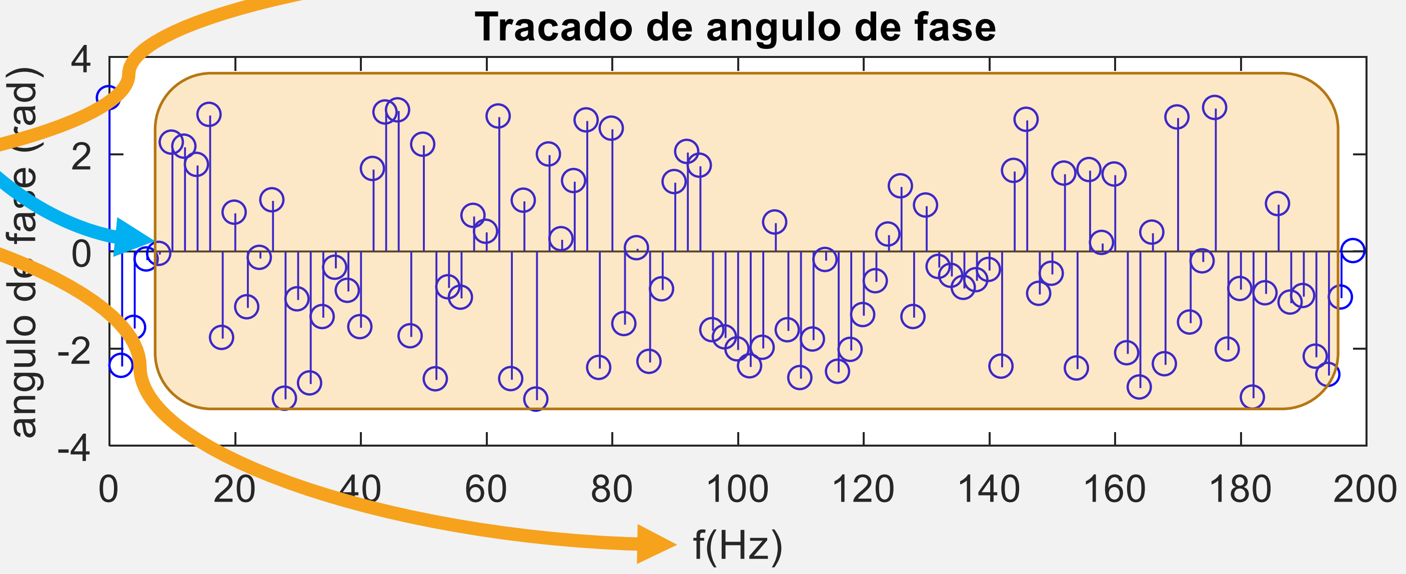
$$X[m] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, e^{-\frac{j2\pi nm}{N}}$$

$2 * abs(X/N)$

$angle(X/N)$

$$F_{analise}[m] = m * \frac{F_s}{N}$$

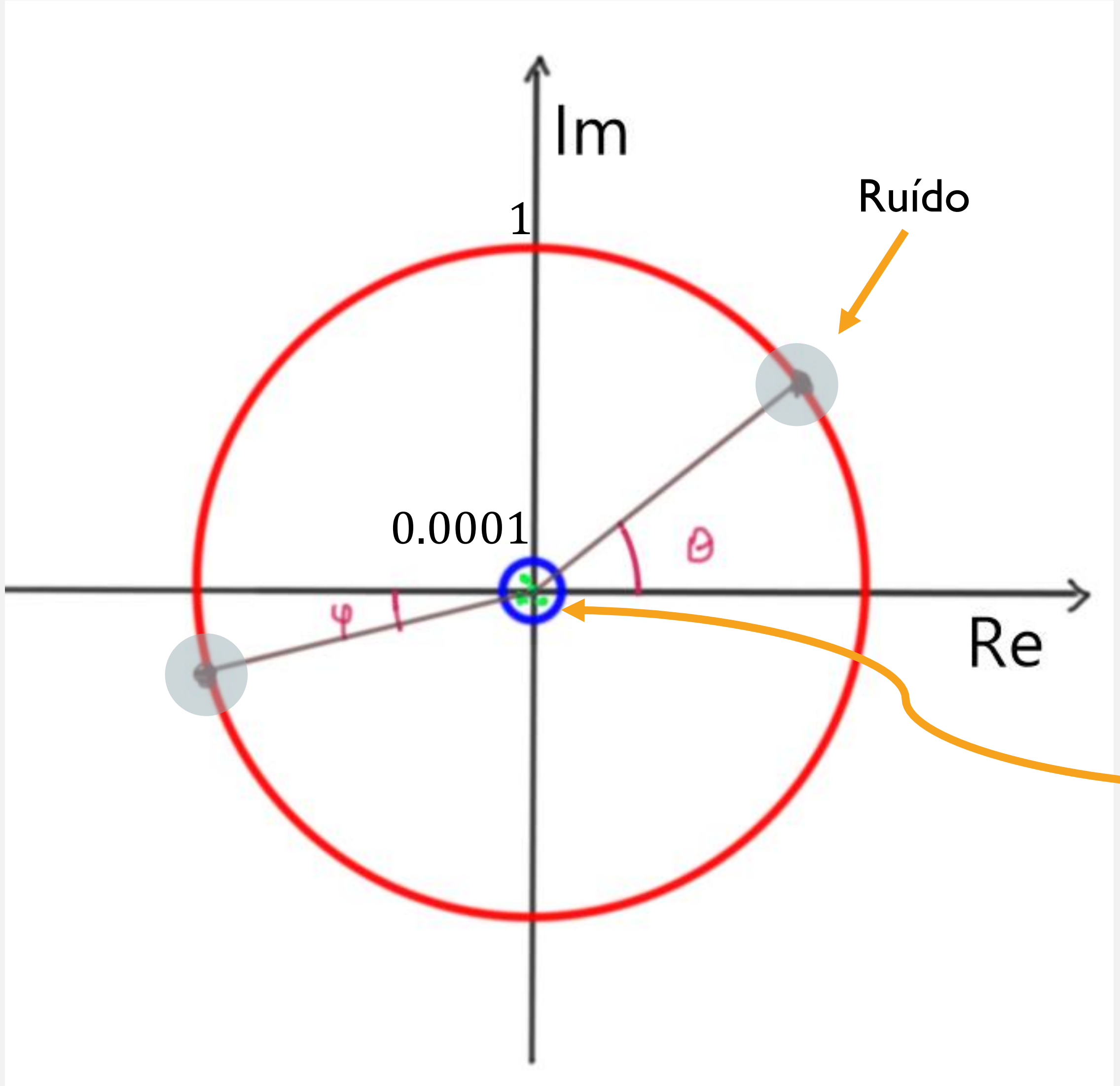




>> Topico3Exemplo1.m % Parte 1

TRAÇADO ESPECTRAL: FASES (COMP. PEQUENAS)

Mesmo as componentes com amplitude nula ou quase nula possuem fase. Por quê?

