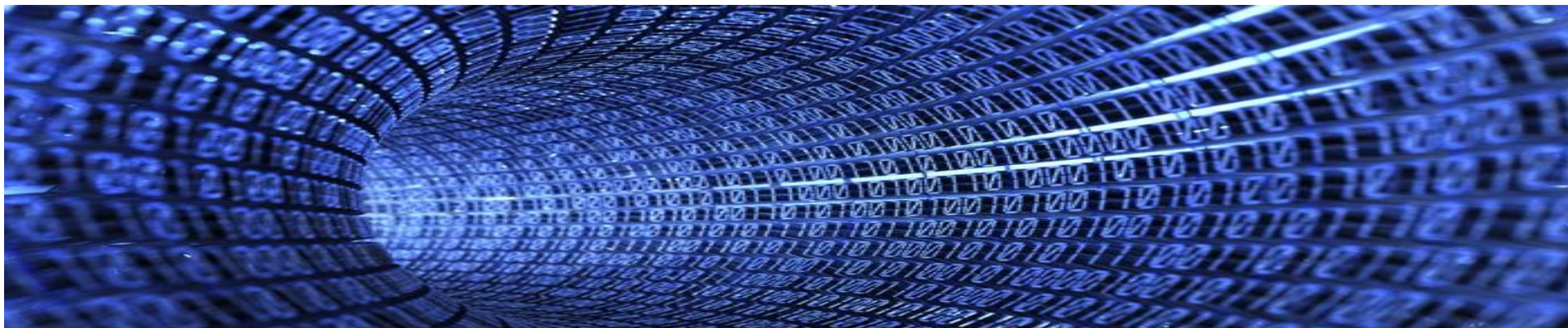


Curso de Engenharia de Computação ***Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores***

Conjuntos



Conjuntos

- **Conceitos**

- Um **conjunto** é uma **coleção** (sem se preocupar com a ordem) de **objetos distintos**;
- **Notações**
 - **Definição intencional** (explica quais são os elementos)
 - Utiliza-se uma **regra matemática** ou uma **descrição textual** para se **definir** o **conjunto** por uma **propriedade** que caracterizará seus elementos;
 - **Exemplos:**

$$A = \{x | x \in \mathbb{N} \wedge x \leq 4\}$$

$$B = \text{números naturais menores ou iguais à } 4$$
 - **Definição extensional** (define a extensão)
 - **Descreve cada um dos elementos** de um conjunto;
 - **Exemplo:**

$$C = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

Conjuntos

- Conceitos
 - Conjuntos conhecidos da Matemática

\mathbb{N} = conjunto dos números naturais
 $= \{0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, \dots\}$

\mathbb{Z} = conjunto dos números inteiros
 $= \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$

\mathbb{Q} = conjunto dos números racionais
 $= \{\dots, -\frac{7}{2}, -1, \frac{1}{3}, 0, \dots, 3, \dots\}$
 $= \{\frac{a}{b} | a, b \in \mathbb{N} \wedge b \neq 0\}$

Para representar
 apenas números positivos:
 $\mathbb{N}^+, \mathbb{Z}^+, \dots$

\mathbb{R} = conjunto dos números reais
 $= \{\dots, -3, -2.456, 0, \sqrt{2}, 11, 512.3433, \dots\}$

\mathbb{C} = conjunto dos números complexos
 $= \{\dots, -7, -4i, 0, 3 + 4i, 6.66, \dots\}$
 $= \{a + bi | a, b \in \mathbb{R}\} (i^2 = -1)$



"Deus criou os números inteiros
 e todo o resto é trabalho do
 homem"

Leopold Kronecker, 1886

Conjuntos

- **Notas sobre a representação de conjuntos**

- **Adota-se** normalmente a **definição intencional**;
- Nesta **notação**, um **conjunto** pode ser **genericamente definido** assim:

Notação adotada
neste curso



$$A = \{x|P(x)\} \text{ ou } A = \{x : P(x)\}$$

- Onde $P(x)$ é um **predicado** – **proposição** que **assume** um **valor verdadeiro** ou **falso** quando **aplicada** à x ;
- Este **predicado** é **definido** para um **conjunto externo** de **interesse**, denominado de **universo de discurso**;
- Assim, **interpreta-se** o conjunto A como sendo o **conjunto** de **todos** os **elementos** x “tal que” ou “e que” tenham $P(x)$ **verdadeiro**.

