

ECM 307 - Análise de sinais periódicos

Série de Fourier

V.C.Parro - vparro@maua.br

20 de fevereiro de 2020

Sumário

Analogia entre vetores e sinais

Série trigonométrica de Fourier

Série exponencial de Fourier

Série exponencial de Fourier

Exemplo da série Trigonométrica de uma onda quadrada

Para um sinal pulsado

Exemplo da aplicação da série exponencial para um sinal pulsado

Sinais contínuos¹

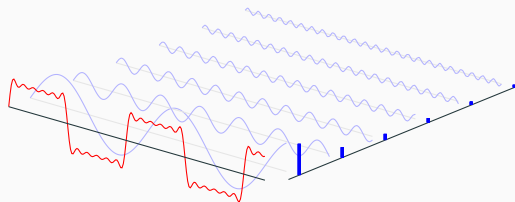


Figura 1: Sinais contínuos vistos da perspectiva do sinal em vermelho e sinais discretos vistos da perspectiva do sinal em azul.

¹<https://tex.stackexchange.com/questions/127375/replicate-the-fourier-transform-time-frequency-domains-correspondence>

Sinais discretos

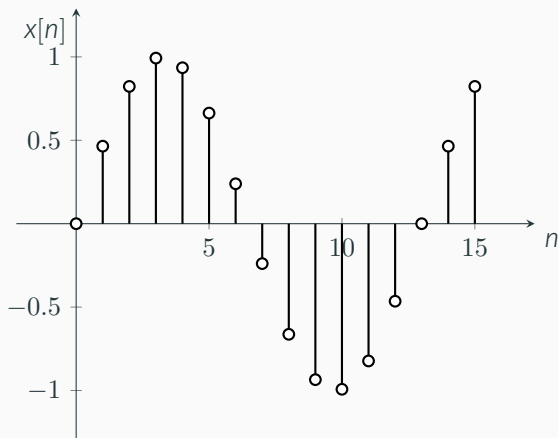


Figura 2: Sinal senoidal amostrado - discreto.

Sinais randômicos²

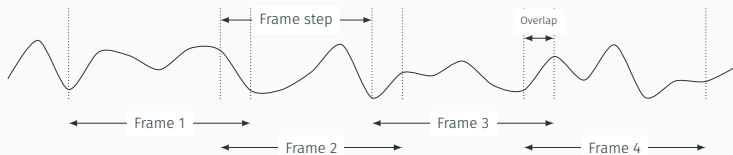


Figura 3: Sinal randômico.

²<https://tex.stackexchange.com/questions/366223/drawing-random-signal-shape-in-tikz/367243#367243>

Sinais randômicos

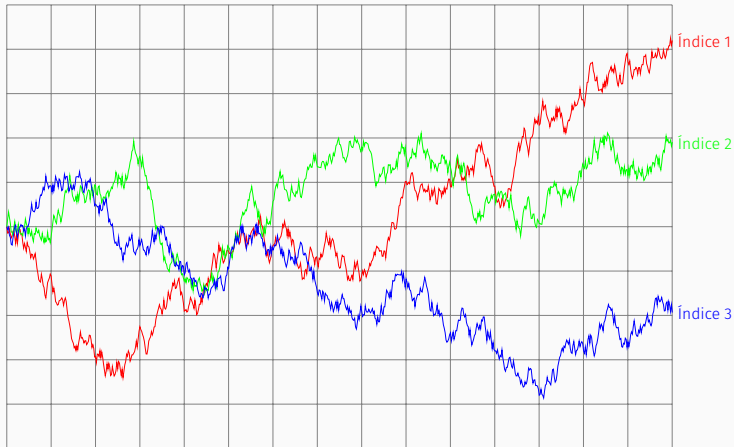


Figura 4: Comportamento associado ao movimento browniano.

