

UM ESTUDO SOBRE GEODÉSICAS

O CAMINHO MÍNIMO ENTRE GEOMETRIA DE FINSLER E MECÂNICA

GUILHERME CERQUEIRA GONÇALVES

Monografia elaborada para a disciplina MAT-0148 – Introdução ao Trabalho Científico
Bacharelado em Matemática – Instituto de Matemática e Estatística – Universidade de São Paulo
Janeiro de 2022.

Comissão Julgadora: Marcos M. Alexandrino – IME-USP (Orientador)
Benigno O. Alves – UFBA
Patricia Marçal

RESUMO. Nesta Monografia faz-se um estudo de geometria Riemanniana, mecânicas Lagrangeana e Hamiltoniana, geometria de Finsler e uma breve introdução a folheações Finslerianas Singulares. O conceito central que liga todas esses tópicos é a geodésica. Na parte Riemanniana é feita de uma introdução até aplicações de Campos de Jacobi, seguindo [1]. As partes de mecânica são baseadas em [9] e são comentados o Teorema da Métrica de Jacobi e o Teorema de Noether. No contexto Finsler é feita uma introdução, baseada em [4] e focada no Teorema 4.25 de [8], para o qual é apresentada uma versão mais completa da demonstração do artigo, feita pelo autor deste texto. Por fim, mais ferramental Finsler é introduzido e é feito um breve estudo de folheações transnormais Finsler, seguindo [4] e [2].

SUMÁRIO

Agradecimentos	2
1. Uma breve introdução a Geometria Riemanniana	2
1.1. Métrica Riemanniana	2
1.2. Teoria de Conexões Afins	3
1.3. Tensor de Curvatura	7
1.4. Geodésicas e Campos de Jacobi	8
1.5. Primeiras Aplicações	15
2. Mecânica Lagrangiana de um ponto de vista Geométrico	17
2.1. Equação de Euler-Lagrange	17
2.2. Transformada de Legendre	20
2.3. Teorema de Noether	21
3. Rudimentos de Geometria Simplética via Mecânica Hamiltoniana	22
3.1. Estrutura Simplética	22
3.2. Equações de Hamilton	24
3.3. Métrica de Jacobi	27
4. Boas Vindas ao Mundo Finsler	29
4.1. Métrica Finsler e Exemplo Randers	29
4.2. Distância e Geodésica	34
4.3. Um Teorema sobre Geodésicas via Deformação de Zermelo	37
5. Mais Ferramentas Finslerianas	42
5.1. Conexão de Chern	42

Os estudos que culminaram neste texto foram financiados pela FAPESP nos processo #2019/22488-1 e processo #2021/00551-3, Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP). "As opiniões, hipóteses e conclusões ou recomendações expressas neste material são de responsabilidade do(s) autor(es) e não necessariamente refletem a visão da FAPESP".

O conteúdo deste trabalho é publicado sob a Licença Creative Commons Atribuição 4.0 Internacional – CC BY 4.0.

5.2. Aplicação Exponencial e L-Campos de Jacobi	46
6. Folheações Finsler Transnormais	47
6.1. Motivações: Frentes de Onda e Funções Transnormais	47
6.2. Partições de Finsler e Vizinhanças Tubulares	48
6.3. Folheações de Randers e Consequências da Transnormalidade	50
Referências	52

AGRADECIMENTOS

Longa foi a jornada até aqui. Devo agradecimentos a muitos professores e amigos que me apoiaram antes mesmo da universidade. Em particular, minha eterna gratidão ao meu ex-professor e amigo Rodrigo Agra que não só me mostrou a beleza na Matemática como também expandiu os horizontes daquele garoto de 13 anos e sempre me apoiou.

Agradeço veementemente também a meu orientador e amigo Marcos Alexandrino. Por seus intermináveis ensinamentos sobre Matemática e sobre a vida aliados a sua eterna paciência com minha vontade de dar passos maiores que a própria perna. Guiou-me desde meu segundo semestre com esmero, uma qualidade que exibe com todos seus orientandos, ajudando-me a me preparar para as incertezas que o futuro sempre esconde.

Agradeço também a minha família pelos momentos que me apoiaram, especialmente meu irmão Gabriel Cerqueira que sempre foi um alicerce para mim e escutou meus devaneios intermináveis.

Agradeço à Anny, pois me deu forças para enfrentar o período da Pandemia de COVID-19.

Agradeço à banca, Benigno e Patrícia, pela dedicação e cuidado nas correções e sugestões que melhoraram o texto de forma significativa.

Agradeço aos bons professores e amigos ao longo da graduação. Agradeço especialmente a estes companheiros por seu impacto singular na minha Matemática e vida: Gabriel Bassan, Gustavo Mezzovilla, Ricardo Canesin, Thiago Landim.

1. UMA BREVE INTRODUÇÃO A GEOMETRIA RIEMANNIANA

Nesta seção faremos uma breve introdução a Geometria Riemanniana, nossa abordagem será a fim de maximizar a brevidade da apresentação e traçar um “caminho mínimo” para as ferramentas que serão úteis no estudo da Mecânica Lagrangeana e da Geometria de Finsler, como Conexões; Geodésicas e Campos de Jacobi. Para obter a agilidade desejada muitos resultados que fundamentam a teoria terão suas demonstrações omitidas, o leitor interessado pode encontrar essas demonstrações nas notas de aula [1] que é a referência principal desta seção ou no clássico livro [7]. As notas de toda esta seção são baseadas fortemente nas notas de aula [1].

1.1. Métrica Riemanniana. Aqui apresentamos as definições básicas dos objetos da nossa geometria, seus primeiros exemplos e características. Primeiramente definiremos nossa *métrica* em questão, métrica Riemanniana, e naturalmente nossos objetos centrais: as *Variedades Riemannianas*.

Definição 1.1. Uma **métrica Riemanniana** de uma variedade M é uma seção do fibrado dos 2-tensores simétricos positivos definidos em TM . Ou seja, é uma aplicação que associa a cada ponto $p \in M$ um produto interno g_p em T_pM tal que $g_{ij} := g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ é suave. Uma variedade com uma métrica g , (M, g) , é dita **variedade Riemanniana**.

Naturalmente em coordenadas temos:

$$g = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

Com a definição em mãos, temos nossa primeira proposição, ela nos garante que apesar de a métrica Riemanniana ser um tipo específico de métrica, é geral o suficiente para qualquer variedade admitir uma.¹

Proposição 1.2. Toda variedade admite métrica Riemanniana.

