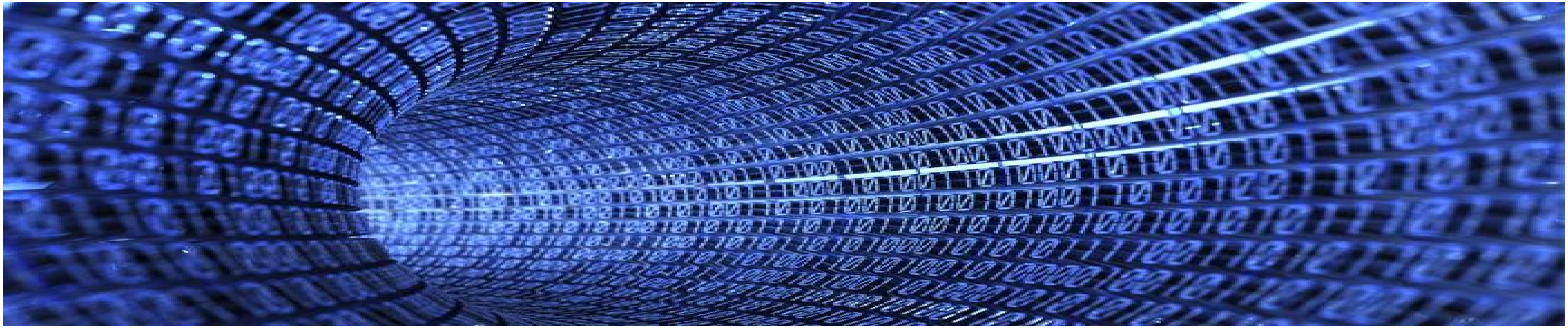
INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Curso de Engenharia de Computação
Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Relações e Funções



Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia – Escola de Engenharia Mauá
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza

Agenda

- Relações
- Funções

Agenda

- Relações
- Funções

Relações

Relação ou correspondência

- **Relações binárias**
  - Considere A e B **conjuntos não vazios**:
    - Uma **relação** R de A para B é um **subconjunto** de $A \times B$;
    - O **domínio** da **relação** é o **conjunto** definido por:

$$\boxed{\{x \mid x \in A \wedge (\exists y \in B)((x,y) \in R)\}}$$

    - O **contradomínio** da **relação** é o **conjunto** definido por:

$$\boxed{\{y \mid y \in B \wedge (\exists x \in A)((x,y) \in R)\}}$$

  - **Exemplo**:

$$A = \{a, b\},\ B = \{c, d\}$$
$$A \times B = \{(a,c), (a,d), (b,c), (b,d)\}$$
$$R = \{(a,d), (b,d)\}$$
$$\text{Domínio de } R: \{a, b\}$$
$$\text{Contradomínio de } R: \{d\}$$

Notações comuns para $(x,y) \in R$
- xRy
- $R(x,y)$

Relações

- **Relações binárias**
  - **Relação inversa de $\boldsymbol{R}$**
    - É o **conjunto** de **pares definido** por:

$$\boxed{R^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in R\}}$$

Calcule R^{-1} de $R=\{(1,2), (2,3), (1,3), (3,1)\}$

  - **Relação sobre $\boldsymbol{A}$**
    - Se $A=B$ **então** a **relação** é denominada **relação sobre $\boldsymbol{A}$**;
  - **Relação identidade $\boldsymbol{I_A}$ sobre $\boldsymbol{A}$ (ou apenas identidade)**
    - É o **conjunto**: $\boxed{I_A = \{(x, x) \mid x \in A\}}$
  - **Número de relações binárias sobre $\boldsymbol{A}$**
    - Se $|A|=n$, então $|A\times A=A^2|=n^2$. Assim, o **número máximo** de **relações distintas** que se pode **obter** de A^2 é igual à **cardinalidade** do **conjunto potência** de A^2:

$$\boxed{|\wp(A^2)| = 2^{n^2}}$$

Relações

- **Relações binárias**
  - **Número de relações binárias sobre A**
    - **Exemplo**: $\boxed{A = \{a, b\}}$

$$
\boxed{
\begin{array}{ll}
R_1 : \emptyset & R_9 : \{(a,b),(b,a)\} \\
R_2 : \{(a,a)\} & R_{10} : \{(a,b),(b,b)\} \\
R_3 : \{(a,b)\} & R_{11} : \{(b,a),(b,b)\} \\
R_4 : \{(b,a)\} & R_{12} : \{(a,a),(a,b),(b,a)\} \\
R_5 : \{(b,b)\} & R_{13} : \{(a,a),(a,b),(b,b)\} \\
R_6 : \{(a,a),(a,b)\} & R_{14} : \{(a,a),(b,a),(b,b)\} \\
R_7 : \{(a,a),(b,a)\} & R_{15} : \{(a,b),(b,a),(b,b)\} \\
R_8 : \{(a,a),(b,b)\} & R_{16} : \{(a,a),(a,b),(b,a),(b,b)\}
\end{array}
}
$$

