BSQ 110 - Introduction aux sciences quantiques et à leurs applications

Examen Intra – Solution

18 octobre 2022

Question 1: États spéciaux sur la sphère de Bloch (10 pts)

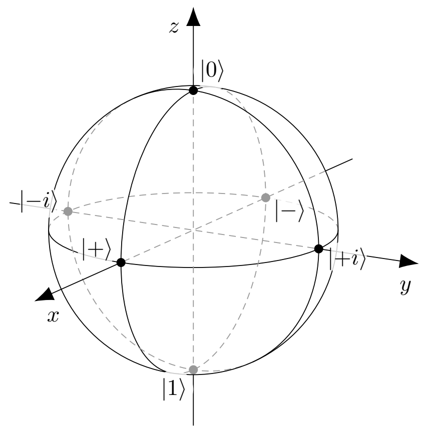


FIGURE 1

Un état quantique pour un qubit peut être entièrement décrit à l'aide de l'équation suivante

$$|\psi\rangle = \cos(\theta/2)\,|0\rangle + e^{i\varphi}\sin(\theta/2)\,|1\rangle\,.$$

a) Montrez qu'un état quantique écrit de la sorte est toujours un état normalisé.

b) Déterminez les angles θ et φ qui permettent de reproduire les six états

$$|0\rangle\,,\quad |1\rangle\,,\quad |+\rangle\,,\quad |-\rangle\,,\quad |+i\rangle\quad \text{et}\quad |-i\rangle\,.$$

qui sont illustrés à la figure 1.

Solution question 1

a) Un état $|\psi\rangle$ est normalisé si $|\langle\psi|\psi\rangle| = 1$. On peut écrire cet état comme un vecteur

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix}$$

On calcule donc,

$$\begin{aligned} \langle\psi|\psi\rangle &= \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) & e^{-i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ e^{i\varphi}\sin(\theta/2) \end{pmatrix} \\ &= \cos^2(\theta/2) + e^{-i\varphi}e^{i\varphi}\sin^2(\theta/2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

b) Si on considère les états comme étant défini à une phase globale prêt on identifie les angles

$$|0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(0)\\ e^{i\varphi}\sin(0)\end{pmatrix} \qquad \theta = 0, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/2)\\ e^{i0}\sin(\pi/2)\end{pmatrix} \qquad \theta = \pi, \varphi \in \mathbb{R}$$

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4)\\ e^{i0}\sin(\pi/4)\end{pmatrix} \qquad \theta = \pi/2, \varphi = 0$$

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4)\\ e^{i\pi}\sin(\pi/4)\end{pmatrix} \qquad \theta = \pi/2, \varphi = \pi$$

$$|+i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4)\\ e^{i\pi/2}\sin(\pi/4)\end{pmatrix} \qquad \theta = \pi/2, \varphi = \pi/2$$

$$|-i\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos(\pi/4)\\ e^{-i\pi/2}\sin(\pi/4)\end{pmatrix} \qquad \theta = \pi/2, \varphi = -\pi/2.$$

Question 2: Produits scalaires (8 pts)

Calculez les produits scalaires suivants :

a) $\langle 0|1\rangle$

b) $\langle +|-\rangle$

c) $\langle \Psi^-|00\rangle$

d) $\langle ++|\Phi^+\rangle$

Solution question 2

a) $\langle 0|1\rangle = \begin{pmatrix}1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = 0$

b) $\langle +|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = 0$

c) $\langle \Psi^-|00\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0$

d) $\langle ++|\Phi^+\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

Question 3: États distinguables (8 pts)

Vérifiez si les états des paires suivantes sont physiquement distinguables ou non.

a) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|++\rangle + |--\rangle)$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$

b) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\i\end{pmatrix}$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix}$

c) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|+\rangle + e^{i\pi/4}|-\rangle\Big)$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(|-\rangle + e^{i\pi/4}|+\rangle\Big)$

d) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}(|00\rangle + i|01\rangle + i|10\rangle + |11\rangle)$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}(-i|00\rangle + |01\rangle + |10\rangle - i|11\rangle)$

Solution question 3

Deux états sont distinguables s'ils sont égaux à une phase globale près ou, de manière équivalente, si $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| \neq 1$.

a) $|\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\0\\0\\1\end{pmatrix} = |\psi_2\rangle$ donc $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = 1$. Ils sont indistinguables.

b) $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}i\\-1\end{pmatrix} = i$ donc $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = 1$. Ils sont indistinguables.

c) On écrit d'abord $|\psi_1\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{i\pi/4}\\1-e^{i\pi/4}\end{pmatrix}$ et $|\psi_2\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{i\pi/4}+1\\e^{i\pi/4}-1\end{pmatrix}$.

Ensuite,

$$\begin{aligned}\langle\psi_1|\psi_2\rangle &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1+e^{-i\pi/4} & 1-e^{-i\pi/4}\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}e^{i\pi/4}+1\\e^{i\pi/4}-1\end{pmatrix}\\ &= \frac{1}{4}\left(2+e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}-2+e^{i\pi/4}+e^{-i\pi/4}\right)\\ &= \cos(\pi/4) \neq 1\end{aligned}$$

Ils sont donc distinguables.

d) $\langle\psi_1|\psi_2\rangle = \frac{1}{4}(-i-i-i-i) = -i$ donc $|\langle\psi_1|\psi_2\rangle| = 1$. Ils sont indistinguables.

