

# Série exponencial de Fourier

V. C. Parro e-mail: [vparro@maua.br](mailto:vparro@maua.br)

2 de março de 2020

## Objetivos Série exponencial de Fourier

Nesta atividade vamos fazer a análise de um sinal periódico determinando o termo da série exponencial  $D_n$ . Para verificarmos se o resultado é coerente vamos determinar a síntese do sinal  $g_s(t)$ , para um número  $N$  de harmônicas e comparar com o sinal original. A expectativa é que sejam praticamente iguais dependendo de  $N$ .

### 🌀 O sinal em análise - $g(t)$ 🌀

Um sinal periódico  $g(t)$  é definido pela equação 1 no intervalo  $0 \leq t \leq 1$  que representa exatamente a equação de um período deste sinal que equivale a  $T_0 = 1s$ .

$$g(t) = e^{-t} \quad (1)$$

### 🌀 Análise e síntese do sinal - $g(t)$ 🌀

Elabore um programa matlab que seja capaz de responder as seguintes questões:

1. Determine a potência do sinal  $g(t)$  utilizando a Equação 2

$$P_g = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t)^2 dt \quad (2)$$

2. Faça a **análise** em frequência do sinal  $g(t)$  determinando o termo  $D_n$  utilizando a Equação 3

$$D_n = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} g(t) e^{-jn\omega_0 t} dt \quad (3)$$

3. Para verificar a **síntese**  $g_s(t)$  e comparar com o sinal original, utilize a Equação 4 deixando o valor de  $N$  para que você possa observar a influência. Crie um gráfico sobrepondo o sinal original  $g(t)$  e o sinal sintetizado  $g_s(t)$ .

$$g_s(t) = \sum_{-N}^N D_n e^{jn\omega_0 t} \quad (4)$$

## Visualização da análise e síntese do sinal - $g(t)$

1. Crie três gráficos, sobrepondo o sinal original  $g(t)$  e o sinal sintetizado considerando  $N = 1$ ,  $N = 10$  e  $N = 100$ .
2. Utilizando o teorema de Parseval, determine a potência de cada uma das sínteses indicadas no item anterior e compare com a potência do sinal original  $g(t)$ .
3. Faça o gráfico dos espectros de amplitude e fase para cada uma das sínteses realizada no primeiro item.

## 1 Estudo de um caso

Supondo que o objetivo seja determinar a energia do sinal  $y(t)$  em um intervalo  $T_y$  que corresponde a seu período, pode-se utilizar a definição dada pela equação 5. **Como traduzir esta necessidade para linguagem Matlab?**

$$E_y = \int_{T_y} y(t)^2 dt \quad (5)$$

Vamos resolver o problema para um caso particular onde  $y(t) = A \sin(\omega t + \theta)$  resultando em 6.

$$E_y = \int_{T_y} y(t)^2 = (A \sin(\omega t + \theta))^2 dt \quad (6)$$

Primeiramente vamos criar um *script* matlab, que é essencialmente uma sequência de comandos em arquivo *texto* com extensão **".m"**. Observe como é simples gerar a função Matlab com a estrutura - **y = @(A,w,tempo,theta)**.

### Matlab - P013.m - Início e função

```
%% Domínio do tempo - manipulação literal %%
% vparro@ieee.org
% Janeiro 2018

clear;                                % limpa as variáveis
clc;                                  % limpa a tela
close all;                            % fecha todas as figuras

%% Criando uma função matlab para análise de sinais
% supondo um sinal harmônico do tipo senoidal
% é necessário "ensinar" ao Matlab o que é tempo

% Cria a função harmônica canônica

y = @(A,w,tempo,theta)               A*sin(w*tempo+theta)

% Onde:
%
% A      - amplitude do sinal
% w      - frequência angular do sinal
% tempo  - vetor de pontos em análise
% theta  - fase inicial
```

A segunda parte da função refere-se ao cálculo da integral descrita em 6 e determinação de seu valor numérico para um conjunto de restrições.

### Matlab - P013.m - cálculo literal

```
syms tempo % indica que a variável tempo será tratada como simbólica

% Configuração para deixar o código mais flexível

Ty = 10; % duração do sinal [s]
Fs = 1000; % número de pontos por segundo na duração [Hz]
Fy = 1/Ty; % frequência do sinal [Hz]
w = 2*pi*Fy; % frequência angular
theta=0; % controla a fase
A = 1; % amplitude

% determina a energia do sinal y

Ey = int(y(A,w,tempo,theta).^2,tempo,0,Ty)

% Variáveis numéricas

% Define o tempo numericamente

tempo = [0:1/Fs:Fy]; % vetor tempo

% converte a expressão obtida em valor numérico
Ey = eval(Ey);
```

## 2 Análise de Fourier

Como traduzir a equação 7 para linguagem Matlab?

$$D_n = \frac{1}{T_o} \int_{-\frac{T_o}{2}}^{-T_o/2} g(t) e^{-jn\omega_o t} dt \quad (7)$$

Se resolvermos utilizando a base do cálculo diferencial e integral temos como resultado a expressão 8. No caso podemos tanto resolver de form analítica utilizando o Matlab quanto simplesmente criar a função para o cálculo numérico do  $D_n$ .

$$D_n = \frac{A\tau}{T_o} \frac{\sin(n\omega_o \frac{\tau}{2})}{n\omega_o \frac{\tau}{2}} \quad (8)$$

```
%% Aplicando a definição da série de Fourier - Análise

syms tempo % indica que a variável tempo será tratada como simbólica

expr = A*exp(-j*n*wo*tempo); % expressão de integração

% int(expr,var,a,b)

Dn = int(expr,tempo,-tau/2,tau/2);
% integrando no tempo alto e considerando
% o restante nulo

Dn=eval(Dn); % Determina os coeficientes numericamente

figure(1)

stem(w,Dn); grid minor;
title('Coeficientes da série exponencial');
xlabel('frequência em rd/s'); ylabel('Volts')
```

### 3 Síntese de Fourier

Como traduzir a equação 9 para linguagem Matlab?

$$g_s(t) = \sum_{-N}^N D_n e^{jn\omega_o t} \quad (9)$$

### Matlab - P031.m - Síntese

```
%% Sintetizando o sinal no domínio do tempo
% Criando o vetor tempo correspondente a um período

tempo = [-To/2:To/100:To/2];          % resolução de To/100
aux = 0;

%% Fazendo a somatória

for k=-N:N

    k+N+1

    aux = aux + Dn(k+N+1)*exp(i*k*wo*tempo);

end

visualizando
figure(2)

plot(tempo,aux);
title('Síntese do sinal a partir dos coeficientes de Fourier');
xlabel('tempo em segundos'); ylabel('Volts')
```