Relações

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

- **Teste seus conhecimentos**

1) Seja: $X = \{2, 4, 6, 8\}$

   Escrever as relações:

   (a) $\{(x, y) | x, y \in X \wedge x < y\}$

   (b) $\{(x, y) | x, y \in X \wedge x | y\}$

   (c) $\{(x, y) | x \in X \wedge y \in \wp(X)\}$

   x|y é o mesmo que
   "x divide y"

2) Descrever a relação resultante da união das relações binárias "menor que" e "igual à" aplicada aos números naturais.

Relações

- **Relações binárias**
  - **Representações de relações binárias**
    - **Representação matricial**
      - As **linhas** são indexadas pelos elementos do **domínio**;
      - As **colunas** são indexadas pelos elementos do **contradomínio**;
      - Na **matriz**, o **valor** 1 (ou verdadeiro) indica que **há** uma **relação** entre os elementos, caso contrário o **valor** é 0;
      - **Exemplo**:

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$B = \{a, b, c\}$

$R = \{(1, a), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} a & b & c \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

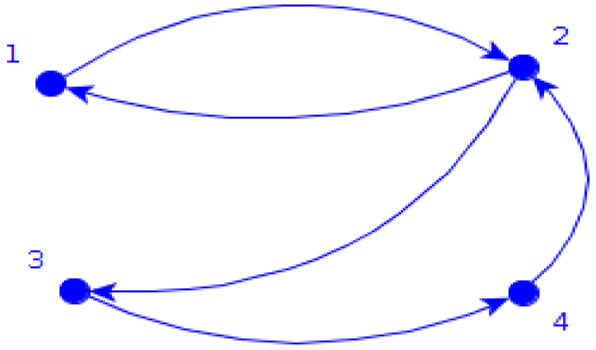
Também vale para relações sobre o mesmo conjunto!

Relações

- **Relações binárias**
  - **Representações de relações binárias**
    - **Representação por dígrafos**
      - **Relações sobre um mesmo conjunto**
        - Os **vértices representam** os **elementos** de A;
        - **Desenha-se** um **arco orientado** de a_i para a_j (onde a_i, $a_j \in A$) se o par $(a_i, a_j) \in R$.
      - **Exemplo**:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

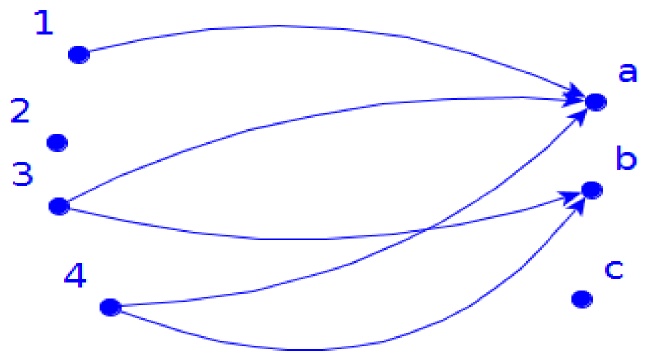
$$R = \{(1,2), (2,1), (2,3), (3,4), (4,2)\}$$



Relações

- **Relações binárias**
  - **Representações de relações binárias**
    - **Representação por dígrafos**
      - Relações entre dois conjuntos distintos
        - Os **vértices** do **digrafo representam** os **elementos** de $A \cup B$;
        - **Desenha-se** um **arco orientado** de a_i para b_j (onde $a_i \in A$ e $b_j \in B$) se o par $(a_i, b_j) \in R$.
      - **Exemplo**:

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$R = \{(1, a), (3, a), (3, b), (4, a), (4, b)\}$$



Relações

- **Relações em geral**
  - Além de relações binárias, pode-se definir **relações** com **diferentes** “**aridades**”:
    - **Relações unárias**: representam alguma propriedade que pode ser verdadeira ou falsa para cada elemento de um conjunto;
      - **Exemplo**: no **conjunto** $\mathbb{Z}$, a relação $primo(x)$ que é verdadeira para números que são primos e falsa, caso contrário.
    - **Relações n-árias**: inclui binárias, ternárias etc. Podem relacionar elementos de diversos conjuntos ou de um mesmo.
      - **Exemplo**: em **bancos de dados relacionais**, pode-se definir relações de diferentes aridades. Por exemplo, a relação $aluno(cpf,ra,nota)$ representa fatos sobre alunos de uma escola.

A forma de especificar uma relação como R(a,b,c) etc) é denominada de **prefixada**.

Relações

- **Teste seus conhecimentos**
  1) Considere a relação binária “menor ou igual à” sobre o conjunto {1,2,3}. Elaborar:
     a) Representação matricial equivalente;
     b) Representação por digrafo equivalente.

