Curso de Engenharia de Computação
Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

MAUÁ

Introdução à lógica formal

Slides da disciplina Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia – Escola de Engenharia Mauá
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza

Lógica formal

- **Conceitos**
  - Delineia o **método organizado** e **cuidadoso** de **pensar** que **caracteriza** qualquer **investigação científica** ou qualquer outra **atividade** de **raciocínio**;
  - Tem **aplicações diretas** em **Computação**:
    - **Suporte matemático** às teorias;
    - Técnicas de **Inteligência Artificial**: linguagem **Prolog**, **sistemas especialistas** e outros;
    - **Verificação da correção** de **programas** de computadores;
    - **Circuitos** digitais;
    - … e outros

Lógica formal

- **Sentença**
  - **Sentença** (ou **proposição**) é uma **frase** que pode ser apenas **verdadeira** ou **falsa**:
  - **Exemplos**
    - “Dez é menor do que sete”
      - **<u>É</u>** uma sentença e é falsa;
    - “Como vai você?”
      - **<u>NÃO É</u>** uma sentença – é uma pergunta;
    - “Ela é muito talentosa”
      - **<u>NÃO É</u>** uma é uma sentença pois existe um termo não definido – “ela” – que impede de avaliar sua veracidade;
    - “Existem formas de vida em outros planetas do universo”
      - **<u>É</u>** uma sentença;

Lógica formal

- **Símbolos**
  - As **sentenças** podem ser **representadas** por meio de **símbolos** – convenciona-se, em **lógica matemática**, utilizar **letras maiúsculas** tais como A, Z, W etc para representar as sentenças envolvidas;
  - Por exemplo:
    - A = “Elefantes são grandes”
    - B = “Bolas são redondas”
  - Uma **expressão lógica** é então **composta** por **símbolos proposicionais** e por **conectivos lógicos** (que serão apresentados a seguir);
  - A **veracidade** (**ou não**) de uma **expressão lógica** depende de sua **interpretação** – **valores-verdade** dos **símbolos proposicionais** e dos **conectivos lógicos** empregados.

Lógica formal

- **Conectivos (operadores) lógicos e valores-verdade**
  - Os **conectivos lógicos** permitem **compor expressões** lógicas **mais** complexas a **partir** dos **símbolos** utilizados ou ainda de outras expressões;
  - Aos **símbolos proposicionais** são **atribuídos** os **valores-verdade**;
    - Por exemplo, se:
      - A = “Elefantes são grandes”;
      - Neste caso o **valor-verdade** atribuído à A é $\mathtt{V}$ (verdadeiro).
  - A **veracidade** de uma **expressão** contendo **conectivos lógicos** se dá com a **aplicação** destes **conectivos** aos **valores** dos **símbolos** proposicionais **e/ou resultados** de **subexpressões** de acordo com a **semântica** do **conectivo**.

Lógica formal

- **O conectivo lógico “e” (∧)**
  - Também conhecido como **conjunção** lógica;
  - O resultado de **A∧B** só é **verdadeiro** se **ambos** os termos forem verdadeiros;
  - **Tabela verdade**

A	B	A∧B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Lógica formal

- **O conectivo lógico "ou" (∨)**
  - Também conhecido como **disjunção** lógica;
  - O resultado de **A∨B** só é **falso** se **ambos** os termos forem falsos;
  - **Tabela verdade**

A	B	A∨B
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Lógica formal

- **O conectivo lógico "implicação" ($\rightarrow$)**
  - A verdade de **A implica** ou leva à verdade de **B**;
  - Também **lido** como "**se A então B**";
    - **A** é denominado de **antecedente**;
    - **B** é denominado de **consequente**.
  - **Tabela verdade**

A	B	A $\rightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Lógica formal

- **O conectivo lógico “implicação” ($\rightarrow$)**
  - **Explicação**
    - Considere a **sentença**: “Se eu me formar vou tirar férias na Flórida”;
      - Se o aluno se formar ($\boldsymbol{A}$) e tirar as férias na Flórida ($\boldsymbol{B}$), a sentença foi **verdadeira**. Logo, se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ forem **ambas verdadeiras**, considerar a **implicação** $A \rightarrow B$ **verdadeira**.
      - Se o aluno se formar ($\boldsymbol{A}$) e não tirar as férias na Flórida ($\boldsymbol{B}$), a sentença foi **falsa**. Logo, quando $\boldsymbol{A}$ é **verdadeira** e $\boldsymbol{B}$ é **falsa**, a **implicação** $A \rightarrow B$ é **falsa**;
      - Se o aluno não se formou, **independentemente** de ele tirar ou não férias na Flórida, não se pode afirmar que a sentença é falsa – entra o “**benefício da dúvida**”. Por **convenção**, aceita-se que $A \rightarrow B$ seja **verdadeira se** $\boldsymbol{A}$ **for falsa**, **independentemente** do valor verdade de $\boldsymbol{B}$.