"Medida" de um sinal: energia e potência

Energia

$$E_g = \int_{-\infty}^{\infty} g^2(t) dt, \quad (1)$$

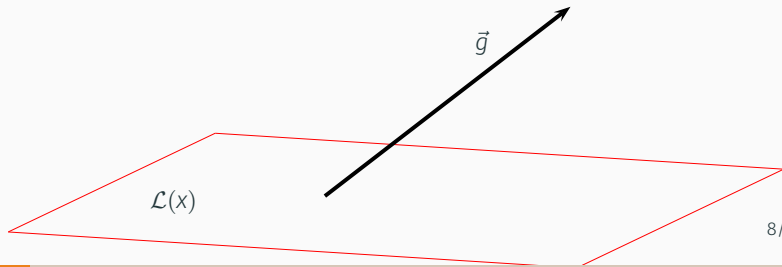
Potência - período T_0

$$P_g = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} g^2(t) dt, \quad (2)$$

Analogia entre vetores e sinais

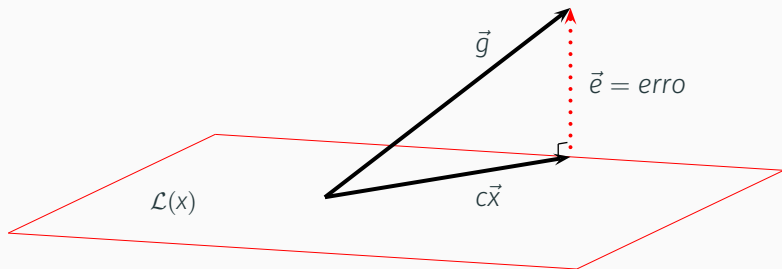
Uma analogia entre sinais e vetores...

Supondo que $\mathcal{L}(x)$ represente um universo de possibilidades para uma variável vetorial representado no plano e que desejamos comparar o vetor \vec{g} com este universo. Por exemplo, o plano representa o universo de possibilidades de impressões digitais com uma determinada característica e \vec{g} representa uma medida feita que desejamos medir o quanto ela á parecida com este conjunto.



Uma analogia entre sinais e vetores...

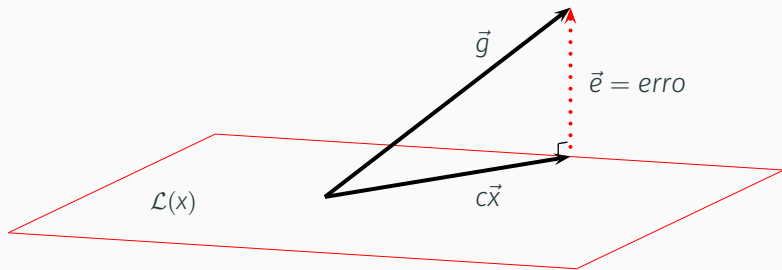
Podemos utilizar como medida da semelhança entre o plano e o vetor medido a projeção \vec{x} do mesmo no plano ou a diferença entre os vetores \vec{e} como uma estimativa da diferença entre eles.



Como determinar o escalar c ...

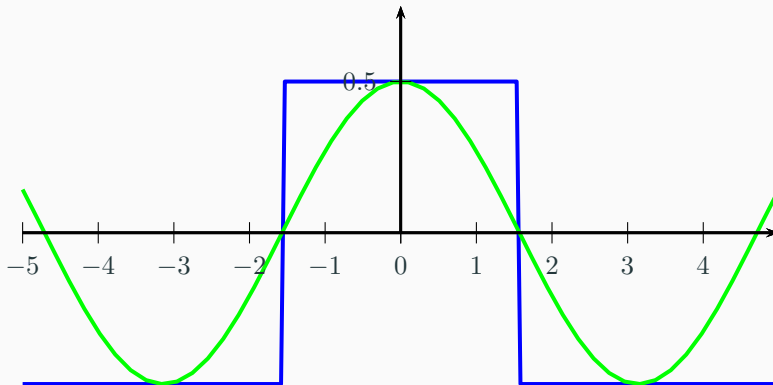
Sabemos que $\vec{g} \odot \vec{x} = |\vec{g}||\vec{x}|\cos\theta$ e que $c|\vec{x}| = |\vec{g}|\cos\theta$ desta forma:

$$c = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{\vec{x} \odot \vec{x}}$$



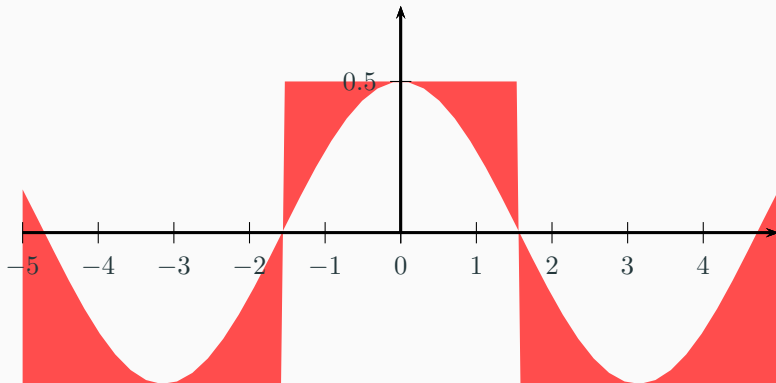
Como podemos estender esta idéia para sinais...

