

Processamento de Sinais em Tempo Discreto

Prof. Dr. Samuel Lourenço Nogueira



Conteúdo Programático

- **Revisão:**
 - Tipos de sinais (Contínuos/Discretos)
 - Analógico vs Digital
 - Ondas senoidais
- **Amostragem**
 - Introdução
 - Processo de amostragem
 - Amostragem e ruído de alta frequência
 - Sobreposição espectral (aliasing)
 - Taxa de Nyquist

REVISÃO

Revisão

- Tipos de sinais
- Analógico vs Digital
- Ondas senoidais

Revisão – Tipos de sinais

- Sinais **contínuos**:

- Podem ser medidos continuamente
- Não existe distância mínima entre medidas

Exemplo:

temperatura(tempo)



Mesmo com distâncias muito pequenas seria possível recuperar as medidas.

temperatura(1h)
temperatura(1,001h)
temperatura(1,00000...000001h)

- Sinais **discretos**:

- A distância regular entre medidas (tempo)
- Indexada por um número inteiro

Exemplo:

temperatura[índice inteiro]

temperatura[1]
temperatura[2]
temperatura[3]
...
temperatura[n]

Distância entre medidas consecutivas é fixa.

distância regular = 0.25 segundos:

temperatura[2] é obtida exatamente 0.25 segundos após temperatura[1]

Revisão – Tipos de sinais

- Sinais **contínuos**:

- Podem ser medidos continuamente
- Não existe distância mínima entre medidas

Exemplo:
imagem(tamanho)

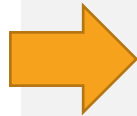


imagem (6x9mm)
imagem(12x18mm)
Imagem(14,4x21,6mm)

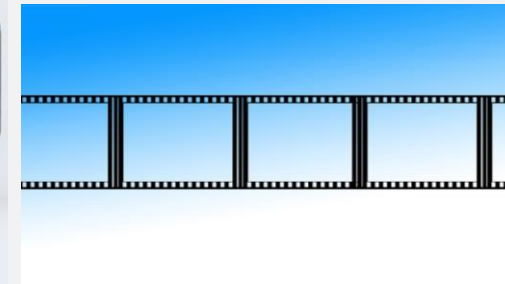


Ampliação máxima
dependente apenas da
resolução do filme

- Sinais **discretos**:

- A distância regular entre medidas (tempo)
- Indexada por um número inteiro

Exemplo:
vídeo[índice inteiro]



vídeo[1]
vídeo[2]
vídeo[3]
...
vídeo[n]



distância regular = 1/24 segundos ou 24 quadros/s



Cada quadro é atomizado, não existe outros quadros entre vídeo[1] e vídeo[2].

Revisão – Tipos de sinais

- Os sinais podem ser de 4 tipos distintos

Grandeza	Índice ou Espaçamento	
	discreto	contínuo
discreta	Vídeo digital[n do quadro]	Pessoas em um edifício (tempo)
contínua	Hora nascimento[pessoa]	Temperatura(tempo)

Nossos estudos focaram nesses tipos

- Assim, representaremos sempre:

$\left\{ \begin{array}{l} sinal[n] : \text{discreto} \rightarrow \text{digital} \\ sinal(t) : \text{contínuo} \rightarrow \text{analógico} \end{array} \right.$

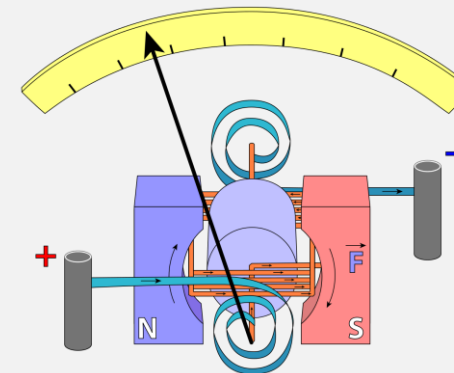
Revisão

- Tipos de sinais
- Analógico vs Digital
- Ondas senoidais

Revisão – Analógico vs Digital

- Analógico

- Valores contínuos
- **Armazenados** ou **apresentados** em dispositivos analógicos
- Exemplos:
 - Fita K7 (*compact cassette*)
 - Disco de vinil
 - Balança de molas
 - Termômetro de mercúrio
 - Voltímetro / galvanômetro
 - etc...



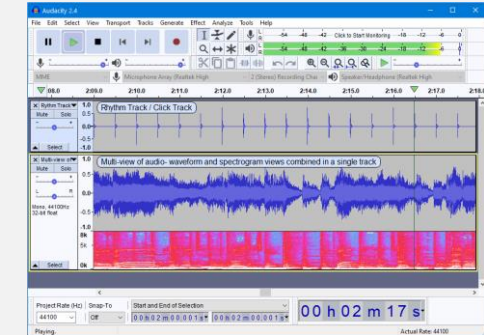
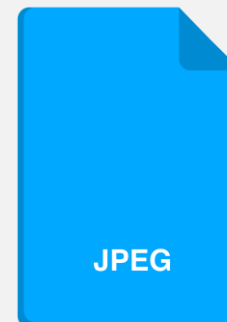
Fontes:

<http://pixabay.com/>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Galvanometer>

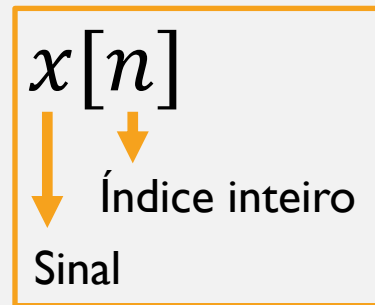
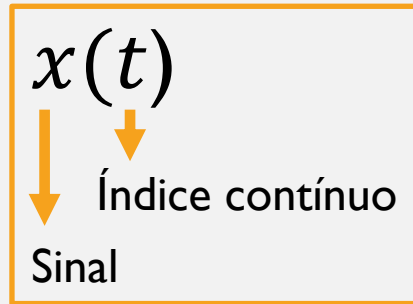
Revisão – Analógico vs Digital

- Digital
 - Valores discretos
 - Obtidos de um sinal/grandeza analógico
 - Amostragem (*sampling*)
 - Intervalos regulares (medidas)
 - Armazenados em estruturas contendo vetores e matrizes
 - Arquivos de texto
 - Arquivos binários
 - Exemplos:
 - Imagem/Luz
 - Som/Voz



