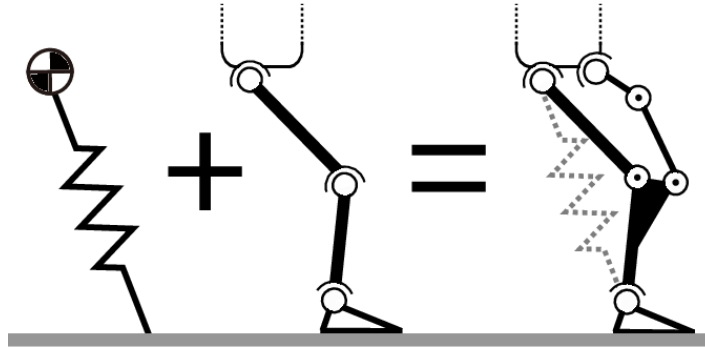


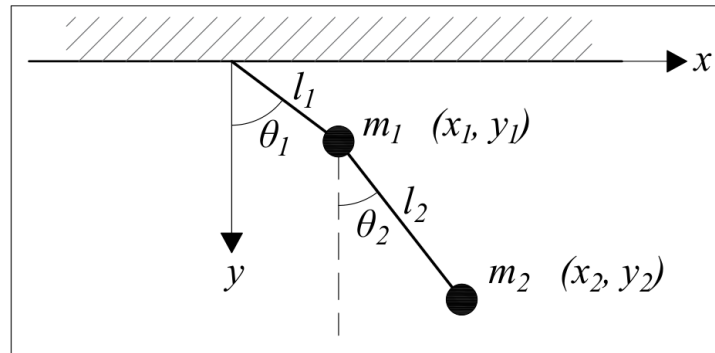
1º Exercício Programa de PMR 3401
Data de entrega: 09/05/2024 (até às 23h59min)

Método de Runge Kutta

Equipamentos do setor aeroespacial, como satélites e telescópios espaciais, podem ser construídos com o uso de estruturas articuladas. Essas estruturas também são úteis em outras aplicações, como na mecatrônica, onde múltiplas partes de um robô podem ser interconectadas para permitir um maior número de graus de liberdade de movimento. Barras e molas são frequentemente associadas a essas estruturas para maior ‘fluidez’ do movimento.



Dada a complexidade do sistema, considere o problema representado na figura abaixo, onde duas massas m_1 e m_2 estão interligadas pelas hastes rígidas de comprimentos l_1 e l_2 (assumidas aqui com massa desprezível).



Utilizando o formalismo Lagrangeano, pode-se obter as equações que determinam o comportamento dinâmico do modelo, descrito pelas seguintes equações:

Equação para a coordenada generalizada θ_1 :

$$(m_1 + m_2)l_1^2\ddot{\theta}_1 + m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_2\cos(\theta_1 - \theta_2) + \dot{\theta}_2^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] = -(m_1 + m_2)gl_1\sin(\theta_1)$$

Equação para a coordenada generalizada θ_2 :

$$m_2l_2^2\ddot{\theta}_2 + m_2l_1l_2\left[\ddot{\theta}_1\cos(\theta_1 - \theta_2) - \dot{\theta}_1^2\sin(\theta_1 - \theta_2)\right] = -m_2gl_2\sin(\theta_2)$$

Considere:

$$\begin{aligned} m_1 &= 0,5 \text{ kg}, m_2 = 1,0 \text{ kg} \\ l_1 &= 1,0 \text{ m}, l_2 = 1,5 \text{ m} \\ g &= 9,8 \text{ m/s}^2 \end{aligned}$$

- 1) Considerando as constantes dadas, resolva as equações para $0 \text{ s} < t < 60 \text{ s}$, com as condições iniciais $\dot{\theta}_1 = 0,05 \text{ s}^{-1}$, $\theta_1 = 0^\circ$, $\dot{\theta}_2 = 0,1 \text{ s}^{-1}$, $\theta_2 = 0^\circ$ usando:

- a. Método de Euler .
- b. Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

Para os dois métodos verifique a influência do passo " h " sobre a solução (ou seja, resolva considerando diferentes valores de h). Plote os deslocamentos, velocidades e acelerações em figuras diferentes em uma mesma página, um debaixo do outro. Cada plot deve conter as variáveis correspondentes às massas m_1 e m_2 .

Para as condições do item 1:

2) Aumente as velocidades iniciais por fatores de 2 e 10. Explique: por que a simulação se torna mais instável com velocidades iniciais maiores?