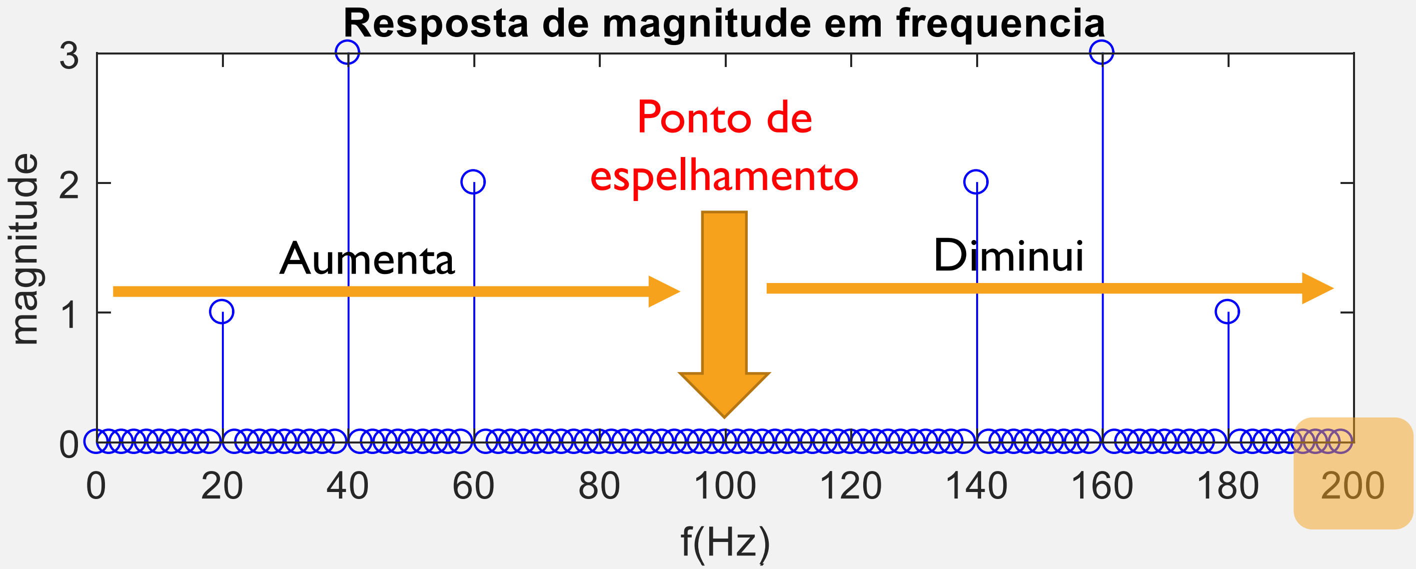


- θ e φ possuem os módulos de amplitudes bem definidos. Mesmo com ruídos de medida significativos, pouco alteraria as fases.
- A medida que o módulo de amplitude torna-se menor, os ruídos de medida podem alterar de forma significativa a fase.
- Quando a amplitude torna-se nula, a fase torna-se indefinida, podendo assumir qualquer valor.

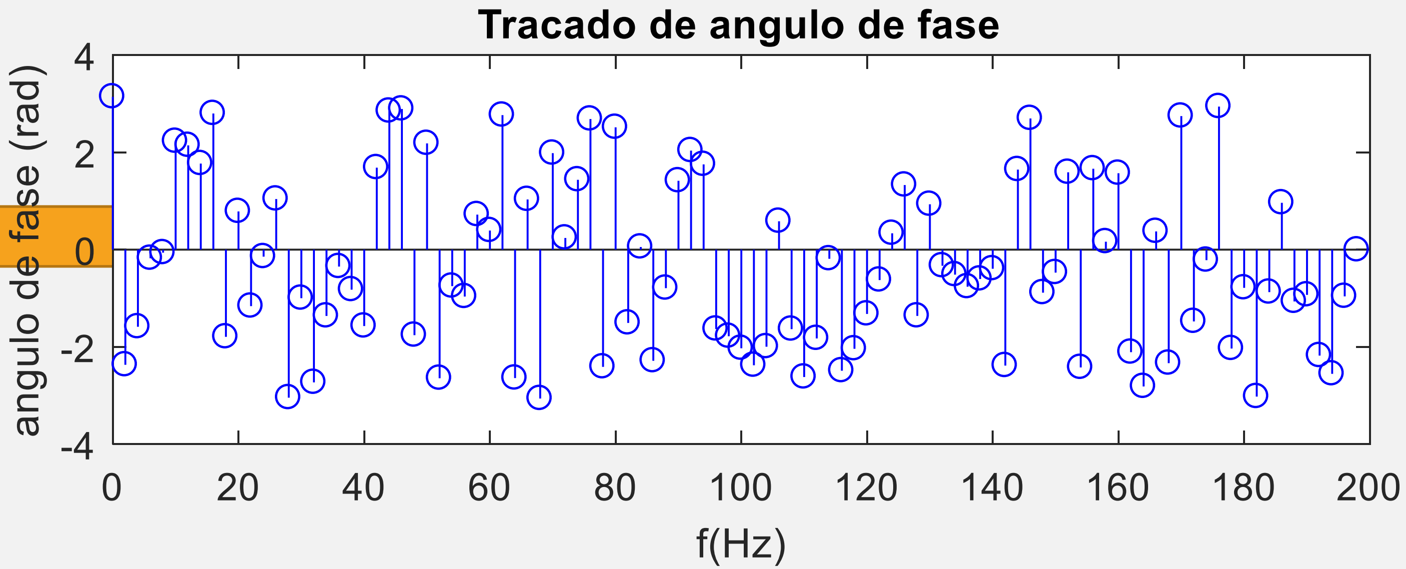
TRAÇADO ESPECTRAL: FASES (COMP. PEQUENAS)