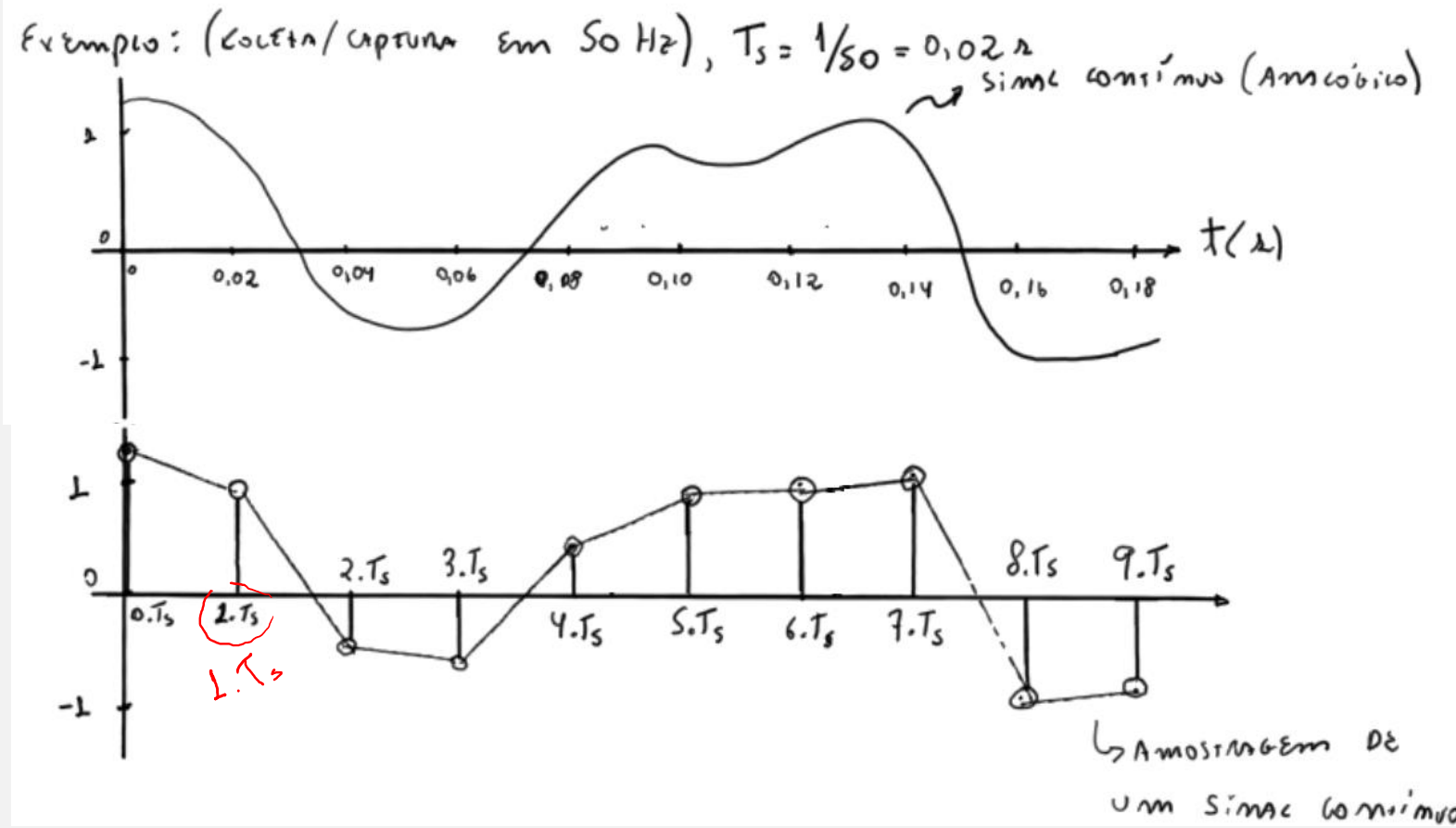
Revisão – Analógico vs Digital

- Sinal digital é agrupado em vetores/matrizes, acessado por índices inteiros:



sendo que $t = nT_s$

Tempo de amostragem



Portanto,

$x\{$	1.30,	1.00,	-0.50,	-0.60,	0.50,	1.00,	1.10,	1.20,	-1.20,	-1.10}
$t\{$	0.00,	0.02,	0.04,	0.06,	0.08,	0.10,	0.12,	0.14,	0.16,	0.18}

Revisão

- Tipos de sinais
- Analógico vs Digital
- Ondas senoidais

Revisão – Ondas senoidais

- Mundo analógico:
 - Descrevem o comportamento de grandezas físicas
 - Ondas aparecem isoladas ou combinadas
 - Energia elétrica (corrente alternada)
 - Rotação/Translação da Terra
 - Sinais eletromiográficos
 - Voz humana
- Equação:

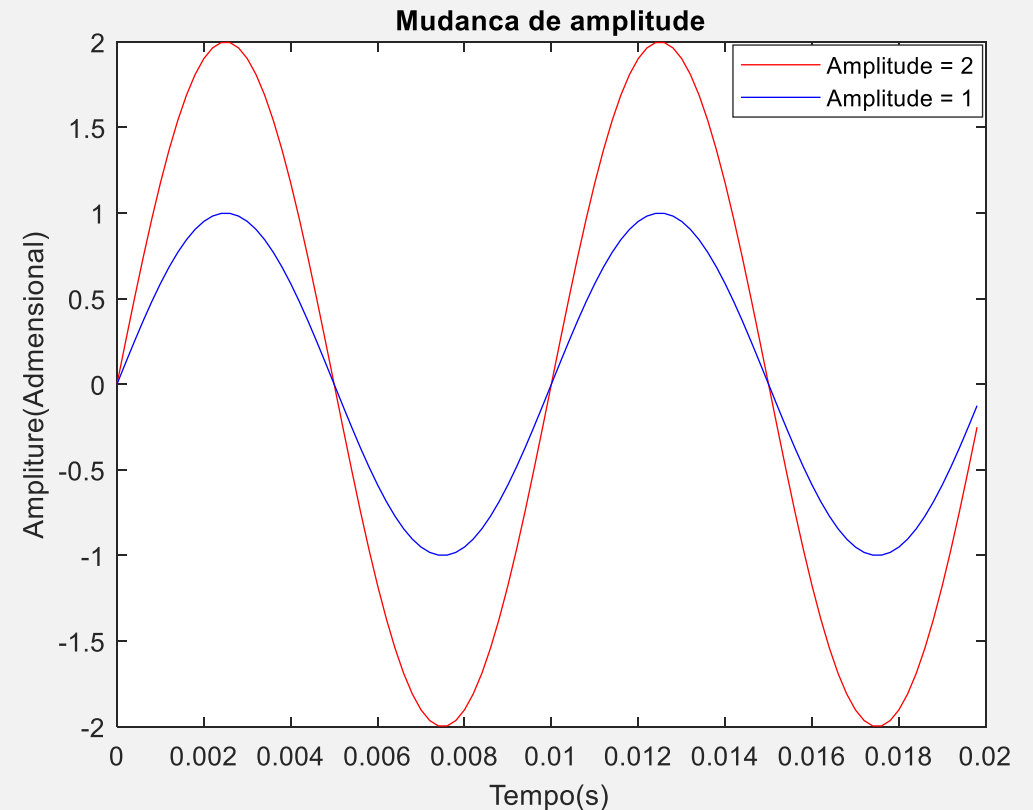
$$sinal = a \, sen(2\pi f t + \theta)$$

a = amplitude

f = frequência (Hz)

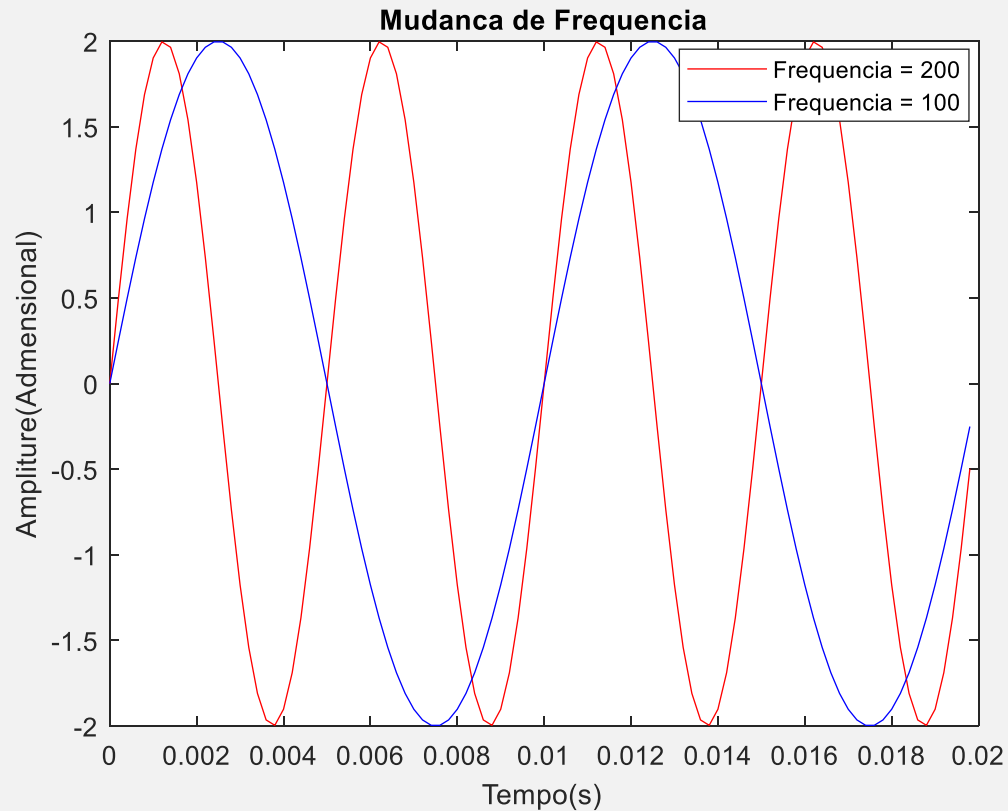
θ = fase (radianos)