Mudando um pouco o enfoque: como podemos determinar a amplitude de um sinal harmônico de forma que ele seja o mais semelhante possível de um sinal pulsado?



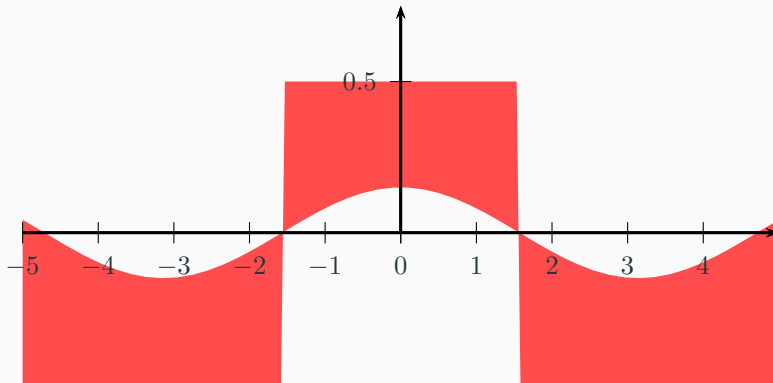
Avaliando a diferença entre os sinais

Observe em vermelho a diferença entre os dois sinais. Podemos estabelecer esta medida para o grau de diferença (semelhança).



Avaliando a diferença entre os sinais

Diminuindo a amplitude do sinal harmônico... Observamos que o **erro** aumentou. Isto indica que há um valor de amplitude que minimiza esta área e que consequentemente minimiza o **erro**.



"Medindo o grau de semelhança...

Estabelendo que o sinal pulsado $g(t)$ possa ser aproximado ao sinal harmônico $x(t)$ como sendo $g(t) \approx cx(t)$ demonstrar que o coeficiente c que minimiza o erro, no intervalo $t_1 \leq t \leq t_2$ é dado por:

Correlação entre os sinais...

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt}, \quad (3)$$

Exemplo

Para um sinal pulsado, com $T = 2\pi$ e amplitude $A_p = 1$ onde $g(t) \simeq c \sin(t)$ no intervalo $0 \leq t \leq 2\pi$ demonstre que $c = \frac{4}{\pi}$.

Conclusão

Comparando a equação obtida para vetores com a obtida para sinais, o que podemos concluir?

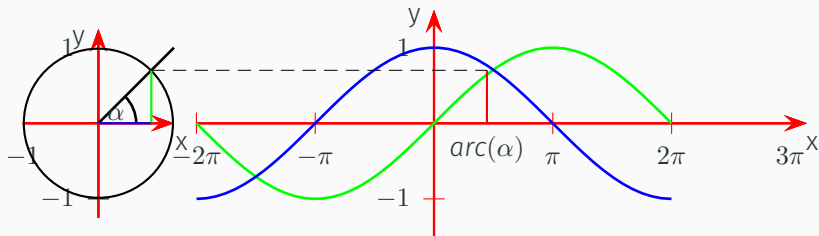
$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt} \quad c = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{\vec{x} \odot \vec{x}}$$

Importante

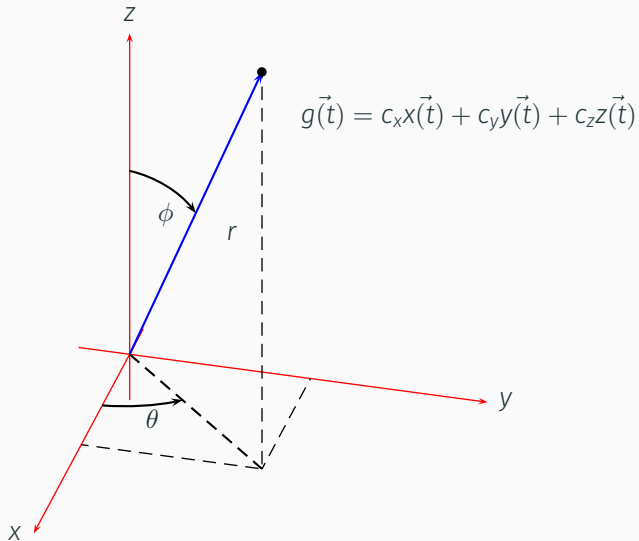
Tendo como referência a base vetorial, quando $c = 0$ temos dois vetores ortogonais, por analogia, quando $c = 0$, ou melhor, $\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt = 0$ dizemos que os sinais $g(t)$ e $x(t)$ são ortogonais no intervalo $[t_1, t_2]$.