Exemplo:

$$x[n] = \cos\left(2\pi 20 n T_s + \frac{pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(2\pi 40 n T_s - \frac{2\pi}{4}\right) + 2 * \cos\left(2\pi 60 n T_s + \frac{\pi}{8}\right)$$



$$F_s = 200\ Hz$$



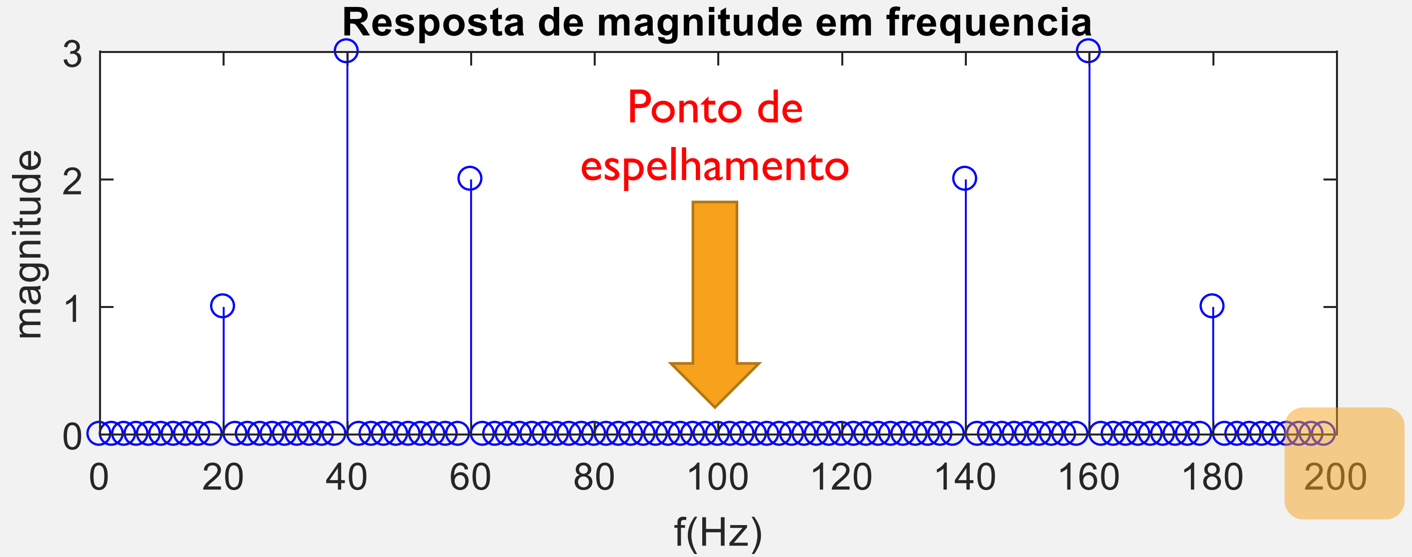
Mesmo as componentes com amplitude nula possuem fase.

Não contribuem para análise

TRAÇADO ESPECTRAL: FASES (COMP. PEQUENAS)

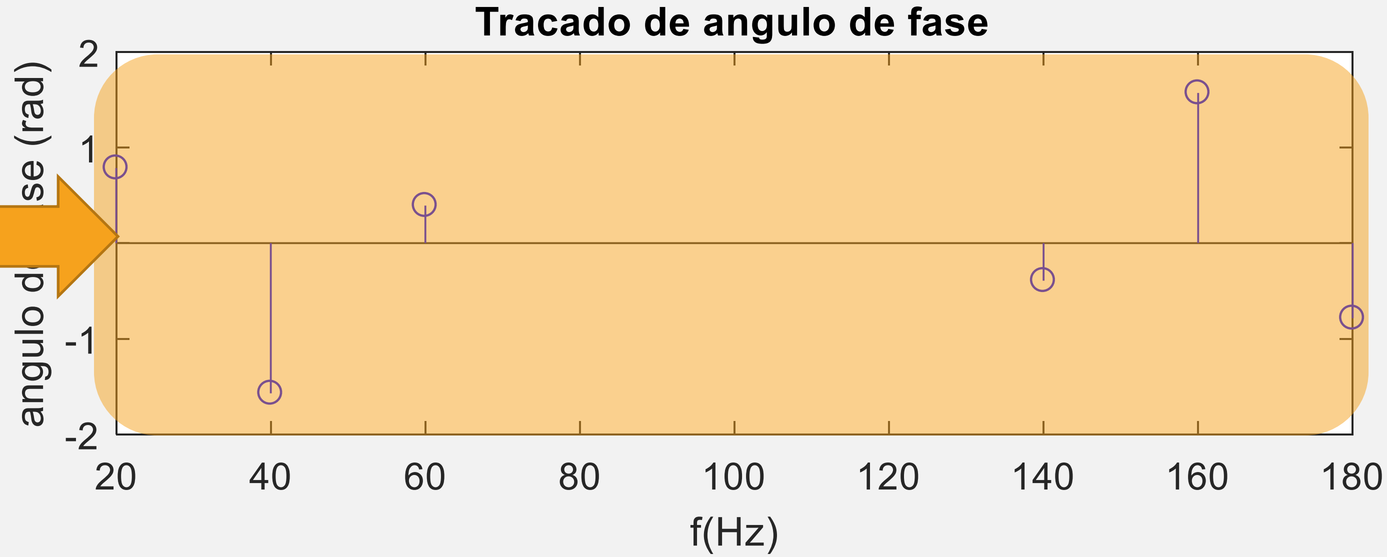
Exemplo:

$$x[n] = \cos\left(2\pi 20 n T_s + \frac{pi}{4}\right) + 3 * \cos\left(2\pi 40 n T_s - \frac{2\pi}{4}\right) + 2 * \cos\left(2\pi 60 n T_s + \frac{\pi}{8}\right)$$