$$sinal = a \, sen(2\pi f t + \theta)$$



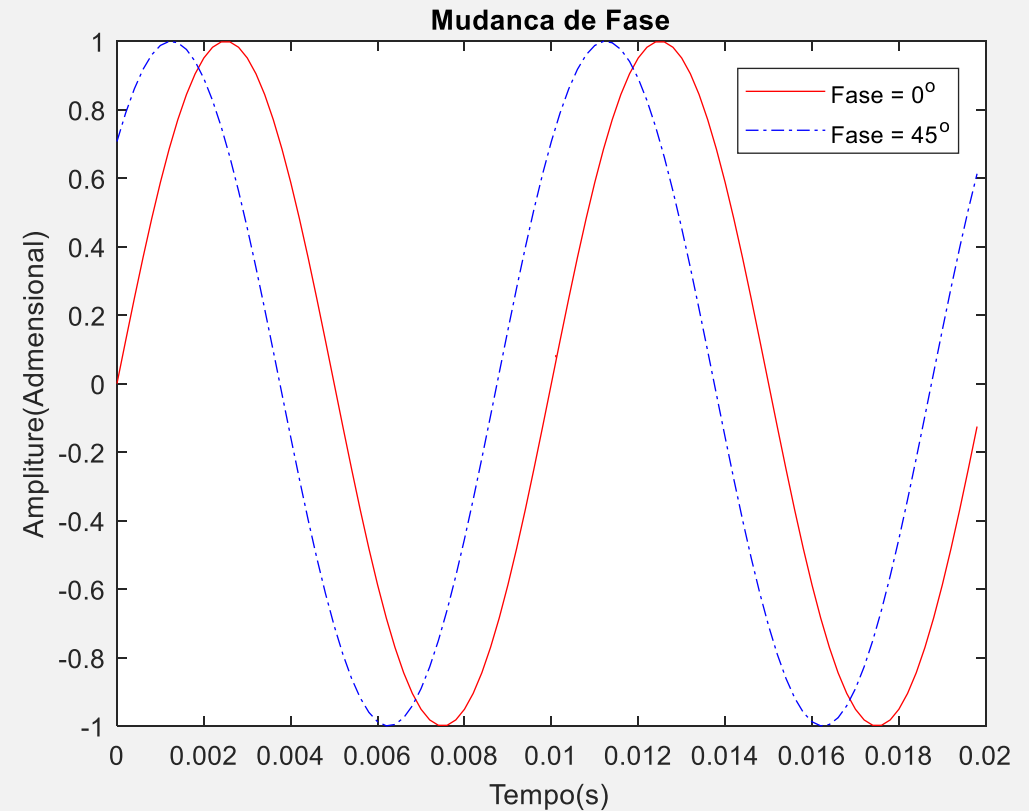
Revisão – Ondas senoidais

$$sinal = a \overset{\text{2}}{\overset{\text{1}}{\text{sen}}}(2\pi f t + \theta)$$



>> Topico\Exemplo\l.m % Parte 2

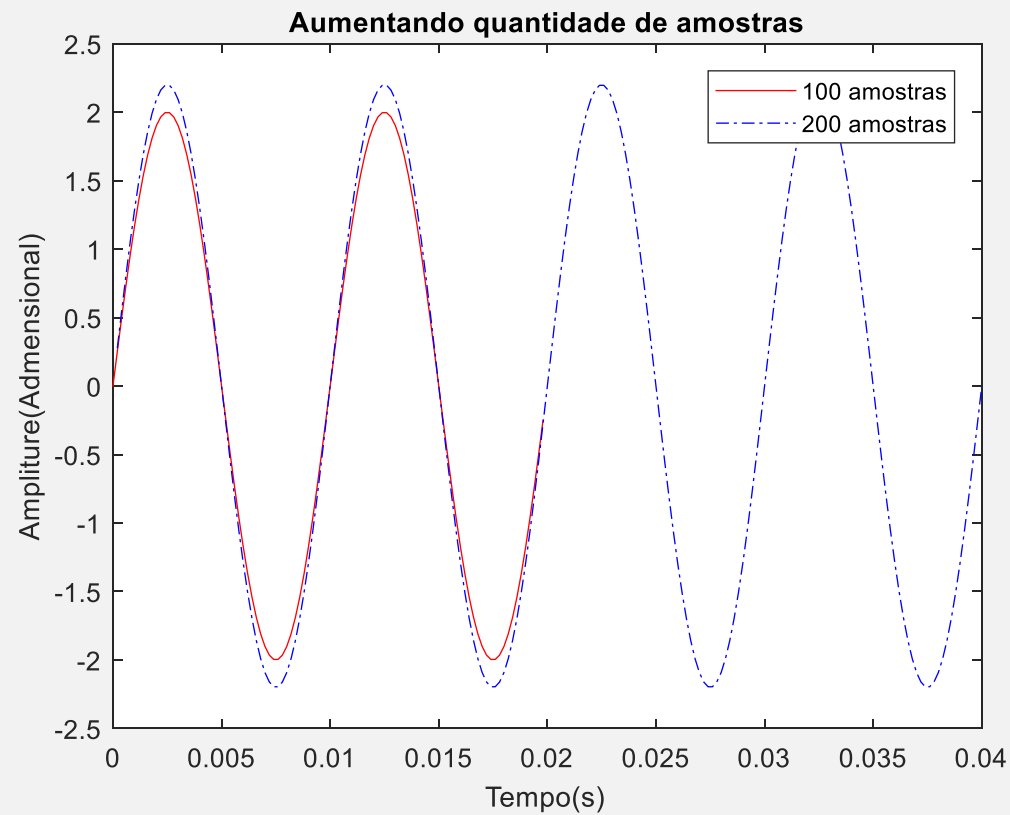
$$sinal = a \overset{\text{2}}{\overset{\text{1}}{\text{sen}}}(2\pi f t + \theta)$$