Demonstração. Nesta demonstração primeiramente induziremos uma métrica em vizinhanças da nossa variedade, depois colaremos usando partições da unidade. Então:

Seja $\{U_\alpha, \psi_\alpha\}$ um atlas de M . Seja g^0 métrica Euclidiana e defina $g_\alpha := \psi_\alpha^* g^0$.

É conhecido da teoria de variedades suaves o Teorema de existência de partições da Unidade, então basta tomar $\{h_\alpha\}$ uma partição da unidade subordinada a $\{U_\alpha\}$ e definir $g := \sum_\alpha h_\alpha g_\alpha$. Como $\{h_\alpha\}$ é uma partição da unidade: g é suave e, para cada ponto de M , é uma soma convexa finita de produtos internos com pesos positivos, logo um novo produto interno. Então, g é métrica Riemanniana em M . □

Essa proposição começa a nos indicar que Geometria Riemanniana é uma ferramenta interessante para estudar não só a Geometria Métrica de um Espaço, como possivelmente sua também Topologia. Focaremos primeiro em conceitos mais geométricos, como distância.

Definição 1.3. Seja $\alpha : [a, b] \rightarrow (M, g)$ curva C^1 por partes. O **comprimento da curva** α é dado por:

$$l(\alpha) := \sum_i \int_{t_{i-1}}^{t_i} \sqrt{g(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$$

A **distância entre** p e q pertencentes a M é dada por:

$$d(p, q) := \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} l(\alpha),$$

em que $\Omega_{p,q}$ é o conjunto de curvas C^1 por partes² começando em p e terminando em q .

Exemplo 1.4. Seja $M \subset \mathbb{R}^n$ uma variedade mergulhada. Então (M, g^M) é variedade Riemanniana com a métrica induzida $g^M := i^* g^0$ onde $i : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ é a inclusão e g^0 é a métrica Euclidiana. Em particular, se M for a esfera S^{n-1} a métrica induzida será a métrica canônica da esfera Euclidiana.

Exemplo 1.5. Seja M^2 superfície mergulhada em \mathbb{R}^3 invariante por rotação no eixo z , ou seja, uma superfície de revolução. Seja g a métrica induzida em M do espaço Euclidiano, i.e., $g = i^* g^0$ onde g^0 é a métrica Euclidiana e $i : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ é a inclusão. Considere a parametrização $\varphi : U \rightarrow M$ definida como

$$\varphi(t, \theta) = (r(t) \cos(\theta); r(t) \sin(\theta); h(t))$$

onde $\beta(t) = (r(t); 0; h(t))$ é parametrização por comprimento de arco da curva geratriz, i.e., $r(t) \neq 0$ e $|\beta'| = 1$. A primeira forma fundamental é $\varphi^* g^0 = dt^2 + r^2(t) d\theta^2$. Para $\beta(t) = (\cos(t) + 2, 0, \sin(t))$ temos um Toro de Revolução em \mathbb{R}^3 e sua métrica Riemanniana induzida.

1.2. Teoria de Conexões Afins. Nesta subseção falaremos sobre Conexões, essa estrutura nos permitirá conectar as fibras dos nossos Fibrados Vetoriais, em especial de TM o fibrado que mais estudaremos.

Com isso, teremos um ferramental mais poderoso para tratar de variações na nossa variedade, podendo não só falar sobre velocidade (nossos campos suaves, ou mais geralmente seções de um

¹Vale lembrar que toda variedade é também um Espaço Metrizável, pelo Teorema de Metrização de Urysohn, mas isso não garante a priori a existência de métrica Riemanniana, felizmente a proposição nos garante isso.

²O conceito de suavidade por partes é usado nessas definições, no lugar do conceito mais simples de suavidade, para evitar “obstruções topológicas” que nossas variedades ainda podem possuir. Apesar de serem espaços muito bem comportados uma variedade pode, por exemplo, não ser completa.

fibrado) como também falar de aceleração, ou seja, como derivar campos (ou seções) e ainda obter um campo (ou seção) no mesmo fibrado.

Assim, culminando no nosso conceito central de *Derivada Covariante*. Posteriormente conectando isso à nossa estrutura Riemanniana, com a dita *Conexão de Levi-Civita*.

Faremos a seguir um breve tratamento sobre conexões em um fibrado vetorial qualquer sobre uma variedade, o leitor interessado em discussões gerais sobre conexões e fibrados pode ler mais em [15], [17] e [14].

1.2.1. Conexão e Derivada Covariante.

Definição 1.6. Sejam (E, M, π) fibrado vetorial e $\Gamma(E)$ o conjunto das seções de E . Uma **conexão afim** é uma aplicação \mathbb{R} – *bilinear* :

$$\begin{aligned} \nabla : \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, V) &\longmapsto \nabla_X V \end{aligned}$$

atendendo as seguintes condições, com $f \in C^\infty(M)$:

- (a) $\nabla_{fX} V = f \nabla_X V$
- (b) $\nabla_X fV = f \nabla_X V + (Xf)V$

Vamos agora descrever uma conexão afim utilizando coordenadas do fibrado $E \rightarrow M$.

Seja U uma vizinhança coordenada de $p \in M$ e $\{\xi_i\}$ referenciais de $E|_U$, i.e., $\xi_j(p) = \psi^{-1}(p, e_j)$ onde $\psi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^n$ é uma trivialização do fibrado E . Suponha $W = \sum_i w_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ e $V = \sum_j v_j \xi_j$. Temos então que

$$\begin{aligned} \nabla_W V &= \nabla_W \sum_j v_j \xi_j \\ &= \sum_j (W \cdot v_j) \xi_j + \sum_j v_j \nabla_W \xi_j \\ &= \sum_k (W \cdot v_k) \xi_k + \sum_{i,j} v_j w_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j \end{aligned}$$

A equação acima então implica que

$$(1.1) \quad \nabla_W V = \sum_k \left\{ (W \cdot v_k) + \sum_{i,j} w_i v_j \Gamma_{ij}^k \right\} \xi_k$$

onde a função Γ_{ij}^k é chamada **símbolo de Christoffel** e é definida como

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \xi_k$$

É importante observar que a fórmula acima garante que $(\nabla_W V)_p$ depende apenas do vetor $W(p)$ e não do campo W .³

Em coordenadas, a conexão admite forma matricial:

$$\nabla_X V = D_X V + A(X)V$$

tal que $A(\cdot)$ é matriz de 1-formas, dada por:

$$a_{kj}(\cdot) := \sum_i \Gamma_{ij}^k dx_i$$

³Propriedades como essa são úteis para operar com objetos tensoriais e não locais, que são bem comportados.

