BSQ 110 - Introduction aux sciences quantiques et à leurs applications

Exercices #3

Les réponses aux **exercices** ne sont pas à remettre.

Banque de portes quantiques

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Y} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \hat{Z} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 1: La porte $\hat{S}$

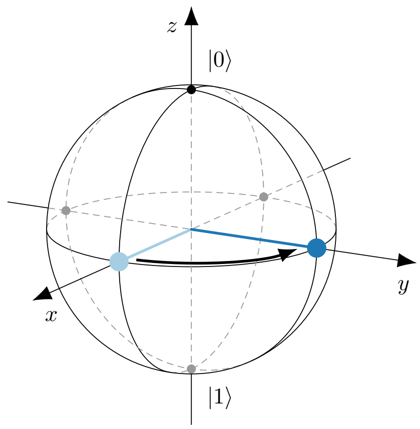

FIGURE 1 – Effet de la porte $\hat{S}$ sur l'état $|+\rangle$.

La porte $\hat{S}$ transforme l'état d'un qubit en effectuant une rotation de $\pi/2$ dans le sens antihoraire autour de l'axe z comme illustré à la figure 1. La matrice représentant cette transformation est

$$\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

a) Quelle est la matrice de la transformation inverse à $\hat{S}$?

b) La porte quantique $\hat{S}$ est aussi souvent appelée $\sqrt{\hat{Z}}$. Dites pourquoi on utilise cette appellation ? Est-ce qu'il y a un *danger* avec cette définition ?

c) Certaines références utilisent la matrice

$$\hat{S}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix}$$

pour représenter cette porte. Est-ce que cette définition est valide ? Pourquoi ?

Exercice 2: Rotations paramétrées

Une porte quantique paramétrée est une porte dont l'effet dépend d'un ou plusieurs paramètres. Par exemple, on peut effectuer des rotations pour des angles arbitraires autour des trois axes x, y et z à l'aide des portes $\hat{R}_x(\theta)$, $\hat{R}_y(\theta)$ et $\hat{R}_z(\theta)$ respectivement. Les matrices qui représentent ces opérations sont,

$$\hat{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ -i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \hat{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) & -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) & \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix} \quad \hat{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\theta}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\theta}{2}\right) \end{pmatrix}.$$

Exprimez chacune des portes quantiques suivantes grâce à une rotation paramétrée et un angle

a) $\hat{X}$

b) $\hat{Z}$

c) $\hat{S}$

d) $\hat{S}^\dagger$.

Incluez les facteurs de phase globale s'il y en a.

Exercice 3: Formulation dyadique de la porte Hadamard

La formulation dyadique de la porte Hadamard à l'aide des états de base est

$$\hat{H} = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle\langle 0| + |1\rangle\langle 0| + |0\rangle\langle 1| - |1\rangle\langle 1|).$$

Trouvez une formulation dyadique plus compacte pour cette porte.

Solution exercice 1

a) La matrice inverse est

$$\hat{S}^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$$

b) Si on applique $\hat{S}$ deux fois de suite, on obtient une porte $\hat{Z}$. En effet,

$$\hat{S}\hat{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Comme $\hat{S}^2 = \hat{Z}$, on peut également écrire $\hat{S} = \sqrt{\hat{Z}}$. Le danger réside dans le fait que l'inverse de $\hat{S}$ pourrait porter le même nom. En effet $(\hat{S}^\dagger)^2 = \hat{Z}$.

c) L'application de la matrice $\hat{S}'$ a le même effet que la matrice $\hat{S}$ à un facteur global près. En effet, si on multiplie $\hat{S}'$ par $e^{i\pi/4} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ on obtient

$$\begin{aligned} e^{i\pi/4}\hat{S}' &= \frac{1+i}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1-i & 0 \\ 0 & 1+i \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} (1+i)(1-i) & 0 \\ 0 & (1+i)^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+1 & 0 \\ 0 & 1+2i-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que la matrice originale pour $\hat{S}$.

Solution exercice 2

a) $\hat{X} = i\hat{R}_x(\pi)$

b) $\hat{Z} = i\hat{R}_z(\pi)$

c) $\hat{S} = e^{i\pi/4}\hat{R}_z(\pi/2)$

d) $\hat{S}^\dagger = e^{-i\pi/4}\hat{R}_z(-\pi/2)$

Solution exercice 3

On remarque qu'on peut effectuer des mises en évidence dans la formulation dyadique de la porte Hadamard. En effet,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(|0\rangle + |1\rangle)\langle 0| + (|0\rangle - |1\rangle)\langle 1|] \\ &= \frac{|0\rangle + |1\rangle}{\sqrt{2}}\langle 0| + \frac{|0\rangle - |1\rangle}{\sqrt{2}}\langle 1|. \end{aligned}$$

On reconnait alors les états $|+\rangle$ et $|-\rangle$. On peut donc écrire la porte Hadamard sous la forme dyadique suivante

$$\hat{H} = |+\rangle\langle 0| + |-\rangle\langle 1| \,.$$

Une mise en évidence des $\langle\cdot|$ nous aurait permis d'obtenir

$$\hat{H} = |0\rangle\langle +| + |1\rangle\langle -| \,.$$