>> Topico\Exemplo\l.m % Parte 3

Revisão – Ondas senoidais

$$sinal = a \operatorname{sen}(2\pi f t + \theta)$$



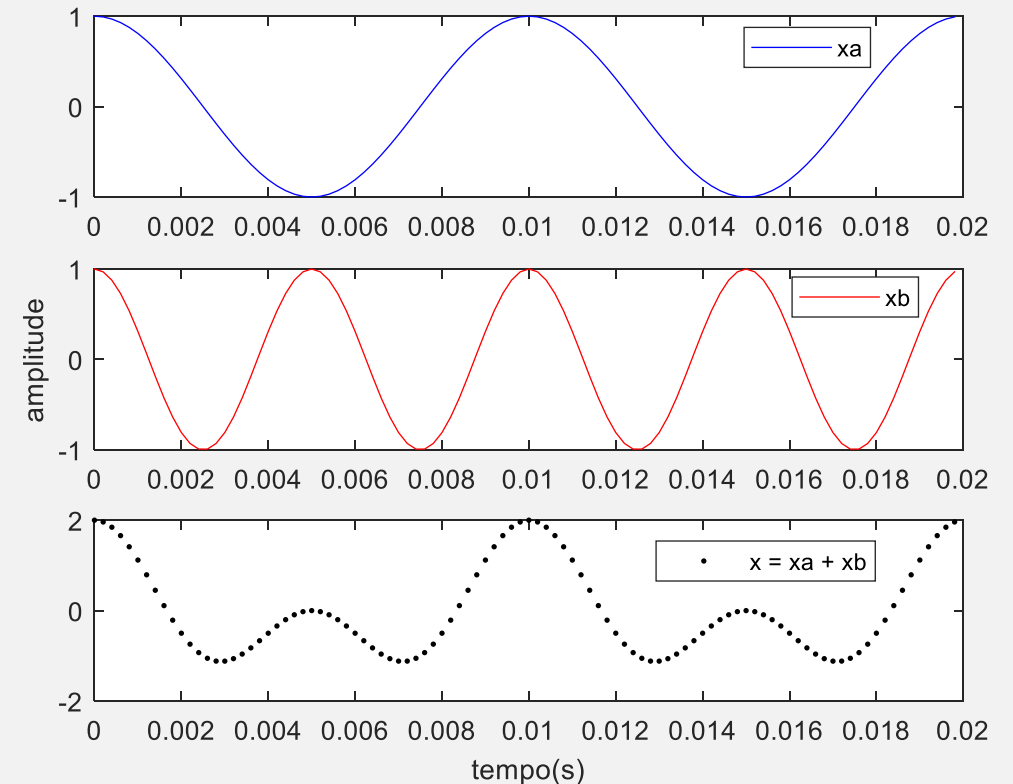
Revisão – Ondas senoidais

- Combinação de senoides para descrever grandezas oscilantes no tempo
- Exemplo:

$$x(t) = \cos(2\pi 100t) + \cos(2\pi 200t)$$

>> Topico1Exemplo2.m

$T_s = 0.0002$
 $N = 100$ amostras



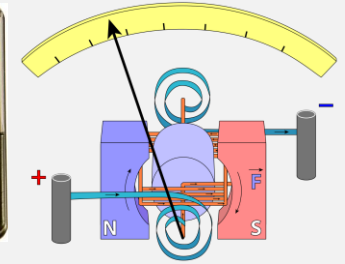
AMOSTRAGEM

Amostragem

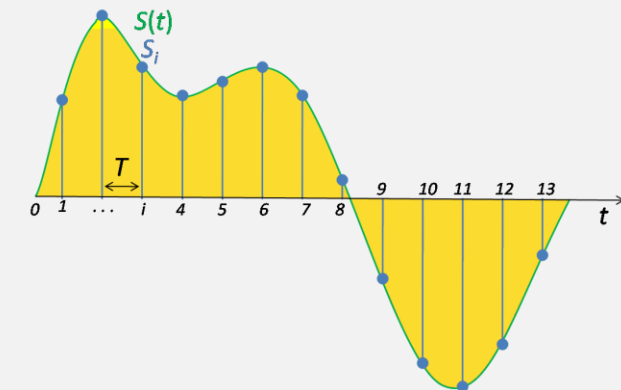
- Introdução
- Processo de amostragem
- Ruído de alta frequência
- Sobreposição espectral
- Taxa de Nyquist

Introdução à amostragem

- Mundo real
 - Analógico
 - Sinais contínuos



- Computadores
 - Dispositivos digitais
 - Dados discretos e finitos
 - Limites de precisão
 - Intervalos de medidas
 - Magnitude do sinal medido



Fontes:

<http://pixabay.com/>

<https://en.wikipedia.org/wiki/Galvanometer>

<https://www.maxpixel.net>

[https://en.wikipedia.org/wiki/Sampling_\(signal_processing\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Sampling_(signal_processing))

Introdução à amostragem

- **Amostragem:** é um processo de obtenção de um sinal digital à partir de um sinal analógico.

Exemplo: Música de 3 minutos

- Taxa de 16 bits (resolução de amplitude)
- Amostrada à 44100 Hz ou
 $T_s \cong 22,68\mu s$ (distância entre amostras)
- 2 canais (estéreo)

3 min = 180 s

Cada amostra teria 16 bits ou 2 bytes

Teríamos 44100 amostras por segundo, por canal

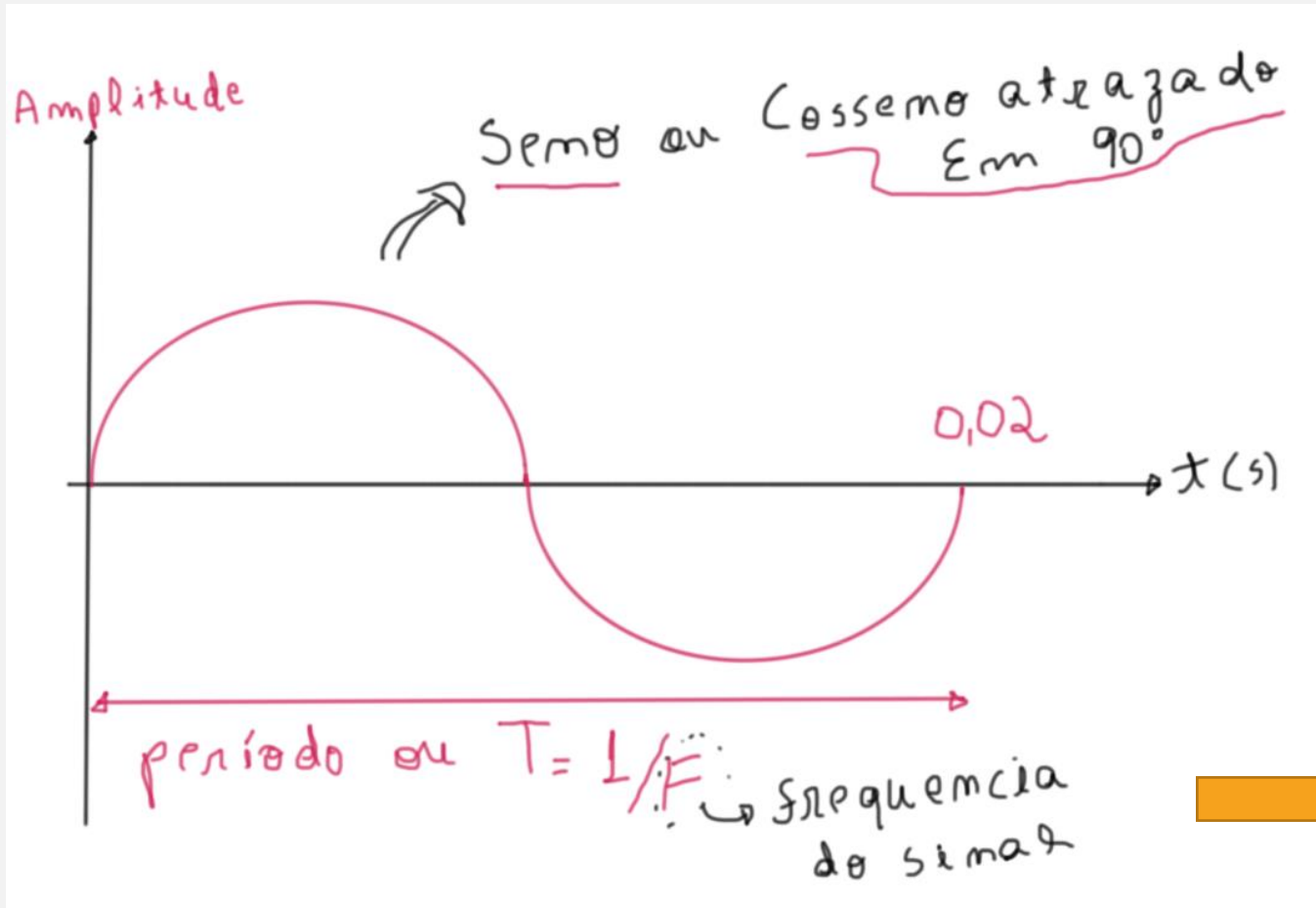
$$\therefore QTD_{ms} = \underbrace{180}_{3min} \times \underbrace{2}_{2bytes} \times \underbrace{44100}_{\substack{\text{Amostras} \\ \text{por} \\ \text{seg}}}} \times \underbrace{2}_{\text{Dois canais}} = 31752000 \text{ bytes}$$

$$ou \approx 30 MB \xrightarrow[\substack{\text{MP3} \\ \text{COMPACTO}}]{\text{MP3}} \approx \textcircled{3MB} \rightarrow \text{PDS}$$