Sugestão:

Primeiro reorganize as equações acima, escrevendo-as, respectivamente, da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}_1 A_1 &= \ddot{\theta}_2 B_1 + \dot{\theta}_1^2 C_1 + \dot{\theta}_2^2 D_1 + \theta_1 E_1 + \theta_2 F_1 \\ \ddot{\theta}_2 A_2 &= \ddot{\theta}_1 B_2 + \dot{\theta}_1^2 C_2 + \dot{\theta}_2^2 D_2 + \theta_1 E_2 + \theta_2 F_2\end{aligned}$$

para então se aplicar os métodos retrocitados.

Método de Diferenças Finitas (MDF)

Um problema clássico na aeronáutica é determinar o escoamento sobre estruturas, que é abrangentemente descrito pelas equações de Navier-Stokes. Para um escoamento incompressível, essas equações descrevem a conservação do momento (Eq. 1) e da continuidade (Eq. 2):

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \rho(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mu \nabla^2 \mathbf{u} - \nabla p + \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

onde \mathbf{u} é o vetor velocidade, p é a pressão, ρ a massa específica, μ a viscosidade absoluta e \mathbf{f} são forças externas (nulas aqui, que consideramos apenas a influência do escoamento).

Na prática, aerofólios buscam maximizar a força de sustentação em relação à força de arrasto que os afeta (vide a figura). Isto permite que aeronaves consumam menos combustível durante o voo, e é atingido quando o aerofólio adota ângulos de ataque mais elevados (θ , na figura 1 à direita). Uma medida do aerofólio é a sua corda, definida como a linha que conecta o bordo de fuga ao bordo de ataque (veja os pontos na figura 1 à esquerda). O ângulo de ataque corresponde ao ângulo entre a direção do escoamento e a corda (veja a figura 1).

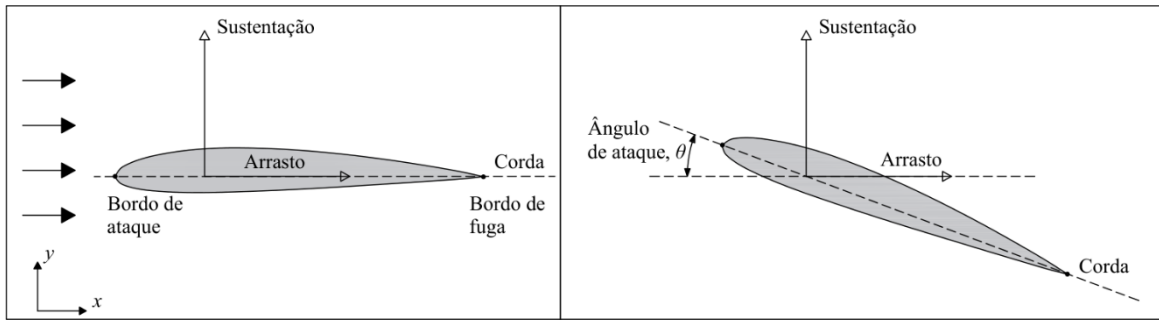


Figura 1 - Aerofólio a ângulo de ataque nulo (esquerda) e não nulo (direita). A força de arrasto (ou *drag*) é aquela na direção do escoamento; e a força de sustentação (ou *lift*) é perpendicular ao escoamento.

Até ângulos de 15° é razoável supor que a força de sustentação pode ser computada através de escoamento potencial, já que a camada limite é muito fina e a pressão imposta pelo escoamento potencial sobre a estrutura é aquela do escoamento invíscido. Nestas condições, não há separação do escoamento.

Assim, para $\theta < 15^\circ$, podemos usar a simplificação de um escoamento em regime permanente e irrotacional, o que se traduz nas seguintes equações, em termos do potencial do escoamento (Φ):

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0 \quad (3)$$

Onde

$$\nabla \Phi = \mathbf{u} = u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} \quad (4)$$

E que também pode ser reescrita em termos da função de corrente ψ :

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \Phi}{\partial y} = -u_y \quad e \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} = u_x \quad (5)$$

Para se obter

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0 \quad (6)$$

Quando o escoamento contorna facilmente a estrutura, dizemos que se trata de uma estrutura afilada ('*streamlined*'). O mesmo não ocorre quando a estrutura obstrui o escoamento,

como no caso de um corpo denominado ‘rombudo’ (*‘bluff’*). Um exemplo clássico de corpo rombudo é o de um cilindro em um escoamento. No entanto, essa característica não depende somente da geometria do corpo, mas também de sua posição: outros exemplos de corpos rombudos são um aerofólio ou uma pá de turbina eólica em ângulos de ataque elevados.