Relações

- **Propriedades das relações**
  - **Relação reflexiva**
    - Uma **relação** R **sobre** um **conjunto** S é **reflexiva** se e somente se:

$$\boxed{(\forall x \in S)((x, x) \in R)}$$

  - **Exemplos**
    - A **relação** de **"igual à"** nos números inteiros **é** uma relação reflexiva;
    - A **relação** "**divisível por**" nos números inteiros **é** uma relação reflexiva;
    - A **relação** "**menor que**" nos números inteiros **não é** uma relação reflexiva.

Relações

- **Propriedades das relações**
  - **Relação antirreflexiva**
    - Uma **relação** R **sobre** um **conjunto** S é **antirreflexiva** se e somente se:

$$\boxed{(\forall x \in S)((x, x) \notin R)}$$

  - **Exemplos**
    - A **relação** de **"maior que"** nos números inteiros **<u>é</u>** uma relação antirreflexiva;
    - A **relação** "**divisível por**" nos números inteiros **<u>não é</u>** uma relação antirreflexiva.

Relações

- **Propriedades das relações**
  - **Relação simétrica**
    - Uma **relação** R **sobre** um **conjunto** S é **simétrica** se e somente se:

$$\boxed{(\forall(x, y) \in R)((y, x) \in R)}$$

  - **Exemplos**
    - A **relação** "**igual à**" nos números inteiros <u>**é**</u> uma relação simétrica;
    - A relação "**casado com**" sobre um conjunto de pessoas <u>**é**</u> uma relação simétrica;
    - A relação "**maior que**" nos números inteiros <u>**não é**</u> uma relação simétrica.

Relações

- **Propriedades das relações**
  - **Relação antissimétrica**
    - Uma **relação** R **sobre** um **conjunto** S é **antissimétrica** se e somente se:

$$\boxed{(\forall x \forall y)(R(x,y) \wedge x \neq y \rightarrow \neg R(y,x))}$$

ou ainda

$$\boxed{(\forall x \forall y)(R(x,y) \wedge R(y,x) \rightarrow x = y)}$$

  - **Exemplos**
    - A relação “**chefe de**” sobre um conjunto de funcionários **é** uma relação antissimétrica;
    - A relação “**maior que**” nos números inteiros **é** uma relação antissimétrica.
    - A **relação** “**igual à**” nos números inteiros **não é** uma relação antissimétrica.

Relações

- **Propriedades das relações**
  - **Relação transitiva**
    - Uma **relação** R **sobre** um **conjunto** S é **transitiva** se e somente se:

$$\boxed{(\forall (x, y), (y, z) \in R)((x, z) \in R)}$$

  - **Exemplos**
    - A relação "**chefe de**" sobre um conjunto de funcionários <u>**é**</u> uma relação transitiva;
    - A relação "**maior que**" nos números inteiros <u>**é**</u> uma relação transitiva.
    - A **relação** "perpendicular **à**" sobre o conjunto de retas <u>**não é**</u> uma relação transitiva.

Relações

- **Teste seus conhecimentos**
  1) Classificar as relações a seguir, definidas sobre $S = \{0,1,2,4,6\}$, em reflexiva (**R**), simétrica (**S**), transitiva (**T**), ou antissimétrica (**AS**):
     (a) $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(0,1),(1,2),(2,4),(4,6)\}$
     (b) $R = \{(0,1),(1,0),(2,4),(4,2),(4,6),(6,4)\}$
     (c) $R = \{(0,0),(1,1),(2,2),(4,4),(6,6),(4,6),(6,4)\}$

Relações

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

- **Composição de relações**
  - Sejam A, B, C três **conjuntos** e R e S as **relações**:

$$\boxed{R \subseteq A \times B} \qquad \boxed{S \subseteq B \times C}$$

  - A **composição das relações** R e S, $R \circ S \subseteq A \times C$,é assim **definida**:

$$\boxed{R \circ S = \{(a,c) \mid a \in A \wedge c \in C \wedge (\exists b \in B)(R(a,b) \wedge S(b,c))\}}$$

  - **Então**:

$$\begin{aligned} R^0 &= I_A \\ R^1 &= R \\ R^2 &= R \circ R \\ &\ldots \\ R^n &= \overbrace{R \circ R \circ \ldots \circ R}^{n \text{ vezes}} \end{aligned}$$

