BSQ 110 - Introduction aux sciences quantiques et à leurs applications

Exercices #2

Les réponses aux **exercices** ne sont pas à remettre.

Banque d'états quantiques

Pour ce qui suit, vous devrez utiliser des états quantiques qui sont couramment définis

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \qquad |-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle$$
$$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle + i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle \qquad |-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|0\rangle - i\frac{1}{\sqrt{2}}|1\rangle.$$

Exercice 1: Vecteur d'état

Écrivez les vecteurs d'état des états quantiques suivants dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$:

a) $|\phi\rangle = \gamma|0\rangle + \delta|1\rangle$

b) $|\psi\rangle = a|1\rangle + b|0\rangle$

c) $|+\rangle$

d) $|-\rangle$

e) $|\eta\rangle = e^{i\varphi_0}(a|0\rangle + b|1\rangle)$

f) $|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

Exercice 2: Probabilités de mesure

Quelles sont les probabilités d'obtenir les résultats 0 et 1 lorsqu'on mesure un qubit placé dans les états normalisés suivants :

a) $|+\rangle$

b) $|-\rangle$

c) $|-i\rangle$

d) $|\psi_d\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}}|0\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}}|1\rangle$

e) $|\psi_e\rangle = a|0\rangle + b|1\rangle + c|0\rangle$

f) $|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$

Exercice 3: Effet des phases sur les probabilités de mesure

On s'intéresse à l'effet des phases relatives et globales sur les probabilités de mesure. On s'intéresse d'abord aux phases relatives.

a) Montrez que la phase relative n'a pas d'effet sur les probabilités de mesurer 0 ou 1 pour un état du type

$$|\psi_a\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|0\rangle + e^{i\varphi}|1\rangle\big).$$

b) Montrez que la phase relative *a* un effet sur les probabilités de mesurer 0 ou 1 pour un état du type

$$|\psi_b\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle + e^{i\varphi}|-\rangle\big).$$

Vous pouvez utilisez deux stratégies : 1. d'abord réécrire $|\psi_b\rangle$ sur la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ et utiliser les amplitudes obtenues pour calculer les probabilités ou 2. effectuer les produits scalaires $\langle 0|\psi_b\rangle$ et $\langle 1|\psi_b\rangle$ pour ensuite calculer les probabilités.

On s'intéresse maintenant à l'effet d'une phase globale sur les probabilités de mesure.

c) Montrez que la phase globale n'a pas d'effet sur les probabilités de mesurer 0 ou 1 pour un état du type

$$|\psi_c\rangle = e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle).$$

d) Montrez que la phase globale n'a pas plus d'effet sur les probabilités de mesurer 0 ou 1 pour un état du type

$$|\psi_d\rangle = e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle + |-\rangle)$$

.

Commentaire : Bien que la phase relative n'a pas toujours un effet sur les résultats de mesure, deux états quantiques avec des phases relatives dfférentes sont physiquement distinguables. En contre partie, la phase globale n'a jamais d'effet physique mesurable.

Solution exercice 1

Les vecteurs pour ces états sont

a) $|\phi\rangle = \begin{pmatrix}\gamma\\ \delta\end{pmatrix}$

b) $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}b\\ a\end{pmatrix}$

c) $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

d) $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$

e) $|\eta\rangle = e^{i\varphi_0}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}ae^{i\varphi_0}\\ be^{i\varphi_0}\end{pmatrix}$

f) $|\theta\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix} + \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

Solution exercice 2

a) $p_0 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ et $p_1 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

b) $p_0 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ et $p_1 = \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

c) $p_0 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$ et $p_1 = \left|-i\frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}$

d) $p_0 = \left|\frac{1}{\sqrt{3}}\right|^2 = \frac{1}{3}$ et $p_1 = \left|-\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \frac{2}{3}$

e) $p_0 = |a+c|^2$ et $p_1 = |b|^2$

f) On peut calculer les probabilités directement

$$p_0 = |\langle 0|\psi_f\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle 0|+\rangle + \langle 0|-\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{2}}\right|^2 = 1$$

$$p_1 = |\langle 1|\psi_f\rangle|^2 = \frac{1}{2}|\langle 1|+\rangle + \langle 1|-\rangle|^2 = \frac{1}{2}\left|\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right|^2 = 0$$

ou bien exprimer l'état dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$

$$|\psi_f\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right) = |0\rangle\,.$$

Le qubit étant dans l'état $|0\rangle$, sa mesure retournera toujours 0.

Solution exercice 3

Phase relative

a) Les probabilités d'obtenir 0 et 1 lorsqu'on mesure $|\psi_a\rangle$ sont,

$$p_0 = |\langle 0|\psi_a\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 0|0\rangle + e^{i\varphi}\langle 0|1\rangle\big)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$
$$p_1 = |\langle 1|\psi_a\rangle|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\big(\langle 1|0\rangle + e^{i\varphi}\langle 1|1\rangle\big)\right|^2 = \left|\frac{1}{\sqrt{2}}e^{i\varphi}\langle 1|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

b) Si on écrit $|\psi_b\rangle$ dans la base $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ on obtient

$$\begin{aligned}|\psi_b\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}}\big(|+\rangle + e^{i\varphi}|-\rangle\big)\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle) + e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)\right)\\ &= \frac{1}{2}\big(|0\rangle\left(1+e^{i\varphi}\right) + |1\rangle\left(1-e^{i\varphi}\right)\big).\end{aligned}$$

La probabilité d'obtenir 0 lors d'une mesure est donc,

$$p_0 = \left|\frac{1}{2}\big(1+e^{i\varphi}\big)\right|^2 = \frac{1}{4}\big(1+e^{i\varphi}\big)\big(1+e^{-i\varphi}\big) = \frac{1}{4}\big(1+e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}+1\big) = \frac{1}{4}(2+2\cos\varphi) = \cos^2\frac{\varphi}{2}.$$

La probabilité d'obtenir 1 est quant à elle

$$p_1 = \left|\frac{1}{2}\big(1-e^{i\varphi}\big)\right|^2 = \frac{1}{4}\big(1-e^{i\varphi}\big)\big(1-e^{-i\varphi}\big) = \frac{1}{4}\big(1-e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}+1\big) = \frac{1}{4}(2-2\cos\varphi) = \sin^2\frac{\varphi}{2}.$$

On vérifie bien que

$$p_0 + p_1 = \cos^2\frac{\varphi}{2} + \sin^2\frac{\varphi}{2} = 1.$$

Phase globale.

c) Les probabilités d'obtenir 0 et 1 lorsqu'on mesure $|\psi_c\rangle$ sont,

$$p_0 = |\langle 0|\psi_c\rangle|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|0\rangle + \langle 0|1\rangle)\right|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 0|0\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}$$
$$p_1 = |\langle 1|\psi_c\rangle|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|0\rangle + \langle 1|1\rangle)\right|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}\langle 1|1\rangle\right|^2 = \frac{1}{2}.$$

d) Les probabilités d'obtenir 0 et 1 lorsqu'on mesure $|\psi_d\rangle$ sont,

$$p_0 = |\langle 0|\psi_d\rangle|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 0|+\rangle + \langle 0|-\rangle)\right|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = 1$$
$$p_1 = |\langle 1|\psi_d\rangle|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}(\langle 1|+\rangle + \langle 1|-\rangle)\right|^2 = \left|e^{i\varphi}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right|^2 = 0.$$