Proposição 1.7. *Seja (E, π, M) um fibrado vetorial com conexão ∇ . Seja $\alpha : I \rightarrow M$ curva suave. Denote por $\Gamma(\alpha^*E)$ o espaço das seções de E ao longo da α , então existe um único operador $\frac{\nabla}{dt} : \Gamma(\alpha^*E) \rightarrow \Gamma(\alpha^*E)$ tal que:*

- (a) $\frac{\nabla}{dt}(V + W) = \frac{\nabla}{dt}(V) + \frac{\nabla}{dt}(W)$
- (b) $\frac{\nabla}{dt}(fV) = f'V + f\frac{\nabla}{dt}(V); f : I \rightarrow \mathbb{R}$ suave.
- (c) Se $\tilde{V} \in \Gamma(E)$, e $V(t) := \tilde{V}(\alpha(t))$, então $\frac{\nabla}{dt}V = \nabla_{\alpha'}\tilde{V}$

Demonstração. Um operador que satisfaz as condições do teorema é descrito em coordenadas locais, segundo a equação 1.1, por:

$$\left(\frac{\nabla}{dt}V\right)(t) = \sum_k \left\{ v'_k(t) + \sum_{i,j} x'_i(t)v_j(t)\Gamma_{ij}^k \circ \alpha(t) \right\} \xi_k \circ \alpha(t)$$

Onde $V(t) = \sum_k v_k(t)\xi_k \circ \alpha(t)$ e $\alpha'(t) = \sum_i x'_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i} \circ \alpha(t)$. A unicidade local do operador é dado pelo fato de ser descrito pela equação explícita acima. Reciprocamente, a equação define localmente um único operador operador que satisfaz as condições do teorema, então localmente nosso operador está bem definido e é único. Para a existência global basta usar o argumento de coberturas e colagem de soluções que funcionará por conta da unicidade, então terminamos a prova da existência e unicidade global do operador *Derivada Covariante*. \square

O operador $\frac{\nabla}{dt}$ é chamado de **Derivada Covariante**, no caso da proposição anterior a derivada covariante ao longo da curva α .

Proposição 1.8. *Sejam (E, π, M) fibrado vetorial com conexão ∇ , $\alpha : [a, b] \rightarrow M$ curva suave e $v \in E_{\alpha(a)}$. Então, existe única seção $V \in \Gamma(\alpha^*E)$ tal que $V(a) = v$ e $\frac{\nabla}{dt}V(t) = 0, \forall t \in [a, b]$.*

Demonstração. Como na demonstração da Proposição 1.7 faremos uma análise local e depois colaremos a solução usando a unicidade.

Em uma vizinhança coordenada de um ponto da curva temos pela equação 1.1 igualada a zero ($\frac{\nabla}{dt}V = 0$) e pelo teorema de existência e unicidade de EDO temos que existe e é única a seção da forma $\sum_k v_k(t)\xi_k$ para dadas condições iniciais, ou seja, um dado vetor V definido na fibra sobre o ponto inicial da curva na vizinhança que estamos analisando.

Então, agora basta fazer esse argumento para uma partição da curva por vizinhanças coordenadas, garantidas pela compacidade da curva. A solução da vizinhança de $\alpha(a)$ terá condição inicial $V(a) = v$ e será propagada globalmente para o resto da curva pela unicidade na interseção, então estendendo para todo $[a, b]$. \square

Definição 1.9. Seções X que satisfazem derivada covariante nula para todo tempo, como na proposição anterior, são ditas *paralelas*. Dado $v \in T_{\alpha(a)}M \setminus 0$ existe uma única seção paralela $X = X_v$ ao longo de α tal que $X(a) = v$, logo está bem definida a aplicação que associa a cada $(t, v) \in [a, b] \times T_{\alpha(a)}M$ o vetor $X_v(t) \in T_{\alpha(t)}M$. Essa aplicação é denominada de *transporte paralelo* de v ao longo de α .⁴

A derivada covariante ao longo de uma curva é na verdade a conexão pullback no fibrado pullback $\alpha^*(E)$, mas para favorecer a brevidade do texto discutiremos de forma sucinta.

Definição 1.10. Seja (E, M, π) uma fibrado vetorial com conexão afim ∇ . Seja $\varphi : B \rightarrow M$ uma aplicação suave entre uma variedade B e a variedade M . O espaço total do fibrado pullback é definido como

$$\varphi^*E := \{(p, V) \in B \times E \mid \varphi(p) = \pi(V)\}$$

(φ^*E, B, π_1) se torna então um fibrado vetorial, onde a projeção $\pi_1 : \varphi^*E \rightarrow B$ é definida como $\pi_1(p, V) = p$. Observe também que $\varphi \circ \pi_1 = \pi \circ \tilde{\varphi}$ onde $\tilde{\varphi} : \varphi^*E \rightarrow E$ é definido como $\tilde{\varphi}(p, V) = V$, vide diagrama comutativo abaixo.

⁴Essa noção de paralelismo e transporte paralelo é o que faz a *conexão* conectar fibras do fibrado vetorial.

$$\begin{array}{ccc}
\varphi^*E & \xrightarrow{\pi_1} & E \\
\downarrow \tilde{\varphi} & & \downarrow \pi \\
B & \xrightarrow{\varphi} & M
\end{array}$$

Definição 1.11. Num fibrado pullback como definido acima, defina⁵ $\varphi^*\nabla$ em φ^*E tal que

$$(\varphi^*\nabla)_W V \circ \varphi = \nabla_{d\varphi(W)} V$$

onde $V \in \Gamma(E)$ e $W \in \mathfrak{X}(B)$

1.2.2. Conexão de Levi-Civita. Definiremos agora um objeto que é um dos indícios de que a Geometria Riemanniana é especial, sendo ela geral o suficiente para abarcar muitos problemas e objetos, mas ao mesmo tempo específica o suficiente para possuir estruturas bem comportadas. Posteriormente, no capítulo 4 tentaremos reproduzir a esquemática desta teoria e pela Geometria de Finsler ser mais geral que a Riemanniana as estruturas serão menos bem comportadas.

