Instituto Superior de Engenharia
Politécnico de Coimbra

DEPARTAMENTO DE / DEPARTMENT OF
INFORMÁTICA E SISTEMAS

Métodos Numéricos para resolução de Sistemas de Equações Diferenciais

Autor / Author

Tiago Fernandes Lopes – a2023144639,

Engenharia Informática

Autor / Author

Daniel Duarte Silva – a2023144551,

Engenharia Informática

Autor / Author

Guilherme Alexandre Neves Martins – a2023144573,

Engenharia Informática

INSTITUTO POLITÉCNICO
DE COIMBRA

INSTITUTO SUPERIOR
DE ENGENHARIA
DE COIMBRA

Coimbra, maio de 2024

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho, vamos falar sobre os Sistemas de Equações Diferenciais (SED) e os Métodos Numéricos para Sistemas de Equações Diferenciais (MNSED), que são importantes para entendermos problemas complexos em várias áreas como a ciência e a tecnologia. Basicamente, os SED ajudam a descrever como as coisas mudam com o tempo, e os MNSED são ferramentas que usamos para encontrar respostas aproximadas quando as soluções diretas são muito complicadas para calcular.

Sistemas de Equações Diferenciais (SED)

Um sistema de equações diferenciais é um conjunto de duas ou mais equações diferenciais que envolvem múltiplas funções desconhecidas e as suas derivadas. Estas funções representam variáveis que mudam ao longo do tempo ou em relação a outra variável independente, e as equações descrevem como essas mudanças estão inter-relacionadas.

Aplicações

Os sistemas de equações diferenciais são fundamentais em diversas áreas, incluindo:

- Física: Modelagem de sistemas dinâmicos, como movimento de partículas e ondas.
- Engenharia: Análise de sistemas mecânicos, elétricos e de controlo.
- Biologia: Modelagem de crescimento populacional, dinâmica de epidemias e processos biológicos.
- Economia: Modelos de crescimento económico, ciclos de negócios e dinâmica de mercado.

Solução de Sistemas de Equações Diferenciais

Resolver um sistema de equações diferenciais significa encontrar as funções desconhecidas que satisfazem todas as equações do sistema. Isso pode ser feito analiticamente para sistemas simples ou linearizados, mas na maioria dos casos práticos, métodos numéricos são necessários para encontrar soluções aproximadas.

Os métodos numéricos, como o método de Euler, os métodos de Runge-Kutta e outros métodos iterativos, são usados para obter soluções aproximadas para sistemas complexos que não podem ser resolvidos de forma exata. Esses métodos são essenciais em computação científica e engenharia para simulações e previsões precisas.

2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DE UM SED

2.1 Método de Euler

O Método de Euler é um procedimento numérico de primeira ordem amplamente utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) quando um valor inicial é especificado. Este método serve como uma das abordagens mais básicas e fundamentais para a integração numérica de equações diferenciais, oferecendo uma introdução acessível aos conceitos de soluções numéricas.

2.1.1 Algoritmo/Função

```
function [t,u,v] = NEulerSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
% Método de Euler para resolução numérica de sistema de EDOs
%   u' = f(t, u, v)
%   v' = g(t, u, v)
%   t = [a, b], u(a) = u0, v(a) = v0
%   u(i+1) = u(i) + h * f(t(i), u(i), v(i))
%   v(i+1) = v(i) + h * g(t(i), u(i), v(i))
% INPUT:
%   f - função da EDO u' = f(t, u, v)
%   g - função da EDO v' = g(t, u, v)
%   [a, b] - intervalo de valores da variável independente t
%   n - número de iterações do método
%   u0 - aproximação inicial u(a) = u0
%   v0 - aproximação inicial v(a) = v0
% OUTPUT:
%   t - vetor do intervalo [a, b]
%   u - vetor das soluções aproximadas de u em cada um dos t(i)
%   v - vetor das soluções aproximadas de v em cada um dos t(i)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
u = zeros(1,n+1); v = zeros(1,n+1);
u(1) = u0; v(1) = v0;
for i = 1:n
    u(i+1) = u(i)+h*f(t(i),u(i),v(i));
    v(i+1) = v(i)+h*g(t(i),u(i),v(i));
end
end
```

2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado

O Método de Euler Melhorado é uma técnica numérica usada para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem. Ele é uma extensão do Método de Euler clássico, desenvolvido para melhorar a precisão das soluções.

A ideia principal do Método de Euler Melhorado é utilizar uma estimativa mais precisa para o valor da derivada da função desconhecida em cada passo de iteração.

2.2.1 Algoritmo/Função

```
function [t,u,v] = NEulerMelhoradoSED(f,g,a,b,n,u0,v0)
% Método de Euler Melhorado para resolução numérica de sistemas de EDOs
%   u' = f(t, u, v)
%   v' = g(t, u, v)
%   t = [a, b], u(a) = u0, v(a) = v0
%   k1u = f(t(i), u(i), v(i))
%   k1v = g(t(i), u(i), v(i))
%   k2u = f(t(i) + h, u(i) + k1u * h, v(i) + k1v * h)
%   k2v = g(t(i) + h, u(i) + k1u * h, v(i) + k1v * h)
%   u(i+1) = u(i) + (h/2) * (k1u + k2u)
%   v(i+1) = v(i) + (h/2) * (k1v + k2v)
% INPUT:
%   f - função da EDO u' = f(t, u, v)
%   g - função da EDO v' = g(t, u, v)
%   [a, b] - intervalo de valores da variável independente t
%   n - número de iterações do método
%   u0 - aproximação inicial u(a) = u0
%   v0 - aproximação inicial v(a) = v0
% OUTPUT:
%   t - vetor do intervalo [a, b]
%   u - vetor das soluções aproximadas de u em cada um dos t(i)
%   v - vetor das soluções aproximadas de v em cada um dos t(i)

h = (b-a)/n;
t = a:h:b;
u = zeros(1,n+1); v = zeros(1,n+1);
u(1) = u0; v(1) = v0;
for i = 1:n
    k1u = f(t(i), u(i), v(i));
    k1v = g(t(i), u(i), v(i));
    k2u = f(t(i) + h, u(i) + k1u * h, v(i) + k1v * h);
    k2v = g(t(i) + h, u(i) + k1u * h, v(i) + k1v * h);

    u(i+1) = u(i) + (h/2) * (k1u + k2u);
    v(i+1) = v(i) + (h/2) * (k1v + k2v);
end
end
```