Uma "base" ortogonal

Utilizando o conceito fundamentado anteriormente podemos facilmente demonstrar que dois sinais harmônicos defasados de $\frac{\pi}{2}$ são ortogonais (seno e cosseno). Esta conclusão pode ser obtida por inspeção do gráfico a seguir. Uma outra abstração importante é a que um sinal harmônico pode ser representado por um vetor girante.



Analogia com vetores



De forma geral

1. Para um intervalo $[t_1, t_2]$ escolhemos uma base de sinais que respeitem a seguinte construção:

$$\int_{t_1}^{t_2} x_n x_m(t) dt = \begin{cases} E_n & \text{Se } m = n \\ 0 & \text{Se } m \neq n \end{cases} \quad (4)$$

2. Os coeficientes (projeções) para cada sinal (dimensão) podem ser determinados:

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t) x_n(t) dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t) dt} = \frac{1}{E_n} \int_{t_1}^{t_2} g(t) x_n(t) dt, \quad (5)$$

3. O sinal $g(t)$ pode ser decomposto, no intervalo $[t_1, t_2]$, em:

$$g(t) = \sum_{n=1}^N c_n x_n(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \dots + c_N x_N(t) \quad (6)$$

Série trigonométrica de Fourier

Série trigonométrica de Fourier

Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (7)$$

Termos pares

$$a_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \cos(n\omega_0 t) dt \quad (8)$$

Termos ímpares

$$b_n = \frac{2}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) \sin(n\omega_0 t) dt. \quad (9)$$

Série exponentiel de Fourier

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \dots$$

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \dots$$

Desenvolvendo a função seno em série de Taylor

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} X^{2k+1} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \dots$$

Desenvolvendo a função cosseno em série de Taylor

$$\cos X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} X^{2k} = 1 - \frac{X^2}{2!} + \frac{X^4}{4!} - \frac{X^6}{6!} + \dots$$

Desenvolvendo a função seno em série de Taylor

$$\sin X = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} X^{2k+1} = X - \frac{X^3}{3!} + \frac{X^5}{5!} - \frac{X^7}{7!} + \dots$$

Desenvolvendo a função exponencial em série de Taylor

$$e^{jX} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jX)^k}{k!} = 1 + jX + \frac{(jX)^2}{2!} + \frac{(jX)^3}{3!} + \frac{(jX)^4}{4!} + \frac{(jX)^5}{5!} + \frac{(jX)^6}{6!} + \frac{(jX)^7}{7!} + \dots =$$
$$1 + jX - \frac{X^2}{2!} - j\frac{X^3}{3!} + \frac{X^4}{4!} + j\frac{X^5}{5!} - \frac{X^6}{6!} - j\frac{X^7}{7!} + \dots$$

Importante

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = \cos x + j \sin x$$

Propiedades:

- $e^{jx} = \cos x + j \sin x$
- $e^{-jx} = \cos(-x) + j \sin(-x) = \cos x - j \sin x$
- $e^{jx} + e^{-jx} = 2 \cos x$
- $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$

Exemplo de aplicação

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{(e^{jA} + e^{-jA})}{2} \cdot \frac{(e^{jB} + e^{-jB})}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{j(A+B)} + e^{j(A-B)} + e^{j(-A+B)} + e^{j(-A-B)}}{2} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}}{2}}_{\cos(A+B)} + \underbrace{\frac{e^{j(A-B)} + e^{-j(A-B)}}{2}}_{\cos(A-B)} \right]. \quad (12)$$

Exemplo de aplicação

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{(e^{jA} + e^{-jA})}{2} \cdot \frac{(e^{jB} + e^{-jB})}{2} \quad (10)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{j(A+B)} + e^{j(A-B)} + e^{j(-A+B)} + e^{j(-A-B)}}{2} \quad (11)$$

$$= \frac{1}{2} \left[\underbrace{\frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}}{2}}_{\cos(A+B)} + \underbrace{\frac{e^{j(A-B)} + e^{-j(A-B)}}{2}}_{\cos(A-B)} \right] \quad (12)$$

Um caso curioso...