Conjuntos

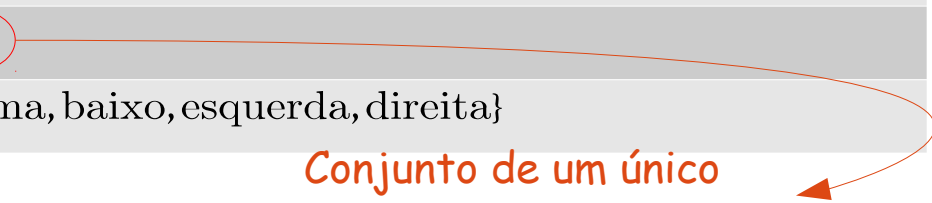
- **Notas sobre a representação de conjuntos**
 - Na **definição** de um **conjunto** muitas vezes **empregam-se** os **quantificadores e conectivos lógicos** da **lógica de predicados** (será estudada com detalhes nesta disciplina);
 - O **quantificador universal** \forall é utilizado para designar todos elementos (“**para todo**”) de um universo de discurso que atendem a um determinado predicado:
 $(\forall x)P(x)$;
 - O **quantificador existencial** \exists é utilizado para designar pelo menos um (“**existe**”) elemento de um universo de discurso que atende a um determinado predicado:
 $(\exists x)P(x)$;
 - O **conectivos lógicos**: “e” (\wedge), “ou” (\vee), “não” (\neg), **implicação** ou **condicional** (\rightarrow) e **bicondicional** (\leftrightarrow).

Conjuntos

Exemplos

Definição do conjunto	Interpretação
$A = \{x x \in \mathbb{R} \wedge x^2 = 4\}$	$A = \{-2, 2\}$
$B = \{y y \in \mathbb{Z}^+ \wedge y < 7\}$	$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
$C = \text{divisores positivos de } 12$	$C = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
$D = \{x (\exists y)(y \in \{0, 1, 2\} \wedge x = y^3)\}$	$D = \{0, 1, 8\}$
$E = \{x x \in \mathbb{N} \wedge (\forall y)(y \in \mathbb{N} \rightarrow x \leq y)\}$	$E = \{0\}$
$F = \text{movimentos no PacMan}$	$F = \{\text{cima, baixo, esquerda, direita}\}$

Conjunto de um único elemento ou "singleton"



Conjuntos

- **Teste seus conhecimentos**

1) Escrever em extenso os conjuntos a seguir:

a) $\{x \in \mathbb{N} \mid x^2 < 25\}$

b) $\{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 4\}$

c) $\{x \in \mathbb{N} \mid (\exists y)(\exists z)(y \in \{0, 1\} \wedge z \in \{3, 4\} \wedge y < x < z)\}$

2) Elaborar a descrição dos conjuntos a seguir por meio de propriedades adequadas:

a) $\{1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots\}$

b) $\{0, 1, 10, 11, 100, 101, \dots\}$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Pertinência

- x é um elemento de A :

$$x \in A$$

- x não é um elemento de A :

$$x \notin A$$

- Conjunto vazio

- É um conjunto sem elementos:

$$\emptyset = \{\}$$

- Exemplo:

$$S = \{x | x \neq x\} = \emptyset$$

- Conjunto universo

- Contém todos os **elementos** de um **universo** de **discurso**. Deve-se especificar claramente qual é este conjunto. Símbolos comumente utilizados: U e S .