Tem sentido?
$R^{-1} \circ R^{-1} = R^{-2}$

Para relações binárias Em geral:
$R^{-1} \circ R \neq I_A$

Confira com R={(1,2), (2,3), (1,3), (3,1)}

Relações

- **Fecho transitivo**
  - **Fecho transitivo**
    - É o conjunto definido por:

$$\boxed{R^{+} = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^{n}}$$

  - **Fecho transitivo reflexivo**
    - É o conjunto definido por:

$$\boxed{R^{*} = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^{n}}$$

Relações

- **Fecho transitivo**
  - **Exemplo**
    - Considere a seguinte **relação** sobre $A=\{a,b,c\}$:

$$R = \{(a,b),(b,a),(b,c)\}$$

    - **Calculando**:

$$R^0 = I_A = \{(a,a),(b,b),(c,c)\}$$
$$R^1 = R^0 \circ R = \{(a,b),(b,a),(b,c)\}$$
$$R^2 = R \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,b)\}$$
$$R^3 = R^2 \circ R = \{(a,b),(b,a),(b,c)\}$$
$$R^4 = R^3 \circ R = \{(a,a),(a,c),(b,b)\}$$
$$\ldots \text{ e?}$$

não acrescenta mais nada

é o que importa …

$$R^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} R^n = \{R_0 \cup R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_4 \cup \ldots\}$$
$$= \{R_0 \cup R_1 \cup R_2\}$$
$$= \bigcup_{n=0}^{2} R^n = \bigcup_{n=0}^{|A|-1} R^n$$
$$= \{(a,a),(b,b),(c,c),(a,b),(b,a),(b,c),(a,c)\}$$

Relações

- **Fecho transitivo**
  - **Explicação**
    - As **relações** $R^0, R^1, \ldots, R^k, \ldots$ representam **formas** de como **elementos** de A podem respectivamente se **interligar** com **elementos** de A, passando por $0, 1, \ldots k, \ldots$ **ligações**;
    - Cada relação $R^0, R^1, \ldots, R^k$, por exemplo, **representa** os **possíveis caminhos** para **sair** de um **elemento** a_i e chegar a um **elemento** a_j qualquer por um **encadeamento** de **tamanho** $0<=r<=k$;
    - Mas, se o **conjunto** A em que a **relação** R foi definida possui $n=|A|$ **elementos** e se existe algum **caminho** entre um **elemento** a_i e um **elemento** a_j, por meio de R^r este **caminho possui** um **comprimento** r que é **certamente** menor que n pois, no **máximo**, são **necessários** $r<n$ ligações para **sair** de qualquer **elemento** a_i e **chegar** em qualquer **elemento** a_j.

Relações

- **Fecho transitivo**
  - **Explicação**
    - Assim, basta fazer a **união** de R^0, R^1, ..., R^k, ..., $R^{|A|-1}$ para se calcular o **fecho transitivo** – a **união** de **relações** de **potências superiores** a $|A|$-1 **não acrescentam** mais nenhuma “novidade” neste resultado – são **redundantes**;
    - **Explicação similar** vale para o **fecho transitivo comum**;
    - Isto é **valido** apenas para **relações finitas**!

Relações

- **Fecho transitivo – conclusão**
  - **Para relações finitas**
    - **Fecho transitivo**

$$\boxed{R^{+} = \bigcup_{n=1}^{|A|-1} R^{n}}$$

    - **Fecho transitivo reflexivo**

$$\boxed{R^{*} = \bigcup_{n=0}^{|A|-1} R^{n}}$$

Relações

- **Teste seus conhecimentos**

1) Seja V={1,2,3,4,5,6} e R a relação binária sobre V que representa como um elemento $v_i \in V$ pode "alcançar" um elemento $v_j \in V$: R = {(1,2),(1,3),(2,4),(2,5),(3,5),(4,6),(5,4),(5,6)}.
   (a) Elabore a representação matricial de R;
   (b) Elabore a representação matricial de $R*$;

Relações

- **Ordem parcial**
  - Uma **relação binária** sobre um **conjunto** S que é **reflexiva**, **antissimétrica** e **transitiva** é denominada **ordem parcial** sobre S;
  - **Exemplos** de ordem parcial:

$$\boxed{R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x \leq y\}}$$

$$\boxed{R = \{(x, y) | x, y \in \wp(\mathbb{N}) \land x \subseteq y\}}$$

$$\boxed{R = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^+ | x \text{ divide } y\}}$$

- **Ordem parcial fraca**: a relação é reflexiva, antissimétrica e transitiva;
- **Ordem parcial estrita**: a relação é antirreflexiva, antissimétrica e transitiva;

