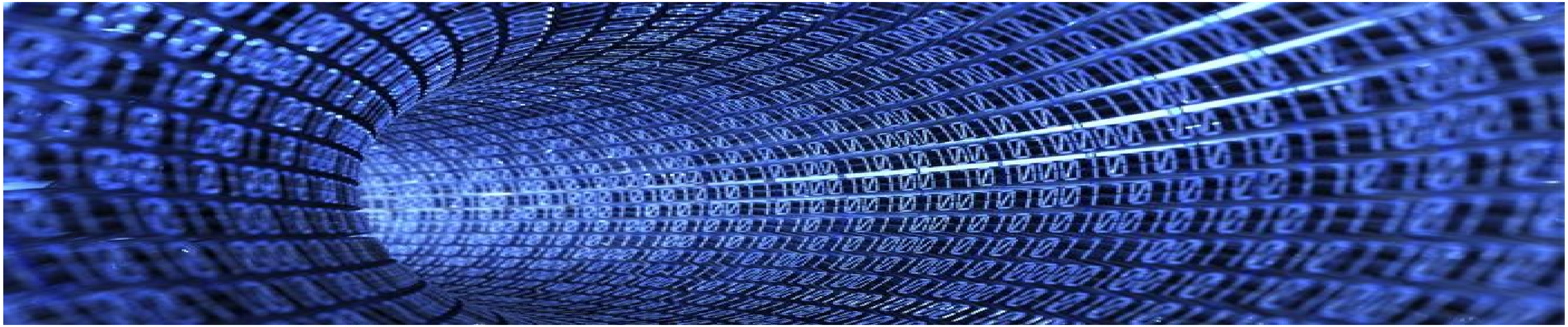
Curso de Engenharia de Computação
Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lógica de predicados



Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia – Escola de Engenharia Mauá
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza

Lógica de predicados

- **Quantificadores e predicados**
  - Principal **limitação** da **lógica proposicional**: **poder** de **expressão** limitado – **não** é **possível tratar** com **sentenças** tais como "*para todo x, x>0*", por exemplo;
  - Assim, uma extensão natural foi a **inclusão** de **variáveis**, **constantes**, **quantificadores** e **predicados**:
    - **Quantificador**: é uma **frase** como "para todo" e "existe" que **indica** quantos **objetos possuem** uma **certa propriedade**:
      - **Quantificador universal**
        - Representado pelo **símbolo** $\forall$;
        - Lê-se "para todo" ou "para cada" ou "para qualquer".
      - **Quantificador existencial**
        - Representado pelo **símbolo** $\exists$;
        - Lê-se "existe um" ou "pelo menos um" ou "para algum".

Lógica de predicados

- **Quantificadores e predicados**
  - **Predicado**: representa uma certa **propriedade** de um ou mais objetos;
  - Pode ser **quantificado** ou **não**;
  - **Notação genérica**: $P(x)$;
  - **Exemplos**
    - Se $P(x)$ é $(x>0)$, a expressão $(\forall x)(x>0)$ representa "para todo x que seja maior que zero";
    - Se $P(x)$ é "o livro x possui capa vermelha" então $(\forall x)P(x)$ representa "todos os livros possuem capa vermelha";
    - Se $P(x)$ é "o livro x possui capa vermelha" então $(\exists x)P(x)$ representa "pelo menos um livro possui capa vermelha";

O valor verdade de um predicado P(x) depende do **domínio de interpretação** – a coleção de objetos a partir do qual se escolhe x

Lógica de predicados

- **Interpretação**
  - A **interpretação** de uma **expressão** envolvendo **predicados** envolve:
    - Uma **coleção** de **objetos**, denominado **domínio da interpretação**, que deve **incluir** pelo **menos um objeto**;
    - Uma **atribuição** da **propriedade** dos **objetos** no **domínio** para **cada predicado** na **expressão**:
      - Para cada $P(x)$, dependendo do domínio de interpretação de x, calcular seu valor verdade (`V` ou `F`).
    - Uma **atribuição** de um **objeto particular** no **domínio** para cada **símbolo constante** na expressão:
      - Constantes são interpretados como algum objeto particular.

Lógica de predicados

- **Interpretação**
  - **Exemplo**
    - Se $Q(x,y)$ é a propriedade $x<y$ e se a é uma constante à qual foi atribuído o objeto 7 de um **domínio** de **interpretação**, então:
      - $(\forall x)(Q(x,a))$ é **falso** se o **domínio** de **interpretação** for $\mathbb{N}$;
      - $(\exists x)(Q(x,a))$ é **verdadeiro** se o **domínio** de **interpretação** for $\mathbb{N}$.

