Instituto Superior
de Engenharia
Politécnico de Coimbra

DEPARTAMENTO DE / DEPARTMENT OF
INFORMÁTICA E SISTEMAS

Métodos Numéricos para EDO e PVI

Autor / Author

Tiago Fernandes Lopes – a2023144639,

Engenharia Informática

Autor / Author

Daniel Duarte Silva – a2023144551,

Engenharia Informática

Autor / Author

Guilherme Alexandre Neves Martins – a2023144573,

Engenharia Informática

Coimbra, abril de 2024

INSTITUTO POLITÉCNICO DE
COIMBRA

INSTITUTO SUPERIOR

ÍNDICE

1 INTRODUÇÃO

Este relatório tem como objetivo explicar o que são equações diferenciais, os diferentes tipos de equações diferenciais e métodos numéricos utilizados para resolver as equações. Ao longo deste relatório são dados exemplos que demonstram os diferentes tipos de equações diferenciais bem como as fórmulas e algoritmos utilizados nos métodos numéricos. Para além de exemplos gerais há resoluções de exercícios onde são testados os métodos numéricos através de uma aplicação em MATLAB.

1.1 Equação diferencial: definição e propriedades

A equação diferencial é uma equação com derivadas de uma ou mais incógnitas em relação a uma ou mais incógnitas independentes.

Exemplos:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{1.1}$$

$$y'' - 3y' + y = 0 \tag{1.2}$$

As equações diferenciais são classificadas através das suas propriedades:

- A quantidade de variáveis independentes da função incógnita;
- O número de funções incógnitas;
- A estrutura da equação;
- A ordem da equação.

A quantidade de variáveis independentes define se a equação diferencial é ordinária (EDO) se apenas tiver uma variável independente, ou parcial (EDP) se houver duas ou mais variáveis independentes. (Yartey & Ribeiro, sem data)

Uma EDO de 1ª ordem pode ter 3 tipos:

- Equação de variáveis separáveis, que tem a seguinte estrutura:

$$y' = h(y) \times g(x) \tag{1.3}$$

- Equação de variáveis separadas, com a seguinte estrutura:

$$f(y) \times y' = g(x) \tag{1.4}$$

- Equação linear, com a seguinte estrutura:

$$y' + p(x)\times y = q(x) \tag{1.5}$$

O seguinte exemplo é uma EDP, pois a variável dependente é $v = v(s, t)$ com relação a mais de uma variável independente, s e t. (Vilhena, sem data)

$$\frac{\partial v}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial t} = v \tag{1.6}$$

Se houver apenas uma função incógnita então temos apenas uma equação diferencial que pode ser ordinária ou parcial, mas se houver duas ou mais incógnitas temos um sistema de equações diferenciais.

A ordem de uma equação diferencial é a maior das ordens das derivadas que nela aparecem.

Exemplos:

- A equação (2.1) é de 1ª ordem;
- A equação (2.2) é uma equação de 2ª ordem.

A estrutura da equação diferencial permite-nos classificar a equação como linear ou não linear. Uma equação diferencial linear de ordem n terá a seguinte estrutura:

$$a_n y^{(n)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(t) \tag{1.7}$$

Caso não tenha essa estrutura é considerada não linear. As equações diferenciais lineares podem ser completas ou homogéneas. São homogéneas quando $f(t) = 0$, caso contrário são completas.

1.2 Definição de PVI

O Problema de Valor Inicial (PVI) é composto por uma equação diferencial e uma condição. A condição é um valor da função em um ponto inicial, denotado como t_0.

Exemplo de um PVI:

$$PVI: \{y^{'} + ay = b\; y(t_0) = y_0 \tag{1.8}$$

2 MÉTODOS NUMÉRICOS PARA A RESOLUÇÃO DE UM PVI

2.1 Método de Euler

O Método de Euler é um procedimento numérico de primeira ordem amplamente utilizado para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) quando um valor inicial é especificado. Este método serve como uma das abordagens mais básicas e fundamentais para a integração numérica de equações diferenciais, oferecendo uma introdução acessível aos conceitos de soluções numéricas.