2.3 Método de RK2

O Método de Runge-Kutta de segunda ordem, frequentemente abreviado como RK2, é um procedimento numérico mais sofisticado e preciso para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) do que o Método de Euler. Este método proporciona uma aproximação melhorada ao considerar não apenas a inclinação no ponto inicial, mas também em um ponto intermédio entre os passos, o que resulta em uma estimativa mais precisa da linha tangente e, portanto, da solução.

2.3.1 Algoritmo/Função

```
function [t,u,v] = NRK2SED(~,f,g,a,b,n,u0,v0)
% Método de Runge-Kutta de segunda ordem para resolução numérica de
sistemas de EDOs
%   u' = f(t, u, v)
%   v' = g(t, u, v)
%   t = [a, b], u(a) = u0, v(a) = v0
%   k1u = h * f(t(i), u(i), v(i))
%   k1v = h * g(t(i), u(i), v(i))
%   k2u = h * f(t(i+1), u(i) + k1u, v(i) + k1v)
%   k2v = h * g(t(i+1), u(i) + k1u, v(i) + k1v)
%   u(i+1) = u(i) + (k1u + k2u) / 2
%   v(i+1) = v(i) + (k1v + k2v) / 2
% INPUT:
%   ~ - placeholder para o primeiro argumento, que não é utilizado
%   f - função da EDO u' = f(t, u, v)
%   g - função da EDO v' = g(t, u, v)
%   [a, b] - intervalo de valores da variável independente t
%   n - número de iterações do método
%   u0 - aproximação inicial u(a) = u0
%   v0 - aproximação inicial v(a) = v0
% OUTPUT:
%   t - vetor do intervalo [a, b]
%   u - vetor das soluções aproximadas de u em cada um dos t(i)
%   v - vetor das soluções aproximadas de v em cada um dos t(i)
    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    u = zeros(1,n+1); v = zeros(1,n+1);
    u(1) = u0; v(1) = v0;
    for i = 1:n
        k1u = h*f(t(i),u(i),v(i));
        k1v = h*g(t(i),u(i),v(i));
        k2u = h*f(t(i+1),u(i)+k1u,v(i)+k1v);
        k2v = h*g(t(i+1),u(i)+k1u,v(i)+k1v);
        u(i+1) = u(i)+(k1u+k2u)/2;
        v(i+1) = v(i)+(k1v+k2v)/2;
    end
end
```

2.4 Método de RK4

O Método de Runge-Kutta de quarta ordem, comumente referido como RK4, é um dos métodos numéricos mais utilizados para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) devido à sua eficácia e precisão. Este método proporciona uma excelente precisão com um aumento moderado na complexidade computacional, tornando-o ideal para uma ampla gama de aplicações científicas e de engenharia.

2.4.1 Algoritmo/Função

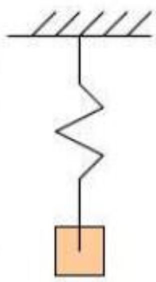
```
function [t,u,v] = NRK4SED(~,f,g,a,b,n,u0,v0)
% Esta função resolve um sistema de equações diferenciais ordinárias (EDOs)
% de segunda ordem utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem (RK4).
% Formulas:
%     k1u = f(t(i), u(i), v(i));
%   k1v = g(t(i), u(i), v(i));
%
%   k2u = f(t(i) + h/2, u(i) + h*(k1u/2), v(i) + h*(k1v/2));
%   k2v = g(t(i) + h/2, u(i) + h*(k1u/2), v(i) + h*(k1v/2));
%
%   k3u = f(t(i) + h/2, u(i) + h*(k2u/2), v(i) + h*(k2v/2));
%   k3v = g(t(i) + h/2, u(i) + h*(k2u/2), v(i) + h*(k2v/2));
%
%   k4u = f(t(i) + h, u(i) + h*k3u, v(i) + h*k3v);
%   k4v = g(t(i) + h, u(i) + h*k3u, v(i) + h*k3v);
%
%     u(i+1) = u(i) + (h / 6) * (k1u + 2*k2u + 2*k3u + k4u);
%     v(i+1) = v(i) + (h / 6) * (k1v + 2*k2v + 2*k3v + k4v);

% Entradas:
% - ~: Argumento não utilizado (pode ser removido)
% - f: Função que define a derivada de u em relação ao tempo t, ou seja,
du/dt = f(t, u, v)
% - g: Função que define a derivada de v em relação ao tempo t, ou seja,
dv/dt = g(t, u, v)
% - a: Tempo inicial
% - b: Tempo final
% - n: Número de passos de integração
% - u0: Valor inicial de u em t = a
% - v0: Valor inicial de v em t = a

% Saídas:
% - t: Vetor de tempos onde foram calculadas as soluções
% - u: Vetor de soluções para a variável u
% - v: Vetor de soluções para a variável v

    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    u = zeros(1,n+1); v = zeros(1,n+1);
    u(1) = u0; v(1) = v0;
```

```
    for i = 1:n
        k1u = f(t(i), u(i), v(i));
        k1v = g(t(i), u(i), v(i));
        k2u = f(t(i) + h/2, u(i) + h*(k1u/2), v(i) + h*(k1v/2));
        k2v = g(t(i) + h/2, u(i) + h*(k1u/2), v(i) + h*(k1v/2));
        k3u = f(t(i) + h/2, u(i) + h*(k2u/2), v(i) + h*(k2v/2));
        k3v = g(t(i) + h/2, u(i) + h*(k2u/2), v(i) + h*(k2v/2));
        k4u = f(t(i) + h, u(i) + h*k3u, v(i) + h*k3v);
        k4v = g(t(i) + h, u(i) + h*k3u, v(i) + h*k3v);
        u(i+1) = u(i) + (h / 6) * (k1u + 2*k2u + 2*k3u + k4u);
            v(i+1) = v(i) + (h / 6) * (k1v + 2*k2v + 2*k3v + k4v);
       end
end
```

