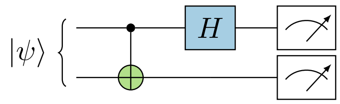
BSQ 110 - Introduction aux sciences quantiques et à leurs applications

Solution du devoir #4

Question 1: Mesure de Bell

Le circuit suivant illustre la mesure de Bell d'un état à deux qubits $|\psi\rangle$.



a) Construisez la matrice unitaire qui représente l'application de la porte CNOT suivie de la porte Hadamard.

b) Quel résultat devriez-vous obtenir si le système est initialement dans l'état $|\Phi^+\rangle$?

c) Refaites le même exercice pour les autres états de Bell.

d) Quels sont les résultats de mesure possibles si l'état initial est

$$|\psi\rangle = |00\rangle$$

et quelles sont leurs probabilités de survenir ?

Solution exercice 1

a) Les matrices des portes impliquées sont

$$C\hat{X}_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \hat{I} \otimes \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

On obtient la matrice qui représente l'application de ce circuit en effectuant le produit de celles-ci (la porte CNOT est appliquée en premier)

$$\begin{aligned} \hat{U}_{\text{circ}} = \left(\hat{I} \otimes \hat{H}\right) C\hat{X}_{10} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \end{aligned}$$

L'effet du CNOT se résume à échanger les colonnes 2 et 4 de la matrice $\hat{I} \otimes \hat{H}$.

b) En appliquant ce circuit sur l'état $|\Phi^+\rangle$ on obtient

$$\hat{U}_{\text{circ}} |\Phi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |00\rangle .$$

c) Pour les trois autres états de Bell on obtient respectivement

$$\hat{U}_{\text{circ}} |\Phi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = |01\rangle$$

$$\hat{U}_{\text{circ}} |\Psi^+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = |10\rangle$$

$$\hat{U}_{\text{circ}} |\Psi^-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = - |11\rangle .$$

On peut donc utiliser ce circuit pour identifier dans quel état de Bell un système de deux qubits se trouve. Les valeurs sur les 2 bits retournées permettent d'identifier l'état de Bell correspondant.

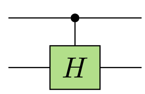
d) Si le système est initialement dans l'état $|00\rangle$ on obtient alors

$$\hat{U}_{\text{circ}} |00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle).$$

On a donc une chance sur deux d'obtenir $|00\rangle$ ou $|01\rangle$ lors d'une mesure. En d'autres mots, l'état $|00\rangle$ peut être vu comme une superposition des états $|\Phi^+\rangle$ et $|\Phi^-\rangle$!

Question 2: Porte contrôle-Hadamard

La porte contrôle-Hadamard ($C\hat{H}$) applique une porte Hadamard sur le qubit cible si le qubit de contrôle est dans l'état $|1\rangle$.



Construisez la matrice qui représente cette porte quantique en suivant les étapes suivantes :

a) Appliquez la porte $C\hat{H}$ sur les quatre états de base à deux qubits.

b) Décomposez les états obtenus dans la base computationnelle à deux qubits.

c) Assemblez la matrice.

Solution exercice 2

a) L'effet de la porte $C\hat{H}$ sur les quatre états de base à deux qubits est

$$C\hat{H}|00\rangle = |00\rangle \quad C\hat{H}|01\rangle = |{+1}\rangle \quad C\hat{H}|10\rangle = |10\rangle \quad C\hat{H}|11\rangle = |{-1}\rangle$$

b) On peut écrire ces résultats à l'aide des états de la base computationnelle

$$C\hat{H}|00\rangle = |00\rangle \quad C\hat{H}|01\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle + |11\rangle) \quad C\hat{H}|10\rangle = |10\rangle \quad C\hat{H}|11\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |11\rangle)$$

ou encore sous forme de vecteurs

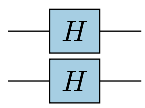
$$C\hat{H}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\quad C\hat{H}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix}\quad C\hat{H}\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\quad C\hat{H}\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\0\\-1\end{pmatrix}.$$

c) La matrice qui représente la porte $C\hat{H}$ peut donc être assemblée

$$C\hat{H}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\0&0&1&0\\0&\frac{1}{\sqrt{2}}&0&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Question 3: Superposition uniforme

Utilisez le produit tensoriel pour construire la matrice qui représente le circuit suivant



a) Appliquez-le sur l'état $|00\rangle$. Quelles sont les probabilités de chacun des résultats possibles lors d'une mesure de l'état obtenu ?

b) Appliquez-le sur les trois autres états de base. En quoi les états obtenus sont-ils similaires et en quoi sont-ils différents ?

Solution exercice 3

La matrice qui représente l'application de ce circuit est

$$\hat{H}\otimes\hat{H}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-1&1&-1\\1&1&-1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix}$$

a) L'application à partir d'un état initial $|00\rangle$ retourne

$$\hat{H}\otimes\hat{H}\,|00\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}=|{+}{+}\rangle$$

Tous les résultats ont une chance sur quatre de survenir.

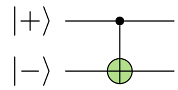
b) Pour les trois autres états de base, les vecteurs d'états sont

$$\hat{H}\otimes\hat{H}\,|01\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}=|{+}{-}\rangle\quad \hat{H}\otimes\hat{H}\,|10\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\-1\end{pmatrix}=|{-}{+}\rangle\quad \hat{H}\otimes\hat{H}\,|11\rangle=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}=|{-}{-}\rangle$$

Dans tous les cas, chaque résultat à une chance sur quatre de survenir. Par contre, les phases relatives sont différentes dans chaque cas.

Question 4: Retour de phase

Considérez le circuit quantique suivant



où une porte CNOT est appliquée sur l'état $|-+\rangle$. Obtenez l'état final de ce circuit. Vous devriez pouvoir l'écrire comme un état produit. Quel est-il ? Est-ce que ce résultat est surprenant ? Décrivez brièvement pourquoi ce phénomène s'appelle le retour de phase ou le *phase kick-back* en anglais.

Solution exercice ??

Appliquons la matrice du CNOT sur le vecteur d'état de l'état initial

$$C\hat{X}_{10}\,|-+\rangle = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = |--\rangle\,.$$

Le résultat est donc l'état produit $|--\rangle$. Le résultat est surprenant, car c'est l'état du qubit de contrôle qui a changé en passant de l'état $|+\rangle$ vers l'état $|-\rangle$. Ce phénomène de retour de phase survient uniquement quand on applique un CNOT sur un qubit cible dans l'état $|-\rangle$.