2.1.1 Fórmulas

A fórmula do Método de Euler para resolver uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem da forma:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.1}$$

com uma condição inicial dada por $y(t_0) = y_0$ é dada por:

$$y_n + 1 = y_n + h \cdot f(t_n, y_n) \tag{2.2}$$

2.1.2 Algoritmo/Função

```
function [t, y] = NEuler(f, a, b, n, y0)
    % NEULER Método de Euler para resolução numérica de EDO/PVI
    %   y' = f(t, y), t = [a, b], y(a) = y0
```

```
    %   y(i+1) = y(i) + h * f(t(i), y(i)), i = 0, 1, 2, ..., n
    % INPUT:
    %   f - função da EDO y' = f(t, y)
    %   [a, b] - intervalo de valores da variável independente t
    %   n - número de subintervalos ou iterações do método
    %   y0 - aproximação inicial y(a) = y0
    % OUTPUT:
    %   t - vetor do intervalo [a, b] discretizado
    %   y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
    h = (b - a) / n;
    t = a:h:b;
    y = zeros(1, n + 1);
    y(1) = y0;
    for i = 1:n
        y(i + 1) = y(i) + h * f(t(i), y(i));
    end
end
```

2.2 Método de Euler Melhorado ou Modificado

O Método de Euler Melhorado é uma técnica numérica usada para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) de primeira ordem. Ele é uma extensão do Método de Euler clássico, desenvolvido para melhorar a precisão das soluções.

A ideia principal do Método de Euler Melhorado é utilizar uma estimativa mais precisa para o valor da derivada da função desconhecida $y(t)$ em cada passo de iteração.

2.2.1 Fórmulas

Para resolver uma equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem da forma:

$$y'(t) = f(t, y(t)) \tag{2.3}$$

com uma condição inicial dada por $y(t_0) = y_0$, a fórmula do Método de Euler Melhorado é dada por:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}(f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_i + f(t_i, y_i) \cdot h)) \tag{2.4}$$

2.2.2 Algoritmo/Função

```
function [t, y] = NEulerMelhorado(f, a, b, n, y0)
    % NEulerMelhorado Método de Euler Melhorado para resolução numérica de EDO/PVI
    %   y' = f(t, y), t = [a, b], y(a) = y0
    %   y(i+1) = y(i) + h * ((f(t(i), y(i)) + f(t(i+1), y(i) + k1 * h)) / 2)
    % INPUT:
    %   f - função da EDO y' = f(t, y)
    %   [a, b] - intervalo de valores da variável independente t
    %   n - número de subintervalos ou iterações do método
    %   y0 - aproximação inicial y(a) = y0
    % OUTPUT:
    %   t - vetor do intervalo [a, b] discretizado
    %   y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)

    h = (b - a) / n;
    t = a:h:b;
    y = zeros(1, n + 1);
    y(1) = y0;
    for i = 1:n
        k1 = f(t(i), y(i));
        k2 = f(t(i+1), y(i) + k1 * h);
        y(i+1) = y(i) + (h / 2) * (k1 + k2);
    end
end
```

2.3 Método de RK2

O Método de Runge-Kutta de segunda ordem, frequentemente abreviado como RK2, é um procedimento numérico mais sofisticado e preciso para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) do que o Método de Euler. Este método proporciona uma aproximação melhorada ao considerar não apenas a inclinação no ponto inicial, mas também em um ponto intermédio entre os passos, o que resulta em uma estimativa mais precisa da linha tangente e, portanto, da solução.

2.3.1 Fórmulas

A fórmula do RK2 pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned} k1 &= hf(t_i, y_i) \\ k2 &= hf(t_{i+1}, y_i + k1) \\ y_{i+1} &= y_i + \frac{k1 + k2}{2} \end{aligned} \tag{2.5}$$