$F_s = 200\ Hz$

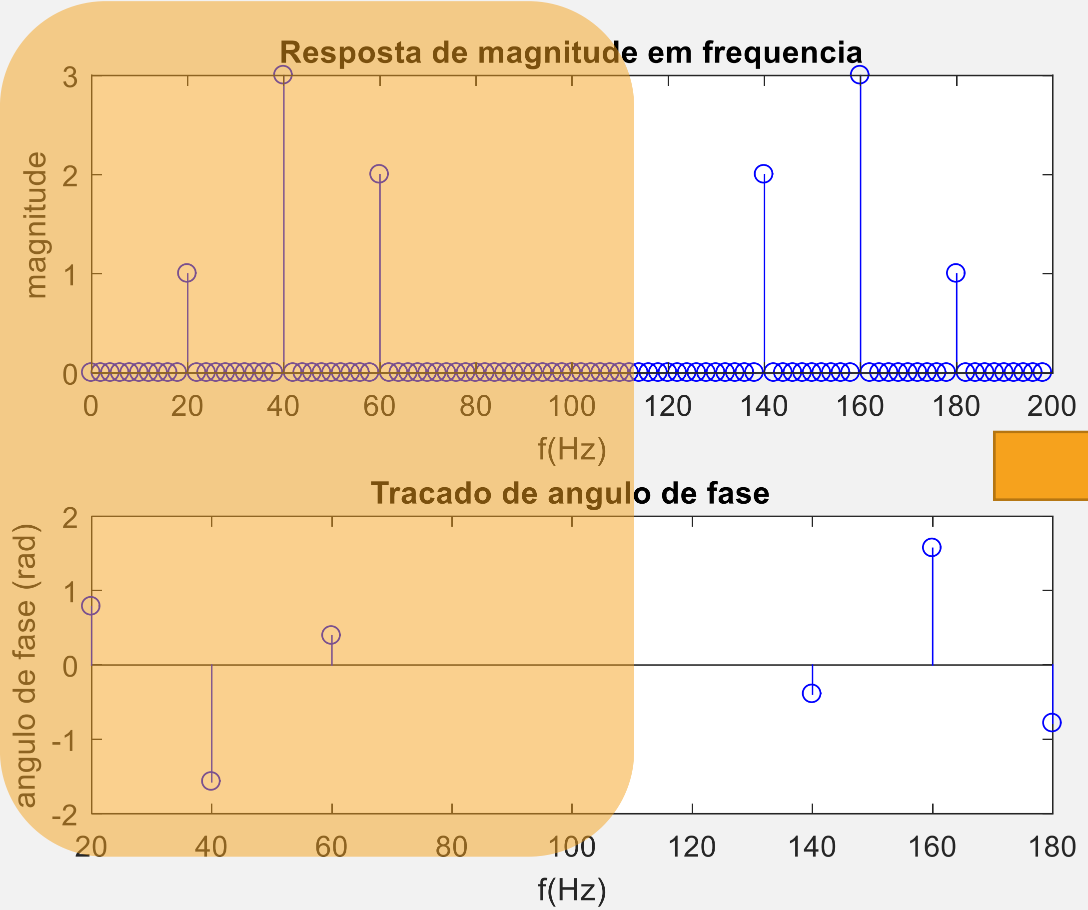
Uma prática comum consiste em ignorar as fases de componentes com amplitudes nulas / ou muito pequenas

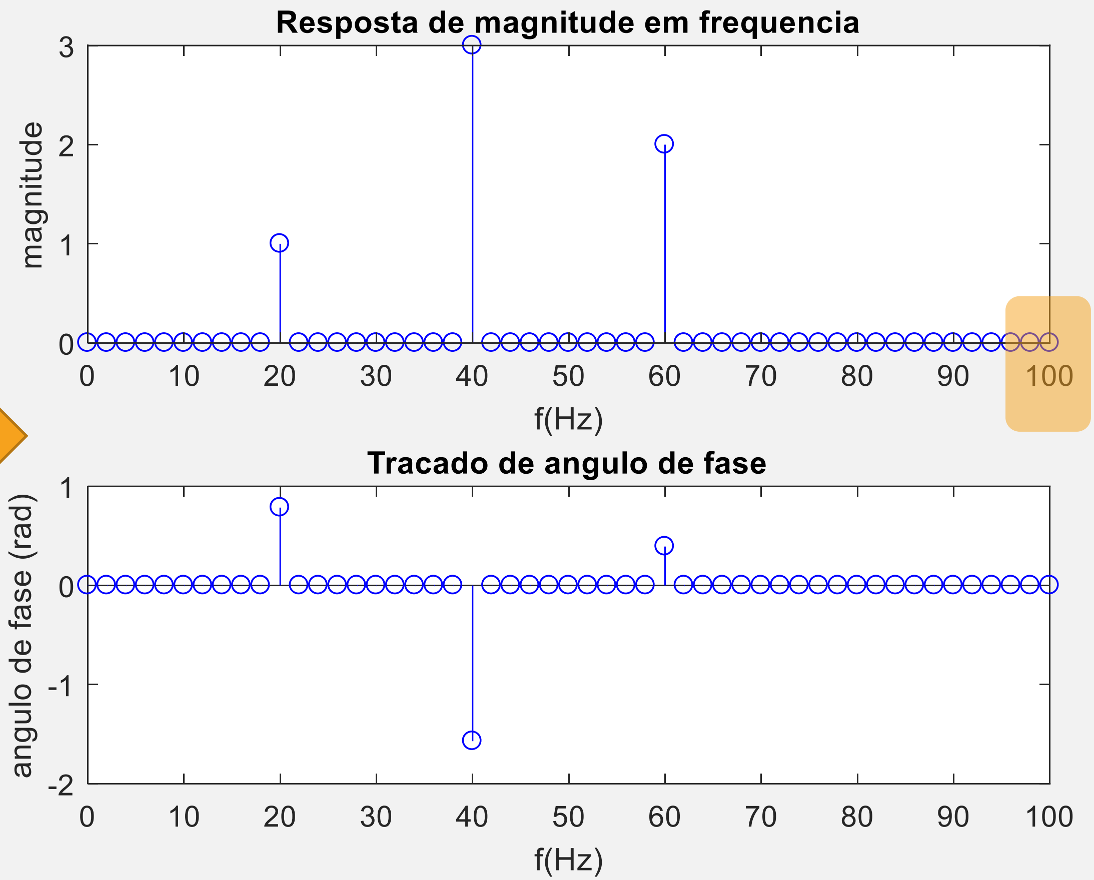


>> Topico3Exemplo1.m % Parte 2

TRAÇADO ESPECTRAL: ANÁLISE DO ESPECTRO

Apenas metade do espectro da Fourier é suficiente para descrever apropriadamente o sinal no domínio da frequência.





