ECM307

Analogia entre vetores e sinais

Professor: V. C. Parro e-mail: *vparro@maua.br*

21 de fevereiro de 2020

Sumário

1 introdução **1**

2 Uma visão ampliada **1**

3 A série trigonométrica de Fourier **4**
3.1 Qual o siginifcado dos termos da série? 4

4 A exponencial complexa **5**
4.1 Propriedades 5
4.2 Exemplo de aplicação 5
4.3 Um sinal pulsado 6

1 introdução

Ao medirmos um sinal de voz e visualizarmos ele no domínio do tempo, em um osciloscópio,por exemplo, que tipo de informação esta visualização possibilita? Será que há um olhar diferente que permite observamos detalhes de um sinal não visíveis em uma análise temporal?

Pensando genericamente em um sinal $x(t)$ como podemos realizar este olhar diferenciado descrito acima? Uma introdução bastante elegante para o assunto, que faremos aqui de maneira bem descontraída, consiste em estabelecermos uma analogia entre sinal e vetor. O conceito é simples, da mesma maneira que um vetor é decomposto em uma base, um sinal também pode ser decomposto? A figura 1 ilustra a decomposição de um vetor $g(\vec{t}) = c_x x(\vec{t}) + c_y y(\vec{t}) + c_z z(\vec{t})$.

2 Uma visão ampliada

Considerando um vetor $g(\vec{t})$ e um plano $\mathcal{L}(x)$ como podemos estabelecer uma medida de quanto o vetor pertence ao plano figura 2 ? Uma medida para esta questão pode ser o cálculo da projeção do vetor no plano. Observe que a projeção é determinada de maneira que o erro seja minimizado figura 3. Sabemos que $\vec{g} \odot \vec{x} = |\vec{g}||\vec{x}|cos\theta$ e que $c|x| = |g|cos\theta$ desta forma:

$$c = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{\vec{x} \odot \vec{x}}$$

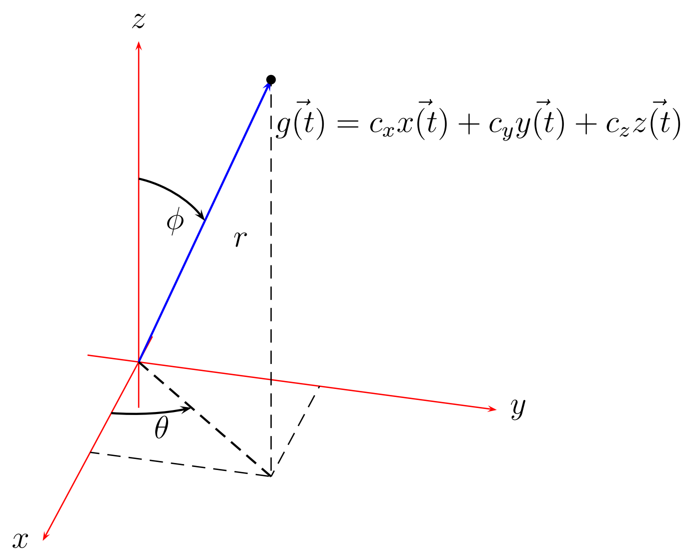

Figura 1: Decomposição de um vetor em 3 dimensões.

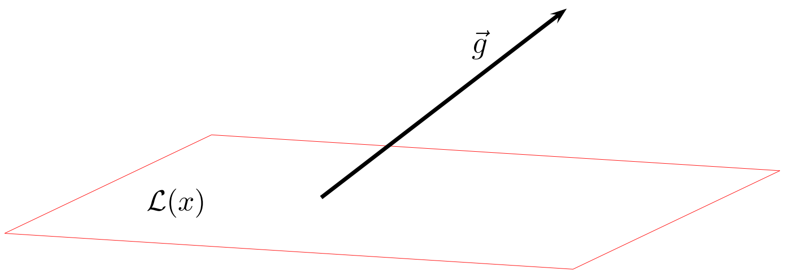

Figura 2: Como medir a relação entre um plano e um vetor?

Estendendo este conceito para um sinal $g(t)$ e usando como exemplo um sinal pulsado ilustrado na figura 2. Podemos determinar qual a amplitude de um sinal harmônico, neste caso um cosseno, que faça com que os dois sinais se tornem o mais semelhante possível. Primeiro devemos defenir o que significa o mais semelhante possível, para isto usemos um pouco do senso comum. Observem as figuras 5 e 6. Com a alteração da amplitude do sinal observamos que a semelhança é diferenciada em cada um dos casos. Que elementos usamos para concluir isto? A grosso modo obsevamos um acréscimod a área da figura 5 para a figura 6. Não nos importa o se a área é negativa ou positiva, apenas o tamnho da área em evidência. Sendo assim criamos uma medida para semelhança entre os dois sinais.