2.3.2 Algoritmo/Função

```
function [t,y] = NRK2(f,a,b,n,y0)
    %NRK2 Método de Runge-Kutta de ordem 2 para resolução numérica de EDO/PVI
    %   y'=f(t,y), t=[a,b], y(a)=y0
    %   y(i+1)=y(i)+1/2(k1+k2)
    %INPUT:
    %   f - função da EDO y'=f(t,y)
    %   [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
    %   n - número de subintervalos ou iterações do método
    %   y0 - aproximação inicial y(a)=y0
    %OUTPUT:
    %   t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
    %   y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)


    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    y = zeros(1,n+1);
    y(1) = y0;
    for i = 1:n
       k1 = h*f(t(i),y(i));
       k2 = h*f(t(i+1),y(i)+k1);
       y(i+1) = y(i)+(k1+k2)/2;
    end
```

```
end
```

2.4 Método de RK4

O Método de Runge-Kutta de quarta ordem, comumente referido como RK4, é um dos métodos numéricos mais utilizados para resolver equações diferenciais ordinárias (EDOs) devido à sua eficácia e precisão. Este método proporciona uma excelente precisão com um aumento moderado na complexidade computacional, tornando-o ideal para uma ampla gama de aplicações científicas e de engenharia.

2.4.1 Fórmulas

A fórmula do RK4 pode ser escrita da seguinte forma:

$$
\begin{gathered}
k1 = h \cdot f(t_i, y_i) \\
k2 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k1}{2}\right) \\
k3 = h \cdot f\left(t_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{k2}{2}\right) \\
k4 = h \cdot f(t_i + h, y_i + k3) \\
y_{i+1} = y_i + \frac{h}{6}(k1 + 2k2 + 2k3 + k4)
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

2.4.2 Algoritmo/Função

```
function [t,y] = NRK4(f,a,b,n,y0)
    %NRK4 Método de Runge-Kutta de ordem 4 para resolução numérica de EDO/PVI
    %y'=f(t,y), t=[a,b], y(a)=y0
    %  y(i+1)=y(i)+1/6(k1+2k2+2k3+k4), i=0,1,…,n−1
    %INPUT:
    %   f - função da EDO y'=f(t,y)
    %   [a,b] - intervalo de valores da variável independente t
    %   n - número de subintervalos ou iterações do método
    %   y0 - aproximação inicial y(a)=y0
    %OUTPUT:
    %   t - vetor do intervalo [a,b] discretizado
    %   y - vetor das soluções aproximadas do PVI em cada um dos t(i)
    h = (b-a)/n;
    t = a:h:b;
    y = zeros(1,n+1);
```

```
    y(1) = y0;

    for i=1:n
        k1 = h*f(t(i),y(i));
        k2 = h*f(t(i) + (h/2) , y(i) + (k1/2));
        k3 = h*f(t(i) + (h/2) , y(i) + (k2/2));
        k4 = h*f(t(i + 1) , y(i) + k3);
        y(i+1) = y(i) + (k1 + 2*k2 + 2*k3 + k4)/6;
    end
end
```

2.5 Função ODE45 do MATLAB

A função ode45 é uma ferramenta muito utilizada no MATLAB para resolver numericamente equações diferenciais ordinárias (EDOs). Ela é especialmente útil para problemas que exigem uma integração precisa ao longo do tempo. O ode45 baseia-se no método de Dormand-Prince, que é um solucionador Runge-Kutta de quarta e quinta ordem.

Aqui estão algumas características importantes do ode45:

- Método Adaptativo: O ode45 ajusta automaticamente o tamanho do passo de integração. Ele usa uma fórmula de quarta ordem para estimar a solução e uma de quinta ordem para estimar o erro. A diferença entre essas duas estimativas fornece uma medida da precisão da solução em cada passo.

- Eficiência: O algoritmo é eficiente para a maioria das EDOs não rígidas, ou seja, para problemas onde a solução não apresenta variações abruptas que exigiram passos de tempo extremamente pequenos para uma integração precisa.

- Facilidade de Uso: A função é simples de usar, requerendo apenas a função da derivada, as condições iniciais e o intervalo de integração. O MATLAB cuida do restante, incluindo a seleção do tamanho do passo e a estimativa de erro.

Essas características fazem do ode45 uma ferramenta poderosa e conveniente para resolver uma ampla gama de problemas de EDOs de forma eficiente e precisa.