Considere o caso simplificado de um aerofólio a $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 15^\circ$, substituindo sua geometria por uma simplificação – de uma placa plana perpendicular ao escoamento incidente, conforme a figura abaixo – e com as condições de contorno especificadas: velocidades ao longe (superfícies superior e inferior, entrada e saída do domínio) do escoamento livre, tais que $\partial\psi/\partial x = 0$ e $\partial\psi/\partial y = U_\infty$, condição de não penetração aproximada por $\psi = 0$ na superfície da placa e condição de Kutta aproximada em que $\partial\psi/\partial x = \partial\psi/\partial y = 0$ nas pontas do corpo correspondentes aos pontos A e B destacados abaixo.

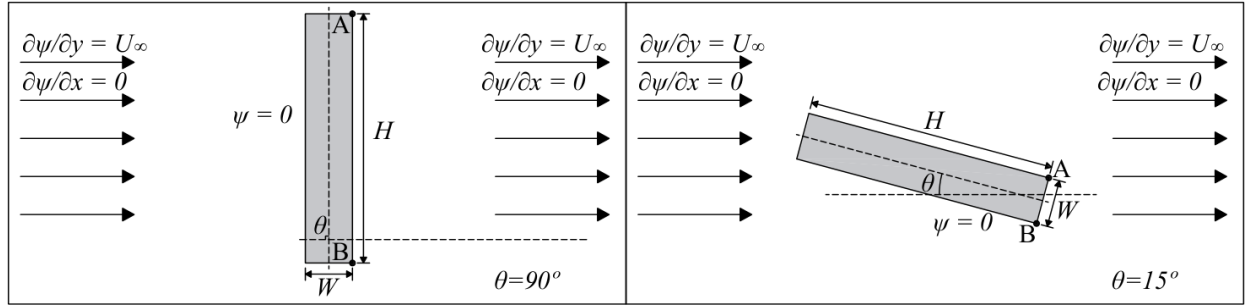


Figura 2 - Escoamento sobre um corpo. À esquerda, em ângulo de ataque $\theta = 90^\circ$; à direita, $\theta = 15^\circ$.

Estas condições de contorno foram transformadas em condições de contorno de ψ através da equação (5), que, junto com a equação (3), elas permitem resolver o escoamento sobre o domínio como um todo para ψ (ou, alternativamente, para \mathbf{u} ou Φ) com o Método de Diferenças Finitas (MDF). Obtendo-se ψ , é possível obter \mathbf{u} através de (5) e, em seguida, calcular a pressão p através da equação de Bernoulli:

$$\frac{p_1}{\rho g} + \frac{v_1^2}{2g} = \frac{p_2}{\rho g} + \frac{v_2^2}{2g} \quad (7)$$

onde os índices 1 e 2 correspondem simplesmente a pontos distintos quaisquer do domínio. As força de sustentação e de arrasto são dadas pela somatória das forças de pressão ao longo da superfície do aerofólio nas direções do escoamento e perpendicular a ele, dadas pelas integrais:

$$F_{\text{sustentação}} = \int_A p \mathbf{n} \cdot \mathbf{y} dA \quad (8)$$

$$F_{\text{arrasto}} = \int_A p \mathbf{n} \cdot \mathbf{x} dA$$

onde \mathbf{x} e \mathbf{y} são vetores unitários, respectivamente, nas direções x e y ; e \mathbf{n} é o vetor unitário normal à superfície do corpo.

Considere:

- Velocidade incidente do escoamento: $U_\infty = 30 \text{ m/s}$.
- Dimensões da placa: $H = 1 \text{ m}$ e $W = 0.1 \text{ m}$.
- Propriedades do fluido: $\rho = 1 \text{ kg/m}^3$.

Com um domínio como o da figura abaixo em que o centro da placa coincide com o centro do domínio, e uma malha quadrada adequada (ou seja $\Delta x = \Delta y$), implemente o método de “sobre-relaxação” para a solução do sistema linear de equações resultante da aplicação do

MDF (utilize $\lambda=1,85$ e tolerância de convergência de 0,01). Verifique a influência da discretização (Δx) sobre a solução (explique como chegou no valor de Δx utilizado).