Como traduzir esta medida em uma equação matemática? Tratando o sinal puldado por $g(t)$ e o sinal harmônico por $x(t)$. O erro entre os dois sinais pode ser medido pelo erro médio quadrático determinado pela equação 1.

$$erro = \int_{t_1}^{t_2} [g(t) - cx(t)]^2 dt \tag{1}$$

O que desejamos determinar é o valor de c que minimiza o erro. Logo fazemos $\frac{derro}{dc} = 0$. Resolvendo o problema de minimização podemos estalebecer uma comparação entre o que foi

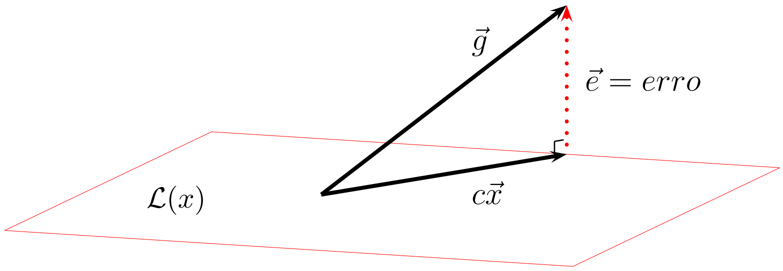

Figura 3: Determinando a projeção.

determinado para vetores e o coeficiente determinado para sinais.

$$c = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x^2(t)dt} \qquad c = \frac{\vec{g} \odot \vec{x}}{\vec{x} \odot \vec{x}}$$

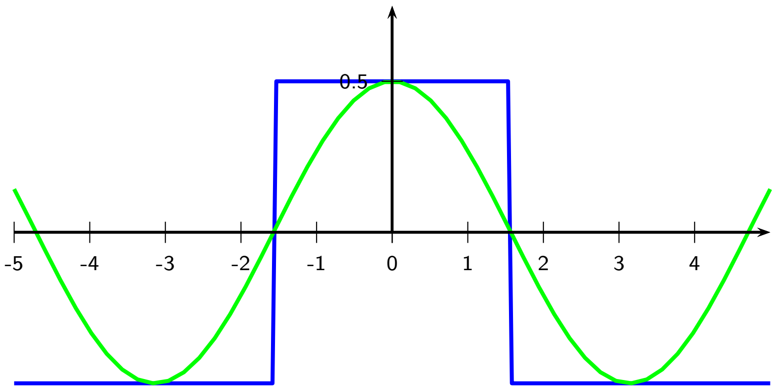

Figura 4: Como determinar a semelhança entre doi sinais? Em um primeiro momento como tornar um sinal o mais semelhante possível a outro?

Resumindo temos a seguinte análise:

1. Para um intervalo $[t_1, t_2]$ escolhemos uma base de sinais que respeitem a seguinte construção:

$$\int_{t_1}^{t_2} x_n x_m(t)dt = \begin{cases} E_n & \text{Se } m = n \\ 0 & \text{Se } \ m \neq n \end{cases} \tag{2}$$

2. Os coeficientes (projeções) para cada sinal (dimensão) podem ser determinados:

$$c_n = \frac{\int_{t_1}^{t_2} g(t)x_n(t)dt}{\int_{t_1}^{t_2} x_n^2(t)dt} = \frac{1}{E_n}\int_{t_1}^{t_2} g(t)x_n(t)dt, \tag{3}$$

3. O sinal $g(t)$ pode ser sintetizado, no intervalo $[t_1, t_2]$, utilziando:

$$g(t) = \sum_{n=1}^{N} c_n x_n(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \ldots + c_N x_N(t) \tag{4}$$

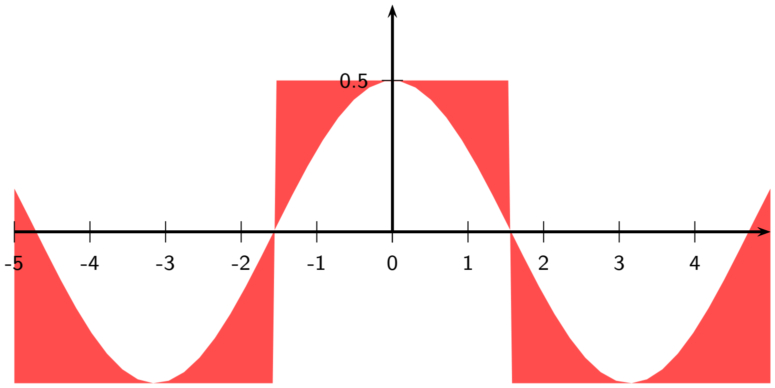

Figura 5: A semelhança para uma amplitude do sinal harmônico.