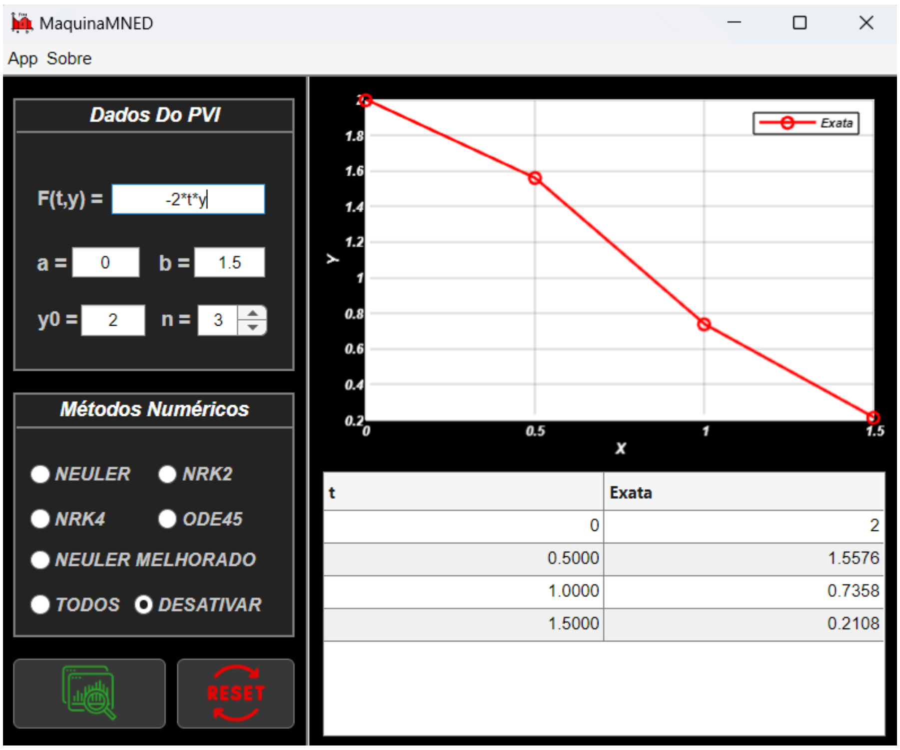
3 Exemplos de aplicação e teste dos métodos

3.1 Exercício 3 do Teste Farol

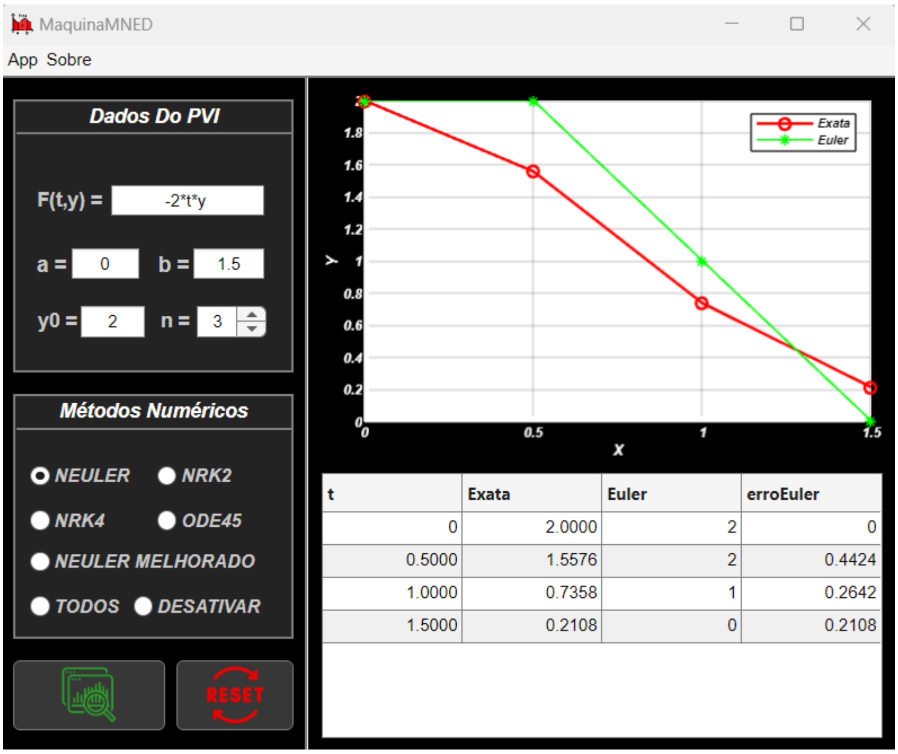
3.1.1 PVI - Equação Diferencial de 1ª ordem e Condições Iniciais