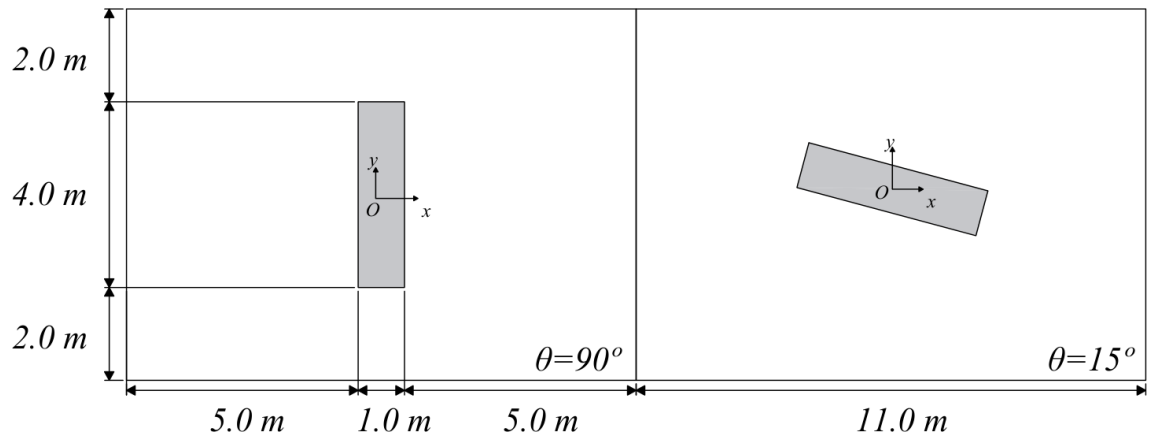


Figura 3 - Especificação do domínio

PARTE I: para os casos de ângulo de ataque $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 15^\circ$, pede-se:

- Plotar a função de corrente ψ do escoamento;
- Plotar os vetores de velocidade absoluta do escoamento;
- Plotar contornos de pressão no domínio;

PARTE II: Compare agora ambos os casos. Pede-se:

- Plotar a pressão ao longo da placa em ambos os casos em uma única figura, explicitando seu valor mínimo;
- Calcule as forças de arrasto e sustentação;
- Varie a velocidade do escoamento ($V = 10 \text{ m/s}$ e $V = 90 \text{ m/s}$) e recalcule as forças de arrasto e sustentação.
- Avaliando as linhas de corrente do escoamento ψ , explique por que a força de sustentação difere entre os ângulos $\theta = 90^\circ$ e $\theta = 15^\circ$. Para o primeiro caso a placa é um corpo rombudo ou aerodinâmico? E no segundo? Justifique.

IMPORTANTE: Não estamos resolvendo para o domínio interno do aerofólio, mas apenas a interação entre o corpo e o escoamento ao seu redor.

APRESENTAÇÃO DE RESULTADOS

Os trabalhos podem ser feitos em grupos de dois alunos. Os resultados devem ser apresentados da seguinte forma:

- a) Inicialmente apresente todos os equacionamentos analíticos e numéricos do problema a serem implementados no Python, SCILAB ou MATLAB;
- b) NÃO será aceita a utilização de comandos prontos do SCILAB (ou MATLAB) para as soluções das equações de derivadas ordinárias no Método de Runge Kutta e das equações de derivadas parciais no Método de Diferenças Finitas;
- c) Todos os resultados do tipo $f(x,y)$ devem ser plotados utilizando-se funções do SCILAB (ou MATLAB) como mesh, contour, surf (escolha uma) (coloque título e legenda nos gráficos). Os gráficos devem ser legíveis e de fácil leitura. NÃO será aceita a simples apresentação de tabelas ou a listagem dos valores da função nos nós da malha;
- d) NÃO utilize os comandos de manipulação simbólica do SCILAB (ou MATLAB);
- e) Entregue as listagens dos arquivos *.py, *.sci ou *.m) os quais devem estar decentemente comentados;
- f) O relatório (pdf) contendo a listagem do algoritmo (pdf) deve ser entregue na forma digital no Moodle. O relatório deve ser organizado em seções, os resultados devem ser discutidos e apresentados na sequência descrita neste EP, e no final do relatório deve incluir uma conclusão;
- g) Qualquer discussão ou comparação deve ser acompanhada de gráficos e/ou outras indicações que o levou às conclusões;
- h) Para cada dia de atraso serão descontados 2,0 pontos na nota do EP.

REFERÊNCIAS

- [1] Anderson, J. D. *Fundamentals of Aerodynamics*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.