ECM253 – Linguagens Formais, Autômatos e Compiladores

Lista de Exercícios

Lógica de Predicados

Marco Furlan

9 de março de 2019

1. Provar se as fbfs a seguir são válidas ou inválidas.

   (a) $(\exists x)A(x) \leftrightarrow \neg(\forall(x)\neg A(x))$

   (b) $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)Q(x) \to (\forall x)[P(x) \vee Q(x)]$

   (c) $(\forall x)A(x) \leftrightarrow \neg((\exists x)\neg A(x))$

   (d) $(\forall x)[P(x) \vee Q(x)] \to (\forall x)P(x) \vee (\exists y)Q(y)$

2. Considere a fbf a seguir:

$$(\exists x)P(x) \wedge (\exists x)Q(x) \to (\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$$

   (a) Encontrar uma interpretação em que esta fbf não é válida.

   (b) Encontrar falha na seguinte "demonstração" desta fbf:

1. $(\exists x)P(x)$	(hipótese)
2. $P(a)$	1, ei
3. $(\exists x)Q(x)$	(hipótese)
4. $Q(a)$	3, ei
5. $P(a) \wedge Q(a)$	2,4, con
6. $(\exists x)[P(x) \wedge Q(x)]$	5, eg

3. Demonstrar que as fbfs a seguir são teoremas (válidas):

   (a) $(\forall x)P(x) \to (\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$

   (b) $(\forall x)P(x) \land (\exists x)Q(x) \to (\exists x)[P(x) \land Q(x)]$

   (c) $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \to (\exists y)(\exists x)P(x,y)$

   (d) $(\forall x)(\forall y)Q(x,y) \to (\forall y)(\forall x)Q(x,y)$

4. Para cada uma das fbfs a seguir, provar que é teorema ou apresentar uma interpretação para provar que não é válida:

   (a) $(\forall x)P(x) \lor (\exists x)Q(x) \to (\forall x)[P(x) \lor Q(x)]$

   (b) $(\forall x)[A(x) \to B(x)] \to [(\exists x)A(x) \to (\exists x)B(x)]$

   (c) $(\forall y)[Q(x,y) \to P(x)] \to [(\exists y)Q(x,y) \to P(x)]$

   (d) $[P(x) \to (\exists y)Q(x,y)] \to (\exists y)[P(x) \to Q(x,y)]$

5. Usando a lógica de predicados, provar que os argumentos a seguir são válidos. Utilizar os predicados apresentados.

   (a) Há um astrônomo que não é míope. Qualquer um que usa óculos então é míope. Além disso, todos usam óculos ou usam lentes de contato. Portanto, algum astrônomo usa lentes de contato ($A(x)$, $M(x)$, $O(x)$, $L(x)$).

   (b) Todo membro do conselho vem da indústria ou do governo. Todos do governo que são advogados são a favor da moção. John não é da indústria, mas é advogado. Portanto, se John for um membro do conselho, ele será a favor da moção ($M(x)$, $I(x)$, $G(x)$, $A(x)$, $F(x)$, j).

       Dica: Para resolver problemas do tipo (lógica proposicional ou de predicados) como $A \land B \land C \to D \to E$, notar que a expressão pode ser reescrita como $\neg(A \land B \land C) \lor (\neg D \lor E)$ que, por sua vez, pode ser escrita como $(\neg A \lor \neg B \lor \neg C) \lor (\neg D \lor E)$ e também como $(\neg A \lor \neg B \lor \neg C \lor \neg D) \lor E$ e, finalmente, como $A \land B \land C \land D \to E$. Em outras palavras, nesse tipo de forma (somente nesse), a fbf D também pode ser admitida como uma hipótese.

   (c) Há uma estrela de cinema que é mais rica que as outras. Todo mundo que é mais rico que os outros também paga mais impostos que os outros. Portanto, existe uma estrela de cinema que paga mais impostos que os outros ($E(x)$, $R(x,y)$, $I(x,y)$).

   (d) Todo estudante da Ciência da Computação trabalha mais que alguém e todo mundo que trabalha mais que alguém também dorme menos que esta pessoa. Maria é uma estudante da Ciência da Computação. Portanto Maria dorme menos que outra pessoa ($E(x)$, $T(x,y)$, $D(x,y)$, m).

   (e) Todo embaixador fala apenas com diplomatas e algum embaixador fala com alguém, portanto existe um diplomata ($E(x)$, $F(x,y)$, $D(x)$).