Amostragem

- Introdução
- **Processo de amostragem**
- Ruído de alta frequência
- Sobreposição espectral
- Taxa de Nyquist

Processo de amostragem



$$F = \frac{1}{0,02} = 50\text{Hz}$$

Processo de amostragem

- Supondo sinal contínuo

$$x(t) = \cos(2 * \pi * F * t - \frac{\pi}{2})$$

$90^\circ * \pi/180$

- Amostrar

- Substituir t (índice contínuo) por valor discreto $n * T_s$, sendo:

- n um valor inteiro de $0 \dots N - 1$ (N : número de amostras)
- T_s o período de amostragem (intervalo entre duas amostras)
- $T_s = 1/F_s$, sendo F_s a frequência de amostragem

Assim o processo de amostragem é dado por:

$$x[n] = x(n * T_s)$$

$\left\{ \begin{array}{l} x[n] \text{ não é exatamente } x(t), \\ \text{mas uma boa aproximação.} \end{array} \right.$

Processo de amostragem

- Exemplo: Dado o sinal contínuo representado pela função senoidal abaixo, faça:
 - Discretização, utilizando $T_s = \frac{1}{500}$
 - Obtenha 100 amostras

$$x(t) = \cos(2 * \pi * 45 * t)$$

```
>> N = 100;           % número de amostras  
>> Ts = 1/500;        % 500 amostras/s  
>> n = 0:N-1;         % vetor índices inteiros  
>> x = cos(2*pi*45*n*Ts);  
>> plot(n,x, 'r'); hold on;  
>> stem(n,x);
```



Obs:

- $T = \frac{1}{45}$ é diferente de $T_s = \frac{1}{500}$
- Tamanho da janela = $(N - 1) * T_s$
- $(N - 1) * \frac{T_s}{T} =$ número de repetições

Processo de amostragem

- Exercício 1:

- Se um sinal $x(t)$ for amostrado à 20 kHz, quantas amostras teríamos após 60ms?

$$x(t) = \cos(2\pi 404t + \pi/4) + 2\cos(2\pi 6510t)$$

$$\begin{aligned} R: QTD_{\text{amostras}} &= 60\text{ms} * 20\text{kHz} \\ &= 60 \times 10^{-3} * 20 \times 10^3 = 1200 \text{ amostras} \end{aligned}$$

- Exercício 2:

- Supondo que o sinal do exercício (1) tenha sido amostrado à 16 bits/amostra, qual a quantidade de bytes necessários para armazenar os 60ms amostrados?

$$\begin{aligned} R: 16 \text{ bits} &= 2 \text{ bytes} \\ \therefore T_{\text{data}} &= QTD_{\text{amostras}} * 2 = \underline{2400 \text{ bytes}} \end{aligned}$$

Processo de amostragem

- Exercício 3:

- Qual o período do sinal ao lado?

$$x(t) = 4 * \cos(2\pi 250 t + 2\pi/7)$$

$$R: T = 1/f = 1/250 \text{ Hz} = \underline{0,004 \text{ s}}$$

- Exercício 4:

- Para o sinal do exercício anterior, supondo período de amostragem de $T_s = 1/2500$, defina uma quantidade de amostras N , para que o sinal amostrado tenha pelo menos 3 repetições do mesmo.

$$(N-1) * \frac{1/2500}{1/250} = 3$$

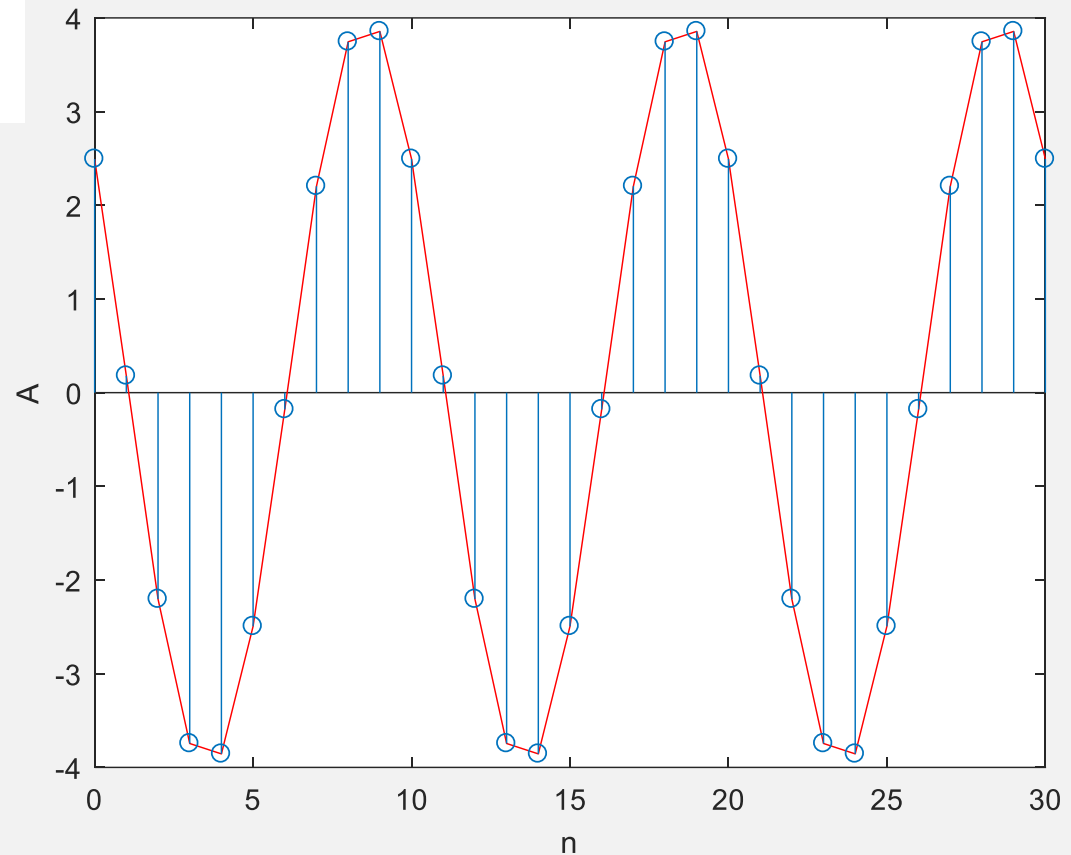
$$\therefore \underline{N = 31 \text{ amostras}}$$

Processo de amostragem

- Exercício 5:
 - Amostre o sinal do exercício (4) no Matlab/Octave, apresente o código e gráficos.

$$x(t) = 4 \cos(2\pi 250t + 2\pi/7)$$

```
>> N = 31;           % número de amostras  
>> Ts = 1/2500;      % 2500 amostras/s  
>> n = 0:N-1;        % vetor índices inteiros  
>> x = 4*cos(2*pi*250*n*Ts + 2*pi/7);  
>> plot(n,x,'r'); hold on;  
>> stem(n,x);
```