Existe uma “conexão preferencial” e que é única, a Conexão de Levi-Civita.⁶

Definição 1.12. Seja (M, g) variedade Riemanniana. Uma conexão ∇ em TM é dita **conexão de Levi-Civita** se para quaisquer $X, Y, W \in \mathfrak{X}(M)$ temos:

- (a) $X \cdot g(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$. (*Compatível com a métrica.*)
- (b) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$. (*Livre de Torção.*)

Agora provaremos sua unicidade e mostraremos sua representação com contas, usando os *Símbolos de Christoffel*.

Teorema 1.13. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana. Então existe uma única conexão de Levi-Civita em TM . Tal conexão é dada pela fórmula de Koszul abaixo:*

$$\begin{aligned}
2g(\nabla_Y X, Z) &= X \cdot g(Y, Z) - Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(Z, X) \\
&\quad - g([X, Y], Z) - g([X, Z], Y) - g([Y, Z], X)
\end{aligned}$$

Demonstração. Suponha que a conexão de Levi-Civita existe. Então temos pela compatibilidade com a métrica que:

$$\begin{aligned}
X \cdot g(Y, Z) &= g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \\
Z \cdot g(X, Y) &= g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \\
Y \cdot g(Z, X) &= g(\nabla_Y Z, X) + g(Z, \nabla_Y X)
\end{aligned}$$

As equações acima e o fato da conexão ser livre de torção implicam que:

$$\begin{aligned}
X \cdot g(Y, Z) - Z \cdot g(X, Y) + Y \cdot g(Z, X) &= 2g(\nabla_Y X, Z) + g([X, Y], Z) \\
&\quad + g([X, Z], Y) + g([Y, Z], X)
\end{aligned}$$

a qual por sua vez implica a fórmula de Koszul. Por fim, pode-se verificar que a fórmula de Koszul define uma conexão de Levi-Civita. □

⁵Analogamente a proposição 1.7 pode-se provar que esta conexão é única.

⁶Esse comentário é pertinente na óptica de que para outras geometrias com menos estrutura, por exemplo a Geometria de Finsler vide capítulo 4, não há uma conexão tão bem comportada, então de acordo com cada situação, escolhe-se se sua conexão será livre de Torção ou compatível com a métrica. Exemplos clássicos dessas conexões em Finsler são respectivamente a Conexão de Chern (vide Seção 5.1) e a Conexão de Cartan, essa última foge do escopo deste texto.

Corolário 1.14. *Seja (M, g) variedade Riemanniana e ∇ sua conexão de Levi-Civita. Então:*

$$\Gamma_{ij}^m = \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) g^{km}$$

onde (g^{ij}) é a matriz inversa de (g_{ij}) e Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel definidos na subseção anterior.

1.3. Tensor de Curvatura. Nesta parte definiremos esse objeto que nos permitirá futuramente estender a noção de curvatura conhecida do estudo de Geometria Diferencial Clássica, para o mundo Riemanniano. A curvatura é o primeiro invariante geométrico a ser notado,⁷ então é importante para diferenciar geometrias e entender suas particularidades.

1.3.1. Definição. O Tensor de Curvatura pode ser um objeto definido em função de uma conexão afim, posteriormente veremos as particularidades de quando é definido pela Conexão de Levi-Civita.

Definição 1.15. Seja (E, M, π) um fibrado vetorial com conexão afim ∇ qualquer. Definimos

$$\begin{aligned} R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \Gamma(E) &\longrightarrow \Gamma(E) \\ (X, Y, \xi) &\longmapsto R(X, Y)\xi \end{aligned}$$

tal que

$$R(X, Y)\xi := \nabla_{[X, Y]}\xi - \nabla_X \nabla_Y \xi + \nabla_Y \nabla_X \xi$$

R é chamado de **Tensor de Curvatura**.

Proposição 1.16. *Sejam $X, Y \in \mathfrak{X}(M), \xi \in \Gamma(E)$ e $f, g, h \in C^\infty(M)$. Então:*

- (a) R é trilinear.
- (b) $R(X, Y) = -R(Y, X)$
- (c) $R(fX, gY)h\xi = fghR(X, Y)\xi$.

Isso nos mostra que R é realmente um objeto tensorial, ou seja pode ser descrito pontualmente, merecendo o nome de *tensor de curvatura*. Agora veremos uma propriedade que segue da definição e mostra a primeira interpretação da curvatura, uma medida da falta de comutatividade da Derivada Covariante.

Proposição 1.17. *Seja $\varphi : [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \rightarrow M$ uma aplicação suave e $V \in \Gamma(\varphi^*E)$ então:*

$$\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\nabla}{\partial s} V - \frac{\nabla}{\partial s} \frac{\nabla}{\partial t} V = R \left(\frac{\partial \varphi}{\partial s}, \frac{\partial \varphi}{\partial t} \right) V$$

Definição 1.18. O *tensor de curvatura* dado pela Conexão de Levi-Civita e o fibrado TM será chamado **Tensor de Curvatura Riemanniano** e será representado por R daqui em diante, a menos que dito o contrário.

Agora veremos algumas propriedades de R que seguem diretamente de contas com a definição.

Proposição 1.19. *Para $X, Y, Z, T \in \mathfrak{X}(M)$ temos que:*

- (a) $g(R(X, Y)Z, T) + g(R(Y, Z)X, T) + g(R(Z, X)Y, T) = 0$. (*Primeira Identidade de Bianchi.*)
- (b) $g(R(X, Y)Z, T) = -g(R(X, Y)T, Z)$.
- (c) $g(R(X, Y)Z, T) = g(R(Z, T)X, Y)$.

⁷Esse comentário vem do fato que ao expandir o polinômio de Taylor da métrica Riemanniana, em *coordenadas normais* (ou *exponenciais* vide Definição 1.28), até segunda ordem tem-se que ele é da forma “métrica Euclidiana + termo de segunda ordem” e o coeficiente do termo de segunda ordem é função da curvatura. O termo de primeira ordem se anula pela relação entre a *exponencial Riemanniana* e *geodésicas* (vide Definição 1.22).

1.3.2. *Curvatura Riemanniana.* Definiremos e discutiremos sobre *Curvatura Riemanniana*, ou *curvatura seccional*, muito brevemente para focar no objetivo que é entender ligações entre Mecânica, Finsler e Folheações. Outras formas de curvatura serão omitidos por motivos de brevidade, o leitor interessado pode ler em [1] ou [7].

Definição 1.20. Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional e $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independentes. Então definimos a **Curvatura Riemanniana, ou seccional** em σ como:

$$K(X, Y) := \frac{g(R(X, Y)X, Y)}{g(X, X)g(Y, Y) - (g(X, Y))^2}$$

É possível provar tanto que $K(\sigma)$ não depende da escolha de base de σ como também provar que saber as curvaturas de cada subespaço bi-dimensional do espaço tangente no ponto p nos permite reconstruir o tensor R no ponto p .

