Curso de Engenharia de Computação
ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Modelos de computação – Autômatos finitos

Slides da disciplina ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores
Curso de Engenharia de Computação
Instituto Mauá de Tecnologia – Escola de Engenharia Mauá
Prof. Marco Antonio Furlan de Souza
<marco.furlan@maua.br>

Agenda

- Autômatos de estados finitos
- Autômatos de estados finitos determinísticos
- Autômatos de estados finitos não-determinísticos
- Teorema de Kleene

INSTITUTO MAUÁ DE TECNOLOGIA

Agenda

- Autômatos de estados finitos
- Autômatos de estados finitos determinísticos
- Autômatos de estados finitos não-determinísticos
- Teorema de Kleene

Autômatos de estados finitos

- **Conceitos**
  - São **máquinas de estado** que são especificamente projetadas para **reconhecer linguagens**;
  - No lugar de produzirem saída, estas máquinas possuem **estados finais**;
  - Uma cadeia é **reconhecida** se e somente se **leva** a **máquina** do **estado inicial** para um de seus **estados finais**;
  - Máquinas de estados finitos sem saída são denominadas de **autômatos de estados finitos**.
  - Autômatos de estados finitos podem ser:
    - **Determinísticos**: para cada par contendo um estado e um valor de entrada, há um **único próximo estado**, obtido por uma **função** de transição;
    - **Não-determinísticos**: para cada par contendo um estado e um valor de entrada, pode haver **diversos próximos estados**.

Agenda

- Autômatos de estados finitos
- Autômatos de estados finitos determinísticos
- Autômatos de estados finitos não-determinísticos
- Teorema de Kleene

Autômatos de estados finitos determinísticos

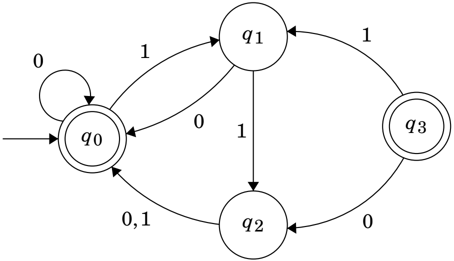
- **Definição**

Definição. *Um **autômato de estados finitos determinístico** $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ consiste de um **conjunto** Q de **estados**, um **alfabeto finito** Σ de entrada, uma **função de transição** δ, que atribui um **próximo estado** a cada par de estado e entrada ($\delta : Q \times \Sigma \to Q$), um **estado inicial** $q_0 \in Q$ e um **subconjunto** $F \subseteq Q$ consistindo de **estados finais**.*

Autômatos de estados finitos determinísticos

- **Exemplo**
  - O autômato de estados finito representado por $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_0, q_3\}$ e δ, representada pela tabela a seguir, é representado pelo diagrama abaixo:

	δ	
	Entrada	
Estado	0	1
q_0	q_0	q_1
q_1	q_0	q_2
q_2	q_0	q_0
q_3	q_2	q_1



Autômatos de estados finitos determinísticos

- **Função de transição**
  - A função de transição δ pode ser **estendida** de modo que seja definida para **todos** os **pares** de **estados** e **cadeias**;
  - Pode-se **estender** δ em $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \rightarrow Q$ assim: seja $x = x_0 x_1 \ldots x_{k-2} x_{k-1}$ uma cadeia em Σ^*. Então $\hat{\delta}(q_0, x)$ é o **estado obtido** a partir de q_0 **aplicando** sucessivamente δ em **todos** os símbolos de x a partir de q_0, deste modo: $q_1 = \delta(q_0, x_0)$, $q_2 = \delta(q_1, x_1)$, ..., assim sucessivamente, de modo que $\delta(q_0, x) = \delta(q_{k-1}, x_{k-1})$;
  - a função $\hat{\delta}$ pode ser descrita de forma recursiva:

$$\hat{\delta}(q, \epsilon) = q \quad (\epsilon\text{, a cadeia vazia, não provoca transição})$$

$$\hat{\delta}(q, xa) = \delta(\hat{\delta}(q, x), a)$$

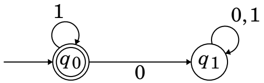
Autômatos de estados finitos determinísticos

- **Reconhecimento de cadeias**
  - A **cadeia** x é dita ser **reconhecida** ou **aceita** pela máquina $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ se ela **conduz** os **estados** da máquina do **estado inicial** q_0 a um estado **final**, $\hat{\delta}(q_0, x) \in F$;
  - A **linguagem reconhecida** ou **aceita** pela **máquina** M, denotada por $L(M)$ é o conjunto de **todas as cadeias** que são reconhecidas por M;
  - **Duas máquinas** de estados finitos são **equivalentes** se elas reconhecem a mesma linguagem.