O símbolo \emptyset faz parte do alfabeto Norueguês e foi introduzido pelo matemático André Weil (1906-1998)*

*<http://mathforum.org/library/drmath/view/62382.html>

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **Subconjunto**

- O conjunto A é **subconjunto** (“**contido em**”) do conjunto B :

$$A \subseteq B$$

- O conjunto B é **superconjunto** (“**contém**”) do conjunto A :

$$B \supseteq A$$

- Se o conjunto A está contido no conjunto B , **então todo elemento de A pertence à B** , ou seja:

$$(A \subseteq B) \rightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$$

- Exemplo:

$$A = \{1, 4, 9\}, B = \{-3, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 11\}$$

$$A \subseteq B$$

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **Igualdade**

- Dois conjuntos A e B são **iguais quando** possuem os **mesmos elementos**:

$$(A = B) \rightarrow (\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \wedge (\forall x)(x \in B \rightarrow x \in A)$$

- **Desigualdade**

- Dois conjuntos A e B são **desiguais quando** possuem **pelo menos um elemento diferente**:

$$(A \neq B) \rightarrow (\exists x)(x \in A \rightarrow x \notin B) \vee (\exists x)(x \in B \rightarrow x \notin A)$$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Subconjunto próprio

- O conjunto A é **subconjunto próprio** do conjunto B se:

$$A \subseteq B \wedge A \neq B$$

- Neste caso, escreve-se:

$$A \subset B$$

- O conjunto B é **superconjunto próprio** do conjunto A se:

$$B \supseteq A \wedge A \neq B$$

- Neste caso, escreve-se:

$$B \supset A$$

- Exemplos:

$$A = \{1, 4, 9\}, B = \{-3, 1, 2, 4, 6, 8, 9, 11\}$$

$$A \subseteq B \text{ e } A \subset B$$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Conjunto potência

- O **conjunto potência** de um conjunto A é o **conjunto** formado por **todos** os **subconjuntos** de A . Notação:

$$\wp(A) = \{B \mid B \subseteq A\}$$

- Exemplo:**

- Se A é o conjunto:

$$A = \{1, 2, 3\}$$

- Então:

$$\wp(A) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

- Se U é o conjunto universo, então, para qualquer conjunto A deste universo tem-se:

$$A \in \wp(U)$$

Conjuntos

- **Teste seus conhecimentos**

- 1) Responder

Se A é um conjunto com n elementos ($n > 0$), quantos elementos possui o conjunto potência de A ? Prove.

- 2) Verdadeiro ou falso?

- a) $3 \in \{1, 3, 5\}$
- b) $\{3\} \in \{1, 3, 5\}$
- c) $\{3\} \in \{1, \{3\}, 5\}$
- d) $3 \subset \{1, 3, 5\}$
- e) $\{3\} \subset \{1, 3, 5\}$
- f) $\{3\} \subset \{1, \{3\}, 5\}$

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **Cardinalidade**

- A **cardinalidade** de A é o **número** de **elementos** de A . Notação:

$$|A|$$

- **Exemplo:**

- Se A é o conjunto

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

- Então:

$$|A| = 5$$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Cardinalidade

- E se o conjunto for **infinito**?

- **Georg Cantor**, entre 1874–1884, desenvolveu a **teoria dos números cardinais infinitos**;

- **Conjuntos infinitos enumeráveis (contáveis)** são aqueles que possuem um número **cardinal** (tamanho) igual ao **conjunto dos números naturais**, \mathbb{N} ;

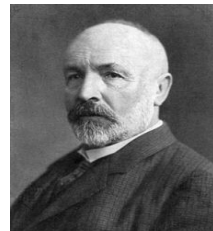
- Assim, **qualquer conjunto infinito enumerável possui uma correspondência biunívoca** com o conjunto \mathbb{N} ;

- O **conjunto** \mathbb{N} pode ser colocado em uma **correspondência biunívoca** com algum **subconjunto próprio** – característica dos conjuntos infinitos!

- **Cardinalidade** de \mathbb{N} :

$$|\mathbb{N}| = \aleph_0$$

Olha o
homem aí!



O conjunto \mathbb{R}
dos números
reais é um
exemplo de
conjunto infinito
não-enumerável

✗ É a letra
hebraica
"áleph"

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Intersecção

- Para quaisquer dois conjuntos, A e B , a sua intersecção é o conjunto definido por:

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

- Exemplo:

$$\begin{aligned} \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é par} \} \cap \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é múltiplo de } 3 \} \\ = \{n | n \in \mathbb{N} \wedge n \text{ é múltiplo de } 6 \} \end{aligned}$$

- Intersecção de um conjunto arbitrário de conjuntos

- Baseado em um conjunto de índices (possivelmente infinito):