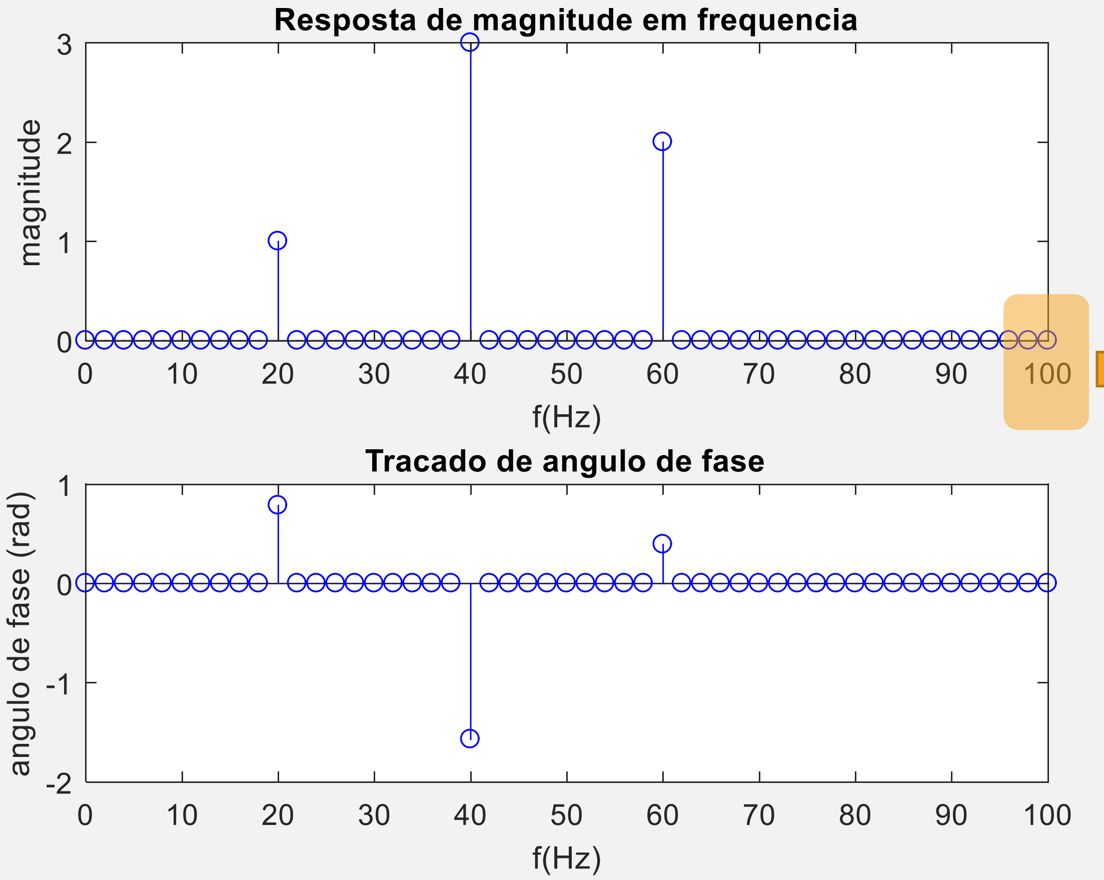
Nyquist

$$\frac{F_s}{2}$$

>> Topico3Exemplo1.m % Parte 3

TRAÇADO ESPECTRAL: ANÁLISE DO ESPECTRO

Apenas metade do espectro da Fourier é suficiente para descrever apropriadamente o sinal no domínio da frequência.



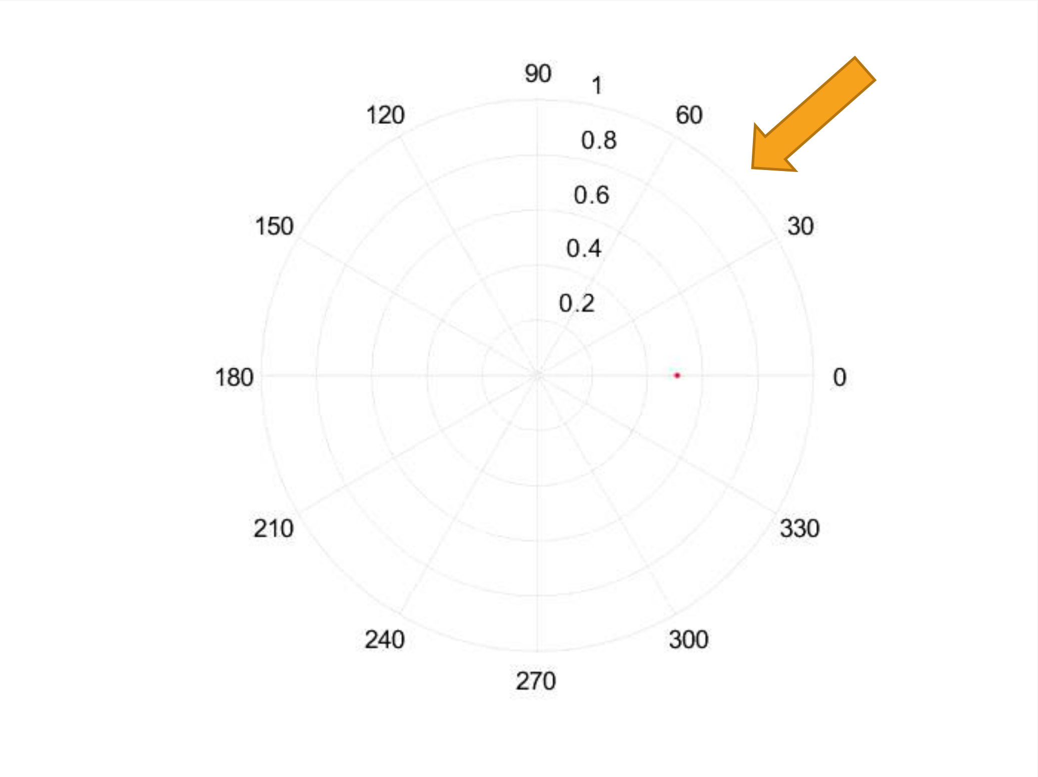
Nyquist

$$\frac{F_s}{2}$$

>> Topico3Exemplo1.m % Parte 3

Animação, do cálculo das componentes de Fourier sendo a amplitude normalizada (para visualização)