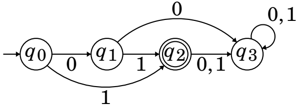
Autômatos de estados finitos determinísticos

- **Exemplos**

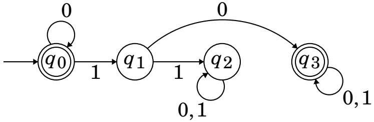
(a) $L(M_1) = \{1^n | n = 0, 1, 2, \ldots\}$



(b) $L(M_2) = \{1, 01\}$



(c) $L(M_3) = \{0^n, 0^n 10x\}$ (x é qualquer cadeia contendo 0s e 1s)



Agenda

- Autômatos de estados finitos
- Autômatos de estados finitos determinísticos
- Autômatos de estados finitos não-determinísticos
- Teorema de Kleene

Autômatos finitos não-determinísticos

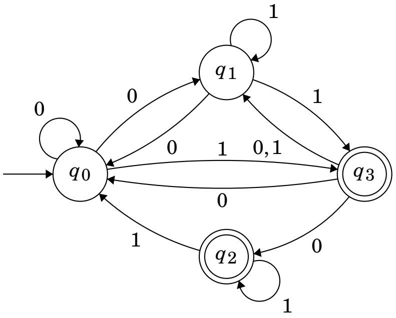
- **Definição**

Definição. *Um **autômato de estados finitos não-determinístico** $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ consiste de um conjunto Q de **estados**, um **alfabeto finito** Σ de entrada, uma **função de transição** δ, que atribui um **conjunto de estados** a cada **par** de **estado** e **entrada** ($\delta : Q \times \Sigma \to \wp(Q)$), um **estado inicial** $q_0 \in Q$ e um **subconjunto** $F \subseteq Q$ consistindo de **estados finais**.*

Autômatos finitos não-determinísticos

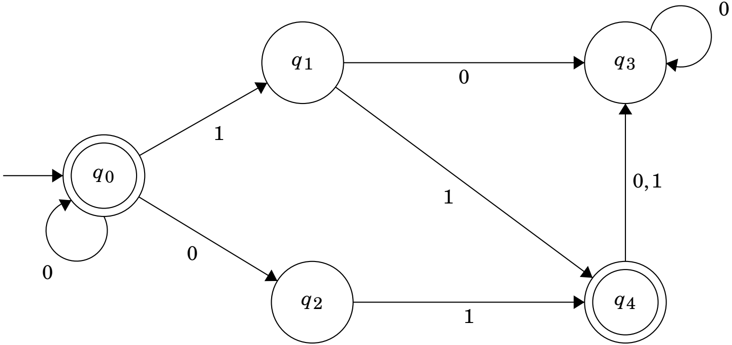
- **Exemplo**
  - O autômato de estados finito representado por $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ onde $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $F = \{q_2, q_3\}$ e δ dada pela tabela a seguir é representado pelo autômato a seguir:

	δ	
	Entrada	
Estado	0	1
q_0	$\{q_0, q_1\}$	$\{q_3\}$
q_1	$\{q_0\}$	$\{q_1, q_3\}$
q_2	$\emptyset$	$\{q_0, q_2\}$
q_3	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1\}$



Teste seus conhecimentos

- Elaborar uma tabela de estados para o autômato não-determinístico ilustrado a seguir:



Autômatos finitos não-determinísticos

- **Reconhecimento de cadeias**
  - O **reconhecimento** de uma cadeia $x = x_0 x_1 \ldots x_{k-1}$ por um autômato de estados finitos não-determinístico se dá da seguinte forma:
    - O **símbolo de entrada** x_0 leva a máquina do estado inicial q_0 a **um conjunto** S_0 de estados;
    - O próximo **símbolo de entrada**, x_1, leva a **cada um** dos estados de S_0 a **um conjunto** de estados, que podem ser reunidos no conjunto S_1;
    - Continua-se este processo incluindo a cada estágio todos os estados obtidos em um estágio anterior e o símbolo de entrada atual.
  - Uma cadeia x é reconhecida ou **aceita** se existe um **estado final** no conjunto de estados que podem ser obtidos a partir de q_0 com x;
  - A **linguagem reconhecida** por um **autômato** de estados finitos **não-determinístico** é o **conjunto** de **todas** as **cadeias reconhecidas** por este autômato.