Question 4: États intriqués et états produits (8 pts)

Identifiez si les états à deux qubits suivants sont des états produits ou s'ils sont intriqués.

a) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |01\rangle)$

b) $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|{++}\rangle + |{--}\rangle)$

c) $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

d) $|\psi\rangle = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\-1\end{pmatrix}$

Solution question 4

Un état à deux qubits est intriqué si on ne peut pas l'écrire comme un état produit.

a) $|\psi\rangle = |0+\rangle$ C'est un état produit.

b) C'est la première paire de Bell, c'est un état intriqué.

c) Essayons

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}b_0a_0\\b_0a_1\\b_1a_0\\b_1a_1\end{pmatrix}.$$

En termes du signe des composantes, les trois premières composantes nous disent que $\operatorname{sgn}(b_0) = \operatorname{sgn}(a_0) = \operatorname{sgn}(a_1) = \operatorname{sgn}(b_1)$, mais la quatrième composante implique que $\operatorname{sgn}(b_1) = -\operatorname{sgn}(a_1)$. Il n'est pas possible d'écrire cet état comme un produit, il est donc intriqué.

d) $|\psi\rangle = -|{--}\rangle$ C'est un état produit.

Question 5: Porte de phase (10 pts)

La porte de phase est une porte paramétrée qui transforme l'état d'un qubit en effectuant une rotation d'un angle arbitraire φ dans le sens antihoraire autour de l'axe z comme illustré à la figure 2. La matrice représentant cette transformation est

$$\hat{P}(\varphi) = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & e^{i\varphi}\end{pmatrix}.$$

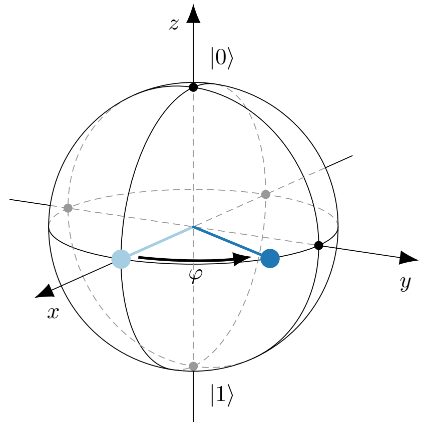


FIGURE 2

a) Quelle est la matrice de la transformation inverse à $\hat{P}(\varphi)$?

b) Écrivez les portes $\hat{Z}$, $\hat{S}$ et $\hat{S}^\dagger$ à l'aide de la porte de phase en spécifiant l'angle φ pour chacune d'elles.

c) La porte de rotation $\hat{R}_z(\theta)$ permet de transformer les états quantiques de manière similaire à la porte de phase $\hat{P}(\varphi)$. Est-ce que ces deux portes sont équivalentes ? En quoi sont-elles différentes ?

Solution question 5

a) On prend le conjugué harmitien

$$\hat{P}^\dagger(\varphi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i\varphi} \end{pmatrix} = \hat{P}(-\varphi).$$

b) Par inspection,

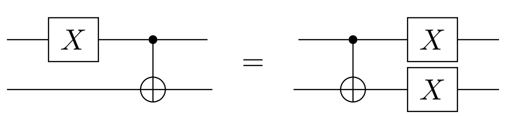
$$\hat{Z} = \hat{P}^\dagger(\pm\pi) \quad \hat{S} = \hat{P}^\dagger(\pi/2) \quad \hat{S}^\dagger = \hat{P}^\dagger(-\pi/2)$$

c) Ces deux portes sont équivalentes, car elles diffèrent que par une phase globale

$$\hat{R}_z(\varphi) = \begin{pmatrix} \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) & 0 \\ 0 & \exp\left(i\frac{\varphi}{2}\right) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \exp\left(i\varphi\right) \end{pmatrix} = \exp\left(-i\frac{\varphi}{2}\right) \hat{P}(\varphi).$$

Question 6: Circuits d'identité (10 pts)

Vérifiez mathématiquement que les deux circuits suivants sont équivalents



Solution question 6

D'abord on utilise le produit tensoriel pour construire

$$\hat{I} \otimes \hat{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X} \otimes \hat{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

On compose ensuite les portes pour obtenir les matrices des circuits en appliquant les matrices dans le bon ordre

$$C\hat{X}_{01}\left(\hat{I}\otimes\hat{X}\right) = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\left(\hat{X}\otimes\hat{X}\right)C\hat{X}_{01} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Ces deux circuits sont donc équivalents.

Question 7: Réversibilité (6 pts)

Expliquez, en vos mots, pourquoi on affirme que le calcul quantique est réversible. Dans votre réponse, assurez-vous d'identifier quelles parties d'un circuit quantique sont réversibles et quelles parties ne le sont pas.

Solution question 7

Le calcul quantique est dit réversible, car toutes les portes quantiques peuvent être représentées par des matrices unitaires qui sont, par définition, inversibles. Chaque opération quantique possède un inverse qui permet de *revenir en arrière*. La seule exception est la mesure. La mesure n'est pas représentée par une opération unitaire et projète de manière irréversible l'état du ou des qubits vers un état de la base computationnelle.