3 EXEMPLOS DE APLICAÇÃO E TESTE DOS MÉTODOS

3.1 Mola-massa sem amortecimento

b) A equação $mx'' + kx = 0$ descreve o movimento harmónico simples, ou movimento livre não amortecido, e está sujeita às condições iniciais $x(0) = a$ e $x'(0) = b$ representando, respectivamente, a medida do deslocamento inicial e a velocidade inicial.



Use este conhecimento para dar uma interpretação física do problema de *Cauchy*

$$x'' + 16x = 0 \qquad x(0) = 9 \qquad x'(0) = 0$$

e resolva-o

A equação diferencial obtida do enunciado é a seguinte:

$$y'' + 16y = 0, \qquad y(0) = 9 \; e \; y'(0) = \; 0 \tag{3.1}$$

O sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \; -16u \\ u(0) = 9 \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

Na aplicação podemos ver o gráfico deste SED (utilizamos os métodos numéricos RK2 e Euler):

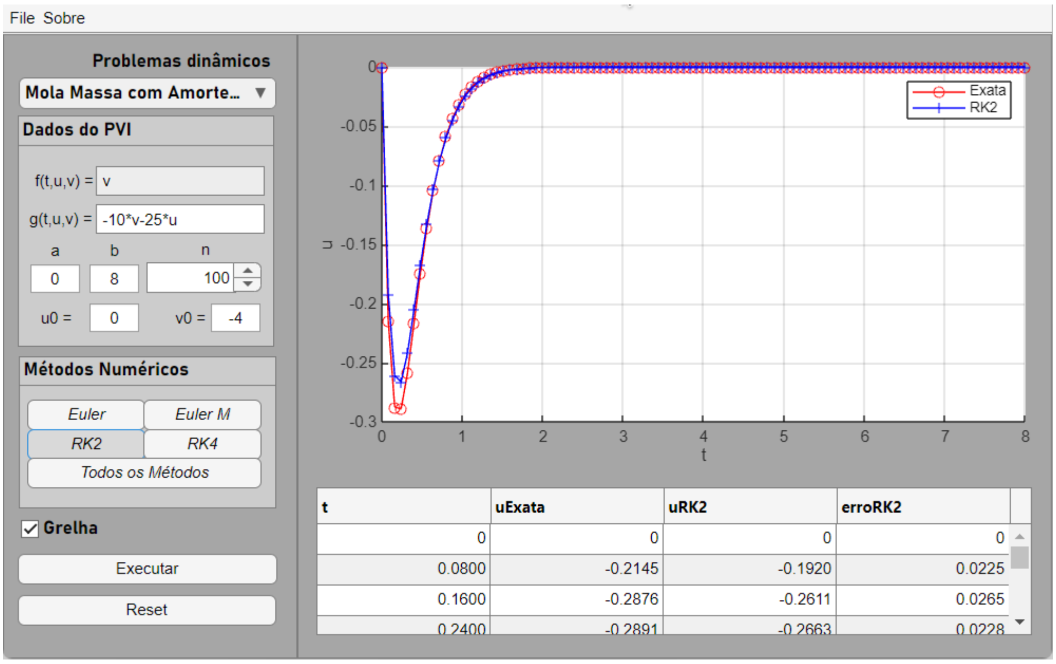


Figura 3.1 Método RK2 mola-massa sem amortecimento

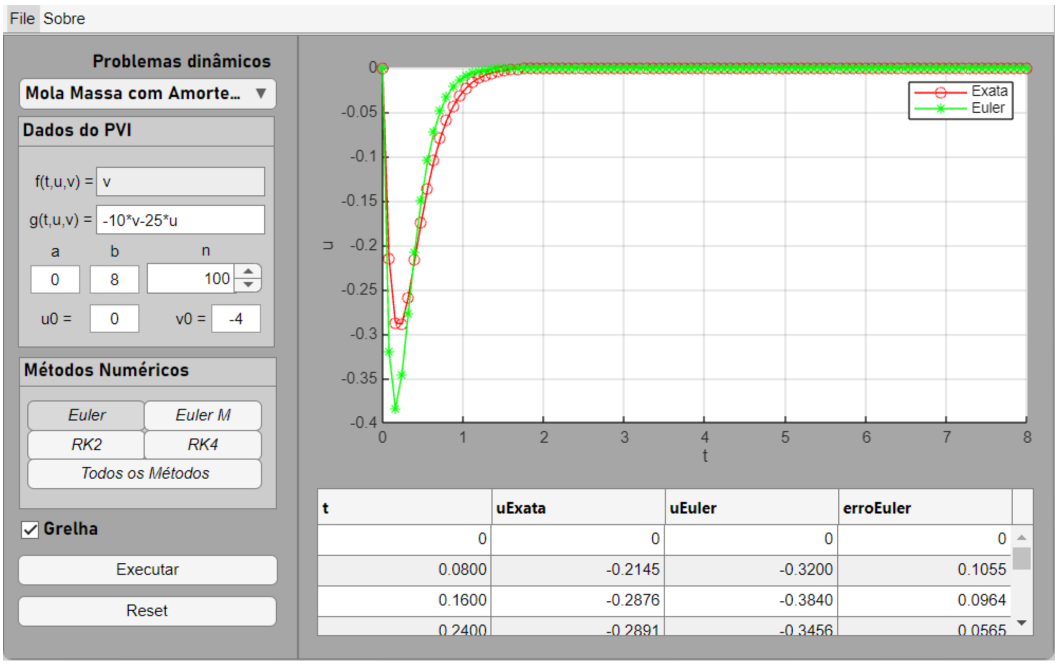


Figura 3.2 Método Euler mola-massa sem amortecimento

3.2 Mola-massa com amortecimento