Utilizando o que foi desenvolvido determine:

$$D = j^j$$

Série exponentiel de Fourier

Série exponencial de Fourier

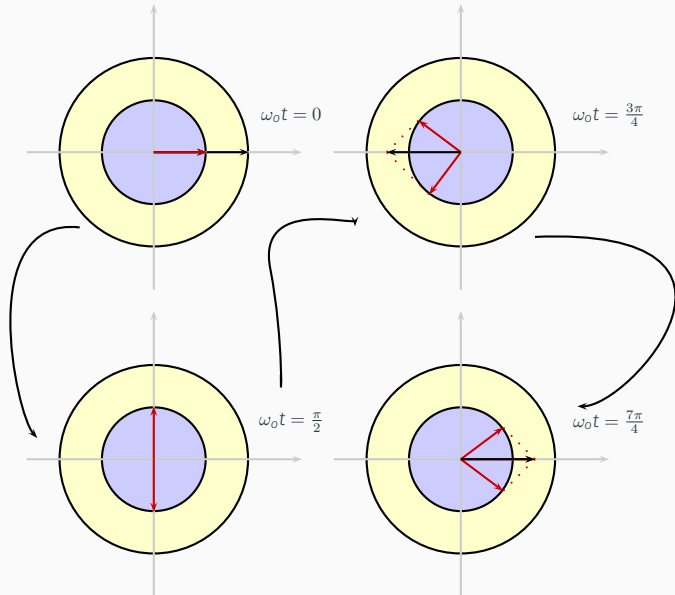
Utilizando a análise feita para a série compacta de fourier, e a representação de sinais utilizando euler, podemos definir a série exponencial de Fourier:

Série exponencial

$$\text{Análise: } g(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} D_n e^{jn\omega_0 t}$$

$$\text{Síntese: } D_n = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} g(t) e^{-jn\omega_0 t}$$

Frequência negativa? uma interpretação...



Exemplo da série Trigonométrica de uma onda quadrada

Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)) \quad (13)$$

Série trigonométrica de Fourier

Série

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(n\omega_0 t) + b_n \sin(n\omega_0 t)) \quad (13)$$

Valor Médio

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} f(t) dt, \quad (14)$$

Síntese

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\tau}{T} \frac{\text{sen}(n\omega\tau/2)}{(n\omega\tau/2)} \cos(n\omega_0 t), \quad (15)$$