>> Topico3Exemplo1_animacao.m



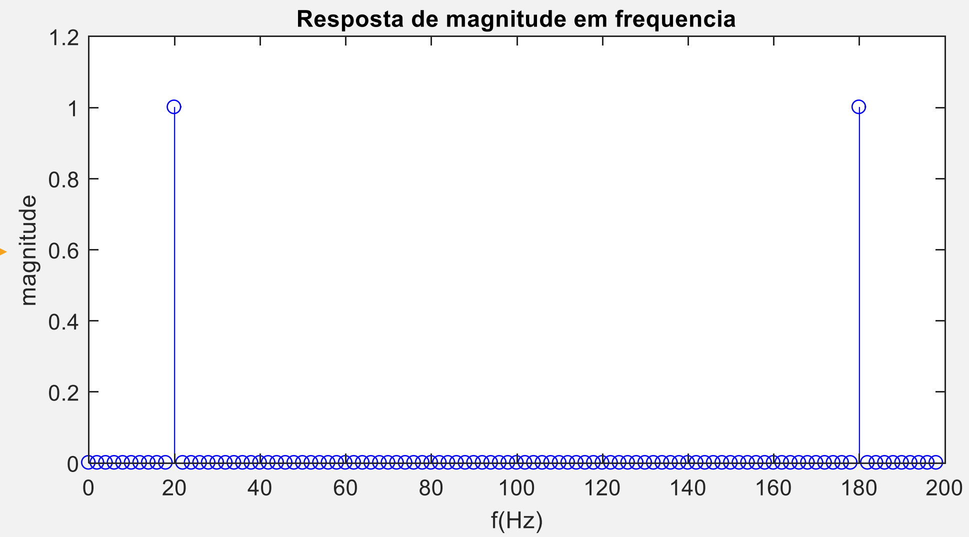
TRAÇADO ESPECTRAL: COMPONENTE DC

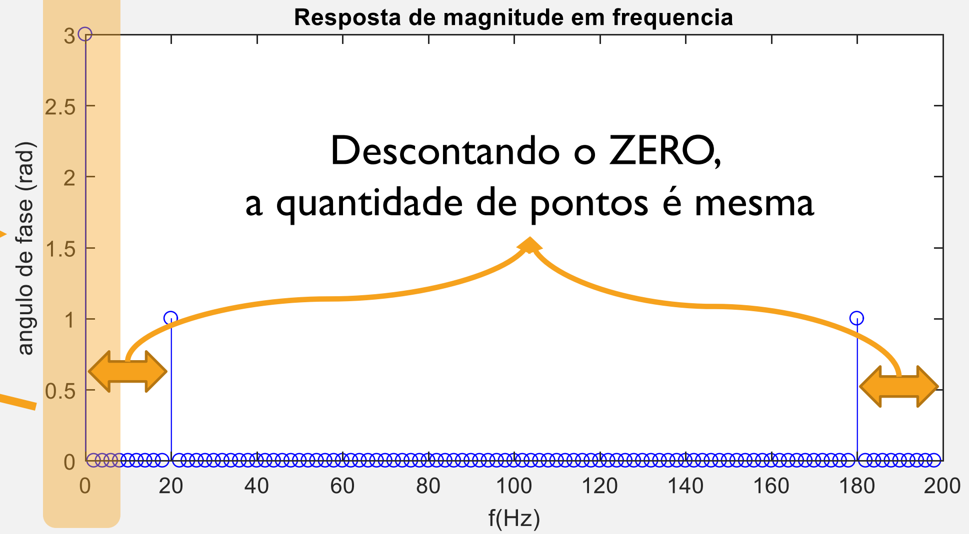
Considere os dois sinais senoidais abaixo:

$$x_1(t) = \sin(2\pi 20t)$$

$$x_2(t) = 1.5 + \sin(2\pi 20t)$$

Componente DC do sinal





OBS: a amplitude da componente DC está com o dobro do valor

>> Topico3Exemplo2.m % Parte 1

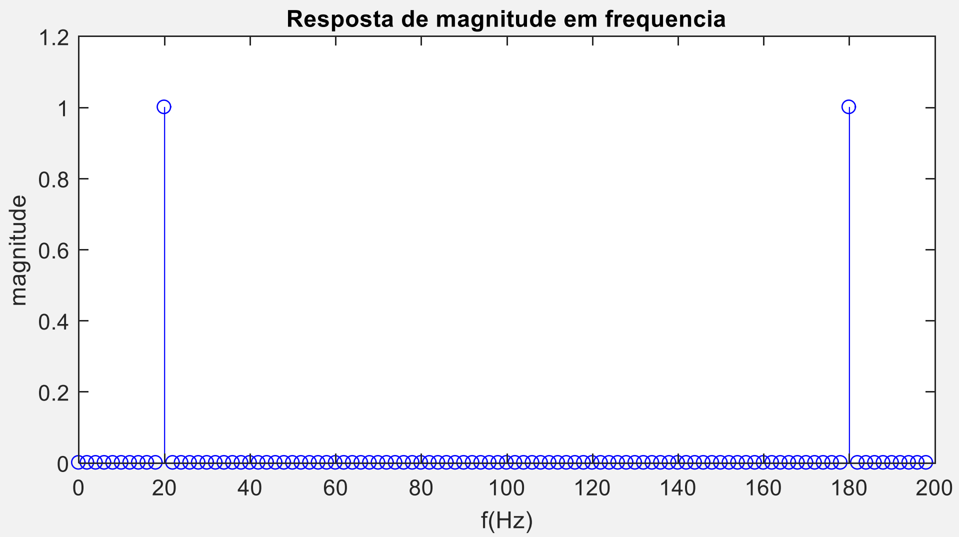
TRAÇADO ESPECTRAL: COMPONENTE DC

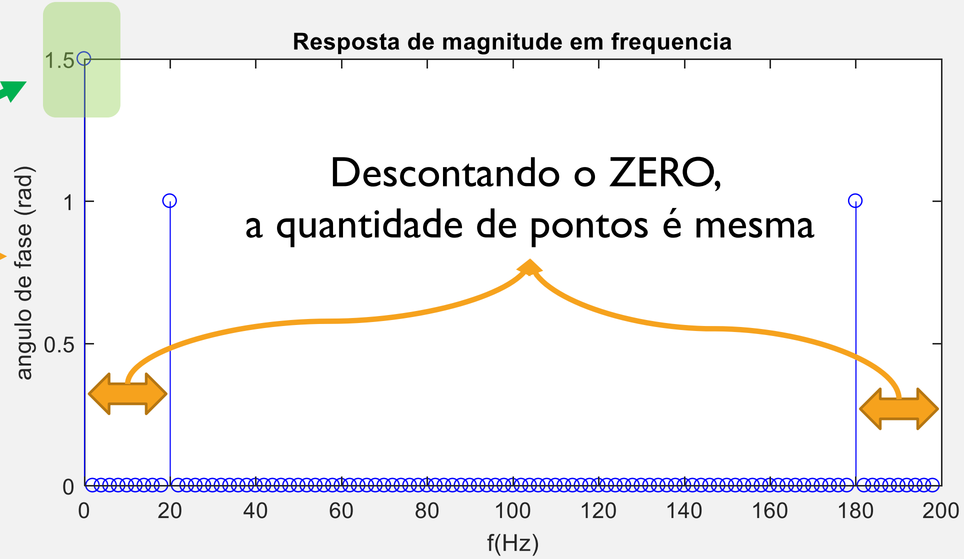
Considere os dois sinais senoidais abaixo:

$$x_1(t) = \sin(2\pi 20t)$$

$$x_2(t) = 1.5 + \sin(2\pi 20t)$$

Componente DC do sinal





Corrigindo a amplitude da componente DC.