c) Um peso de 6.4 *lb* provoca, numa mola, um alongamento de 1.28 *ft*. O sistema está sujeito à acção duma força amortecedora, numericamente igual ao dobro da sua velocidade instantânea. Determine a equação do movimento do peso, supondo que ele parte da posição de equilíbrio com uma velocidade dirigida para cima de 4 *ft/s*.

Resolução:

Sabe-se, pela lei de *Hooke*, que $W = ks$

No caso em estudo $k = \frac{6.4}{1.28} \Leftrightarrow k = 5 \ \ lb/ft$. Como $W = mg$, tem-se $m = \frac{6.4}{32} \Leftrightarrow m = 0.2$

A equação que descreve o movimento livre amortecido é

$m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx - b\frac{dx}{dt}$

onde b é uma constante positiva e o sinal "-" indica que as forças amortecedoras actuam na direcção oposta ao movimento.

Então a equação diferencial de movimento de peso é $0.2x'' = -5x - 2x'$

$\Leftrightarrow x'' + 10x' + 25x = 0$ com $x(0) = 0$ e $x'(0) = -4$

A equação diferencial obtida do enunciado é a seguinte:

$$y'' + 10y' + 25y = 0, \qquad y(0) = 0 \; e \; y'(0) = -4 \tag{3.3}$$

O sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -10v - 25u \\ u(0) = 0 \\ v(0) = -4 \end{cases} \tag{3.4}$$

Na aplicação podemos ver o gráfico deste SED (utilizamos os métodos numéricos RK2 e Euler):