Lógica de predicados

- **Fórmulas bem formadas (fbf)**
  - Segue o mesmo formulação da **lógica proposicional**: as **expressões** podem ser obtidas da **combinação** de **predicados**, **quantificadores**, **símbolos** de **agrupamento** (parênteses ou colchetes);
  - Os símbolos de agrupamento ajudam a identificar o **escopo** de um **quantificador**:
    - Em $(\forall x)(P(x) \to Q(x,y))$, o escopo do quantificador $(\forall x)$ é $P(x) \to Q(x,y)$;
    - Em $(\forall x)((\exists y)[P(x) \land Q(x,y)] \to R(x))$, o escopo de $(\exists y)$ é $P(x) \land Q(x,y)$;
  - **Variável livre** é uma variável que **ocorre** em algum **lugar** de uma **fbf**, **não sendo nem** a **variável** de um **quantificador** e **nem** faz **parte** do **escopo** de um **quantificador** que a **envolva**;
  - **Exemplo**
    - Em $(\forall x)[Q(x,y) \to (\exists y)R(x,y)]$, y é variável livre. Por quê?

Lógica de predicados

- **Tradução**
  - Muitas **sentenças** em **português** podem ser **expressas** como **fbfs** contendo **predicados** e **quantificadores**;
  - Por **exemplo**, a **sentença** "todo papagaio é feio" está, na verdade, dizendo que qualquer coisa que seja um papagaio é feia. Fazendo $P(x)$ denotar "x é um papagaio" e $U(x)$ denotar "x é feio" tem-se que a sentença pode ser simbolizada como $(\forall x)[P(x) \rightarrow U(x)]$;
  - Agora, a sentença "existe um papagaio feio" é denotado como $(\exists x)[P(x) \wedge U(x)]$;
  - É importante saber o porque destas duas representações …

Lógica de predicados

- **Teste seus conhecimentos**
  1) Considerando o domínio de interpretação como $\mathbb{Z}$, qual o valor-verdade das fbfs a seguir?

$$\boxed{(\forall x)(\exists y)(x + y = x)}$$

$$\boxed{(\exists x)(\exists y)(x^2 = y)}$$

$$\boxed{(\forall x)[x < 0 \rightarrow (\exists y)(y > 0 \wedge x + y = 0)]}$$

Lógica de predicados

- **Validade**
  - Uma **fbf proposicional sempre** tem **valor-verdade** (depende dos valores-verdade atribuídos aos símbolos), enquanto que uma **fbf predicativa pode não ter valor-verdade** (depende da interpretação);
  - Escolher uma **interpretação** para uma **fbf predicativa** é análogo a **escolher valores-verdade** para **fbf proposicionais**, **exceto** por haver um **número infinito** de **interpretações possíveis** para as **fbfs predicativas** e apenas **2^n linhas** para **fbfs proposicionais** com **n símbolos proposicionais**;
  - Uma **tautologia** é uma **fbf proposicional** que é **verdadeira** em todas as **linhas** da **tabela-verdade**;
  - O **análogo** à **tautologia** para as **fbfs predicativas** é a <u>**validade**</u> - uma **fbf predicativa** é **válida** se for **verdadeira** para **qualquer interpretação possível**;
  - Como o número de **interpretações** é **infinito**, **não há** um **algoritmo** em **lógica** de **predicados** para se **determinar** se uma **fbf** é **válida**.

Lógica de predicados

- **Validade**
  - **Comparação com lógica proposicional**

	fbfs proposicionais	**fbfs predicativas**
Valor-verdade	Verdadeira ou falsa, de acordo com os valores atribuídos aos símbolos proposicionais.	Verdadeira, falsa ou sem valor-verdade, dependendo da interpretação.
Verdade intrínseca	Tautologia – verdadeira para todas as atribuições de valores-verdade.	fbf válida – verdadeira para todas as interpretações.
Metodologia	Algoritmo (tabela-verdade) para determinar se uma fbf é ou não uma tautologia.	Não há algoritmo para determinar se uma fbf é válida ou não.

Lógica de predicados

- **Validade**
  - **Exemplos**
  - $(\forall x)P(x) \rightarrow (\exists x)P(x)$ é válida, pois se é verdade que o predicado é verdadeiro para todo x então é também para pelo menos um;
  - $(\forall x)P(x) \rightarrow P(a)$ é válida, pois se é verdade que o predicado é verdadeiro para todo x então é também para um caso particular;
  - $P(x) \rightarrow [Q(x) \rightarrow P(x)]$ é válida, mesmo contendo variável livre;
  - $(\exists x)P(x) \rightarrow (\forall x)P(x)$ não é válida, pois não se pode generalizar que se o predicado é válido para pelo menos um valor ele então será para todos.