Autômatos finitos não-determinísticos

- **Reconhecimento de cadeias**

  – Do mesmo modo que foi apresentado para autômatos determinísticos, pode-se definir uma função de **transição estendida** para autômatos não-determinísticos, $\hat{\delta} = \wp(Q) \times \Sigma^* \to \wp(Q)$, aplicada a um **conjunto de estados atual** A e uma **cadeia de entrada** qualquer, xa, assim:

$$\hat{\delta}(A,\epsilon) = A \quad \text{(cadeia vazia não provoca transição)}$$

$$\hat{\delta}(A,xa) = \bigcup_{q \in \hat{\delta}(A,x)} \delta(q,a)$$

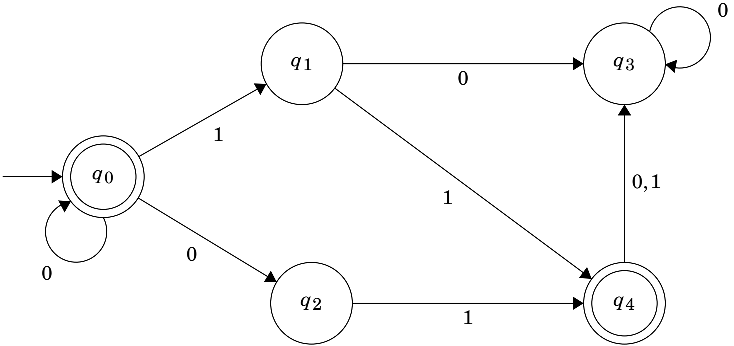
  – Assim, o autômato não-determinístico **aceita** uma cadeia $x \in \Sigma *$ se:

$$\hat{\delta}(S,x) \cap F \neq \emptyset$$

  Onde S é um **conjunto de estados iniciais** do autômato (normalmente, $S = \{s_0\}$).

Autômatos finitos não-determinísticos

- **Exemplo**
  - A linguagem reconhecida pelo autômato finito apresentado a seguir é $L(M) = \{0^n, 0^n01, 0^n11 | n \geq 0\}$ (verifique).



Autômatos finitos não-determinísticos

- **Conversão de autômato não-determinístico→determinístico**

  Teorema. *Se a linguagem L é reconhecida por um autômato de estados finitos não-determinístico M_0, então L também é reconhecida por um autômato de estados finitos determinístico M_1.*

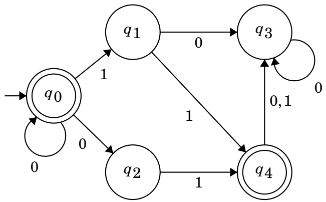
Autômatos finitos não-determinísticos

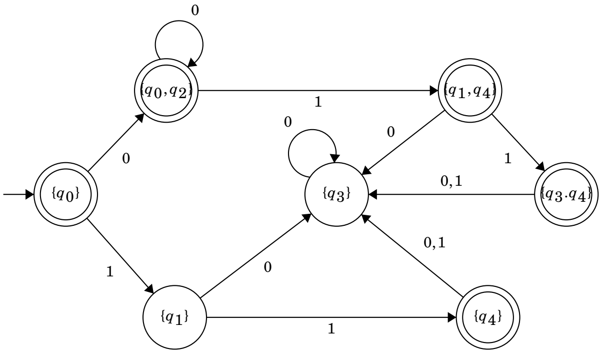
- **Conversão de autômato não-determinístico→determinístico**

Demonstração. Cada estado de M_1 é composto por um conjunto de estados de M_0. O símbolo inicial de M_1 é $\{q_0\}$. As entradas de M_1 são as mesmas de M_0. Dado um estado $\{q_{i_1}, q_{i_2}, \ldots, q_{i_k}\}$ de M_1, o símbolo de entrada x leva a um próximo estado que é a união dos próximos estados dos elementos deste conjunto, $\cup_{j=1}^{k} f(q_{i_k})$. Os estados de M_1 são subconjuntos de $\wp(Q)$, sendo que $|\wp(Q)| = 2^n$ e n é o número de estados do autômato determinístico. Os estados finais de M_1 são conjuntos de estados que contém estado final de M_0. Se uma cadeia é reconhecida por M_0, então um estado final de M_0 é alcançável. Em M_1, esta cadeia conduz de $\{q_0\}$ a um conjunto de estados de M_0 que contém o estado final de M_0. Este conjunto também é um estado final de M_1, logo a cadeia também é reconhecida por M_1. De forma similar, pode-se provar que uma cadeia não aceita por M_0 também não será aceita por M_1. $\square$

Autômatos finitos não-determinísticos

- **Exemplo**
  - O autômato determinístico da direita é equivalente ao não-determinístico da esquerda (verificar). Não é necessário representar o “conjunto de estados vazio”.