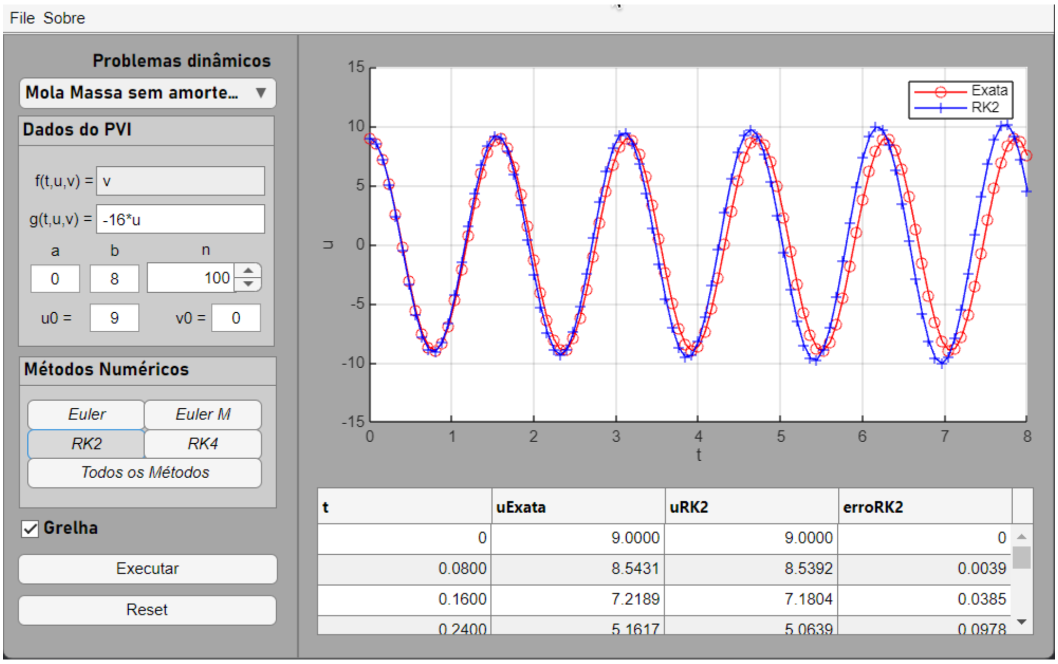


Figura 3.3 Método RK2 mola-massa com amortecimento

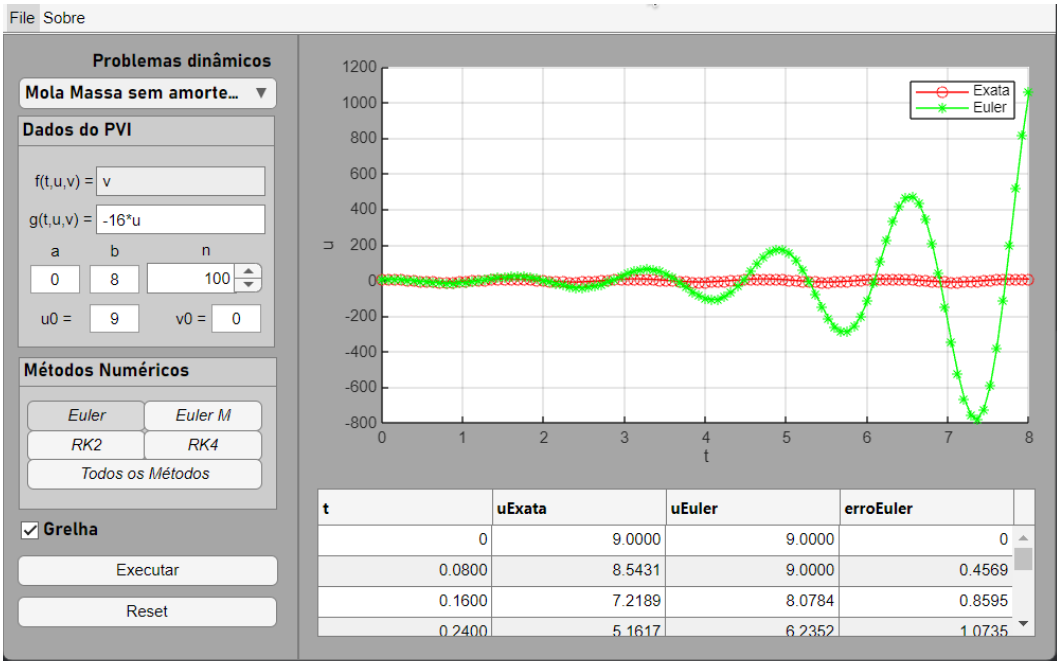


Figura 3.4 Método Euler mola-massa com amortecimento

3.3 Pêndulo

Example 13-A Motion of a Nonlinear Pendulum

The motion of a pendulum of length L subject to damping can be described by the angular displacement of the pendulum from the vertical, θ, as a function of time. (See Fig. 13.1.) If we let m be the mass of the pendulum, g the gravitational constant, and c the damping coefficient (i.e., the damping force is $F = -c\theta'$), then the ODE initial-value problem describing this motion is

$$\theta'' + \frac{c}{mL}\theta' + \frac{g}{L}\sin\theta = 0.$$

The initial conditions give the angular displacement and velocity at time zero; for example, if $\theta(0) = a$ and $\theta'(0) = 0$, the pendulum has an initial displacement, but is released with 0 initial velocity.

Analytic (closed-form) solutions rely on approximating $\sin\theta$; the exact solutions to this approximated system do not have the characteristics of the physical pendulum, namely, a decreasing amplitude and a decreasing period. (See Greenspan, 1974, for further discussion.)

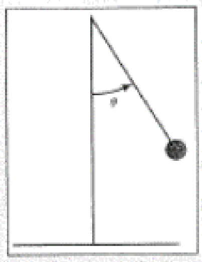


FIGURE 13.1a Simple pendulum.

A equação diferencial obtida do enunciado é a seguinte:

$$y'' + 0.3y' + \sin(y) = 0, \qquad y(0) = \frac{\pi}{2} \text{ e } y'(0) = 0 \tag{3.5}$$

O sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -\sin(u) - 0.3v \\ u(0) = \frac{\pi}{2} \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{3.6}$$

Na aplicação podemos ver o gráfico deste SED (utilizamos os métodos numéricos RK2 e Euler):