$$\begin{cases} y' = -2 \times t \times y \\ y(0) = 2 \end{cases} \tag{3.1}$$

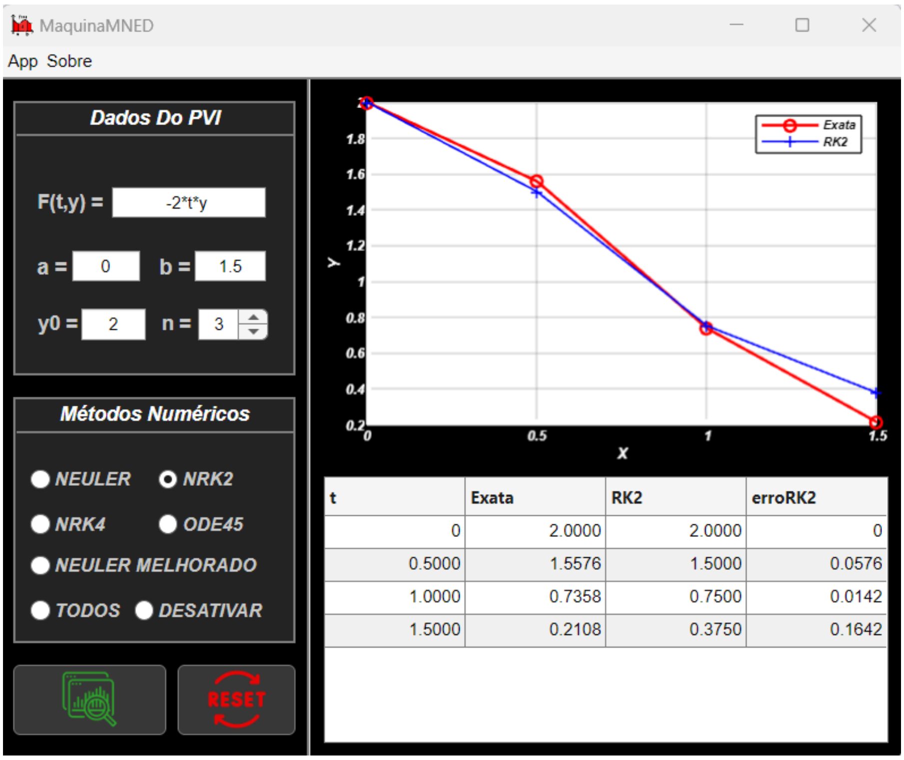
3.1.2 Exemplos de output - App com gráfico e tabela



Método de Euler



Método RK2



Todos os métodos:

3.2 Problemas de aplicação do livro

3.2.1 Modelação matemática do problema

Exercicio 1:

$$v' = 32 - 0.125 \times v^2 \tag{3.2}$$

Utilizando o WolframAlpha:

$$v(t) = \frac{-35.7771 + 35.7771 \times e^{1.78885 \times t}}{1 + e^{1.78885 \times t}}$$

Exercicio 2:

$$A' = A \times 2.128 - 0.0432 A^2 \tag{3.3}$$

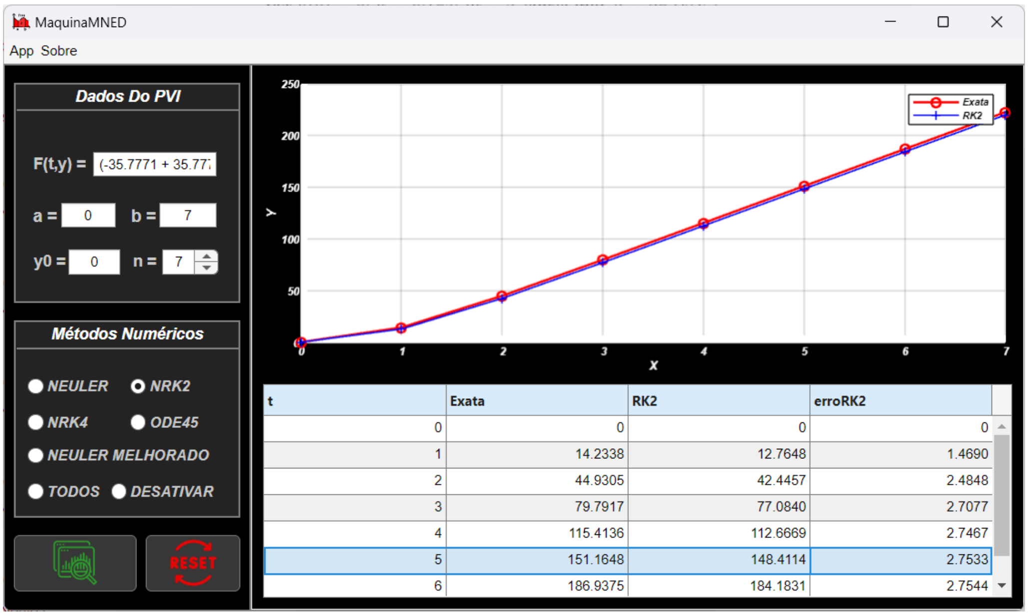
Utilizando o WolframAlpha:

$$A(t) = \frac{49.2593 \times e^{2.128 \times t}}{204.247 + e^{2.128 \times t}}$$

3.2.2 Resolução através da App desenvolvida

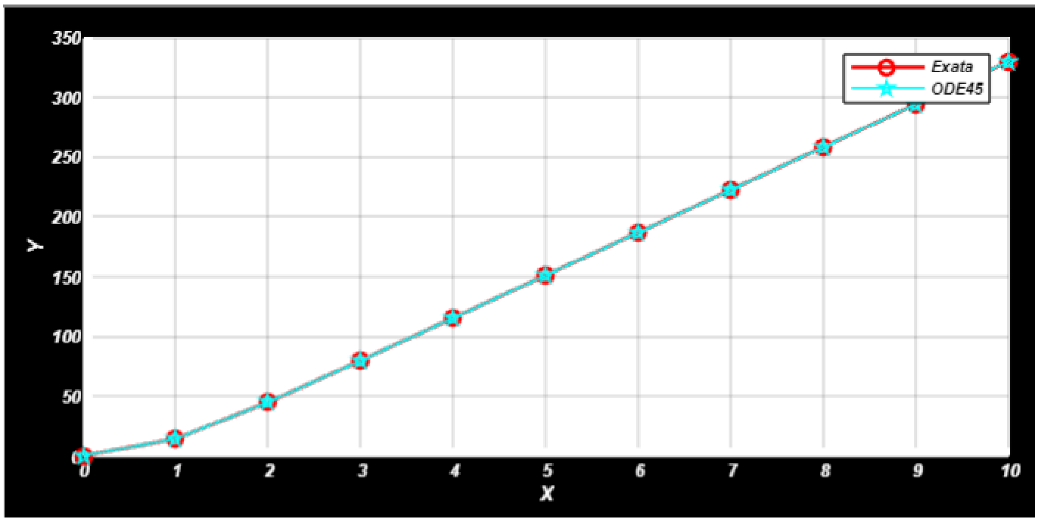
Exercicio 1:

a)