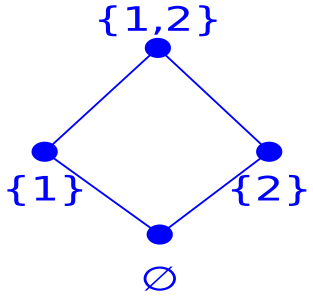
Relações

- **Ordem parcial**
  - Um conjunto S **parcialmente ordenado** por uma **relação** ρ é denominado de **conjunto parcialmente ordenado** ou **cpo** e é indicado pelo **par** (S,ρ) ou, de modo genérico, $(S,\preccurlyeq)$ ($\preccurlyeq$ pode ser "menor ou igual à", "é subconjunto de", "divide por" etc);
  - Se A é um **subconjunto** de S, ele forma uma **restrição** de $\preccurlyeq$ para A e é uma **ordem parcial sobre** A;
  - Se $(S,\preccurlyeq)$ é um **cpo** e se $x\preccurlyeq y$ (para $(x,y) \in S^2$), então ou $x=y$ ou $x\neq y$. Agora, se $x\preccurlyeq y$ mas $x\neq y$, então escreve-se $x\prec y$ e:
    - x é **predecessor** de y;
    - y é **sucessor** de x.
    - E se não existe z tal que $x\prec z\prec y$, então x é **predecessor imediato** de y.

Relações

- **Ordem parcial**
  - **Diagrama de Hasse**
    - É uma **representação gráfica** de um **cpo** $(S,\preccurlyeq)$;
    - Cada **elemento** de S é **escrito** como um **vértice** e para **dois elementos** $x \prec y$, y é **escrito acima** de x e eles são **ligados** por uma **linha**;
    - **Exemplo**:
      - Se $S = \{1,2\}$ e se ρ ou $(\preccurlyeq)$ é a relação $\subseteq$ definida sobre $\wp(S)$, então:

$$\boxed{\begin{aligned}\rho = \{&(\varnothing,\varnothing),(\{1\},\{1\}),(\{2\},\{2\}),(\{1,2\},\{1,2\}),(\varnothing,\{1\}),(\varnothing,\{2\}),\\ &(\varnothing,\{1,2\}),(\{1\},\{1,2\}),(\{2\},\{1,2\})\end{aligned}}$$

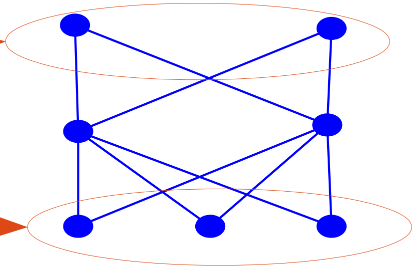


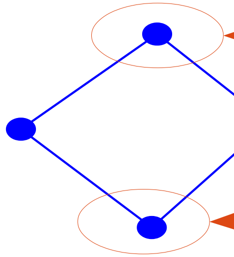
Relações

- **Ordem parcial**
  - **Elementos mínimo e minimal de um cpo**
    - Seja $(S, \preccurlyeq)$, um **cpo**. Se existe um $y \in S$ com $y \preccurlyeq x$ para todo $x \in S$ então y é o **elemento mínimo** do cpo. **Se** ele **existir**, é **único**;
    - Um elemento $y \in S$ é **minimal** se não existe $x \in S$ com $x \prec y$.
    - Um elemento mínimo de um cpo é sempre minimal.
  - **Elementos máximo e maximal de um cpo**
    - São definidos de modo similar.

2 maximals,
nenhum máximo

3 minimals,
nenhum mínimo



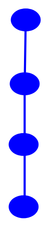


1 máximo, nenhum
maximal

1 mínimo, nenhum
minimal

Relações

- **Ordem total**
  - Uma **ordem total** é aquela tal que todo elemento de um conjunto S está **relacionado** a **todo** outro **elemento** de S;
  - Por exemplo, a **relação** binária $\leq$ em $\mathbb{N}$ é uma **ordem total** pois **todo par** $(x,y) \in N^2$ está **relacionado segundo** $\leq$;
  - Uma **ordem total** é **também denominada** de **cadeia** pois seu diagrama de **Hasse** possui a forma:



Relações

- **Relação de equivalência**
  - **Relação** de **equivalência** é uma **relação binária** que é:
    - **Simétrica**;
    - **Reflexiva**;
    - **Transitiva**.
  - São **importantes**, **pois**, entre outras aplicações:
    - Permitem **categorizar elementos** que **seguem** algum **tipo** de "**padrão**" – conceito empregado em **compiladores** e **interpretadores** para se determinar o que é palavra reservada, operador ou identificador;
    - **Conceito** empregado na **inferência** do **tipo** de **expressões** em interpretadores e compiladores.