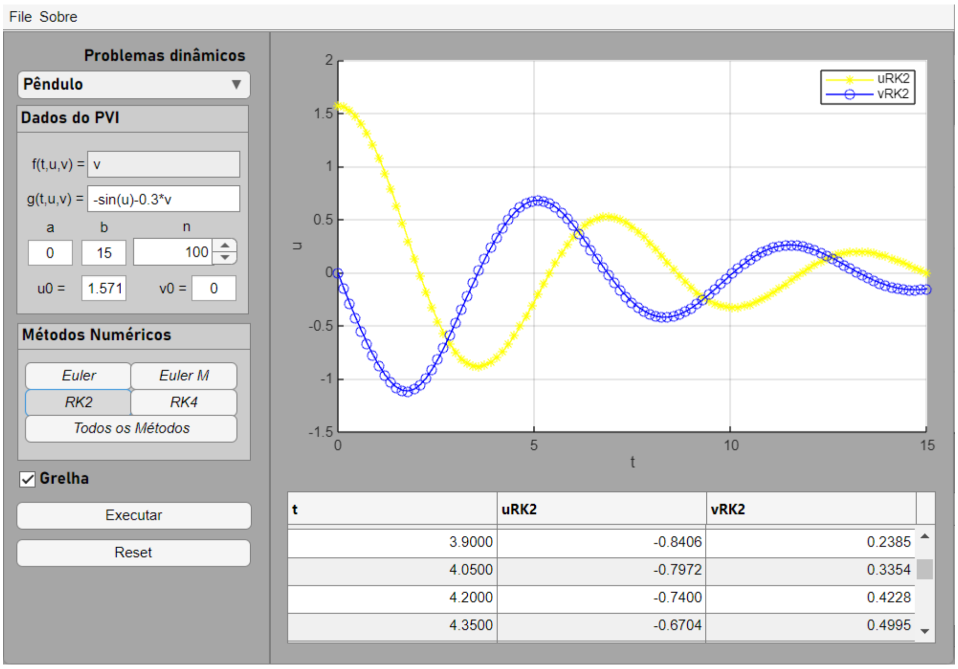


Figura 3.5 Método RK2 pêndulo

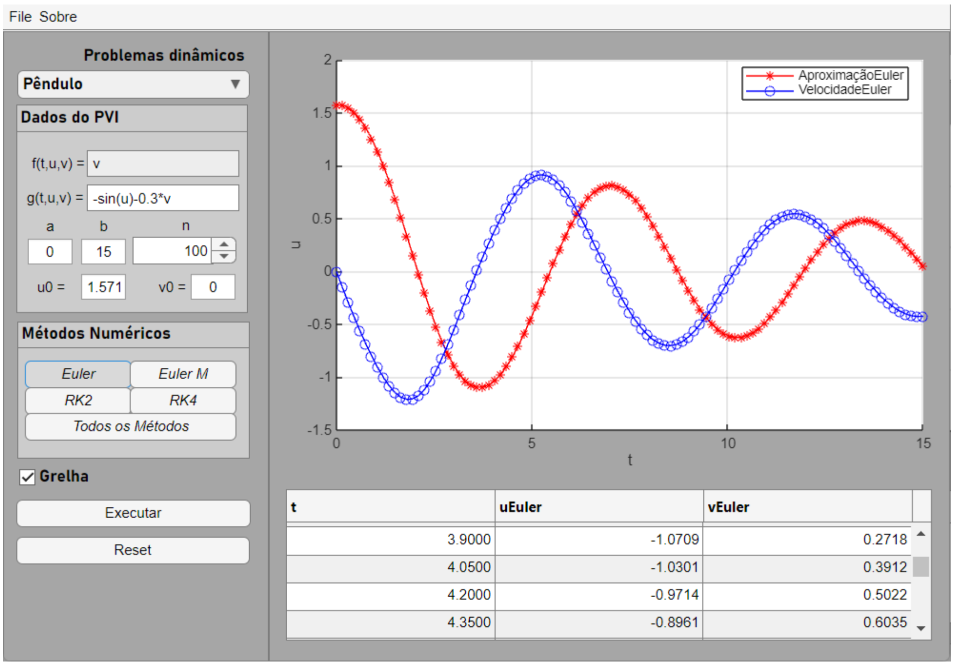


Figura 3.6 Método Euler pêndulo

3.4 Circuito elétrico

- Circuito eléctrico em série

$Lq'' + rq' + \frac{1}{c}q = e(t)$ (*)

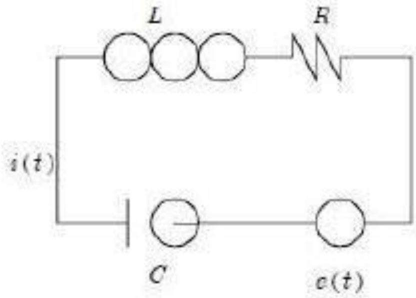
L – Indutância

q – carga

R – Resistência

C – capacidade

$e(t)$ – força electromotriz



Pelas leis de *Kirchoff*, num circuito indutivo-restritivo-capacitivo (L-R-C) série, em que a corrente varia com o tempo, a carga q acumulada no condensador é dada pela equação diferencial linear de 2ª Ordem. (*)

CIRCUITOS ELÉTRICOS

Uma circuito possui um capacitor de $0,5 \times 10^{-1}$ F, um resistor de $25\ \Omega$ e um indutor de $5\ H$, em série. O capacitor se encontra descarregado. No instante $t=0$ conecta-se esse circuito a uma bateria cuja tensão é de $10\ e^{-t/4}$ V, e o circuito é fechado. Determine a carga no capacitor em qualquer inste $t>0$.

A equação diferencial obtida do enunciado é a seguinte:

$$y'' + 5y' + 4y - 2e^{-\frac{t}{4}} = 0, \qquad y(0) = 0\ e\ y'(0) = 0 \tag{3.7}$$

O sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = -5v - 4u + 2e^{-\frac{t}{4}} \\ u(0) = 0 \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{3.8}$$

Na aplicação podemos ver o gráfico deste SED (utilizamos os métodos numéricos RK2 e Euler):