Nossa próxima proposição servirá como um exemplo de estrutura interessante que uma Variedade Riemanniana pode ter, mas também nos será útil posteriormente na subseção 1.4.4. Trata-se das variedades que possuem Curvatura Riemanniana constante, esses são exemplos interessantes de Variedades Riemannianas quem possuem muitas simetrias.

Proposição 1.21. (M, g) tem curvaturas Riemannianas constantes iguais a K_0 se e somente se

$$g(R(X, Y)Z, T) = K_0(g(X, Z)g(Y, T) - g(X, T)g(Y, Z))$$

1.4. Geodésicas e Campos de Jacobi.

1.4.1. *Geodésicas.* Com a Derivada Covariante em mãos, definiremos um objeto muito central, as retas da nossa geometria, as curvas sem aceleração tangencial, as *Geodésicas*. Com isso definiremos a *aplicação exponencial* e exploraremos algumas propriedades.

A conexão ∇ usada daqui em diante, até entrarmos no mundo Finsler, será sempre a Conexão de Levi-Civita relativa à Variedade Riemanniana em questão, a menos que dito o contrário. Naturalmente, as derivadas covariantes serão relativas a tal conexão.

Definição 1.22. Uma curva suave $\alpha : I \rightarrow M$ é dita **geodésica** se $\frac{\nabla}{dt}\alpha'(t) = 0$.

Em coordenadas locais a equação da geodésica é a seguinte EDO de segunda ordem:

$$0 = x_k''(t) + \sum_{ij} x_i'(t)x_j'(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)), \forall k$$

Podendo ser transformada na seguinte EDO:

$$\begin{aligned} v_k(t) &= x_k'(t) \\ v_k'(t) &= -\sum_{ij} v_i v_j \Gamma_{ij}^k(x(t)) \end{aligned}$$

Exemplo 1.23. Geodésicas em \mathbb{R}^n com métrica Euclidiana são retas. Já as *geodésicas* de S^2 com métrica canônica induzida do \mathbb{R}^3 são grandes círculos, vide Figura 1.

Definição 1.24. Define-se o **campo geodésico** como o campo $G \in \mathfrak{X}(TM)$ tal que o fluxo de G , chamado **fluxo geodésico** φ^G , se projeta na variedade em *geodésicas* como $\varphi(\cdot, V_q) = \pi \circ \varphi^G(\cdot, V_q)$, cuja existência é garantida pela EDO na Definição 1.22.

Proposição 1.25. Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , números $\varepsilon, \delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM : q \in U; \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$.

Demonstração. O resultado é consequência direta do teorema de existência e unicidade de EDOs para o *campo geodésico*. □

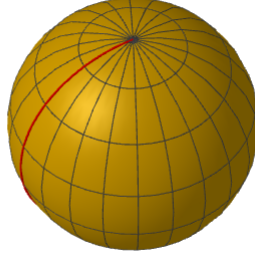


FIGURA 1. Imagem representando uma *geodésica* Riemanniana na esfera S^2 com métrica euclidiana induzida do \mathbb{R}^3 , como dito no exemplo 1.23 essas são os grandes círculos.

Proposição 1.26. *Seja $\varphi(\cdot, V_q)$ geodésica definida em $(-\varepsilon, \varepsilon)$. Se $a > 0$, então:*

- (a) *A geodésica $t \rightarrow \varphi(t, aV_q)$ está definida em $(\frac{\varepsilon}{a}, \frac{\varepsilon}{a})$*
- (b) *$\varphi(t, aV_q) = \varphi(at, V_q)$*

Demonstração. Note que o item (b) implica o item (a). Visto que $\frac{d}{dt}\varphi(at, V_q)|_{t=0} = aV_q$ basta mostrar que $t \rightarrow \varphi(at, V_q)$ é geodésica. Isto segue do fato que em coordenadas $x(at)$ atende a equação da geodésica em coordenadas na Definição 1.22. □

Proposição 1.27. *Dado $p \in M$ existe uma vizinhança U de p em M , um número $\delta > 0$ e uma aplicação $\varphi : (-2, 2) \times \mathcal{U} \rightarrow M$ com $\mathcal{U} := \{V_q \in TM, q \in U, \|V_q\| < \delta\}$ tal que $\varphi(\cdot, V_q)$ é a única geodésica com $\frac{d}{dt}\varphi(t, V_q)|_{t=0} = V_q$ e $\varphi(0, V_q) = q$*

Demonstração. Aplicação direta das proposições acima. □

1.4.2. Aplicação Exponencial e Lema de Gauss. Aplicação exponencial é um mapa muito importante para a geometria, dentre outras coisas ele nos permitirá andar por geodésicas pela variedade e possuir um bom sistema de coordenadas, as ditas coordenadas normais ou exponenciais. O Lema de Gauss é não só importante para Geometria Riemanniana, mas crucial para o estudo de *Campos de Jacobi*. Esses dois conceitos estarão amplamente presentes no estudo desses campos.

Definição 1.28. A **aplicação exponencial** é definida como:

$$\begin{aligned} \exp_q : B_\delta(0) \subset T_q M &\longrightarrow M \\ V_q &\longmapsto \varphi(1, V_q) \end{aligned}$$

Proposição 1.29. *Seja $q \in M$. Então $d(\exp_q)_0 = Id$ e assim sendo existe um $\varepsilon > 0$ tal que $\exp_q : B_\varepsilon(0) \rightarrow M$ é um difeomorfismo sobre um aberto em M*

Demonstração.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\exp_q(tV) \Big|_{t=0} &= \frac{d}{dt}\varphi(1, tV_q) \Big|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}\varphi(t, V_q) \Big|_{t=0} \\ &= V_q \end{aligned}$$

e assim $d(\exp_q)_0$ é a identidade. O resto da proposição segue do teorema da função inversa. □

O aberto em que a exponencial é um difeomorfismo, $B_\varepsilon(0)$ é chamado de **vizinhança ou bola normal**.