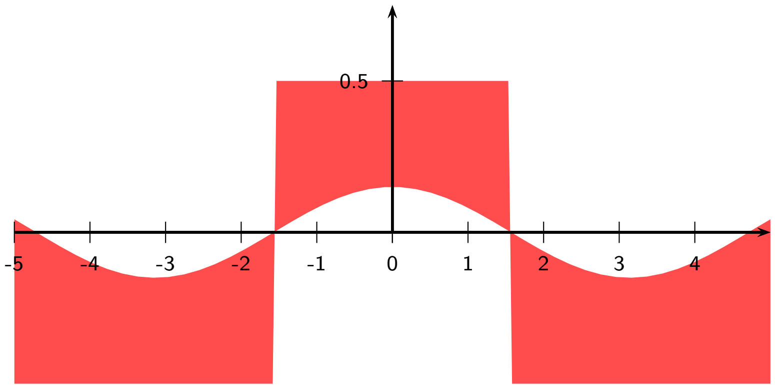

Figura 6: Aumento da diferença reduzindo a amplitude do sinal harmônico.

3 A série trigonométrica de Fourier

Analisando o reciocínio descrito acima podemos inferir algo um pouco mais profundo ara a série trigonométrica de Fourier. A expressão 5 é conhecida como síntese, ou seja, sua determinação permite que sintetizemos o sinal analisado. As expressões 6 e 7 representam o cálculo dos termos da série, em outras palavras, poderíamos dizer, as projeções do sinal em análise $f(t)$ em uma base formada por infinitos sinais harmônicos (senos e cossenos).

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos(n\omega_o t) + b_n \sin(n\omega_o t)) \tag{5}$$

$$a_n = \frac{2}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t)\cos(n\omega_o t)dt \tag{6}$$

$$b_n = \frac{2}{T_o}\int_{-T_o/2}^{T_o/2} f(t)\sin(n\omega_o t)dt \tag{7}$$

3.1 Qual o siginifcado dos termos da série?

A grosso modo podemos utilizar a expressão de sintese 5 para gerar o sinal resultante. Observe a sequência da figura 3.1 o efeito do acréscimo das harmônicas e crescente semelhança com o sinal original.

4 A exponencial complexa

Uma representação importante é utilizando a exponencial complexa ou mais conehcida como fórmula de Euler. Se fizermos a decomposição em série de Taylor de uma funÇão do tipo cosseno obtemos a expansão descrita a seguir:

$$\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \tag{8}$$

podemos fazer o mesmo para uma função do tipo seno:

$$\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \tag{9}$$

e para uma função e^{jx}:

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = 1 + jx + \frac{(jx)^2}{2!} + \frac{(jx)^3}{3!} + \frac{(jx)^4}{4!} + \frac{(jx)^5}{5!} + \frac{(jx)^6}{6!} + \frac{(jx)^7}{7!} + \cdots \tag{10}$$

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = 1 + jx - \frac{(x)^2}{2!} - j\frac{(x)^3}{3!} + \frac{(x)^4}{4!} + j\frac{(x)^5}{5!} - \frac{(x)^6}{6!} - j\frac{(x)^7}{7!} + \cdots \tag{11}$$

observando cuidadosamente a série da exponencial complexa verificamos que ela contém os termos da série do cosseno e os termos da série do seno multiplicados por j, desta forma temos:

$$e^{jx} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(jx)^k}{k!} = \cos x + j \sin x \tag{12}$$

4.1 Propriedades

As principais propriedades que pdemos destacar:

- $e^{jx} = \cos x + j \sin x$
- $e^{-jx} = \cos(-x) + j\sin(-x) = \cos x - j \sin x$
- $e^{jx} + e^{-jx} = 2\cos x$
- $e^{jx} - e^{-jx} = 2j \sin x$