Amplitude =
[abs(X(1)/N) 2*abs(X(2:end)/N)]

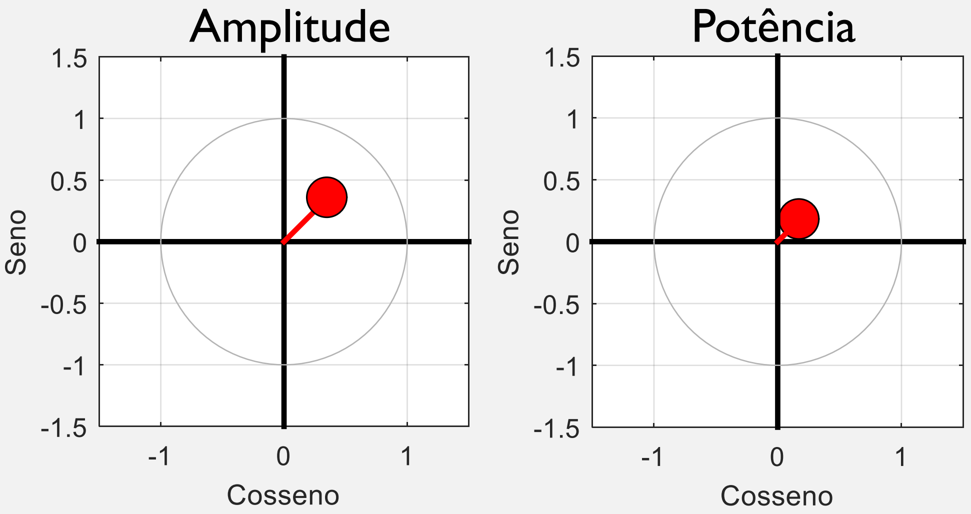
```
>> Topico3Exemplo2.m % Parte 1
```

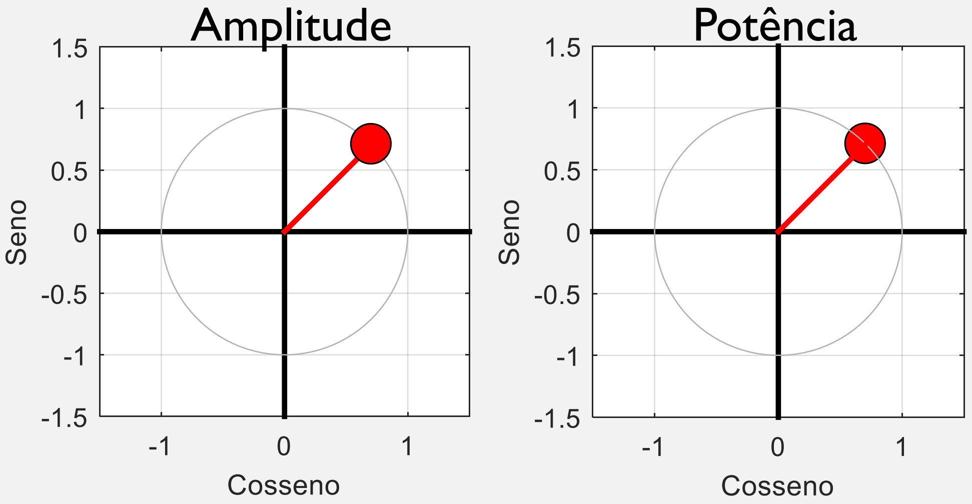
TRAÇADO ESPECTRAL:
ESPECTROS (AMPLITUDE VS POTÊNCIA)

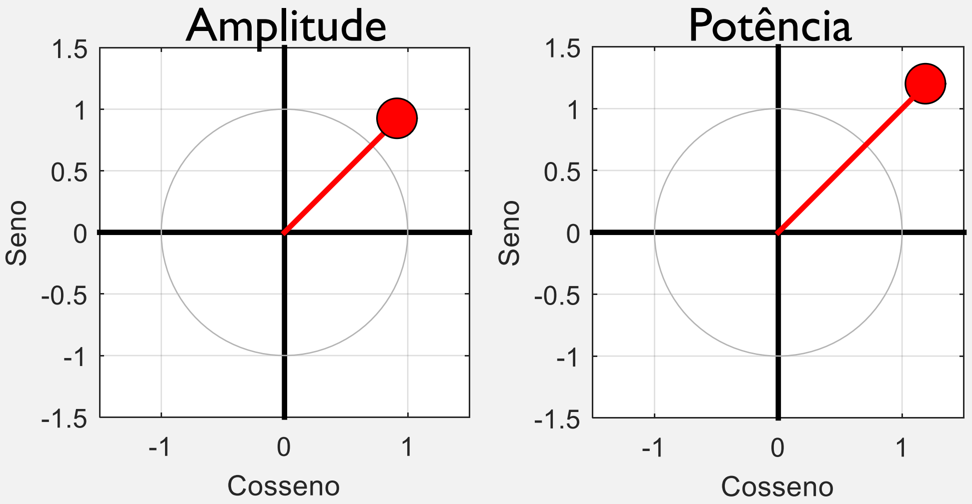
$$Amplitude = \sqrt{Real(X)^2 + Imag(X)^2}$$