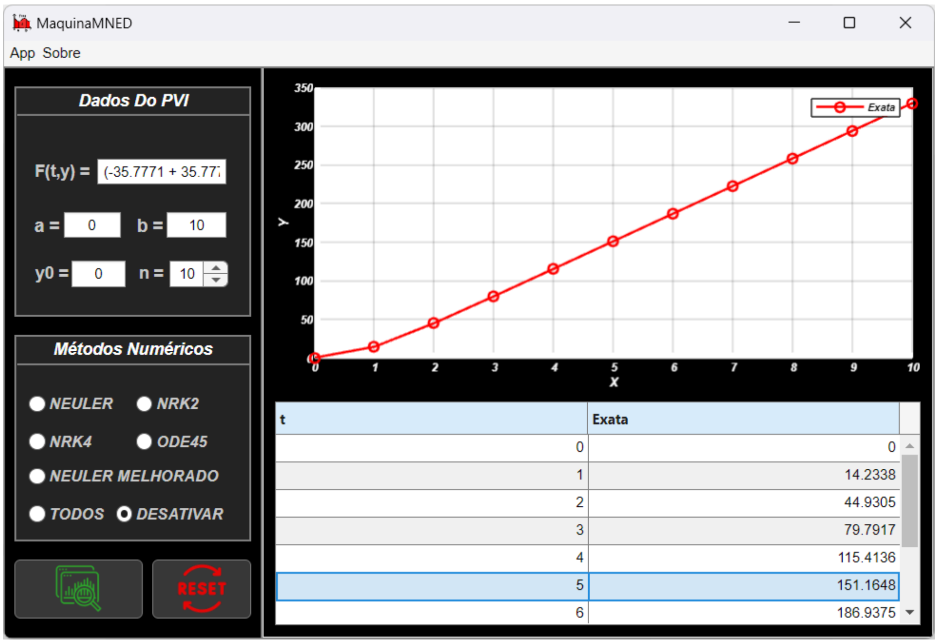


Valor aproximado utilizando o método RK2: $148.4114,\ erro\ =\ 2.7533$

b) Gráfico da função utilizando a função ode45



c) Valor exato de $v(5)$



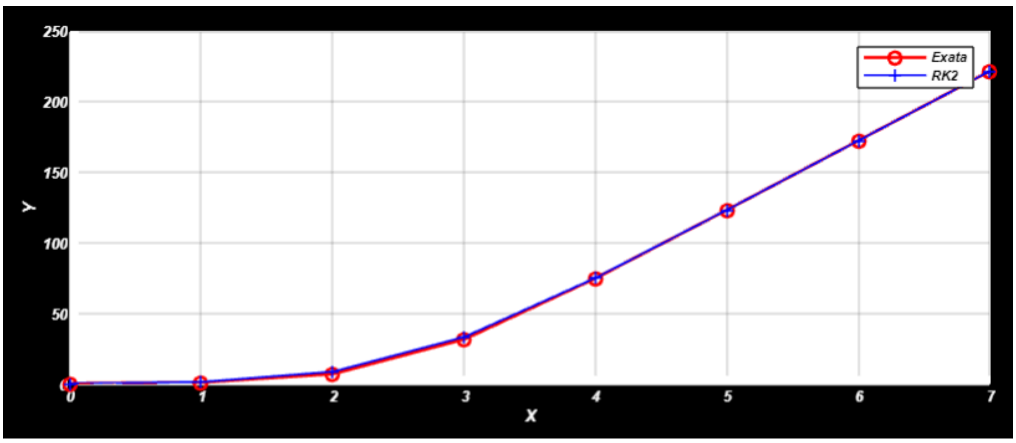
$$v(5) = 151.1648$$

Exercicio 2:

a) Tabela

t(dias)	1	2	3	4	5
A(observado)	2.78	13.53	36.30	47.50	49.40
A(aproximado)	1.0637	6.9915	31.6288	74.9669	123.4036