Relações

- **Relação de equivalência**
  - **Exemplos**

$$\boxed{R = \{(x, y) \in S^2 | x = y\}}$$

$$\boxed{R = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2 | x + y \text{ é par}\}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \{(x, y) | \text{x e y são linhas em um plano} \\ \quad \text{e x é paralela ou coincide com y}\} \end{array}}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} R = \{(x, y) | \text{x e y são alunos sentados na mesma} \\ \quad \text{fila de uma sala de aula}\} \end{array}}$$

Relações

- **Partições de um conjunto**
  - **Definição**
    - Seja A um **conjunto finito** e e $A_1, \dots A_m$ **subconjuntos** de A tal que $A_i \neq \emptyset$ para todo i e $A_i \cap A_j = \emptyset$ para $i \neq j$ e que

$$\boxed{A = \bigcup_{i=1}^{m} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_m}$$

    - Neste caso, os **conjuntos** A_i **particionam** o **conjunto** A e esses conjuntos são **denominados** de **blocos** ou **classes** da **partição apresentada**.
    - Em geral, pode-se utilizar como **índice elementos** de um **conjunto** I, **possivelmente infinito**: $\boxed{A = \bigcup_{i \in I} A_i}$
    - A **partição consiste**, portanto, de **subconjuntos mutualmente disjuntos** e cuja **união** é **igual** a A.

Relações

- **Classe de equivalência**
  - **Definição**
    - Seja ρ uma **relação** de **equivalência** sobre um **conjunto** S e que $x \in S$;
    - Considerando $[x]$ a **notação** para o **conjunto** de **todos** os **membros** de S que estão **relacionados** a x por ρ, $[x]$ é denominado classe de equivalência de x:

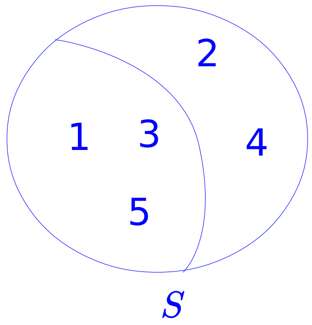
$$\boxed{[x] = \{y \mid y \in S \wedge x\rho y\}}$$

    - **Teorema**

      "Se ρ é uma relação de equivalência sobre um conjunto S, então o **conjunto** de **todas** as **classes** de **equivalência** de S, $[S]=\{[s] \mid s \in S\}$, **forma uma partição** sobre S."

Relações

- **Classe de equivalência**
  - Exemplo
    - Se $S=\{1,2,3,4,5\}$ e ρ representa a **relação** de **equivalência** $x+y$ é **par**, sendo $x,y \in S$, então:
      - $[1]=\{1,3,5\}$
      - $[2]=\{2,4\}$
      - $[3]=\{1,3,5\}$
      - $[4]=\{2,4\}$
      - $[5]=\{1,3,5\}$



    - Então:
      - $[S]=\{\{1,3,5\},\{2,4\}\}$

Agenda

- Relações
- Funções

Funções

- **Definição**
  - Sejam A e B **dois conjuntos não vazios**;
  - Uma **função** f de A **para** B é uma **relação** de A **para** B **possuindo** as seguintes **propriedades**:
    - O **domínio** de f , $Dom(f)$, é A;
    - Se (x,z) e $(x,w) \in f$, então $z=w$.
  - Uma **função** é uma **regra**:
    - "Se x **pertence** ao **domínio** de f, **existe** um **único** y tal que $(x,y) \in f$". Esta frase é resumida como: $f(x)$;
    - O elemento x na função é denominado **argumento**;
    - O elemento y é denominado **imagem** de x na função.

Funções

- **Notação**
  - Para **funções**, **<u>não</u>** se **costuma utilizar** a **notação** de **relação**, $x\ f\ y$ ou $f(x,y)$;
  - Em seu lugar, **utiliza**-se a **notação consagrada** por **Euler** em **1734**, $y=f(x)$, onde y é o valor produzido pela **aplicação** da **função** f sobre x (**argumento**). Esta notação **pode** ser **ampliada** para **mais argumentos**;
  - Uma **função** também é **conhecida como mapa** e pode ser **lida assim**: f mapeia A para B. Assim, também é comum a notação:

    f: $A \rightarrow B$

    - E, para qualquer $x \in A$: $x \mapsto f(x)$

Euler

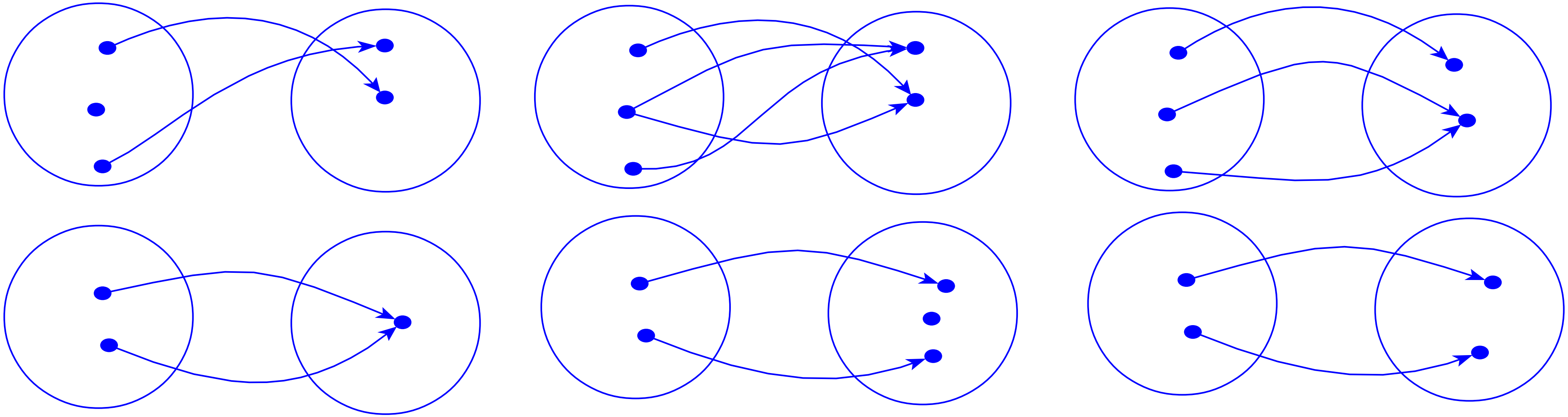
Funções

- **Teste seus conhecimentos**
  1) **Para cada** uma das **relações** a **seguir**, **responder qual**(**ais**) **é** (**são**) também **função**(**ões**):

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$
$$B = \{a, b, c\}$$
$$R_1 = \{(1, a), (2, b), (2, c), (3, c), (4, b)\}$$
$$R_2 = \{(1, a), (2, b), (4, b)\}$$
$$R_3 = \{(1, a), (2, a), (2, c), (3, c), (4, c)\}$$

Funções

- **Teste seus conhecimentos**
  1) Das relações a seguir, quais são funções e quais não são funções?

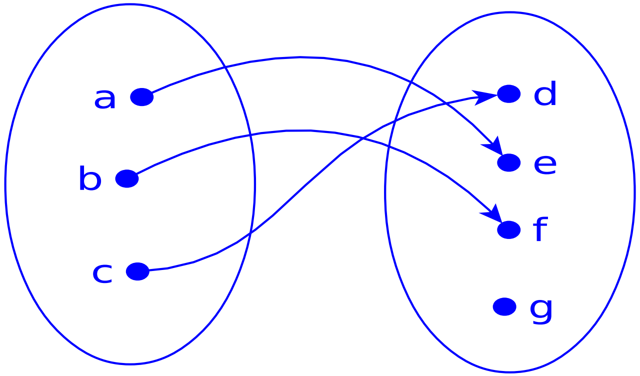


Funções

- **Classificação das funções**
  - **Função injetora**
    - **Considere** uma **função** f de A **para** B. A **função** f é **injetora** ou (“um para um”) **se** e **somente se**:

$$\boxed{f(x) = f(y) \rightarrow x = y}$$

    - **Exemplo**

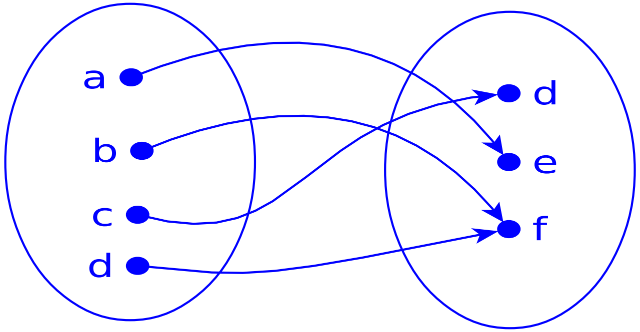


Funções

- **Classificação das funções**
  - **Função sobrejetora**
    - **Considere** uma **função** f de A **para** B. A **função** f é **sobrejetora se** e **somente se** a **imagem** de f for **igual** ao **contradomínio** da função:

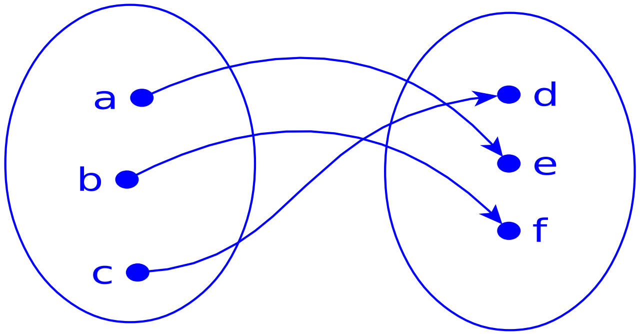
$$\boxed{Im(f) = B}$$

    - **Exemplo**



Funções

- **Classificação das funções**
  - **Função bijetora**
    - Uma **função** f de A **para** B é **bijetora** se ela é **simultaneamente injetora** e **sobrejetora**;
    - Isto **equivale** a dizer que, para cada $b \in B$, **existe um único** $a \in A$ com $b = f(A)$.
    - **Exemplo**