$$Potência = (Amplitude)^2$$

Exemplo: $sinal = A * e^{j45*\frac{\pi}{180}}$

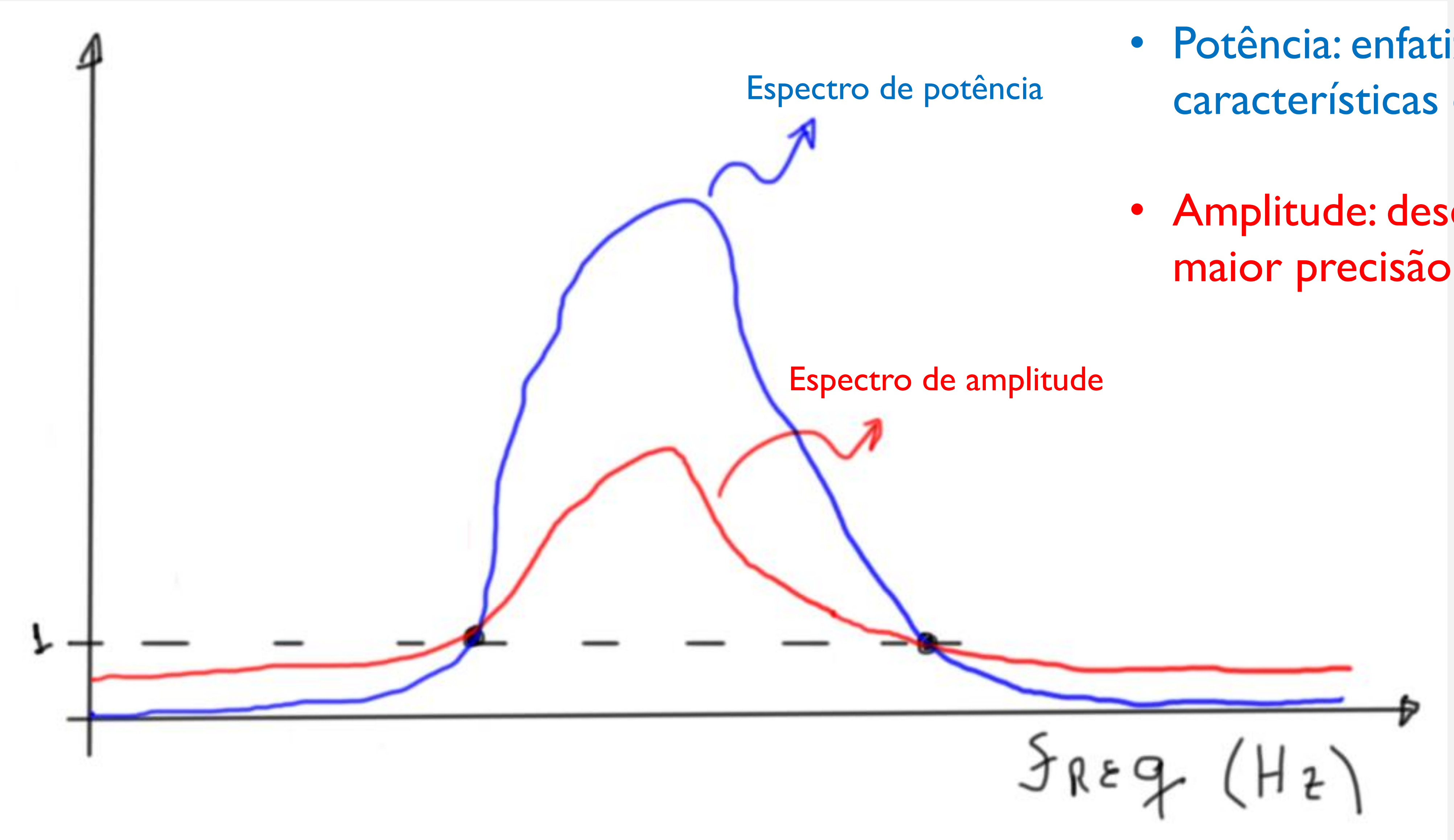






>> Topico3Exemplo3.m %Parte 1

TRAÇADO ESPECTRAL: ESPECTROS (AMPLITUDE VS POTÊNCIA)

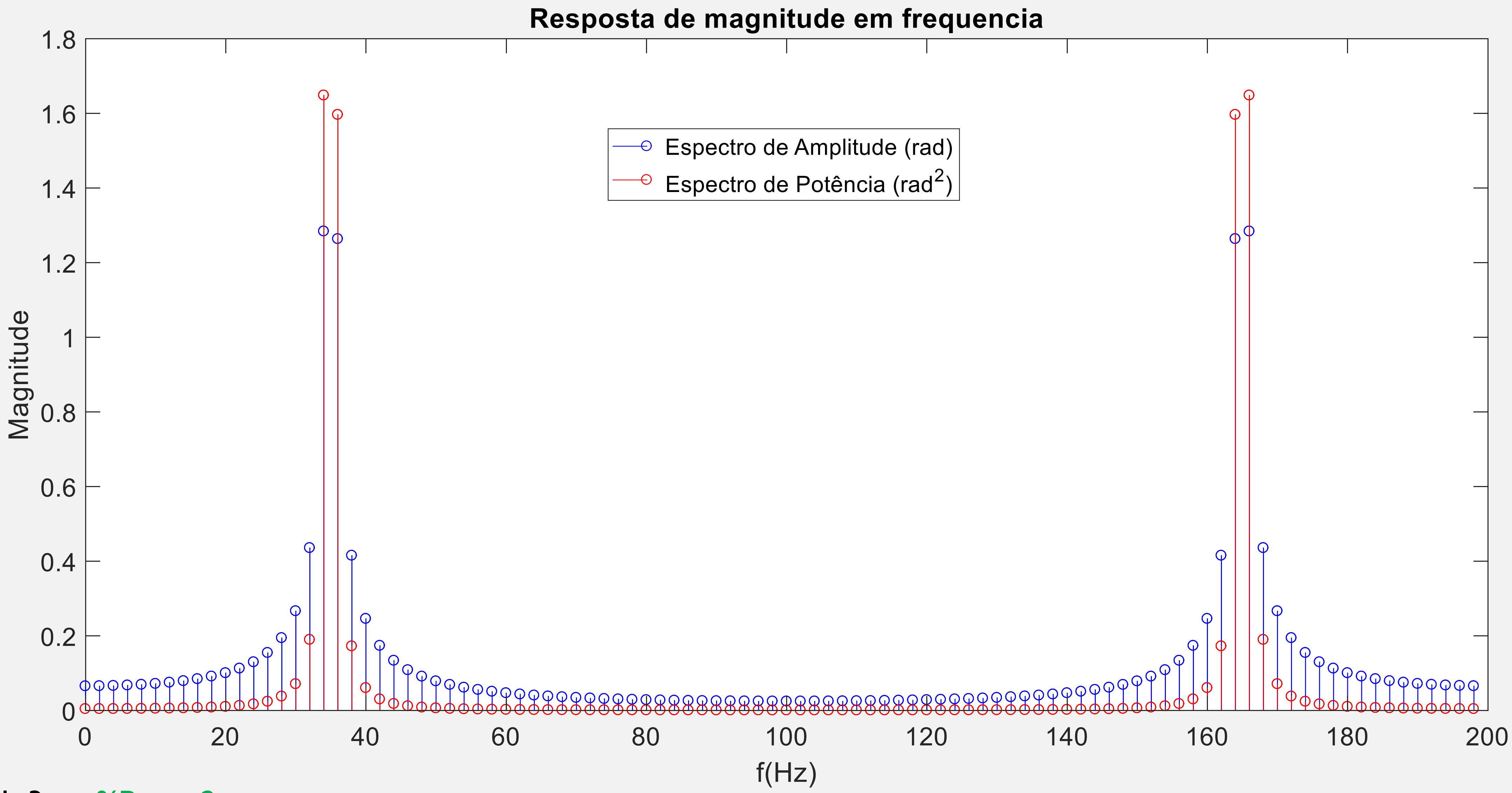


- Potência: enfatiza melhor as características do sinal
- Amplitude: descreve o sinal com maior precisão

TRAÇADO ESPECTRAL:
ESPECTROS (AMPLITUDE VS POTÊNCIA)

Exemplo:

$$2 * \sin(2\pi 35t)$$



>> Topico3Exemplo3.m %Parte 2

TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER:

EPC-4 (DFT)

Exercício Para Casa 4

- EPC4:
  - Transformada Discreta de Fourier Direta (DFT).

- Todos os Exercícios e atividades Para Casa (EPCs) são disponibilizados no [AVA da disciplina]:

Referências Bibliográficas

- Utilizados da aula:

  - WEEKS, M.; Processamento Digital de Sinais, utilizando Matlab® e Wavelets; 2a.ed., LTC, 2012.Processamento em tempo discreto de sinais. Capítulos: 4 e 6.
  - OPPENNHEIM, A.V. SHAFFER, R.W.; Processamento em Tempo Discreto de Sinais, 3a.ed., Pearson, 2013. Capítulos: 8 e 9.
  - Cohen, Mike X.; Fundamentals of Time-Frequency Analyses in Matlab/Octave. Sinc(x) press. Capítulo 4.