

Curso de Engenharia de Computação

ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Modelos de computação – Máquinas de Turing



Agenda

- Máquinas de Turing
- Aceitação de linguagens

Agenda

- Máquinas de Turing
- Aceitação de linguagens

Máquinas de Turing

■ Conceitos

Definição. Uma **máquina de Turing**¹ é uma *quíntupla* $M = \{Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0\}$ onde:

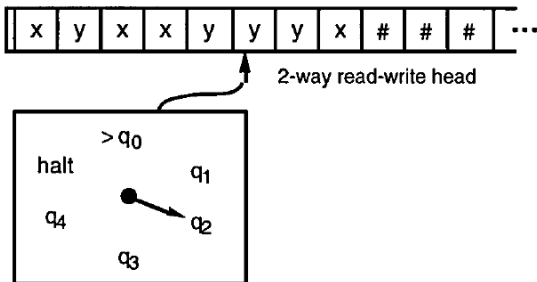
- Q é um conjunto finito de **estados**;
- Γ é um conjunto finito denominado **alfabeto da fita**, contendo um símbolo especial, #, que representa “**branco**”;
- Σ é um subconjunto de $\Gamma - \{\#\}$ denominado **alfabeto de entrada**;
- δ é uma **função parcial** de $Q \times \Gamma$ para $Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ denominada **função de transição**;
- $q_0 \in Q$ é o estado inicial.

¹Ou máquina de Turing padrão

Máquinas de Turing

■ Conceitos

- Uma máquina de Turing é uma **máquina de estados finitos** na qual uma transição imprime um símbolo sobre uma **fita** contendo **infinitas células**:



- A **cabeça da fita** pode se **mover** tanto para a **direita** (R) quanto para a **esquerda** (L) permitindo a máquina ler/gravar sobre a fita quantas vezes for necessário.

Máquinas de Turing

■ Computação

- Para **iniciar uma computação**, uma **cadeia de entrada** é escrita a partir da **extremidade esquerda** da fita e seu restante é preenchido por **brancos**;
- A **cabeça** de leitura/gravação é **posicionada** sobre o **símbolo** mais à **esquerda** da cadeia;
- Sempre que a máquina **ler um símbolo** b sobre a cadeia de entrada, enquanto no estado q , sua lógica interna produz a tripla $\delta(q, b) = (p, c, D)$, de modo que o há uma **mudança de estado** para o estado p com a **substituição do símbolo** b por c e a **movimentação da cabeça** de leitura/gravação para uma **célula** na direção D , $D \in \{L, R\}$, sobre a qual estará **pronta** para ler o **próximo símbolo**;
- Uma computação **para** quando se encontra um par de estado e símbolo de entrada para o qual não há uma transição definida;
- Uma transição da célula zero para esquerda leva à uma **terminação anormal**.

Máquinas de Turing

■ Representação tabular

- Uma máquina de Turing com m estados e n símbolos é denominada de **máquina de Turing** $m \times n$;
- Assim uma máquina de Turing $m \times n$ pode ser representada por uma **tabela** contendo m **linhas**, que são seus **estados**, e n **colunas**, que são os símbolos de entrada (Γ);
- A **entrada** em uma linha q e **coluna** b é o **valor da função** $\delta(q, b)$, (p, c, D) , ou um **estado de parada** h (alguns autores deixam esta entrada simplesmente indefinida);

Máquinas de Turing

■ Representação tabular

– Exemplo

δ	#	a	b
q_0	$q_1, \#, R$		
q_1	$q_2, \#, L$	q_1, b, R	q_1, a, R
q_2		q_2, a, L	q_2, b, L

– Simular com a entrada a seguir: #abab#:

q_0 #abab#

q_1 #abab#

q_1 #bbab#

q_1 #baab#

q_1 #babb#

q_1 #baba#

q_2 #baba#

q_2 #baba#

q_2 #baba#

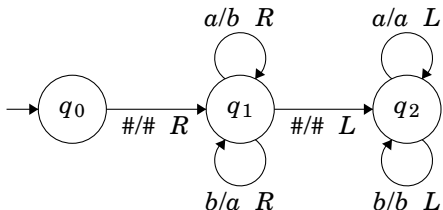
q_2 #baba#

q_2 #baba#

Máquinas de Turing

■ Representação por diagrama de estados

- O **diagrama de estados** representativo de uma máquina de Turing é assim definido:
 - **Vértices** são rotulados com **nomes de estados**, com **destaque** do **estado inicial**;
 - Um **arco** orientado é **desenhado** do vértice q_i para o vértice q_j e rotulado com $x/y d$ se houver uma **transição** $\delta(q_i, x) = (q_j, y, s)$.
- **Exemplo**