Lema 1.30. *Seja $f : [a, b] \times [c, d] \rightarrow M$ aplicação suave. Então:*

$$\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial}{\partial s} f$$

Demonstração. O lado esquerdo é a *Derivada Covariante* do campo $\frac{\partial}{\partial t} f$ no *fibrado pullback* da curva $f_t(s)$, usando a equação local para a derivada covariante na demonstração da Proposição 1.7 temos o aparecimento de termos da forma $\frac{\partial^2}{\partial s \partial t} f$ vistos em uma carta coordenada, assim como função entre abertos Euclidianos, então como f é suave o *Teorema de Schwarz* garante que podemos comutar as derivadas mistas, isso nos dará a equação local relativa ao lado direito. \square

Teorema 1.31. (*Lema de Gauss*). *Seja $B_{\tilde{\delta}}(0)$ uma bola em $T_q M$ tal que a restrição da exponencial $\exp_q : B_{\tilde{\delta}}(0) \rightarrow M$ está bem definida. Sejam $\mathbb{S}_{\tilde{\delta}}^{n-1}$ a esfera contida em $B_{\tilde{\delta}}(0)$ com $\delta < \tilde{\delta}$ e $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}_{\tilde{\delta}}^{n-1}$ curva suave. Defina $f(s, t) = \exp_q(tv(s))$. Então*

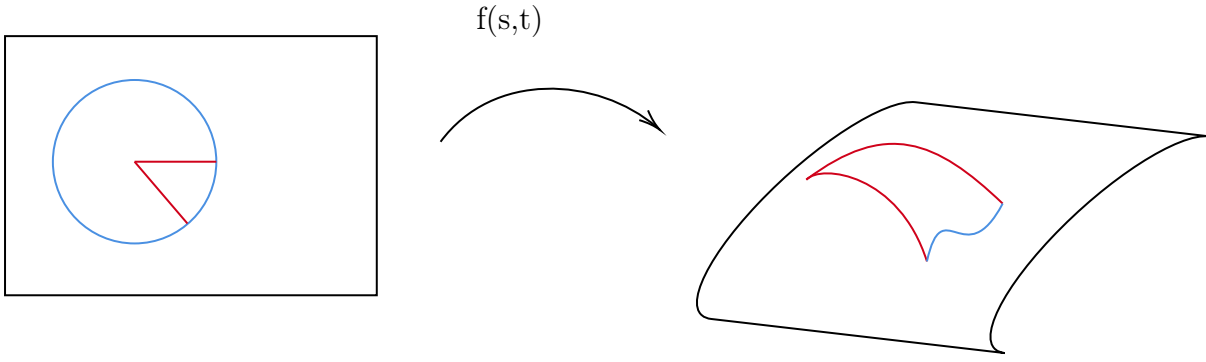
$$g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) = 0$$

Demonstração. Para demonstrar o lema de Gauss é suficiente verificar que a derivada em relação a t da função $g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right)_{f(s,t)}$ é zero para todo t

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \right) &= g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= g\left(\frac{\nabla}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right) \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} |v(s)|^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade deve-se ao fato de $f(s, \cdot)$ ser geodésica, a terceira igualdade deve-se ao Lema 1.30 e a última igualdade deve-se ao fato de $v(\cdot)$ ser uma curva contida em uma esfera. \square

Segue abaixo um desenho que representa a aplicação f levando pela exponencial variações de retas no espaço tangente em variações de geodésicas na variedade.



É válida a observação de que as geodésicas são ortogonais às *Esferas Geodésicas*, isso é em essência o Lema de Gauss. Na imagem acima isso é representado pelas linhas vermelhas (geodésicas) sendo ortogonais às azuis (esfera geodésica).

1.4.3. Propriedades Minimizantes. Nossa definição é de que geodésicas são as curvas sem aceleração, porém essas são comumente descritas e utilizadas pela sua propriedade de *minimizar localmente caminhos*. Nesta parte exibiremos os resultados que garantem isso.

Proposição 1.32. *Seja $B_\delta(q)$ uma bola normal. Defina $\alpha : [0, 1] \rightarrow B_\delta(0)$ como $\alpha(t) = \exp_q(tv)$ com $\|v\| < \delta$. Seja $\beta : [0, 1] \rightarrow M$ curva suave por partes tal que $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Então*

$$l(\alpha) \leq l(\beta)$$

Se a igualdade vale, então as imagens de α e β coincidem.

Demonstração. Vamos primeiro considerar o caso em que $\beta([0, 1]) \subset B_\delta(q)$.

Podemos supor sem perda de generalidade que $\beta(t) \neq q$ para $t > 0$. Seja $\tilde{\beta} := \left(\exp_q|_{B_\delta(0)}\right)^{-1} \circ \beta$. Defina as seguintes funções suaves por partes:

$$\begin{aligned} f : [0, \delta) \times \mathbb{S}_1^{n-1} \ni (R, V) &\rightarrow \exp_q(RV) \in B_\delta(q) \\ r : [0, 1] \ni t &\rightarrow |\tilde{\beta}(t)| \in [0, \delta) \\ v : (0, 1] \ni t &\rightarrow \frac{\tilde{\beta}(t)}{|\tilde{\beta}(t)|} \in \mathbb{S}_1^{n-1} \end{aligned}$$

Observe que $\beta(t) = f(r(t), v(t))$. Temos então pelo lema de Gauss que:

$$\begin{aligned} \int_\epsilon^1 |\beta'(t)| dt &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |\beta'(t)| dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \sqrt{(r'(t))^2 + g\left(\frac{\partial f}{\partial V} v'(t), \frac{\partial f}{\partial V} v'(t)\right)} dt \\ &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} |r'(t)| dt \\ &\geq \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} r'(t) dt \\ &= r(1) - r(\epsilon) \end{aligned}$$

Logo $l(\beta) \geq r(1) = l(\alpha)$. Note que se as igualdades são satisfeitas então as imagens de α e β coincidem.

Por fim vamos considerar o caso em que $\beta([0, 1])$ não está completamente contido em $B_\delta(q)$. Seja t_1 o primeiro tempo tal que $\beta(t_1)$ está na fronteira da bola. Então temos pela discussão

anterior:

$$l(\beta) > l\left(\beta|_{[0,t_1]}\right) \geq \delta > l(\alpha)$$

□

O Teorema 1.33 a seguir é de grande importância para técnicas sobre geodésicas e resultados fundamentais como existência e unicidade ligando dois pontos dados. Uma referência para sua demonstração é o capítulo 4 de [1], que não será reproduzida aqui, porém no Fato 4.18 comentamos sobre a existência de um teorema análogo para o caso Finsler, que engloba o caso Riemanniano visto que aquele é generalização deste.