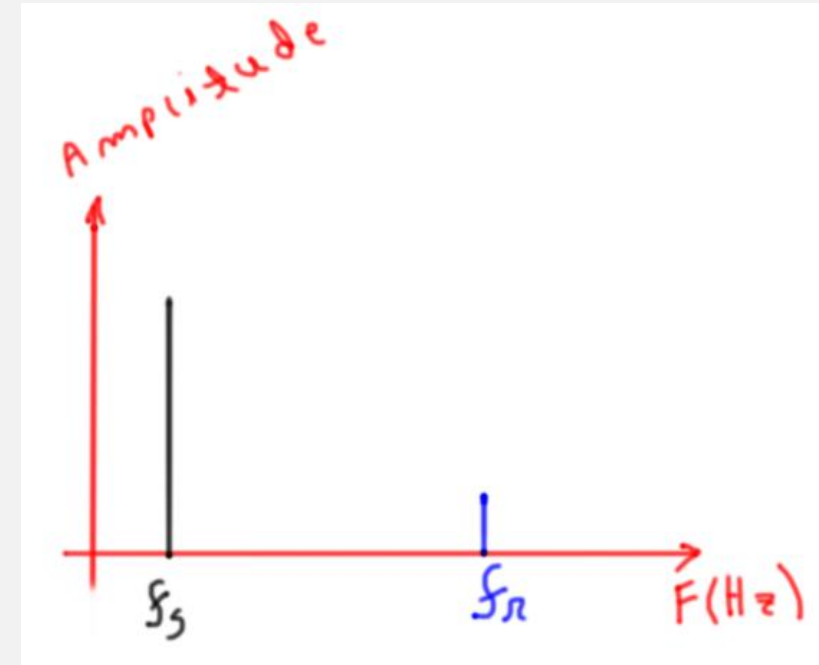
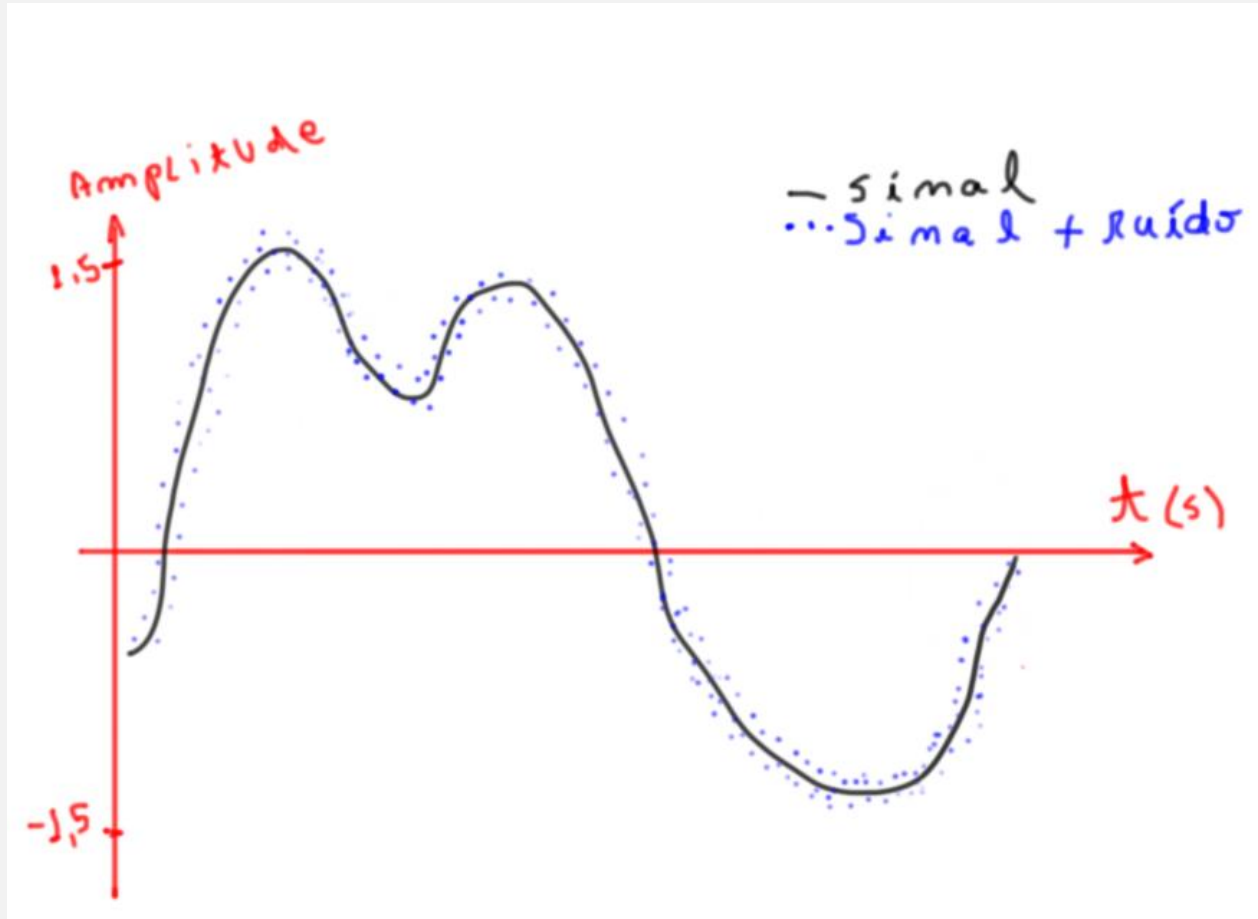


Amostragem

- Introdução
- Processo de amostragem
- Ruído de alta frequência
- Sobreposição espectral
- Taxa de Nyquist

Ruído de alta frequência

- Torna cada amostra do sinal um pouco maior ou menor do que seria



Uma sobreposição amostral do ruído aparecerá no sinal amostrado como componente de alta frequência.

Amostragem

- Introdução
- Processo de amostragem
- Ruído de alta frequência
- Sobreposição espectral
- Taxa de Nyquist

Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Exemplo prático:
 - Rodas de um carro (vídeo) aparentam girar no sentido contrário, efeito conhecido como “wagon-wheel effect” ou efeito estroboscópico, ou ainda sobreposição espectral temporal.
 - Link Vídeo Youtube: <https://www.youtube.com/watch?v=jHS9JGkEOmA>
 - Link Vídeo Wikipedia: https://en.wikipedia.org/wiki/Wagon-wheel_effect:



Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Ocorre quando o sinal amostrado possui réplicas de suas componentes senoidais, que podem distorcer o sinal real ao ponto de o mesmo não ser distinguível. O que ocasionará em perda de informação.
- Exemplo: seja $x(t) = \cos(2\pi 800t)$, amostrado à $F_s = 600$ amostras/segundo, ou 600Hz. O que ocorre?

$$x(t) = \cos(2\pi 800t)$$
$$x[n] = \cos(2\pi 800nT_s)$$

Substituindo 800 por
 $600 + 200$, teríamos:

$$x[n] = \cos(2\pi(200 + 600)nT_s)$$

sendo, $T_s = 1/600$

$$x[n] = \cos(2\pi 200nT_s + 2\pi n)$$

Como o *cos* é uma função periódica com período de 2π ,
temos que $\cos(\theta + 2\pi) = \cos(\theta)$

Assim, para qualquer n inteiro, temos:

$$x[n] = \cos(2\pi 200nT_s + 2\pi n) = \cos(2\pi 200nT_s)$$

Portanto, se amostrarmos uma senoide de 800Hz à 600 amostras/segundo,
não conseguiríamos distingui-la de uma de 200Hz.

PERDA DE INFORMAÇÃO!

Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Pode-se generalizar as componentes senoidais de um sinal, substituindo:

$$f = f_o + kF_s$$

→ Freq. de amostragem
→ Número inteiro
→ Maior componente de freq. do sinal

$$x(t) = \cos(2\pi f t + \theta)$$

$$x[n] = \cos(2\pi(f_o + kF_s)nT_s + \theta)$$

$$x[n] = \cos(2\pi f_o nT_s + 2\pi k F_s nT_s + \theta)$$

$$x[n] = \cos(2\pi f_o nT_s + 2\pi k n + \theta)$$

A componente de frequência que equivale a um múltiplo do da F_s é nula.

$$x[n] = \cos(2\pi f_o nT_s + \theta)$$

Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Sejam dos sinais:

- $x(t) = 2 * \cos(2\pi 100t)$
- $y(t) = 2 * \cos(2\pi(100 + kF_s)t)$

para k inteiro

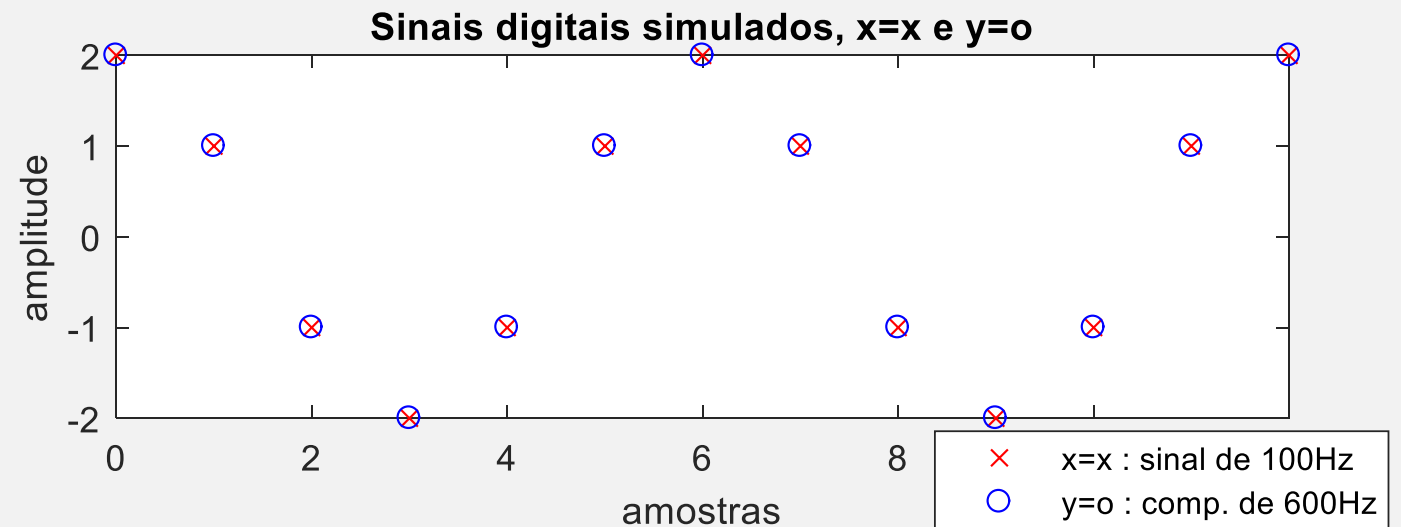
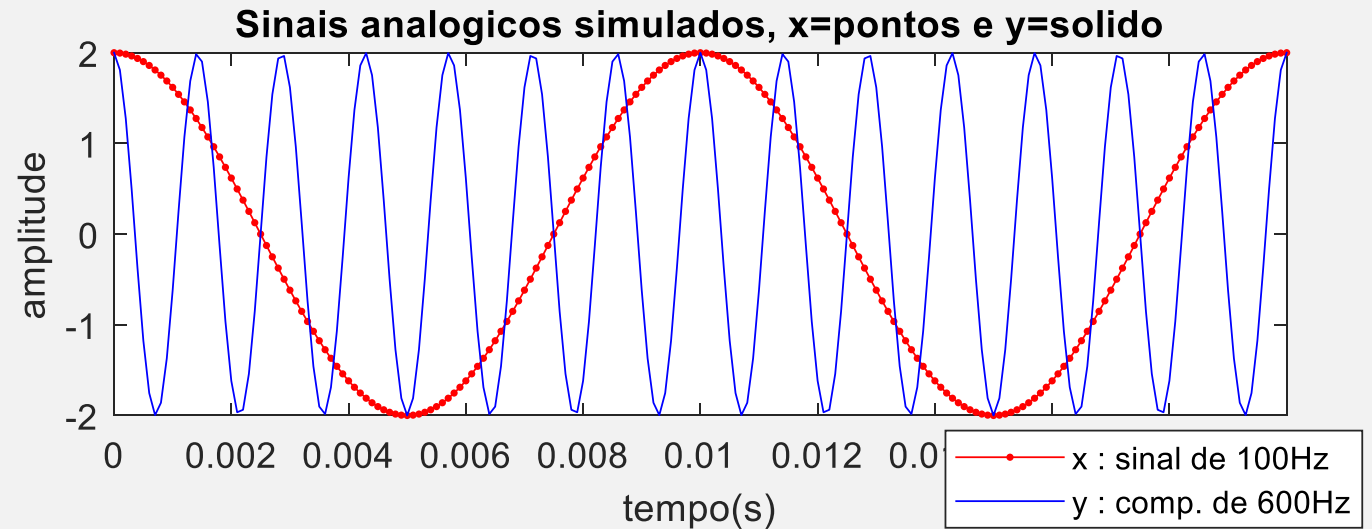
Sendo,

$$F_s = 600 \text{ Hz}$$

$$N = 200 \text{ amostras}$$

a componente 600Hz

não aparece na amostragem



Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Caso principal, dobramento (*folding*):

$$\frac{F_s}{2} < f_o < F_s$$

Exemplo: seja $x(t) = \cos(2\pi 600t + \theta)$, amostrado à 1000Hz (amostras/segundo)

$$x[n] = \cos(2\pi 600nT_s + \theta)$$

Substituindo 600 por 1000-400

$$x[n] = \cos(2\pi(1000 - 400)nT_s + \theta)$$

$$x[n] = \cos(\cancel{2\pi n} - 2\pi 400nT_s + \theta)$$



Para 'n' um número inteiro

$$x[n] = \cos(-2\pi 400nT_s + \theta)$$

Sabe-se que $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \cos(\pi) = 1 \\ \cos(-\pi) = 1 \end{array} \right.$$

Portando teríamos duas soluções possíveis,

$$x[n] = \cos(-2\pi 400nT_s + \theta)$$

$$x[n] = \cos(2\pi 400nT_s - \theta)$$



Mudança de fase

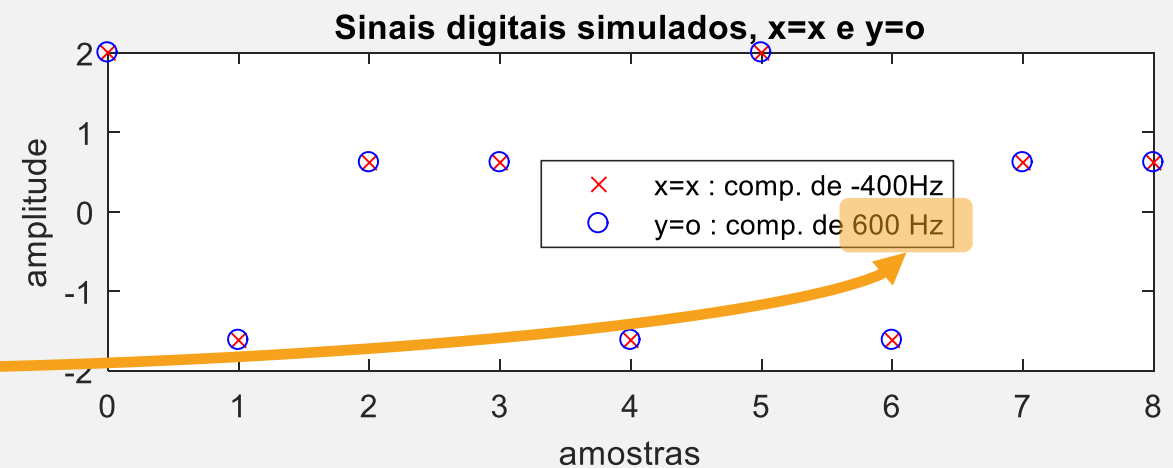
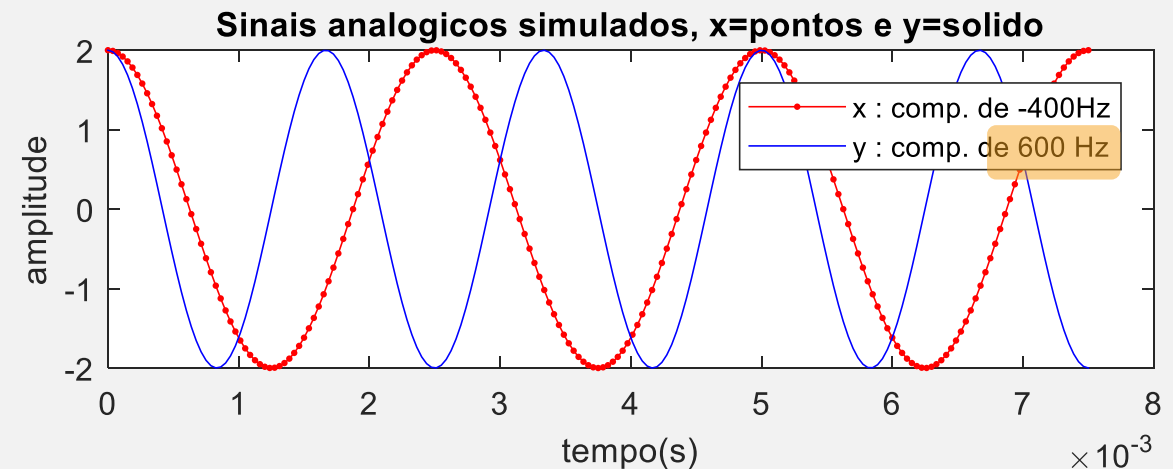
Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Dado o exemplo anterior, $x[n] = \cos(2\pi 600nT_s + \theta)$, uma solução possível para $T_s = 1000$ seria:
 - $x[n] = a * \cos(2\pi(-400)nT_s + \theta)$
- Considere também o caso generalizado com componente múltipla da F_s
 - $y[n] = a * \cos(2\pi(-400 + kF_s)nT_s + \theta)$