b) Gráfico



c) Valores exatos de $A(1),\ A(2),\ A(3),\ A(4),\ A(5)$

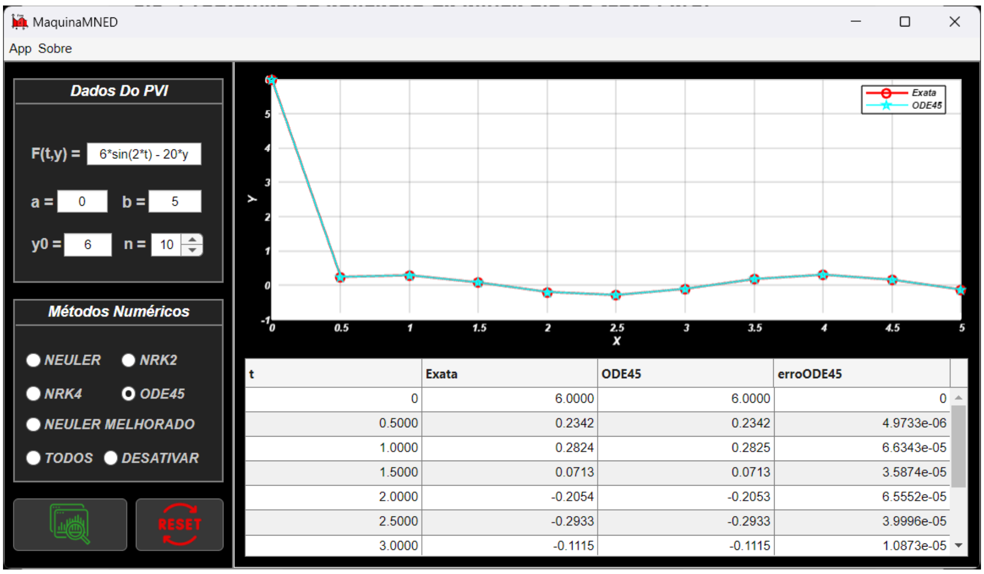
1	1.0597
2	6.9932
3	31.6304
4	74.9629
5	123.4036

3.3 Problemas de aplicação da alínea 2.b do teste Farol

3.3.1 Modelação matemática do problema

$$e = R_i + l\frac{Di}{Dt} \Leftrightarrow 3sin(2t) = 0.5\frac{Di}{Dt} + 10i \quad (3.4)$$
$$\Leftrightarrow y' + 20y = 6sin(2t) \Leftrightarrow y' = 6sin(2t) - 20y\, ,\ y(0) = 6$$

3.3.2 Resolução através da App desenvolvida



t	Exata	ODE45	erroODE45
0	6.0000	6.0000	0
0.5000	0.2342	0.2342	4.9733e-06
1.0000	0.2824	0.2825	6.6343e-05
1.5000	0.0713	0.0713	3.5874e-05
2.0000	-0.2054	-0.2053	6.5552e-05
2.5000	-0.2933	-0.2933	3.9996e-05
3.0000	-0.1115	-0.1115	1.0873e-05

4 Conclusão

Em síntese, os Problemas de Valor Inicial (PVI) constituem desafios matemáticos frequentes em diversas áreas, desde a física à economia. Para lidar com estes problemas, os Métodos Numéricos oferecem soluções práticas e fiáveis. Permitem-nos obter respostas aproximadas de forma eficiente, sendo essenciais para resolver questões complexas do mundo real. Ao recorrer a estes métodos, conseguimos analisar os problemas em pormenor e tomar decisões fundamentadas. Em última análise, estudar e aplicar estes métodos é crucial para o progresso em áreas como a ciência e a engenharia, impulsionando a inovação e o avanço tecnológico.

5 Bibliografia

Vilhena, M. L. M. (sem data). *Uma Breve Introdução as Equações Diferenciais: Alguns Tipos de Equações Diferenciais Ordinárias*. UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARÁ. https://matematica.icen.ufpa.br/images/tccs/TCC_FACMAT_17.pdf

Yartey, J. N. A., & Ribeiro, S. S. (sem data). Equações diferenciais. UNIVERSIDADE FEDERAL DA BAHIA. https://educapes.capes.gov.br/retrieve/166324/eBook_Equacoes_Diferenciais-Licenciatura_Matematica_UFBA.pdf

6 Autoavaliação e heteroavaliação

Autoavaliação

Tiago Fernandes Lopes: 4/5 valores

Daniel Duarte Silva: 4/5 valores

Guilherme Alexandre Neves Martins: 3/5 valores

Heteroavaliação

Tiago Fernandes Lopes:

- Daniel Duarte Silva: 4/5 valores
- Guilherme Alexandre Neves Martins: 4/5 valores

Daniel Duarte Silva:

- Tiago Fernandes Lopes: 4/5 valores
- Guilherme Alexandre Neves Martins: 4/5 valores

Guilherme Alexandre Neves Martin:

- Daniel Duarte Silva: 5/5 valores
- Tiago Fernandes Lopes: 5/5 valores

Instituto Superior
de Engenharia
Politécnico de Coimbra