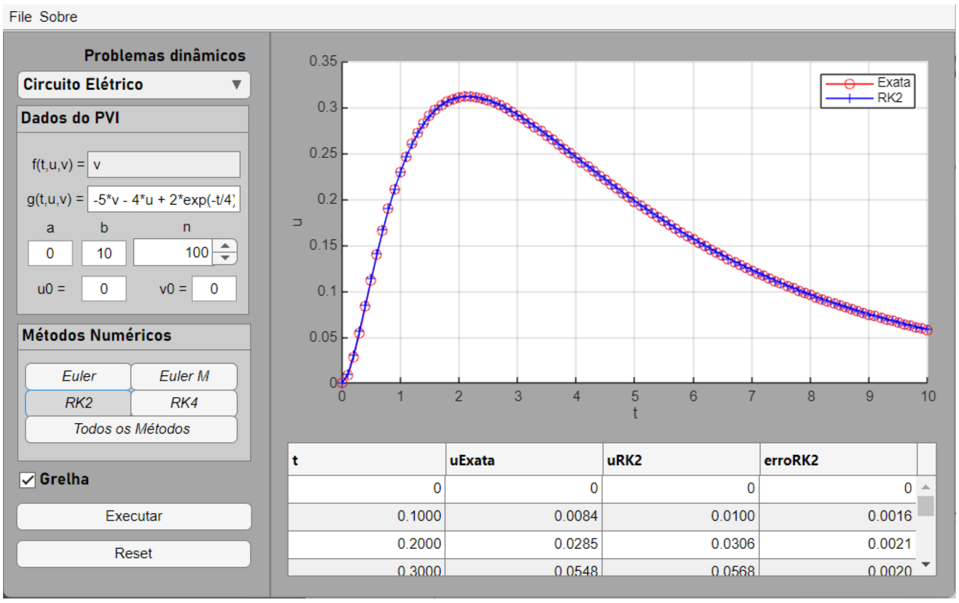


Figura 3.7 Método RK2 circuito elétrico

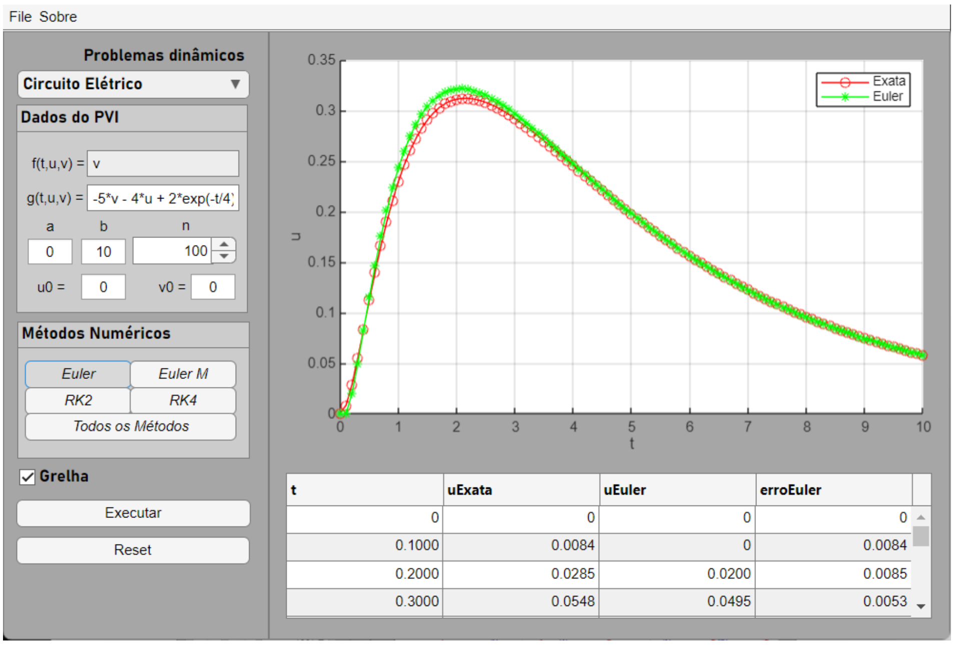


Figura 3.8 Método Euler circuito elétrico

Os SED podem ser aplicados também na engenharia aeroespacial como por exemplo numa missão a Marte, veremos essa aplicação no próximo exercicio. Os veículos pousam na lua e para tal é necessário averiguar como as forças gravitacionais afetarão o sistema de suspensão.

3.5 Aterragem de uma Sondagem Lunar

VEÍCULO DE AT

A NASA está planejando uma missão a Marte. Para economizar dinheiro, os engenheiros decidiram adaptar um dos veículos de pouso na lua para a nova missão. No entanto, eles estão preocupados com a forma como as diferentes forças gravitacionais afetarão o sistema de suspensão que amortece a embarcação quando ela pousa. A aceleração resultante da gravidade na lua é de 1,6 m/seg ^{2}, enquanto em Marte é de 3,7 m/seg ^{2}.

O sistema de suspensão da embarcação pode ser modelado como um sistema de massa amortecida de mola. Nesse caso, a mola está abaixo da sonda lunar, então a mola é levemente comprimida em equilíbrio, conforme mostrado na Figura17.3.11.

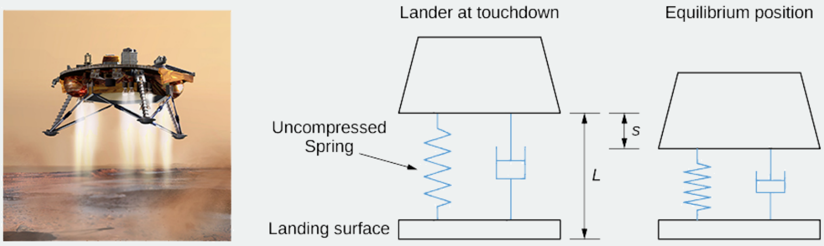


Figura17.3.11: A suspensão da embarcação de pouso pode ser representada como um sistema amortecedor de massa de mola. (crédito "lander": NASA)

Mantemos a convenção de que down é positivo. Apesar da nova orientação, um exame das forças que afetam a sonda mostra que a mesma equação diferencial pode ser usada para modelar a posição da embarcação de pouso em relação ao equilíbrio:

$$mx'' + bx' + kx = 0,$$

onde m está a massa da sonda, b é o coeficiente de amortecimento e k é a constante da mola.

1. A sonda tem uma massa de 15.000 kg e a mola tem 2 m de comprimento quando não comprimida. A sonda foi projetada para comprimir a mola de 0,5 m para alcançar a posição de equilíbrio sob a gravidade lunar. O painel de controle transmite uma força de amortecimento igual a 48.000 vezes a velocidade instantânea da sonda. Configure a equação diferencial que modela o movimento da sonda quando a nave pousa na lua.