Teorema 1.33. *Seja (M, g) variedade Riemanniana. Então para cada $q \in M$ existem números $\delta > 0, \varepsilon > 0$ tal que as seguintes afirmações são válidas.*

- (a) *Para qualquer $p \in B_\varepsilon(q)$ temos $\exp_p|_{B_\delta(0)}$ é um difeomorfismo e que $B_\varepsilon(q) \subset \exp_p(B_\delta(0))$*
- (b) *Para cada 2 pontos p_1 e p_2 em $B_\varepsilon(q)$ existe um único segmento minimizante de geodésica ligando p_1 a p_2 . Tal segmento fica contido em $B_\varepsilon(q)$ e depende suavemente dos pontos inicial e final.*

Definição 1.34. Nomeia-se por **Bola Normal Convexa** uma bola $B_\varepsilon(q)$ que satisfaz o Teorema 1.33.

Teorema 1.35. *Seja $\gamma : [0, 1] \rightarrow (M, g)$ curva suave por partes tal que $d(\gamma(0), \gamma(1)) = l(\gamma)$. Então γ é imagem de uma geodésica.*

Demonstração. Observe primeiro que para cada $t \in [0, 1]$ existe um intervalo I_t tal que $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa, vide Definição 1.34. Afirmamos que $\gamma(I_t)$ é imagem de um segmento de geodésica. De fato seja $I_t = [a, b]$ então como $\gamma(I_t)$ está contida em uma bola normal convexa então existe um único segmento de geodésica α ligando $\gamma(a)$ a $\gamma(b)$ tal que $l(\alpha) = d(\gamma(a), \gamma(b))$. Suponha por absurdo que $\gamma(I_t)$ seja diferente de α . Então defina a concatenação $\beta = \gamma|_{[b, 1]} * \alpha * \gamma|_{[0, a]}$. Note que $\beta(0) = \gamma(0), \beta(1) = \gamma(1)$ e $l(\beta) < l(\alpha)$ o que contraria a definição de γ .

Seja $I_{t_i}^0$ uma cobertura finita do intervalo compacto $[0, 1]$ tal que $\gamma(I_{t_i})$ está em uma bola normal convexa. Se $s \in I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ então considere um intervalo I_s^0 tal que $I_s^0 \subset I_{t_i}^0 \cap I_{t_{i+1}}^0$ e $\gamma(I_s)$ está contida em uma bola normal convexa. Como vimos acima $\gamma(I_s)$ é um segmento de geodésica contido em $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$. Pela existência e unicidade de EDO podemos colar segmentos e concluir que $\gamma(I_{t_i})$ e $\gamma(I_{t_{i+1}})$ estão contidos em um segmento de geodésica maior e como a cobertura é finita a demonstração está terminada.

□

1.4.4. Campos de Jacobi.

1.4.5. *Intuição.* Nossa intuição para *Campos de Jacobi* é que queremos estudar propriedades de curvas, em particular geodésicas, e para isso uma técnica comum é realizar processos variacionais com as curvas. Desejamos então criar uma variação de uma geodésica feita por geodésicas.

Como a Aplicação Exponencial nos permite andar pela variedade através de geodésicas, estudar derivadas dela nos deve dar campos variacionais para nossa desejada variação de geodésicas.

Começaremos com uma definição a priori nada intuitiva de um *Campo de Jacobi*, através da *Equação de Jacobi*, depois notaremos que essa definição não só é a que procuramos como veremos que nossas intuições se concretizam.

1.4.6. Definição e Propriedades.

Definição 1.36. Seja $\alpha : I \rightarrow (M, g)$ geodésica em uma variedade Riemanniana M com dimensão n . Um campo suave J ao longo de α é chamado **Campo de Jacobi** se ele atende a *Equação de Jacobi*:

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J + R(\alpha', J)\alpha' = 0$$

Como vemos a seguir todo vetor velocidade de uma variação por geodésica é um campo de Jacobi.

Proposição 1.37. *Seja $f : (-\varepsilon, \varepsilon) \times [a, b] \rightarrow M$ uma aplicação suave tal que $f(s, \cdot)$ é geodésica para todo $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$ é campo de Jacobi ao longo da geodésica $t \rightarrow \alpha(t) := f(0, t)$*

Demonstração. Temos por hipótese a primeira igualdade abaixo, a segunda vem do Lema 1.30 e a terceira pela Proposição 1.17, por fim utilizamos que $f(s, \cdot)$ é geodésica para todo s .

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s} \\ &= \frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial t} - R \left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s} \right) \frac{\partial f}{\partial t} \\ &= -R(\alpha', J) \alpha' \end{aligned}$$

□

Pelos comentários da intuição esperamos que a recíproca do resultado anterior seja verdadeiro, ou seja, que todo campo de Jacobi seja obtido por variações de geodésicas, isso será provado em breve. Mas, primeiramente veremos a *Equação de Jacobi* como uma Equação Diferencial e através de resultados básicos de EDO deduziremos algumas propriedades básicas dos *Campos de Jacobi*.

Sejam J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica α e $t \rightarrow \{e_i(t)\}_{i=0, \dots, n-1}$ um referencial ortonormal paralelo ao longo de α onde $e_0 := \alpha' / |\alpha'|$. Neste caso para

$$J(t) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i(t) e_i(t)$$

temos

$$\frac{\nabla}{dt} \frac{\nabla}{dt} J = \sum_{i=0}^{n-1} f_i''(t) e_i(t)$$

Concluimos então que a equação de Jacobi pode ser escrita como

$$(1.2) \quad f_j''(t) + \sum_i f_i g(R(\alpha', e_i) \alpha', e_j) = 0 \quad \forall j$$

Em termos matriciais temos

$$(1.3) \quad J'' + BJ = 0$$

onde $B = (b_{ij})$ e $b_{ij} = g(R(\alpha', e_i) \alpha', e_j)$. Note que $b_{ij} = b_{ji}$ e $b_{0j} = 0$. As equações acima nos permitem inferir algumas conclusões imediatas sobre campos de Jacobi as quais resumimos na proposição a seguir.