Sinal pulsado

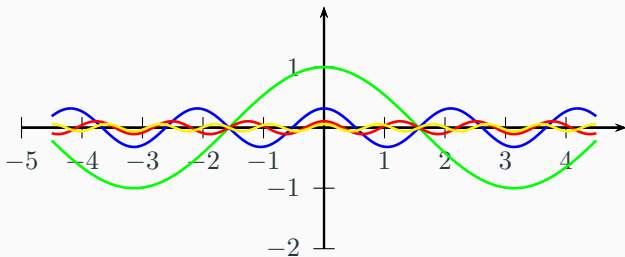


Figura 5: Harmônicas do sinal pulsado

Sinal pulsado

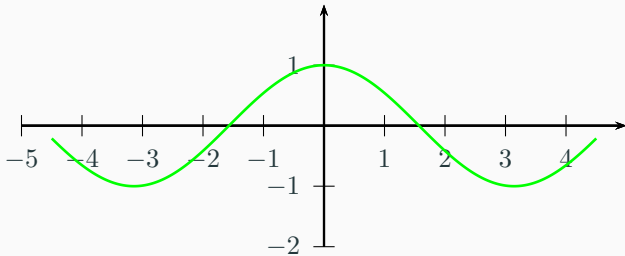


Figura 6: Sinal pulsado Harmonica fundamental

Sinal pulsado

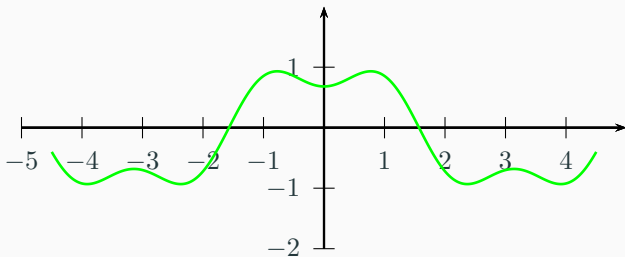


Figura 7: Sinal pulsado primeira e terceira

Sinal pulsado

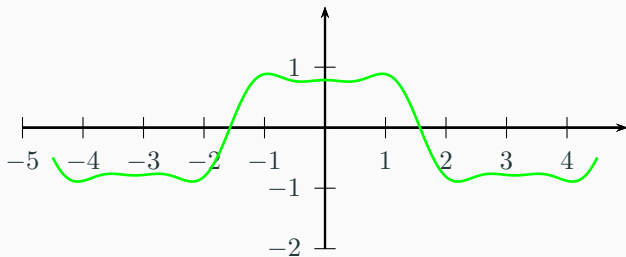


Figura 8: Sinal pulsado ate a quinta harmonica

Sinal pulsado

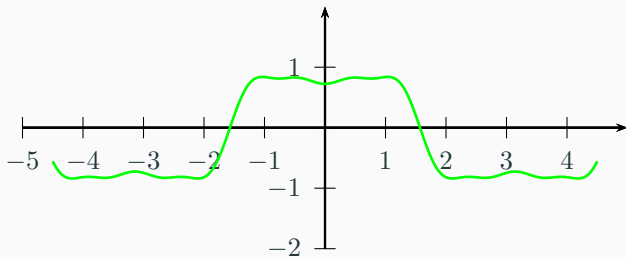
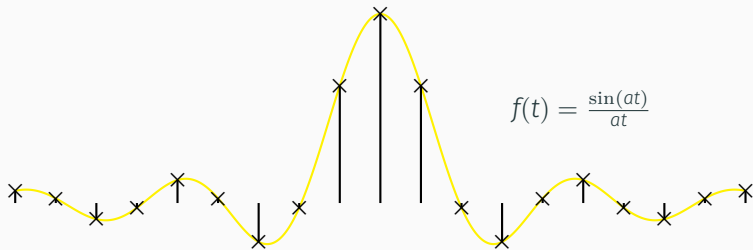
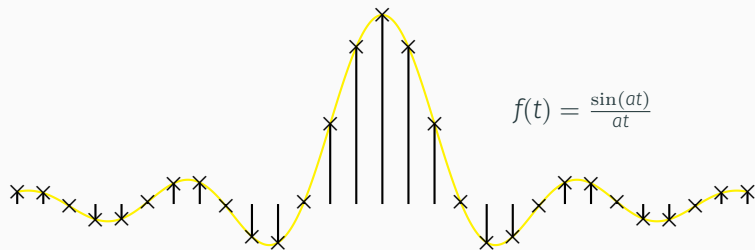


Figura 9: Sinal pulsado ate a quinta harmonica

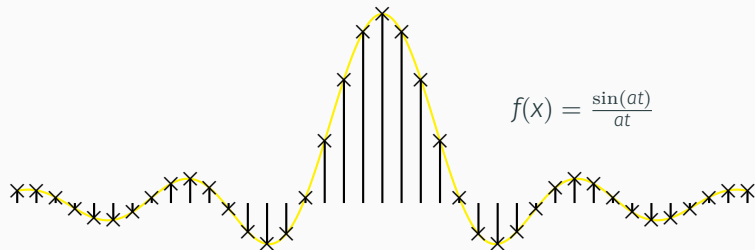
No domínio da frequência para $\tau = \frac{T}{2}$



No domínio da frequência para $\tau = \frac{T}{3}$



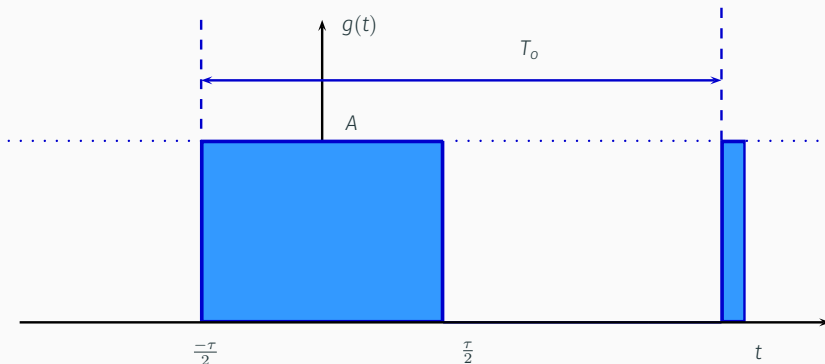
No domínio da frequência para $\tau = \frac{T}{4}$



