BSQ 110 - Introduction aux sciences quantiques et à leurs applications

Exercices #4

Les réponses aux **exercices** ne sont pas à remettre.

Banque d'états quantiques

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \qquad |+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \qquad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

$$|\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle \qquad |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|00\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|11\rangle$$

$$|\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle \qquad |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|01\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|10\rangle .$$

Banque de portes quantiques

$$\hat{X} = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix} \quad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{pmatrix}$$

$$C\hat{X}_{10} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} \quad \text{SWAP} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

Exercice 1: Probabilités pour un état produit

Soit deux qubits indépendants étant dans les états

$$|a\rangle = a_0|0\rangle + a_1|1\rangle \quad \text{et} \quad |b\rangle = b_0|0\rangle + b_1|1\rangle$$

a) Calculez la probabilité de mesurer le qubit $|a\rangle$ dans l'état $|0\rangle$. Calculez la probabilité de mesurer le qubit $|b\rangle$ dans l'état $|1\rangle$.

b) Calculer la probabilité de mesurer le qubit $|a\rangle$ dans l'état $|0\rangle$ ET de mesurer le qubit $|b\rangle$ dans l'état $|1\rangle$.

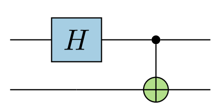
c) Utilisez le produit tensoriel pour écrire le vecteur d'états décrivant le système de deux qubits

$$|\psi\rangle = |b\rangle \otimes |a\rangle .$$

d) Calculez la probabilité de mesurer le système dans l'état $|10\rangle$. Est-ce que ce résultat est cohérent avec votre réponse en b) ?

Exercice 2: Préparation d'états intriqués

Le circuit suivant est souvent utilisé pour préparer des états intriqués à deux qubits.



a) Utilisez le produit tensoriel pour obtenir la matrice unitaire 4×4 qui représente, dans le système à deux qubit, l'application d'une porte Hadamard sur le qubit du haut et qui ne fait rien sur le qubit du bas. Dans la convention petit-boutisme, on écrit cette transformation $\hat{I} \otimes \hat{H}$.

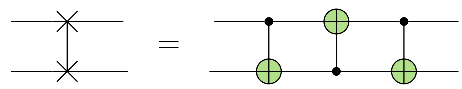
b) Combinez le résultat obtenu en a) avec la matrice unitaire qui représente l'application d'une porte CNOT pour obtenir la matrice qui représente l'application du circuit illustré plus haut. N'oubliez pas que la porte $\hat{I} \otimes \hat{H}$ doit être appliquée en premier.

c) Quels états quantiques ce circuit prépare-t-il si le système de deux qubits est initialement dans les états $|00\rangle$, $|01\rangle$, $|10\rangle$ ou $|11\rangle$?

d) Appliquez ce circuit sur l'état $|+i\rangle \otimes |0\rangle$. Calculez ensuite la probabilité d'obtenir $|01\rangle$ lors de la mesure de l'état résultant.

Exercice 3: Construction d'une porte SWAP

Une porte SWAP peut être construite en assemblant trois CNOT consécutifs de la manière suivante :



Pour démontrer cela

a) Trouvez d'abord la matrice 4×4 qui représente l'application d'un CNOT *vers le haut*. Indice : Le CNOT *vers le bas* est représenté par la matrice $C\hat{X}_{10}$. Le CNOT *vers le haut* est représenté par la matrice $C\hat{X}_{01}$. La méthode la plus sûre et de décrire l'effet d'une telle porte sur les quatre états de base à deux qubits.

b) En effectuant des produits matriciels, montrez que l'application des trois CNOT effectue bien un SWAP.

Solution exercice 1

a) Les probabilités de mesurer le qubit $|a\rangle$ dans l'état $|0\rangle$ et le qubit $|b\rangle$ dans l'état $|1\rangle$ sont

$$p_0^{(a)} = |a_0|^2 \quad \text{et} \quad p_1^{(b)} = |b_1|^2.$$

b) La probabilité d'obtenir ces deux résultats indépendants est le produit de leurs probabilités

$$p_1^{(b)} p_0^{(a)} = |b_1|^2 |a_0|^2 = |b_1 a_0|^2$$

c) Le vecteur d'état pour le système de deux qubits est

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} b_0 a_0 \\ b_0 a_1 \\ b_1 a_0 \\ b_1 a_1 \end{pmatrix}.$$

d) La probabilité de mesurer ce système dans l'état $ket10$, qui correspond au troisième état de base est donc

$$p_{10} = |b_1 a_0|^2$$

ce qui est identique au résultat obtenu en b).

Solution exercice 2

a) Effectuons le produit tensoriel

$$\hat{I} \otimes \hat{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) L'application de la porte Hadamard sur un état initial $|\psi\rangle$ produit l'état intermédiaire

$$|\psi'\rangle = \hat{I} \otimes \hat{H} \, |\psi\rangle$$

L'état final est obtenu après l'application du CNOT

$$|\psi''\rangle = C\hat{X} \, |\psi'\rangle = C\hat{X} \left(\hat{I} \otimes \hat{H} \right) |\psi\rangle$$

La matrice qui représente l'application de ce circuit quantique est

$$\hat{U}_{\text{circuit}} = C\hat{X} \left(\hat{I} \otimes \hat{H} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Les états produits par l'application du circuit sur les 4 états de base sont donnés par les colonnes de la matrice du circuit. Par exemple, pour le premier état de base

$$\hat{U}_{\text{c}} \, |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et pour les trois autres

$$\hat{U}_\mathrm{c}\,|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\-1\end{pmatrix} \qquad \hat{U}_\mathrm{c}\,|10\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \hat{U}_\mathrm{c}\,|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

qui correspondent aux quatre états de Bell.

d) Le vecteur d'état de cet état de départ est

$$|{+i}\rangle \otimes |0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix}$$

L'état produit par l'application du circuit est

$$\hat{U}_\mathrm{c}(|{+i}\rangle \otimes |0\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&-1\\0&0&1&1\\1&-1&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\i\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\i\\1\end{pmatrix}$$

La probabilité d'obtenir $|01\rangle$ lors d'une mesure est

$$p_{01} = |\langle 01|\hat{U}_\mathrm{c}|{+i0}\rangle|^2$$

Calculons d'abord

$$\langle 01|\hat{U}_\mathrm{c}|{+i0}\rangle = \begin{pmatrix}0&1&0&0\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\i\\i\\1\end{pmatrix} = \frac{i}{2}$$

Et finalement

$$p_{01} = \left|\frac{i}{2}\right|^2 = \frac{i}{2}\times\frac{-i}{2} = \frac{1}{4}$$

Solution exercice 3

a) Pour un CNOT *vers le haut*, dans la base $|q_1q_0\rangle$, le qubit de contrôle est q_1 et le qubit cible est q_0. L'effet de cette porte sur les états de base est

$$C\hat{X}_{01}\,|00\rangle = |00\rangle \quad C\hat{X}_{01}\,|01\rangle = |01\rangle \quad C\hat{X}_{01}\,|10\rangle = |11\rangle \quad C\hat{X}_{01}\,|11\rangle = |10\rangle$$

La matrice qui représente cette opération est

$$C\hat{X}_{01} = \begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

b) Le SWAP devrait donc être égal à

$$\text{SWAP} = C\hat{X}_{10}C\hat{X}_{01}C\hat{X}_{10}$$

Effectuons le produit matriciel

$$\begin{aligned}
C\hat{X}_{10}C\hat{X}_{01}C\hat{X}_{10} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

pour retrouver la matrice qui représente bien un SWAP.