Lógica de predicados

- **Teste seus conhecimentos**
  1) Decidir se cada uma das fbfs a seguir é válida ou inválida, justificando.

$$\boxed{(\exists x)A(x) \leftrightarrow \neg((\forall x)\neg A(x))}$$

$$\boxed{(\forall x)A(x) \leftrightarrow \neg((\exists x)(\neg A(x)))}$$

$$\boxed{(\forall x)(P(x) \vee Q(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)}$$

Lógica de predicados

- **Definição da lógica de predicados**
  - Os a**rgumentos** da **lógica** de **predicados** são construídos a partir de **fbfs** com **predicados**, **quantificadores**, **conectivos lógicos** e **símbolos** de **agrupamento**, possuindo a forma genérica:

$$\boxed{P_1 \land P_2 \land P_3 \land \ldots \land P_n \rightarrow Q}$$

  - Para um **argumento válido**, Q (conclusão) deve **seguir logicamente** P_1, P_2, … ,P_n (hipóteses) em **todas** as **interpretações possíveis**;
  - Isto é chamado de **preservação da verdade**. Este sistema será então:
    - **Correto**: somente argumentos válidos poderão ser provados;
    - **Completo**: todo argumento válido deveria ser provado.

Lógica de predicados

- **Regras de derivação**
  - São as **mesmas** da lógica **proposicional**, mas se **acrescentam regras** específicas;
  - Acrescentar as seguintes **equivalências** (**úteis**):

$$\boxed{(\exists x)A(x) \leftrightarrow \neg((\forall x)\neg A(x))}$$

$$\boxed{(\forall x)A(x) \leftrightarrow \neg((\exists x)(\neg A(x)))}$$

  - Como de exemplo de **aplicação** em das **regras** já **vistas** (no caso, *modus ponens*) tem-se:

$$\begin{array}{ll} 1.\ (\forall x)R(x) & \text{(hipótese)} \\ 2.\ (\forall x)R(x) \rightarrow (\forall x)S(x) & \text{(hipótese)} \\ 3.\ (\forall x)S(x) & \text{1,2, mp} \end{array}$$

Lógica de predicados

- **Novas regras de derivação**

Regras de inferência			
De	**Pode derivar**	**Nome/abreviação**	**Restrição no uso**
$(\forall x)P(x)$	$P(t)$ onde t é símbolo de variável ou constante.	Instanciação universal/ ui	Se t é uma variável, não pode aparecer no escopo de um quantificador para t.
$(\exists x)P(x)$	$P(a)$ onde a é um símbolo constante não utilizado antes na sequência de prova.	Instanciação existencial/ ei	Deve ser a primeira regra empregada para introduzir a na sequência.
$P(x)$	$(\forall x)P(x)$	Generalização universal/ ug	$P(x)$ não deve ter sido deduzido de qualquer hipótese onde x é livre e nem ter sido deduzido por EI de qualquer fbf no qual x é livre.
$P(x)$ ou $P(a)$, a cte.	$(\exists x)P(x)$	Generalização existencial/ eg	Para sair de $P(a)$ para $(\exists x)P(x)$, x não deve aparecer em $P(a)$.

Lógica de predicados

- **Exemplos**
  - “Todos os humanos são mortais. Sócrates é humano. Portanto Sócrates é mortal”. Se $H(x)$ representa x é humano, $M(x)$ representa x é mortal, e s é um símbolo constante a que foi atribuído Sócrates, então deve-se provar o argumento:
  - Derivação: $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x)) \wedge H(s) \rightarrow M(s)$

1. $(\forall x)(H(x) \rightarrow M(x))$	(hipótese)
2. $H(s)$	(hipótese)
3. $H(s) \rightarrow M(s)$	1,ui
4. $M(s)$	2,3,mp

Lógica de predicados

- **Exemplos**
  - Provar

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \wedge (\forall x)P(x) \rightarrow (\forall x)Q(x)$$

  - Derivação:

$$
\begin{array}{lr}
1.\ (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) & \text{(hipótese)} \\
2.\ (\forall x)P(x) & \text{(hipótese)} \\
3.\ P(x) \rightarrow Q(x) & 1,\text{ui} \\
4.\ P(x) & 2,\text{ui} \\
5.\ Q(x) & 3,4,\text{mp} \\
6.\ (\forall x)Q(x) & 5,\text{ug}
\end{array}
$$

Lógica de predicados

- **Teste seus conhecimentos**

1) Provar o argumento:

$$\boxed{(\exists x)P(x) \land (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x)) \rightarrow (\exists x)Q(x)}$$

$$\boxed{(\exists x)R(x) \land \neg((\exists x)(R(x) \land S(x))) \rightarrow (\exists x)(\neg S(x))}$$

Referências Bibliográficas

- GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 538 p. ISBN 85-216-1263-X.