Exemplo da aplicação da série exponencial para um sinal pulsado

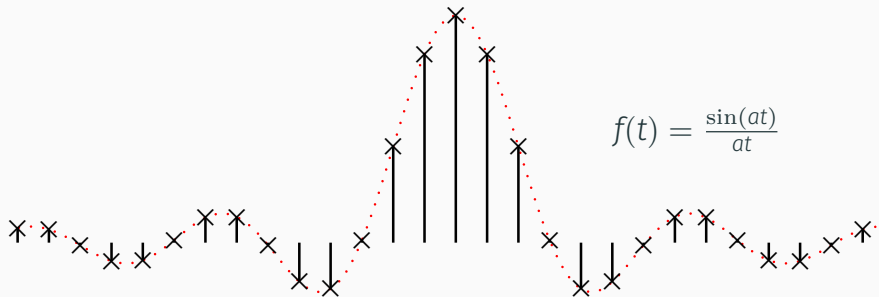
Analizando um pulso de largura τ

- O que acontece se mantenho o período T_o e reduzo a largura τ ?
- O que acontece se mantenho a largura τ e aumento o período T_o ?



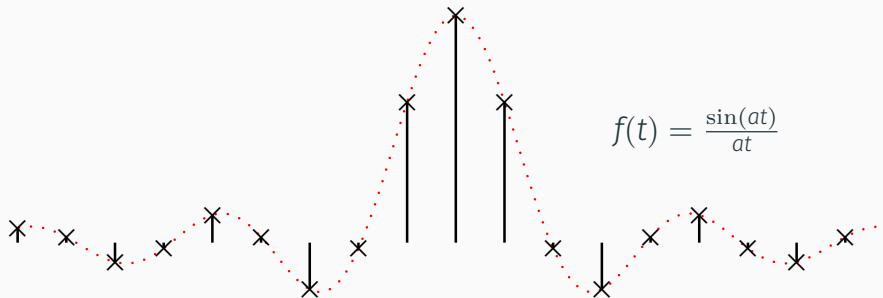
Sinal de Referência...

Sinal de referência com uma relação $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{3}$
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 3\omega_0$



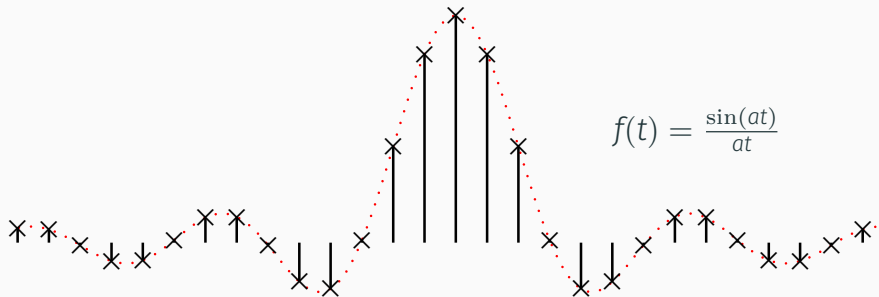
Mantendo a largura τ e aumento o período T_o

Sinal modificado com uma relação $\frac{\tau}{T_o} = \frac{1}{2}$
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 2\omega_o$



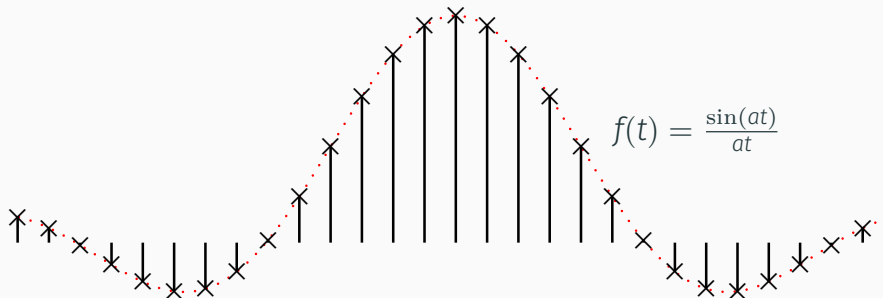
Sinal de Referência...