Máquinas de Turing

■ Configuração de máquina

- Uma configuração de máquina consiste em **um estado**, **a fita** e **posição da cabeça** de leitura/gravação;
- Em **qualquer passo** de uma computação em uma máquina de Turing, **somente** um **segmento finito** da fita **é não branco**;
- Uma **configuração** é **escrita** como $uq_iv\#$ onde todas as posições à direita de $\#$ são brancas e uv é a cadeia não branca escrita na fita (possivelmente com brancos em seu interior);
- A notação $uq_iv\#$ indica que a máquina está no **estado** q_i e está **lendo** o **primeiro símbolo** de v e a **fita** inteira à **direita** de uv é $\#$;
- A utilização de configuração facilita acompanhar as computações de uma máquina de Turing.

Máquinas de Turing

■ Configuração de máquina

- A notação $uq_iv \vdash_M xq_jy\#$ indica que a configuração $xq_jy\#$ é obtida de $uq_iv\#$ por uma simples transição da máquina M ;
- A notação $uq_iv \vdash_M^* xq_jy\#$ indica que a configuração $xq_jy\#$ é obtida de $uq_iv\#$ por um número finito, possivelmente zero, de transições;
- **Exemplo**

$q_0\#abab\#$

$\vdash \#q_1abab\#$

$\vdash \#bq_1bab\#$

$\vdash \#baq_1ab\#$

$\vdash \#babq_1b\#$

$\vdash \#babaq_1\#$

$\vdash \#babq_2a\#$

$\vdash \#baq_2ba\#$

$\vdash \#bq_2aba\#$

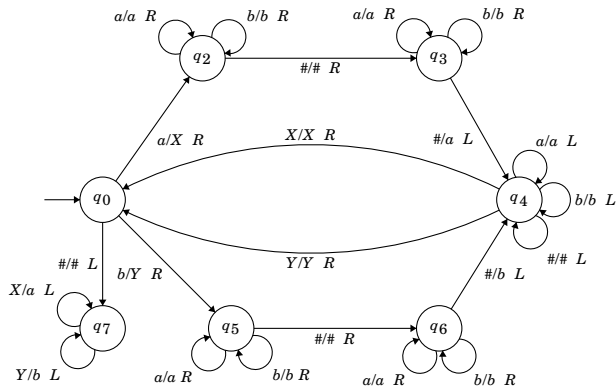
$\vdash \#q_2baba\#$

$\vdash q_2\#baba\#$

Máquinas de Turing

Exemplo

- A máquina descrita a seguir faz uma cópia da cadeia u presente na fita, $\#u\#$, terminando com a configuração $\#u\#u\#$:



Agenda

- Máquinas de Turing
- Aceitação de linguagens

Aceitação de linguagens

■ Conceitos

- Máquinas de Turing podem ser projetadas para **aceitar linguagens** e **computar funções**;
- O **resultado** de uma **computação** pode ser definido em termos do **estado** no qual a **computação termina** ou a **configuração da fita** no **final** da **computação**;
- No caso de aceitação ou rejeição de cadeias, define-se que a computação aceitou ou rejeitou uma cadeia se ela levar a máquina a um **estado final**;
- Neste caso, **estende-se a máquina de Turing** com um conjunto de **estados finais**, F , definindo-a como uma sêxtupla $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$, onde $F \subseteq Q$.

Aceitação de linguagens

Definição. *Seja $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, F)$ uma máquina de Turing. Uma cadeia $u \in \Sigma^*$ é **aceita por estado final** se a computação de M com entrada u parar em um estado final. Uma computação que termina diferentemente rejeita a entrada, não importando o estado em que terminar. A linguagem de M , denotada por $L(M)$, é o conjunto de todas as cadeias aceitas por M .*

Aceitação de linguagens

■ Conceitos

- Uma linguagem aceita por uma máquina de Turing é chamada de **linguagem recursivamente enumerável**;
- Como a máquina de Turing pode se mover em ambas as direções e processar brancos, é **possível** que a máquina **possa não parar** para uma entrada particular;
- **Possíveis resultados** de uma computação com máquina de Turing:
 - Parar e aceitar a cadeia;
 - Parar e rejeitar a cadeia;
 - Não parar.
- Então, uma máquina M reconhece L se ela aceita L mas não necessariamente para com todas as entradas.