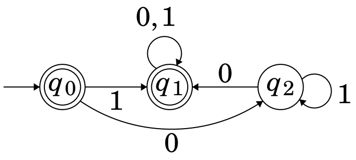




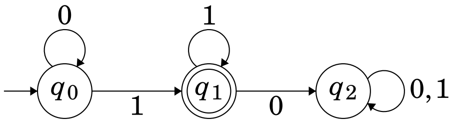
Teste seus conhecimentos

- Descobrir a linguagem reconhecida pelos autômatos determinísticos a seguir:

(a)



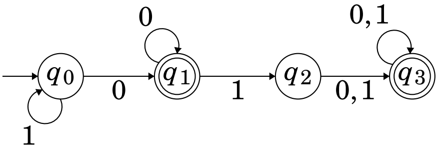
(b)



Teste seus conhecimentos

- Descobrir a linguagem reconhecida pelos autômatos determinísticos a seguir:

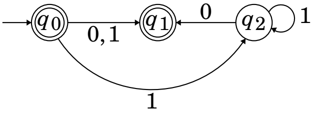
  (c)



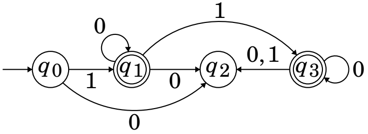
  (d) Determinar um autômato de estados finitos determinístico que reconheça o conjunto $\{1^n | n = 2, 3, 4, \ldots\}$.

Teste seus conhecimentos

- Descobrir a linguagem reconhecida pelos autômatos a seguir (não-determinísticos):



(e)



(f)

(g) Converter o autômato anterior em um autômato determinístico.

Agenda

- Autômatos de estados finitos
- Autômatos de estados finitos determinísticos
- Autômatos de estados finitos não-determinísticos
- Teorema de Kleene

Teorema de Kleene

- Definição de **expressões regulares** sobre um conjunto Σ (**alfabeto**):
  - $\emptyset$ (**conjunto vazio**) é uma expressão regular que denota um conjunto de zero cadeias;
  - ϵ (**cadeia vazia**) é uma expressão regular que denota um conjunto contendo apenas um símbolo que é a cadeia vazia, ϵ;
  - O símbolo **x** é uma expressão regular sempre que $x \in \Sigma$ e denota um conjunto de cadeias contendo apenas o símbolo x;
  - Para duas expressões regulares **A** e **B**, também são expressões regulares:
    - A **concatenação de expressões regulares**, **AB**, denotando o conjunto formado pela concatenação das cadeias dos conjuntos denotados por **A** e **B**;
    - A **união de expressões regulares**, $\mathbf{A} \cup \mathbf{B}$, denotando a união das cadeias dos conjuntos denotados por **A** e **B**;
    - **Fechamento de Kleene de expressão regular**, $\mathbf{A}^*$, denotando o conjunto formado pelo fechamento de Kleene do conjunto denotado por **A**.

Teorema de Kleene

- **Notas**
  - A operação de **fechamento de Kleene** para um **conjunto** A qualquer é definida como a **união infinita de todas as potências de** A:

$$A^* = \bigcup_{i \geq 0} A^i$$

  - Na **teoria dos autômatos e linguagens formais**, a **potência** n **de um conjunto de cadeias** A é dado pela **concatenação** realizada n vezes sobre os elementos de A. Por exemplo, se $A = \{ab, aab\}$, então $A^2 = \{abab, abaab, aabab, aabaab\}$;
  - Definição recursiva de A^*:

$$A^0 = \{\epsilon\}$$
$$A^{n+1} = AA^n$$

Observação: Convenciona-se que $\emptyset^* = \{\epsilon\}$.

Teorema de Kleene

- **Notas**
  - **Expressões regulares representam** de forma **concisa conjuntos** de **cadeias** denominados de **conjuntos regulares**.
  - Por exemplo, a expressão regular $\mathbf{D} = \mathbf{0} \cup \mathbf{1} \cup \mathbf{2} \cup \mathbf{3} \cup \mathbf{4} \cup \mathbf{5} \cup \mathbf{6} \cup \mathbf{7} \cup \mathbf{8} \cup \mathbf{9}$ é a união de expressões regulares simples, cada uma reconhecendo um dígito simples;
  - A expressão regular $\mathbf{N} = \mathbf{D.DD}^*$, por exemplo, representa um conjunto infinito de cadeias que se iniciam por um único dígito, e são seguidas por um único ponto e depois por ou mais dígitos, tais como `0.0`, `45.89012`, etc, um esboço de uma expressão regular para números reais positivos.