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x | (\forall i \in I)(x \in A_i)\}$$

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **União**

- Para quaisquer dois conjuntos, A e B , a sua **união** é o conjunto definido por:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

- **Exemplo:**

$$\begin{aligned} \{a, b, c, d, e\} \cup \{c, d, f, g\} \\ = \{a, b, c, d, e, f, g\} \end{aligned}$$

- **União de um conjunto arbitrário de conjuntos**

- Baseado em um **conjunto de índices** (possivelmente infinito):

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x | (\exists i \in I)(x \in A_i)\}$$

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **Diferença**

- Para quaisquer dois conjuntos, A e B , a sua **diferença** ou **complemento relativo** é o **conjunto definido** por:

$$A - B = A \setminus B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

- **Exemplo:**

$$\begin{aligned} \{a, b, c, d, e\} \setminus \{c, d, f, g\} \\ = \{a, b, e\} \end{aligned}$$

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **Diferença simétrica**

- Para quaisquer dois conjuntos, A e B , a sua **diferença simétrica** é o conjunto definido por:

$$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$$

- **Exemplo:**

$$\begin{aligned} \{a, b, c, d, e\} \oplus \{c, d, f, g\} \\ = \{a, b, e, f, g\} \end{aligned}$$

Conjuntos

- **Definições importantes sobre conjuntos**

- **Complemento**

- O complemento de um conjunto A é o **conjunto definido** por:

$$\overline{A} = A^c = \{x | x \in U \wedge x \notin A\}$$

- Onde U é o **conjunto universo** (que aqui foi explicitado para reforçar que se um elemento não pertence a um certo conjunto, ele ainda faz parte do universo).
 - **Exemplo:**

$$U = \{a, b, c, d, e\}$$

$$A = \{a, b\}$$

$$\overline{A} = \{c, d, e\}$$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Conjuntos disjuntos

- Dois conjuntos A e B são **disjuntos** se e somente se:

$$A \cap B = \emptyset$$

- Exemplo:

$$A = \{a, b, c, d\}$$

$$B = \{e, f, g\}$$

- Conjuntos mutuamente disjuntos

- Uma **família** de conjuntos A_1, A_2, \dots, A_k é **mutuamente disjunta** se e somente se:

$$(\forall i, j \in \{1, 2, \dots, k\} \wedge i \neq j)(A_i \cap A_j = \emptyset)$$

Conjuntos

- **Teste seus conhecimentos**

1) Se:

$$U = \{a, e, i, o, u, m, s, t, h\}$$

$$A = \{m, a, t, h\}$$

$$B = \{s, e, t, h\}$$

$$C = \{a, e, i\}$$

Determinar:

(a) $A \cap \overline{B}$

(b) $B \cup \overline{C}$

(c) $\overline{A} - (\overline{C \oplus B})$

(d) $A \cup (B \oplus \overline{C})$

2) Verdadeiro ou falso: $A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B)$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Produto cartesiano



Descartes
(1596-1650)

- O produto cartesiano de dois conjuntos A e B é um conjunto de pares ordenados:

$$A \times B = \{(x, y) | x \in A \wedge y \in B\}$$

- Um par ordenado é “um tipo especial” de conjunto definido assim:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

de modo que:

$$((x_1, y_1) = (x_2, y_2)) \rightarrow (x_1 = x_2) \wedge (y_1 = y_2)$$

- Exemplo:

$$\begin{aligned} A &= \{a, b\} \\ B &= \{c, d\} \\ A \times B &= \{(a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\} \end{aligned}$$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Potência de um conjunto

- Se A é um conjunto e $n \in \mathbb{N}$, a n -ésima potência A^n é definida pelo conjunto de todas as **ênuplas** de A :

$$A^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in A\}$$

- Exemplo:

$$A = \{0, 1\}$$

$$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Conjuntos

- Definições importantes sobre conjuntos

- Cardinalidade do produto cartesiano

- Se $|A|=m$ e $|B|=n$ então $|A \times B|$ é dado por:

$$|A \times B| = m \cdot n$$

- Cardinalidade da potência de um conjunto

- Considerando:

$$A = \{0, 1\}$$

$$A^2 = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

- Então:

$$|A| = 2$$

$$|A^2| = 4$$

- Caso geral:

$$|A| = n$$

$$|A^m| = n^m$$

Conjuntos

- **Teste seus conhecimentos**

1) Se:

$$A = \{0, 1\}$$

$$B = \{a, b, c\}$$

$$C = \{10, 20, 30, 40\}$$

Determinar:

(a) $A \times B$

(b) $B \times A$

(c) B^3

(d) $C \times B \times A$

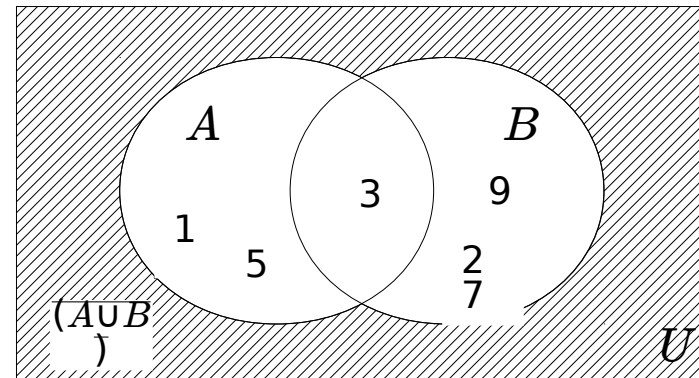
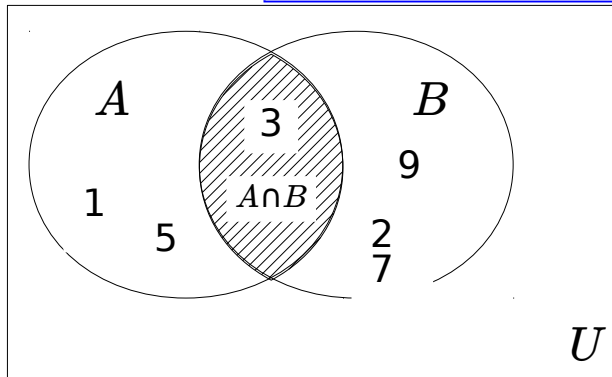
Conjuntos

- **Diagramas de Venn**
 - É uma **forma pictórica de representar conjuntos**.
 - **Útil para provar teoremas** sobre conjuntos
 - **Exemplo:**

$$A = \{x | (\forall y)(x = 2y + 1 \wedge y \in \{0, 1, 2\})\}$$

$$B = \{x | (\forall y)(x = 3^y \wedge y \in \{1, 2, 3\})\}$$

$$U = \mathbb{N}$$



Conjuntos

- **Teste seus conhecimentos**

1) Sejam A , B e C três conjuntos. Pede-se desenhar diagramas de Venn para:

(a) $A \cap \overline{B}$

(b) $B \cap \overline{(C \cup A)}$

(c) $((C \cap A) - \overline{(B - A)}) \cap C$

Conjuntos

- **Propriedades algébricas dos conjuntos**

- **Leis comutativas**

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

- **Leis associativas**

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

- **Leis distributivas**

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

- **Leis de identidade**

$$A \cup \emptyset = A$$

$$A \cap \emptyset = \emptyset$$

$$A \cup U = U$$

$$A \cap U = A$$

Conjuntos

- **Propriedades algébricas dos conjuntos**

- **Leis de complemento**

$$A \cup \bar{A} = U$$

$$A \cap \bar{A} = \emptyset$$

- **Leis da involução (ou duplo complemento)**

$$\overline{\bar{A}} = A$$

- **Leis de \emptyset e U**

$$\bar{\emptyset} = U$$

$$\bar{U} = \emptyset$$

- **Leis de idempotência**

$$A \cap A = A$$

$$A \cup A = A$$

Conjuntos

- **Propriedades algébricas dos conjuntos**
 - **Leis de DeMorgan**

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

Conjuntos

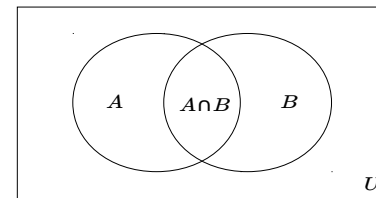
- **Princípio da adição**

- Para dois conjuntos disjuntos

$$|A \cup B| = |A| + |B|$$

- Para dois conjuntos quaisquer

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$



- Para três conjuntos quaisquer

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

- **Princípio da inclusão e exclusão**

$$|A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| = \sum_{1 \leq r \leq n} |A_r| - \sum_{1 \leq r < s \leq n} |A_r \cap A_s| + \sum_{1 \leq r < s < t \leq n} |A_r \cap A_s \cap A_t| - \dots + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \dots \cap A_n|$$