Aceitação de linguagens

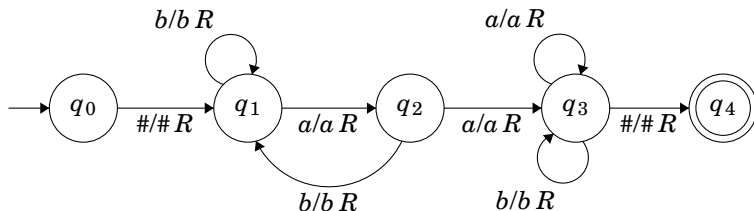
■ Conceitos

- Uma **linguagem aceita** por uma máquina de Turing é dita ser **recursiva**;
- Se as computações param para todas as entradas, então a máquina é também um dispositivo que **decide** a linguagem;
- A existência de uma máquina de Turing que para em todas as entradas é suficiente para mostrar que a pertinência na **linguagem** é **decidível** e que a linguagem é **recursiva**;
- No entanto, existem linguagens que são reconhecidas por uma máquina de Turing mas que não decididas por qualquer máquina de Turing.

Aceitação de linguagens

Exemplo

- A máquina M descrita a seguir aceita a linguagem $(a \cup b)^* aa(a \cup b)^*$:



- Por exemplo, a cadeia $aabb$ é aceita, conforme as derivações a seguir. Esta linguagem é recursiva – as computações de M param para toda cadeia de entrada.

$q_0 \# aabb \#$

$\vdash \# q_1 aabb \#$

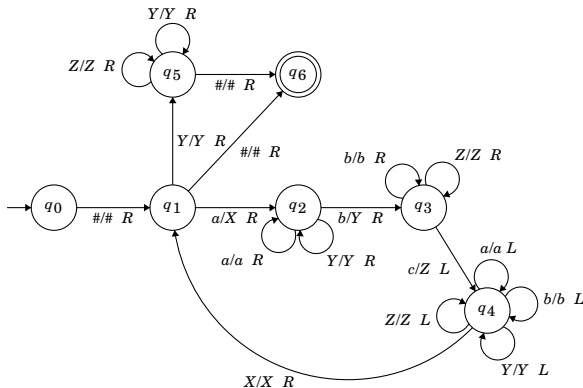
$\vdash \# a q_2 aabb \#$

$\vdash \# aa q_3 bb \#$

Aceitação de linguagens

Exemplo

- A linguagem $L = \{a^i b^i c^i | i \geq 0\}$ é aceita pela máquina de Turing a seguir:



Aceitação de linguagens

■ Variações da Máquina de Turing

- Pode-se determinar máquinas de Turing padrão para as variações da máquina de Turing a seguir:
 - **Máquinas de Turing com múltiplas trilhas:** possuem fita com mais de uma trilha em paralelo;
 - **Máquinas de Turing de dois caminhos:** a cabeça de leitura e gravação não é limitada à esquerda;
 - **Máquinas de Turing multi-fita:** possuem mais de uma fita;
 - **Máquinas de Turing não-determinísticas:** permitem não-determinismo na função de próximo estado.

Exercícios

1. Seja M a máquina de Turing definida por:

δ	#	a	b	c
q_0	$q_1, \#, R$			
q_1	$q_2, \#, L$	q_1, a, R	q_1, c, R	q_1, c, R
q_2		q_2, c, L		q_2, b, L

Pede-se:

- Traçar a computação para a cadeia de entrada $aabca$.
- Traçar a computação para a cadeia de entrada $bcbcb$.
- Desenhar o diagrama de estados de M .
- Descrever o resultado de uma computação em M .

Exercícios

2. Construir uma máquina de Turing com alfabeto de entrada $\{a, b\}$ para aceitar as linguagens $\{uu^R \mid u \in \{a, b\}^*\}$.
3. Construir uma máquina de Turing com alfabeto de entrada $\{a, b, c\}$ que aceite cadeias nas quais o primeiro c é precedido pela cadeia aaa . Uma cadeia deve conter um c para ser aceita pela máquina.

Referências bibliográficas

- GERSTING, J. **Fundamentos Matemáticos para a Ciência da Computação: um Tratamento Moderno de Matemática Discreta**. [S.I.]: Livros Técnicos e Científicos. ISBN 9788521614227.
- RICH, E. **Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications**. [S.I.]: Pearson Prentice Hall, 2008.
- ROSEN, K. **Discrete Mathematics and Its Applications**. New York: McGraw-Hill, 2003. (McGraw-Hill higher education).
- SUDKAMP, T. **Languages and Machines: An Introduction to the Theory of Computer Science**. [S.I.]: Pearson Addison-Wesley, 2006.
- TAYLOR, R. G. **Models of computation and formal languages**. New York: Oxford University Press, 1998.