4.2 Exemplo de aplicação

Sempre que estudamos as propriedades trigonométricas nos perguntamos de onde vem as relações, geralmente apresentadas em tabelas de cursinho, segue um exemplo:

$$\cos A \cdot \cos B = \frac{(e^{jA} + e^{-jA})}{2} \cdot \frac{(e^{jB} + e^{-jB})}{2} \tag{13}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{e^{j(A+B)} + e^{j(A-B)} + e^{j(-A+B)} + e^{j(-A-B)}}{2} \tag{14}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{e^{j(A+B)} + e^{-j(A+B)}}{2}}_{\cos(A+B)} + \underbrace{\frac{e^{j(A-B)} + e^{-j(A-B)}}{2}}_{\cos(A-B)}\right]. \tag{15}$$

4.3 Um sinal pulsado

Considerando um pulso de período T_o e largura τ, podemos determinar os termos da série de Fourier em função destes dois parâmetros e analisar sua influência. Obtemos a síntese expressa por 16. A figura 4.3 ilustra o efeito da variação relativa entre a largura do pulso τ e o período T_o na formação da distribuição dos coeficientes. As figuras **??** e **??** ilustram o efeito inverso quando descartamos projeções do sinal na sua composição temporal.

$$f(t) = \frac{A\tau}{T} \quad + \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A\tau}{T} \quad \frac{sen(n\omega\tau/2)}{(n\omega\tau/2)} \cos(n\omega_o t) \tag{16}$$