Funções

- **Número de funções sobre A**
  - Relações binárias que são funções
    - Exemplo:

$$\boxed{A = \{a, b\}}$$

$R_1 : \varnothing$

$R_2 : \{(a,a)\}$

$R_3 : \{(a,b)\}$

$R_4 : \{(b,a)\}$

$R_5 : \{(b,b)\}$

$\cancel{R_6} : \cancel{\{(a,a),(a,b)\}}$

$R_7 : \{(a,a),(b,a)\}$

$R_8 : \{(a,a),(b,b)\}$

$R_9 : \{(a,b),(b,a)\}$

$R_{10} : \{(a,b),(b,b)\}$

$\cancel{R_{11}} : \cancel{\{(b,a),(b,b)\}}$

$\cancel{R_{12}} : \cancel{\{(a,a),(a,b),(b,a)\}}$

$\cancel{R_{13}} : \cancel{\{(a,a),(a,b),(b,b)\}}$

$\cancel{R_{14}} : \cancel{\{(a,a),(b,a),(b,b)\}}$

$\cancel{R_{15}} : \cancel{\{(a,b),(b,a),(b,b)\}}$

$\cancel{R_{16}} : \cancel{\{(a,b),(a,b),(b,a),(b,b)\}}$

Funções

- **Quantas funções?**
  - Considere **dois conjuntos** S e T com $|S| = m$ e $|T| = n$.
    (a) Assumir que as **funções não possuam nenhuma propriedade especial**. Neste caso, **cada elemento** de S (tem m elementos) tem que ser ser **mapeado** a **algum elemento** de T (tem n possibilidades). **Então**:

$$\boxed{\underbrace{n \times n \times \ldots \times n}_{m \text{ fatores}} = n^m}$$

Funções

- **Quantas funções?**
  - Considere **dois conjuntos** S e T com $|S| = m$ e $|T| = n$.

    (b) Assumir que as **funções** sejam **injetoras**. Neste caso, é obrigatório que $m \leq n$ e que **não hajam dois valores** do **conjunto domínio mapeados** para um **mesmo valor** de **imagem**. Repetindo o raciocínio anterior:

$$\boxed{\underbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-m+1)}_{m \text{ fatores}} = \frac{n!}{(n-m)!}}$$

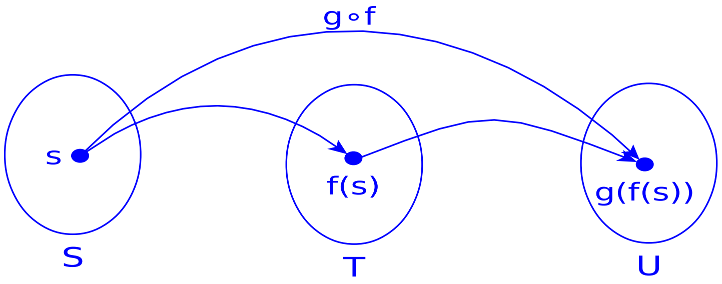
Funções

- **Quantas funções?**
  - Considere **dois conjuntos** S e T com $|S| = m$ e $|T| = n$.
    - (c) Assumir que as **funções** sejam **sobrejetoras**. Neste caso, **deve-se ter** $m \geq n$ (deve haver **valores suficientes** na **pré-imagem** para serem **associados** com **valores** da **imagem**);
    - Neste caso, deve-se apelar para o **princípio** da **inclusão** e exclusão e utilizar **análise combinatória**. O resultado (a prova está na bibliografia) é:

$$\boxed{n^m - C(n,1)(n-1)^m + C(n,2)(n-2)^m - C(n,3)(n-3)^m + \ldots + (-1)^{n-1}C(n,n-1)(1)^m}$$

Funções

- **Composição de funções**
  - Suponha que f e g sejam **funções** com f:S→T e g:T→U. Então, para **qualquer** $s \in S$, $f(s)$ é um **membro** de T, que também é **domínio** de g;
  - Portanto a **função** g pode ser **aplicada** à $f(s)$ e seu **resultado** é $g(f(s))$, um **membro** de U;



  - Com isso, criou-se a **função** S→U, denominada **composição** de f e g e escrita como $g \circ f$.

Funções

- **Inversa de uma função**
  - A **função** f:$A \rightarrow B$ é **inversível** se existir uma **função** g:$B \rightarrow A$ tal que $g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$;
  - A **notação** para a **função inversa** de uma função f é f^{-1};
  - **Teorema**
    - "A função f:$A \rightarrow B$ é **inversível** se e somente se f é **bijetora**".
- **Igualdade de funções**
  - Duas **funções** são **iguais** se elas possuem o **mesmo domínio**, o **mesmo contradomínio** e a **mesma associação** de **valores** do **contradomínio com** valores do **domínio**.

Referências Bibliográficas

- GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 538 p. ISBN 85-216-1263-X.