Conjuntos

- **Teste seus conhecimentos**

1) Provar que

(a) $\underline{A \cup (B \cap A)} = A$

(b) $\underline{(A \cap \overline{B}) \cup B} = \overline{A} \cup B$

(c) $\underline{(A \cap (B \cup C))} = \overline{A} \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$

Conjuntos

- **Conjuntos em linguagens de programação**
 - Existem várias **representações** de **conjuntos** nas linguagens de programação;
 - A sua **manipulação** depende do **paradigma** da **linguagem** (estruturado, orientado a objetos, funcional, lógico);
 - É muito comum encontrar a **seguinte terminologia**:
 - **Set**: representa uma coleção de objetos distintos e as operações típicas de um conjunto da Matemática;
 - **Bag** (ou multiset): também representa uma coleção de objetos, mas permite repetições de um mesmo elemento. Modifica/acrescenta operações específicas às operações típicas de conjuntos.

Conjuntos

- **Conjuntos em linguagens de programação**

- Exemplo em **Python**:

- **Set**

- Um **conjunto** é **criado** com a função `set()`, a partir de uma lista. O teste de **pertinência** é por conta do **operador** `in`:

```
>>> basket = ['apple', 'orange', 'apple', 'pear', 'orange', 'banana']
>>> basket
['apple', 'orange', 'apple', 'pear', 'orange', 'banana']
>>> set_of_fruits = set(basket)
>>> set_of_fruits
set(['orange', 'pear', 'apple', 'banana'])
>>> 'orange' in set_of_fruits
True
>>> 'lemon' in set_of_fruits
False
```

- **Bag**

- O próprio tipo de lista em Python já é um bag.

Conjuntos

- **Conjuntos em linguagens de programação**

- Exemplo em **Pascal**:

- **Set**

- **Pascal** possui o tipo `set`, de aplicação limitada a tipos cardinais:

```
program sets;
type
  Color = (red, blue, yellow,
           green, black, orange);
  Colors = set of Color;
procedure ShowColors(c : Colors );
const
  COLOR_NAMES : array[Color] of String[7] =
    ('red', 'blue', 'yellow',
     'green', 'black', 'orange');
var
  cl : Color;
begin
  for cl := red to orange do
    if cl in c then
      writeln(COLOR_NAMES[cl]);
end;
```

```
var
  c,r : Colors;
begin
  c := [red, blue, black];
  ShowColors(c);
  c := c + [yellow];
  ShowColors(c);
  c := c - [black];
  ShowColors(c);
end.
```

Conjuntos

- Conjuntos em linguagens de programação

- Exemplo em C++:

- Set

- C++ possui a classe `set`:

```
#include <iostream>
#include <set>
int main ()
{
    std::set<std::string> s;
    s.insert("Hello");
    s.insert("World");
    s.insert("Hello");
    s.insert("World");
    std::cout << "Set contains:";
    while (!s.empty()) {
        std::cout << ' ' << *s.begin();
        s.erase(s.begin());
    }
    return 0;
}
```

Conjuntos

- Conjuntos em linguagens de programação

- Exemplo em **Java**:

- **Set**

- **Java** possui a **interface** `Set` e a **classe** `HashSet`:

```
import java.util.Set;
import java.util.HashSet;
public class Sets {
    static public void main(String[] args) {
        Set<String> colors = new HashSet<String>();
        colors.add("red");
        colors.add("yellow");
        colors.add("green");
        System.out.println( colors.contains("green") );
    }
}
```

Referências Bibliográficas

- GERSTING, J.L. **Fundamentos matemáticos para a ciência da computação**. 4. ed. Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2001. 538 p. ISBN 85-216-1263-X.