INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA
MAUÁ

ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lista de Exercícios

Conjuntos, Relações e funções

Marco Furlan

3 de abril de 2019

1 Conjuntos

1.1. Descrever os conjuntos a seguir:

(a) $\{x | x \in \mathbb{R} \land 5x^2 + 3x + 5 = 0\}$
(b) $\{x | x \in \mathbb{N} \land (\forall y)(y \text{ é primo} \rightarrow x \neq y)\}$
(c) $\{x | x \text{ é um dos estados da região sul do Brasil}\}$

1.2. Descrever com predicados matemáticos os conjuntos a seguir:

(a) $\{3, 7, 15, 31, \ldots\}$
(b) $\{-2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$

1.3. Qual é a cardinalidade dos conjuntos a seguir:

(a) $S = \{a, \{a, \{a\}\}\}$
(b) $S = \{\emptyset\}$
(c) $S = \{x | x \neq x\}$

1.4. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras para todos os conjuntos A, B e C?

(a) Se $A \subseteq B$ e $B \subset A$ então $A = B$.

(b) $\{\emptyset\} = \emptyset$

(c) $\emptyset \in A$

(d) $\emptyset \not\subseteq A$

(e) Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$ então $A \subset C$.

(f) Se $A \neq B$ e $B \neq C$ então $A \neq C$.

(g) Se $A \in B$ e $B \not\subseteq C$ então $A \not\subseteq C$.

1.5. Provar que se $\overline{A} \subseteq \overline{B}$ então $B \subseteq A$. Use o diagrama de Venn ou dedução lógica.

1.6. Calcule quantos subconjuntos de $n-1$ elementos podem ser formados a partir de um conjunto de n elementos, para $n \geq 2$. Tente deduzir este número a partir de conjuntos de tamanho $2, 3, 4 \ldots$ ou por outro método que você conheça.

1.7. Quais das afirmações a seguir são verdadeiras para todos os conjuntos A, B e C?

(a) $A \cup A = A$

(b) $B \cap B = B$

(c) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

(d) $\overline{\overline{A}} = A$

(e) $A - B = \overline{B - A}$

(f) $(A - B) \cap (B - A) = \emptyset$

(g) Se $A \cap B = \emptyset$ então $A \subset B$.

(h) $A \times B = B \times A$.

(i) $\emptyset \times A = \emptyset$.

(j) $\emptyset \cap \{\emptyset\} = \emptyset$

(k) $(A - B) \cup (B - C) = A - C$

(l) $(A - C) \cap (A - B) = A - (B \cup C)$

1.8. Utilizando o princípio da inclusão e exclusão, determine uma fórmula para $|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$.

2 Relações

2.1. Para cada uma das relações a seguir, classifique-as como reflexiva, anti-reflexiva, anti-simétrica e/ou transitiva:

(a) $R = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$.

(b) $R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3)\}$.

(c) $R = \{1,2,3,4,5\} \times \{1,2,3,4,5\}$.

2.2. Considere a relação R lida como "próximo de", definida para pares de números naturais assim: para (x, y), x está próximo de y se a distância entre eles for no máximo 2. Pergunta-se:

(a) Escreva R como um conjunto de pares ordenados, assim: $R = \{(x, y) | \ldots\}$.

(b) Classifique esta relação.

2.3. Elaborar o dígrafo das relações a seguir::

(a) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e R a relação binária "menor que" sobre A.

(b) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $B = \{2, 3, 4, 5\}$ e R a relação binária "maior ou igual à" sobre $A \times B$.

(c) $A = \{-1, -2, -3, -4, -5\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $R = \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B \wedge a|b\}$ (nota $x|y$ representa "x divide y" que é o mesmo que o resto de y dividido por x é zero. Por exemplo, 2 divide 6 ou 2|6).

2.4. Quais dos conjuntos a seguir são relações de equivalência?

(a) $R = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ sobre $\{1, 2, 3\}$.

(b) Operação | sobre $\mathbb{Z}$ (divide).

(c) Operação $\leq$ sobre $\mathbb{Z}$.

(d) $\{1, 2, 3\} \times \{1, 2, 3\}$ sobre $\{1, 2, 3\}$.

2.5. Descrever todas as partições possíveis de $\{1, 2, 3\}$ e $\{1, 2, 3, 4\}$.

2.6. Desenhe o dígrafo das ordenações parciais sobre o conjunto S:

(a) $S = \{a, b, c\}$
$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (a, c)\}$

(b) $S = \{a, b, c, d\}$
$\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c)\}$

(c) $S = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, \{c\}, \{a, c\}, \{b\}\}$
$A \rho B \Leftrightarrow A \subseteq B$

2.7. Responder:

(a) Qual o conjunto $[a]$ para a relação de equivalência $\rho = \{(a, a), (b, b), (c, c), (a, c), (c, a)\}$? Ele tem outras representações?