Teorema de Kleene

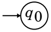
Teorema. *Um conjunto é regular se e somente se ele é reconhecido por um autômato de estados finitos.*

- Para provar que todo **conjunto regular** é **reconhecido** por um **autômato** de estados finitos, é necessário **provar** que:

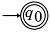
  1. $\emptyset$ é reconhecido por um autômato de estados finito;
  2. $\{\epsilon\}$ é reconhecido por um autômato de estados finito;
  3. $\{a\}$ é reconhecido por um autômato de estados finito;
  4. Se A e B são conjuntos regulares reconhecidos por autômatos de estados finitos, então AB, $A \cup B$ e A^* são reconhecidos por autômatos de estados finitos.

Teorema de Kleene

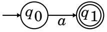
- **Prova**
  - A prova utiliza autômatos de estados finitos não-determinísticos, pois simplifica a composição de máquinas de estado e depois pode-se proceder à conversão em autômatos de estados finitos determinístico;
  - Pode-se provar os três primeiros itens com exemplos dos autômatos a seguir:
    - **Reconhecedor** de $\emptyset$:



    - **Reconhecedor** de $\{\epsilon\}$:



    - **Reconhecedor** de $\{a\}$:



Teorema de Kleene

- **Prova**
  - **Concatenação**
    - Se $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ e $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ são duas máquinas que reconhecem respectivamente os conjuntos A e B, procede-se à construção de uma máquina $M_{AB} = (Q_{AB}, \Sigma, \delta_{AB}, q_{AB}, F_{AB})$ assim:
      - As máquinas são ligadas em série de modo que uma cadeia em M_A leve a máquina combinada de q_A para q_B e depois de q_B para o estado final da máquina combinada;
      - O estado inicial q_{AB} é o mesmo que q_A;
      - O conjunto de estados finais, F_{AB} é o conjunto de estados finais de M_B com q_{AB}, incluído apenas se $\epsilon \in A \cap B$ (se ambas reconhecem ϵ);
      - Preservam-se em M_{AB} as transições existentes de M_A e M_B. Se em M_A há um estado que transita com símbolo i para um estado final de M_A, então este estado deve ser ligado ao estado q_B com a mesma entrada.

Teorema de Kleene

- **Prova**
  - **União**
    - Se $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ e $M_B = (Q_B, \Sigma, \delta_B, q_B, F_B)$ são duas máquinas que reconhecem respectivamente os conjuntos A e B, procede-se à construção de uma máquina $M_{AB} = (Q_{AB}, \Sigma, \delta_{AB}, q_{AB}, F_{AB})$ assim:
      - As máquinas são ligadas em paralelo, com um estado inicial adicional, $q_{A \cup B}$, que possua transições para os próximos estados tanto de q_A quanto de q_B com seus respectivos símbolos de entrada;
      - O conjunto de estados finais, $F_{A \cup B}$ será $F_A \cup F_B \cup \{q_{A \cup B}\}$ se $\epsilon \in A \cup B$ ou $F_A \cup F_B$ caso contrário;
      - As transições em $M_{A \cup B}$ incluem todas aquelas de M_A e de M_B.

Teorema de Kleene

- **Prova**
  - **Fechamento de Kleene**
    - Se $M_A = (Q_A, \Sigma, \delta_A, q_A, F_A)$ é uma máquina que reconhece o conjunto A, procede-se à construção de uma máquina $M_{A^*} = (Q_{A^*}, \Sigma, \delta_{A^*}, q_{A^*}, F_{A^*})$ assim:
      - Acrescenta-se o estado inicial q_{A^*}, que também é um estado final;
      - A partir de q_{A^*}, cria-se uma transição com o símbolo de entrada que havia de q_A para seu próximo estado, utilizando o mesmo símbolo de entrada (para reconhecer ϵ);
      - O conjunto de estados finais de F_{A^*} inclui todos os estados finais de F_A, acrescido de q_{A^*};
      - Para reconhecer concatenações de cadeias arbitrárias de A, além da transição de q_{A^*} para o próximo estado de q_A com a entrada que havia de q_A para aquele estado, adicionam-se também ligações de todos os estados finais para o próximo estado de q_A com a entrada que havia de q_A para aquele estado.

Referências bibliográficas

RICH, E. **Automata, Computability and Complexity: Theory and Applications**. [S.l.]: Pearson Prentice Hall, 2008.

ROSEN, K. **Discrete Mathematics and Its Applications**. New York: McGraw-Hill, 2003. (McGraw-Hill higher education).