>> Topico | Exemplo4.m

Mesmo mudando k para valores maiores não afeta a componente de dobramento no sinal amostrado.

Sinal original amostrado
não distingue-se do sinal
de 400Hz



Amostragem

- Introdução
- Processo de amostragem
- Ruído de alta frequência
- Sobreposição espectral
- Taxa de Nyquist

Taxa de Nyquist

- Taxa de Nyquist ou Teorema da Amostragem de Nyquist:
 - Anteriormente vimos que para $f_o > F_s$ ou $F_s > f_o > \frac{F_s}{2}$, temos perda de informação
 - Consiste da taxa mínima de amostragem para que um sinal possa ser reconstruído:

$$F_s \geq 2 * (\text{Largura de banda})$$

Handwritten annotations:

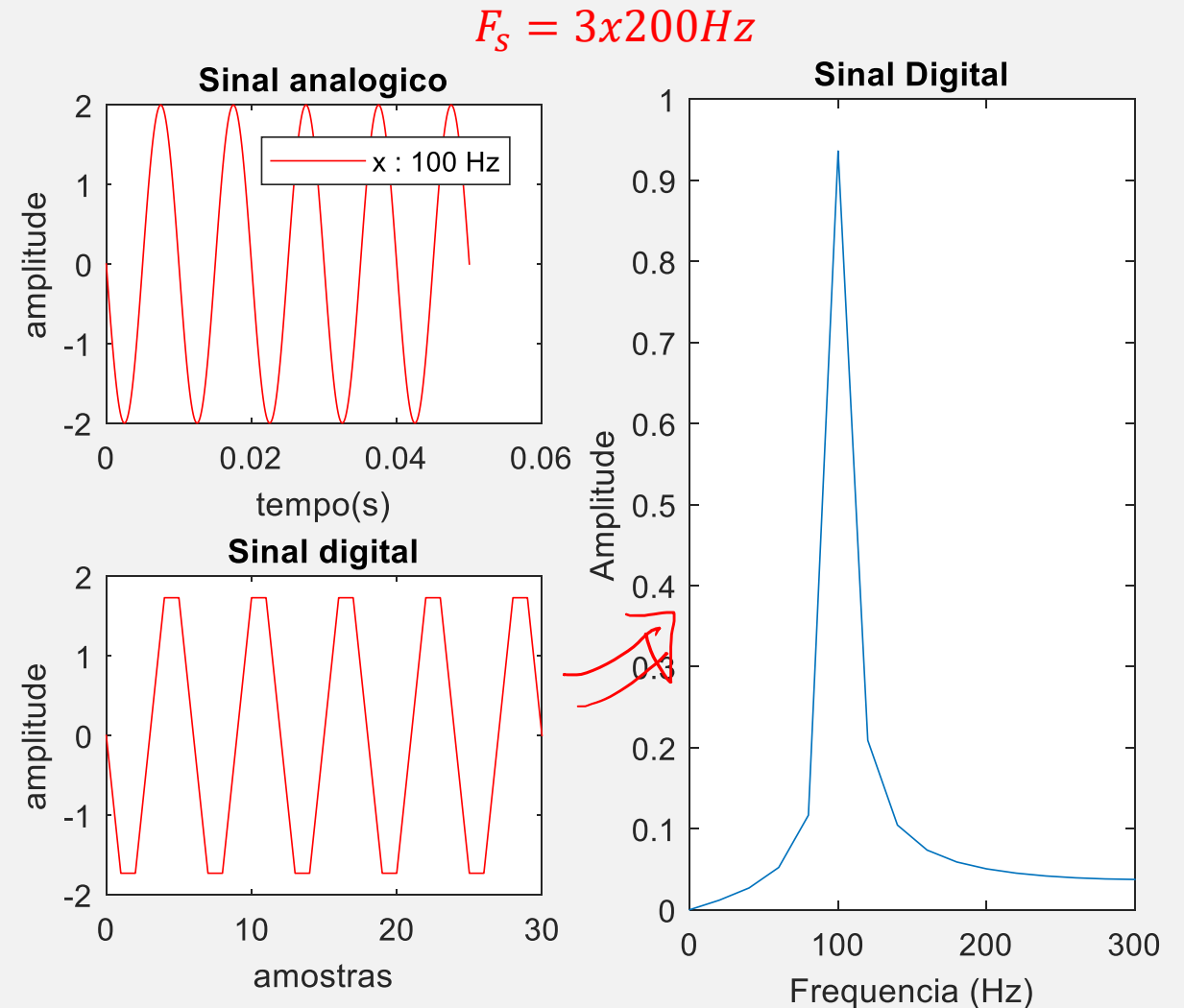
- A red bracket above the equation spans from the start to the end of the term $(\text{Largura de banda})$, with the handwritten text "7, 200" above it.
- An orange arrow points from the term $(\text{Largura de banda})$ to the text "0 até f_o : máxima frequência".
- A red arrow points from the text "0 até f_o : máxima frequência" to the handwritten text "100 Hz".

Nyquist e Sobreposição Amostral (*Aliasing*)

- Testes, considerando o sinal amostrado com $f_o = 100\text{Hz}$

- $F_s = 100^*\text{Hz}$ até 149Hz
- $F_s = 150\text{Hz}$ até 200^*Hz
- $F_s = 2 \times 200\text{Hz}$ até $100 \times 200\text{Hz}$
 - * *casos críticos*

>> Topico | Exemplo5.m



Resumo de EPCs

- Todos os Exercícios e atividades Para Casa (EPCs) são disponibilizados no [AVA da disciplina](#):
- Exercício Para Casa 2 (EPC2): Exercícios de fixação sobre amostragem

Referências Bibliográficas

- WEEKS, M.; Processamento Digital de Sinais, utilizando Matlab® e Wavelets; 2a.ed., LTC, 2012. Processamento em tempo discreto de sinais.
- OPPENNHEIM, A. V. SHAFFER, R. W.; Processamento em Tempo Discreto de Sinais, 3a.ed., Pearson, 2013.
- PROAKIS, J. G.; MANOLAKIS, D. G.; Digital Signal Processing: Principles, algorithms, and Applications, Prentice Hall, 2006.
- <https://www.mathworks.com/help/>
- <https://octave.org/doc/v5.2.0/>