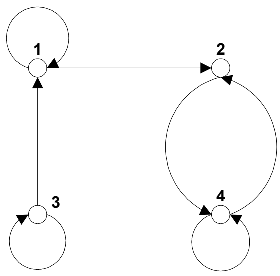
(b) Qual o conjunto [3] para a relação de equivalência $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (1, 2), (2, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 2), (2, 3), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (4, 5), (5, 4)\}$? Qual o conjunto [4]?

(c) A **congruência módulo** n é uma relação binária definida sobre $\mathbb{Z}$ e é assim definida: $a \equiv b \pmod{n}$, que equivale a escrever que n divide $(a - b)$. Qual o conjunto [—3] para a relação de equivalência módulo 5 no conjunto $\mathbb{Z}$?

2.8. Para determinar todos os vértices alcançáveis de um dígrafo – **o fechamento transitivo reflexivo de uma relação representada pelo dígrafo**, pode-se utilizar o algoritmo de *Warshall* descrito a seguir:

```
procedimento Warshall(A,N,W)
    /*  Entradas:
    - A: matriz booleana de adjacência do dígrafo
    - N: número de vértices do dígrafo
    Saídas:
    - W: a matriz booleana de vértices alcançáveis */
    inicio
    /* Inicialização de W */
    para i ← 0 até N − 1 faça
        para j ← 0 até N − 1 faça
            W[i, j] ← A[i, j]
    /* Determinação de W */
    para k ← 0 até N − 1 faça
        para i ← 0 até N − 1 faça
            para j ← 0 até N − 1 faça
                /* ∨ = OU lógico; ∧ = E lógico */
                W[i, j] ← W[i, j] ∨ (W[i, k] ∧ W[k, j])
fim
```

Tome como exemplo o dígrafo a seguir:



A sua matriz de adjacência booleana é (1=true, 0=false):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Após a aplicação do algoritmo de Warshall, produz-se a matriz W (1=true, 0=false):

$$W = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O significado desta matriz é o seguinte. Pegando por exemplo a linha 3, descobre-se que todas as intersecções do vértice 3 com os demais são valores verdadeiros, isto é, a partir do vértice 3 é possível alcançar todos os demais, e assim por diante.

Pede-se:

(a) Escreva o código do procedimento *Warshall* na sua linguagem de programação preferida;

(b) Teste-o no dígrafo que foi exemplificado;

(c) Responda: qual a ordem O deste procedimento?

(d) Escreva o código da função *Alcanca* que, a partir dos parâmetros A (matriz de adjacência), N (ordem da matriz), $v1$ (vértice inicial) e $v2$ (vértice destino) resulta em um valor booleano que indica se existe algum caminho entre $v1$ e $v2$. Faça uso do procedimento Warshall.

3 Funções

3.1. Para cada uma das relações a seguir, responder: é uma função? Explique. No caso se ser uma função, determinar o seu conjunto domínio e imagem e classificá-la (injetora, sobrejetora ou bijetora).

(a) $\{(1,2),(3,4)\}$.

(b) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge x+y=0\}$.

(c) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Z} \wedge y=x^2\}$.

(d) $\{(x,y)|x,y \in \mathbb{Q} \wedge x^2+y^2=1\}$.

3.2. Sejam $A=\{1,2,3,4\}$ e $B=\{5,6,7\}$. Seja f a relação sobre $A \times B$:

$$f=\{(1,5),(2,5),(3,6),(?,?)\}$$

Determinar que valores substituir em $(?,?)$ de modo que:

(a) f não seja uma função.

(b) f seja uma função injetora.

(c) f seja uma função sobrejetora.

3.3. Para cada par de funções f e g, descritas a seguir, determinar quando possível $f \circ g$ ou $g \circ f$:

(a) $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ e $g=\{(2,1),(3,1),(4,1)\}$.

(b) $f=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$ e $g=\{(1,2),(2,0),(3,5),(4,3)\}$.

(c) $f=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,1)\}$ e $g=\{(1,3),(2,4),(3,5),(4,1),(5,2)\}$.

(d) $f(x)=x+3$ e $g(x)=x-7$ (ambas para todo $x \in \mathbb{Z}$).

(e) $f=I_A$ e $g=I_B$ quando $A \subset B$.