Sinal de referência com uma relação $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{3}$
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 3\omega_0$



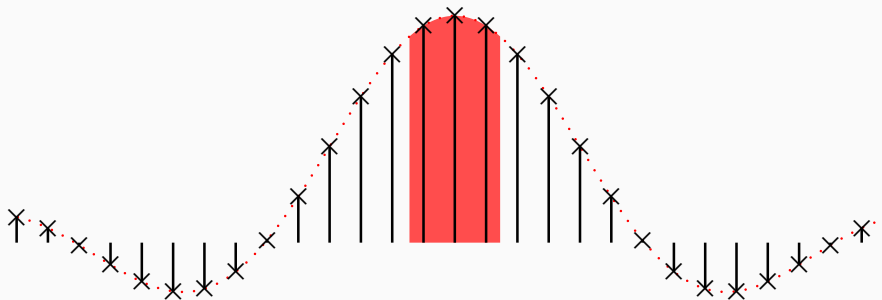
Mantendo o período T_0 e reduz a largura τ

Sinal modificado com uma relação $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{6}$
o nulo ocorre na sexta harmônica $\omega_{nulo} = 6\omega_0$



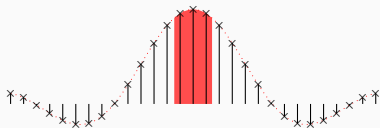
Efeito da filtragem

Sinal modificado com uma relação $\frac{\tau}{T_0} = \frac{1}{6}$
em filtro que selecione somente o nível DC e a primeira harmônica

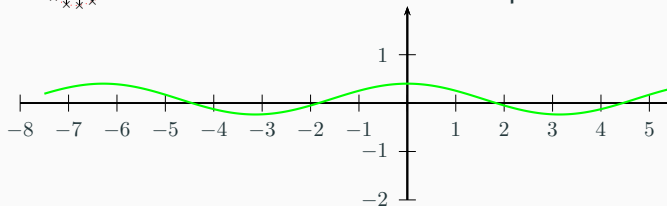


Efeito da filtragem

No domínio da frequência

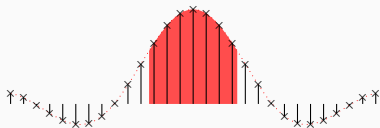


No domínio do tempo

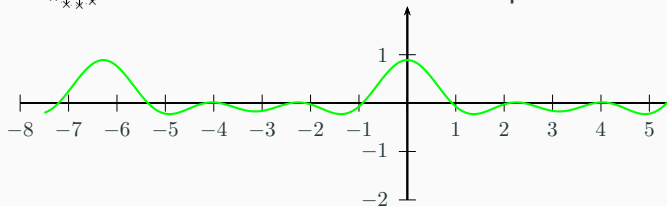


Efeito da filtragem

No domínio da frequência



No domínio do tempo

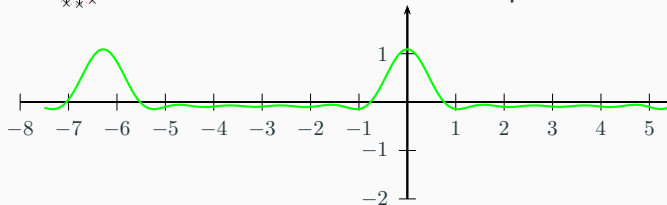


Efeito da filtragem

No domínio da frequência



No domínio do tempo

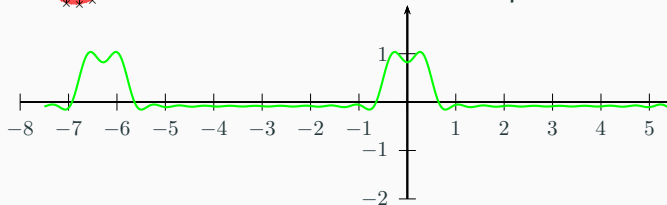


Efeito da filtragem

No domínio da frequência



No domínio do tempo



Uma análise do ponto de vista de potência

Considerando a série compacta temos:

$$P_g = C_0^2 + \frac{1}{2} \sum_1^{+\infty} C_n^2$$

Considerando a série exponencial temos:

$$P_g = \sum_{-\infty}^{\infty} |D_n|^2$$