(LibreTexts, 2022)

A equação diferencial obtida do enunciado é a seguinte:

$$15000y'' + 48000y' + 76800y = 0, \qquad y(0) = 0.5 \; e \; y'(0) = 0 \tag{3.9}$$

O sistema de equações diferenciais é:

$$\begin{cases} u' = v \\ v' = \dfrac{-48000y' - 76800y}{15000} = -3.2v - 5.12u \\ u(0) = 0.5 \\ v(0) = 0 \end{cases} \tag{3.10}$$

Na aplicação podemos ver o gráfico deste SED (utilizamos os métodos numéricos RK2 e Euler):

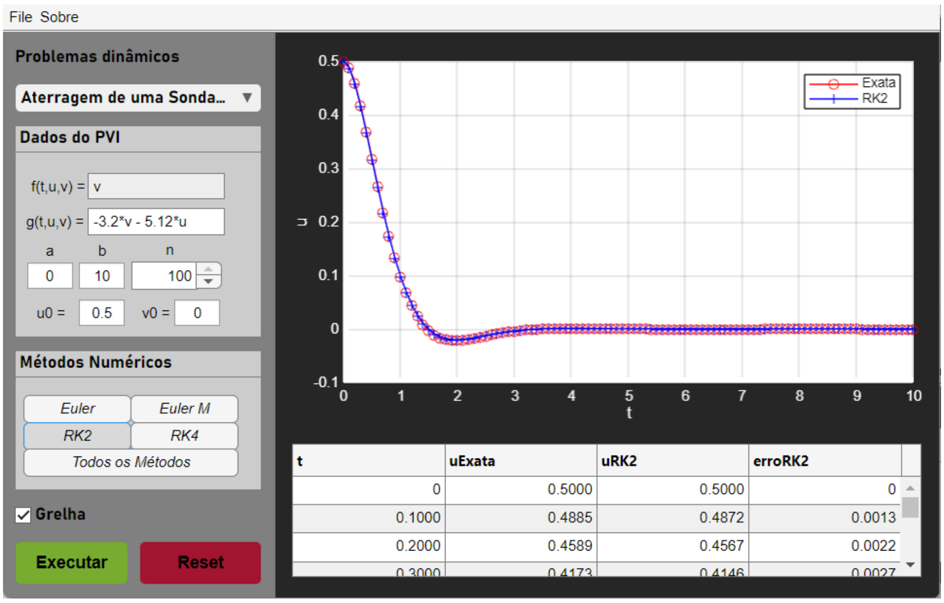


Figura 3.9 Método RK2 aterragem de uma sondagem lunar

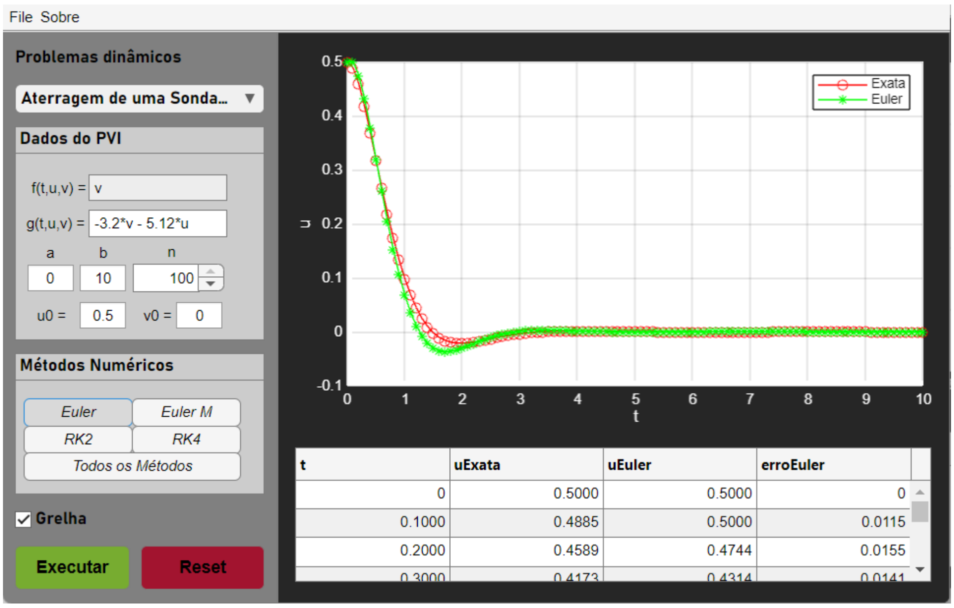


Figura 3.10 Método Euler circuito elétrico

4 CONCLUSÃO

Em síntese, os sistemas de equações diferenciais são cruciais para compreender fenômenos dinâmicos em diversas áreas. No entanto, resolver esses sistemas nem sempre é fácil, especialmente sem soluções analíticas. É aqui que entram os métodos numéricos, fornecendo ferramentas eficazes para obter soluções aproximadas. Estes métodos, como Euler ou Runge-Kutta, permitem simular o comportamento de sistemas complexos e prever o seu desenvolvimento. A combinação de sistemas de equações diferenciais e métodos numéricos possibilita avanços em áreas como física, engenharia, biologia e economia, impulsionando o progresso científico e tecnológico.

5 BIBLIOGRAFIA

LibreTexts. (2022, novembro 1). *17.3: Aplicações de equações diferenciais de segunda ordem*. Global. https://query.libretexts.org/Idioma_Portugues/Livro%3A_Calculus_(OpenStax)/17%3A_Equa%C3%A7%C3%B5es_diferenciais_de_segunda_ordem/17.03%3A_Aplica%C3%A7%C3%B5es_de_equa%C3%A7%C3%B5es_diferenciais_de_segunda_ordem

6 AUTOAVALIAÇÃO E HETEROAVALIAÇÃO

Autoavaliação

Tiago Fernandes Lopes: 4/5 valores

Daniel Duarte Silva: 4/5 valores

Guilherme Alexandre Neves Martins: 4/5 valores

Heteroavaliação

Tiago Fernandes Lopes:

- Daniel Duarte Silva: 4/5 valores
- Guilherme Alexandre Neves Martins: 4/5 valores

Daniel Duarte Silva:

- Tiago Fernandes Lopes: 4/5 valores
- Guilherme Alexandre Neves Martins: 4/5 valores

Guilherme Alexandre Neves Martin:

- Daniel Duarte Silva: 5/5 valores
- Tiago Fernandes Lopes: 5/5 valores

Instituto Superior
de Engenharia
Politécnico de Coimbra