Lógica formal

- **O conectivo lógico "equivalência" ($\leftrightarrow$)**
  - Trata-se de uma "dupla implicação":
    - $A \leftrightarrow B$ **equivale** à $(A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A)$
  - **Tabela verdade**

A	B	A $\leftrightarrow$ B
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Lógica formal

- **O conectivo lógico “negação” (¬)**
  - Resulta na **inversão lógica** da expressão;
  - É um conectivo **unário**.
  - **Tabela verdade**

A	¬A
V	F
F	V

Lógica formal

- **Fórmulas bem formadas**
  - **Expressões lógicas corretas** são denominadas de **fórmulas bem formadas** (**fbf**);
  - Assim, é necessário se estabelecer as **regras** (**sintaxe**) para se **escrever fbfs**:
    - **Alfabeto**
      - São as **letras** (símbolos proposicionais), **conectivos lógicos** ($\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$ e $\neg$), **parênteses** e V e F.
    - **Regras**
      - V e F são fbfs;
      - Um **símbolo proposicional é** uma fbf;
      - Se $\boldsymbol{A}$ é uma **fbf**, então $\neg A$ **também é** uma fbf;
      - Se $\boldsymbol{A}$ e $\boldsymbol{B}$ são **fbfs**, então **também são** $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$;
      - Se $\boldsymbol{A}$ é uma **fbf**, então **também é** (A).

Lógica formal

- **Fórmulas bem formadas**
  - A quantidade de **parênteses** em um fbf pode ser **reduzido** com a **adição** de **regras** de **precedência** para os conectivos:

Ordem	Conectivo
1	( )
2	¬
3	∧ , ∨
4	→
5	↔

  - **Conectivo principal**
    - É aquele que em uma fbf é **aplicado** por **último**.
    - **Exemplo**: ∧ é o conectivo principal em: $\boxed{\neg A \wedge (B \rightarrow C)}$

Lógica formal

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

- **Tautologia, contradição** e **equivalência lógica**
  - **Tautologia**
    - Uma **fbf** que é **sempre verdadeira** é uma **tautologia**:

$$\boxed{A \vee \neg A}$$

$$\boxed{(A \rightarrow B) \leftrightarrow (\neg B \rightarrow \neg A)}$$

  - **Contradição**
    - Uma **fbf** que é **sempre falsa** é uma **contradição**: $\boxed{A \wedge \neg A}$
    - **Equivalência lógica**
      - Se P e Q são duas **fbfs** e **concordam** em **valores verdade** então P e Q **são** fbfs **equivalentes**, $P \Leftrightarrow Q$.

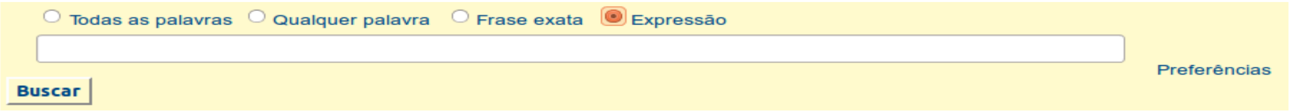
Equivalências famosas: Leis de DeMorgan

$$\boxed{\neg(A \vee B) \Leftrightarrow \neg A \wedge \neg B} \quad \boxed{\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B}$$

Lógica formal

- **Aplicações**
  - **Mecanismos de busca**

Conhecem?



  - **Algoritmos e programação**
    - Aplicação direta dos conectivos na tomada de decisão no controle do fluxo de algoritmos e programas que os implementam.

Lógica formal

- **Teste seus conhecimentos**
  1) Verificar que as fbfs a seguir são tautologias:

     $\boxed{(\neg B \wedge (A \rightarrow B)) \rightarrow \neg A}$ $\boxed{((A \rightarrow B) \wedge A) \rightarrow B}$

     $\boxed{(A \vee B) \wedge \neg A \rightarrow B}$ $\boxed{(A \rightarrow B) \wedge \neg B \rightarrow \neg A}$

  2) Prove que a definição do conectivo ⊕ (ou exclusivo) a seguir é uma tautologia:

     $$\boxed{A \oplus B \Leftrightarrow \neg(A \leftrightarrow B)}$$

     O "ou exclusivo" resulta em verdadeiro apenas quando os dois operandos possuem valores lógicos distintos.

  3) Sejam A, B e C as seguintes sentenças:
     - A: Rosas são vermelhas.
     - B: Violetas são azuis.
     - C: Açúcar é doce.

     Traduzir em notação simbólica: "Rosas são vermelhas apenas se as violetas não forem azuis e se o açúcar for azedo."