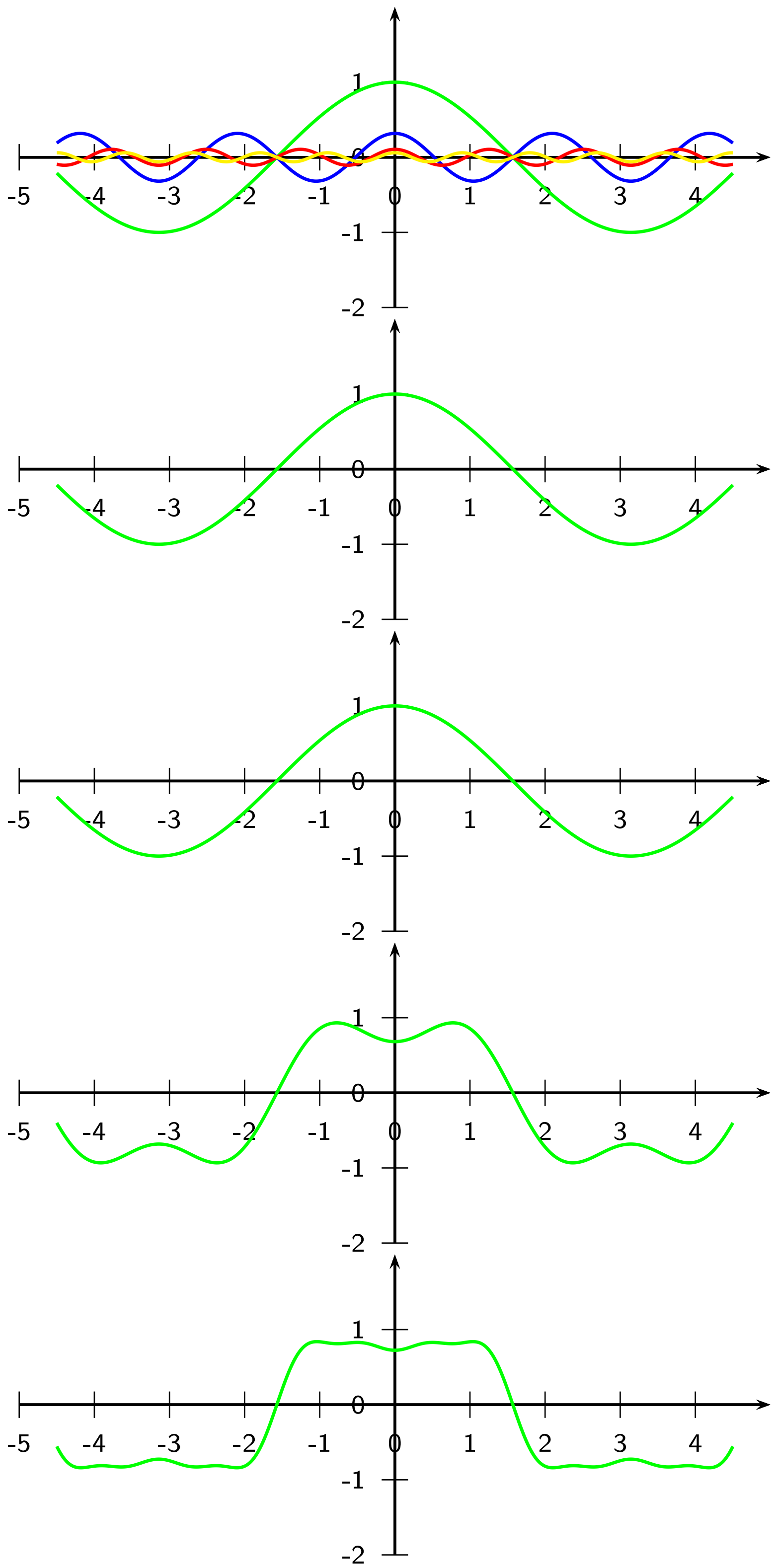

Figura 7: Efeito da síntese de um onda quadrada utilizando os termos da série trigonométrica de Foutier.

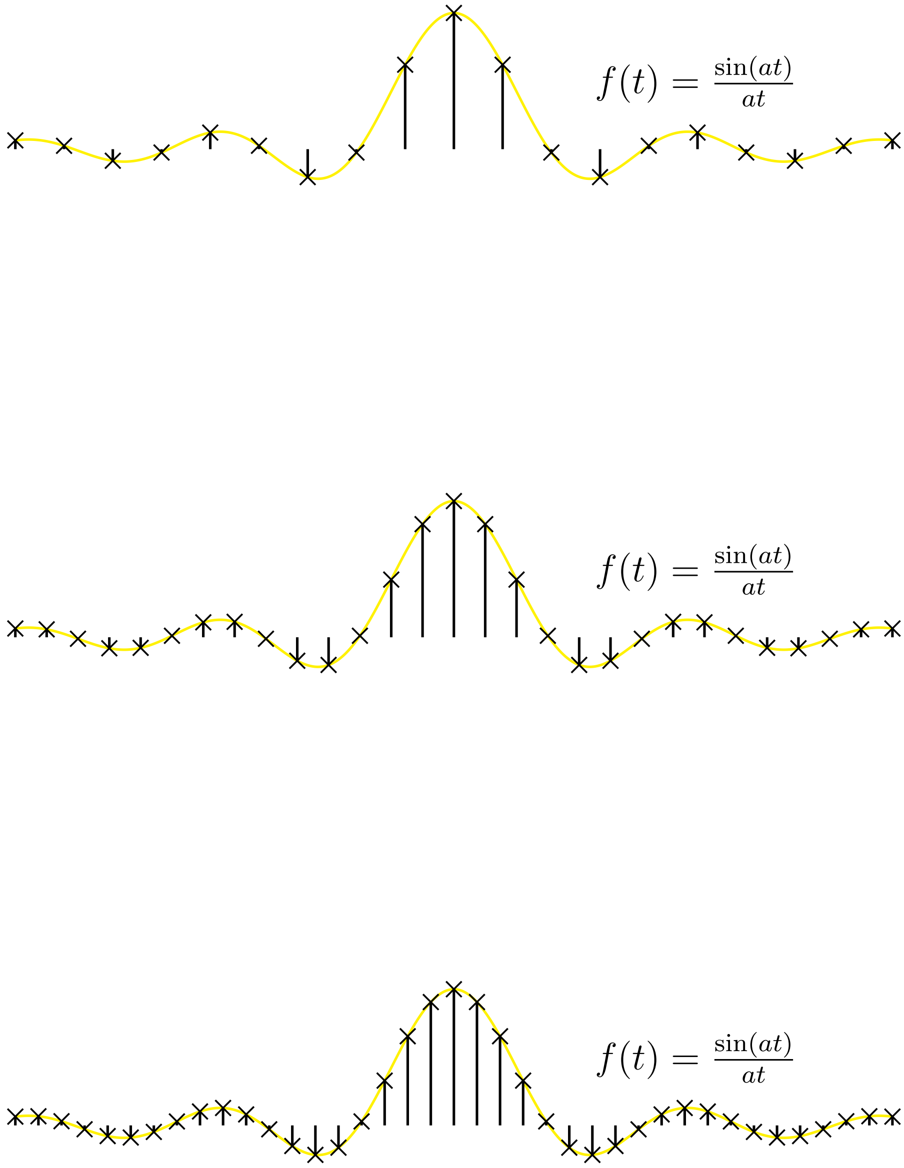

Figura 8: Efeito da síntese de um onda quadrada utilizando os termos da série trigonométrica de Foutier.