Proposição 1.38. (a) *Se $V, W \in T_{\alpha(0)}M$ então existe um único campo de Jacobi J ao longo da geodésica $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ tal que $J(0) = V$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$*
 (b) *Existem $2n$ campos de Jacobi linearmente independentes.*
 (c) *α' e $t\alpha'$ são campos de Jacobi, os quais são soluções de $f_0'' = 0$*
 (d) *Existem $2(n-1)$ campos de Jacobi perpendiculares a α (não necessariamente ortogonais entre si).*
 (e) *$g(J, \alpha') = t g(J'(0), \alpha') + g(J(0), \alpha'(0))$*

Demonstração. Os itens (a),(b), (c) são imediatos. O item (d) segue da equação 1.3 levando em conta que $b_{0j} = 0$. Para verificar o item (e) basta observar que

$$\begin{aligned} g(J, \alpha') &= |\alpha'| f_0 \\ &= |\alpha'| (t f'_0(0) + f_0(0)) \\ &= |\alpha'| \left(\text{tg} \left(J'(0), \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) + g \left(J(0), \frac{\alpha'(0)}{|\alpha'(0)|} \right) \right). \end{aligned}$$

□

Com isso mostraremos que nossa intuição inicial está certa e todo *Campo de Jacobi* é campo (velocidade) de uma variação por geodésicas.

Proposição 1.39. *Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$. Considere uma curva $\beta : (-1, 1) \rightarrow M$ com $\beta'(0) = J(0)$, um campo $s \rightarrow V(s)$ ao longo de β com $V(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{\nabla}{ds} V(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. Suponha que a variação $f(s, t) := \exp_{\beta(s)}(tV(s))$ está bem definida. Então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$.*

Demonstração. Observe que $\frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = J(0)$. Devemos verificar que $\frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$ e o resultado seguirá pela Proposição 1.37 e pela unicidade de EDO. Para tanto basta observar que

$$\begin{aligned} \frac{\nabla}{dt} \frac{\partial f}{\partial s}(0, 0) &= \frac{\nabla}{ds} \frac{\partial f}{\partial t}(0, 0) \\ &= \frac{\nabla}{ds} \left(d \left(\exp_{\beta(s)} \right)_0 V(s) \right) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{ds} (V(s)) \Big|_{s=0} \\ &= \frac{\nabla}{dt} J(0) \end{aligned}$$

□

Para construir uma curva β tal que $\beta'(0) = J(0)$ basta fazer o seguinte processo: Sejam $s \rightarrow X(s)$ e $s \rightarrow Y(s)$ os campos paralelos ao longo de β com $X(0) = \alpha'(0)$ e $Y(0) = \frac{\nabla}{dt} J(0)$. O campo $s \rightarrow V(s)$ pode então ser definido como $V(s) := X(s) + sY(s)$. Se a aplicação exponencial está sempre bem definida, e.g. M compacta ou M completa,⁸ então f está bem definida. Caso contrário, pode-se proceder da seguinte forma. Primeiro verifica-se que f está certamente bem definida para intervalos pequenos de s e t . Depois, grudando variações f_i ao longo de α podemos construir a desejada variação f .

É conveniente considerar o caso particular de campos de Jacobi com $J(0) = 0$.

Corolário 1.40. *Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida e seja $B := \exp_p(B_\delta(0))$. Seja J um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\alpha \subset B$ com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt} J(0) = W$. Então*

$$J(t) = d(\exp_p)_{t\alpha'(0)} tW$$

Demonstração. Basta considerar na demonstração anterior a curva $\beta(s) = p$ e um campo $V(s) = \sum_i a_i(s) e_i(p)$ com $V(0) = \alpha'(0)$ e $V'(0) = W$. Observe que

$$\frac{\nabla}{ds} V(0) = V'(0) = \sum_i a'_i(0) e_i(p)$$

O resultado segue observando que

$$\frac{\partial f}{\partial s}(0, t) = d(\exp_p)_{tV(0)} tV'(0)$$

⁸Este tópico é discutido no estudo de Teorema de Hopf-Rinow, que pode ser visto no capítulo 7 de [7] e capítulo 6 de [1].

□

Por vezes é conveniente reescrever o corolário acima em termos de variações. Ou seja, se J é um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica α com $J(0) = 0$ e $W = \frac{\nabla}{dt}J(0)$ então $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$, onde $f(s, t) = \exp_p(tV(s))$ e $V : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow T_pM$ é curva com $V'(0) = W$ e $V(0) = \alpha'(0)$.

1.5. Primeiras Aplicações. Aqui exploraremos duas aplicações clássicas de Campos de Jacobi, estudo local das variedades de curvatura Riemanniana constante e os pontos críticos da função exponencial, que culminarão em novos objetos interessantes e serão a primeira amostra de como esta ferramenta pode ser útil.

1.5.1. Espaços de Curvatura Constante. Consideraremos agora campos de Jacobi em espaços de curvatura constante.

Proposição 1.41. *Sejam (M, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\alpha : [0, a] \rightarrow M$ geodésica com vetor velocidade unitário. Então o campo de Jacobi J ao longo de α com condições iniciais $J(0) = 0$ e $\frac{\nabla}{dt}J(0) = w$ para w perpendicular a $\alpha'(0)$ é $J(t) = c_K(t)w(t)$ onde $w(\cdot)$ é o transporte paralelo de w ao longo de α e c_K é a função definida como $c_K(t) := \frac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}}$ se $K > 0$, $c_K(t) := t$ se $K = 0$ e $c_K(t) := \frac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}}$ se $K < 0$*

Demonstração. Considere o campo $\tilde{J}(t) := c_K(t)w(t)$. Sabemos pela Proposição 1.21 que

$$g\left(R\left(\alpha', \tilde{J}\right)\alpha', e_i\right) = K g\left(\tilde{J}, e_i\right)$$

Assim

$$R\left(\alpha', \tilde{J}\right)\alpha' = K\tilde{J}$$

Logo o campo \tilde{J} atende a equação de Jacobi, vide demonstração de 1.37, ou seja

$$\frac{\nabla}{dt}\frac{\nabla}{dt}\tilde{J} + K\tilde{J} = 0$$

O resultado segue da unicidade das soluções da equação de Jacobi, dado condições iniciais. □

Então, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 1.42. *Seja M variedade Riemanniana com curvatura constante K . Suponha que $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ está bem definida. Seja $f(s, t) = \exp_p(tv(s))$ onde $v : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{S}_1^{n-1} \subset T_pM$ é curva com $|V'(0)| = 1$ e $|t| < \delta$. Então $|J(t)| = |c_K|$ onde c_K foi definido na proposição anterior e $J(t) := \frac{\partial f}{\partial s}(0, t)$.*

Pode-se ainda estimar $|J|$ caso M não possuía curvaturas seccionais constante, com uma expansão de Taylor. De fato sejam f e J definidos como no corolário anterior.⁹ Então:

$$\begin{aligned} |J(t)|^2 &= t^2 - \frac{1}{3}K(p, \sigma)t^4 + O(t^4) \\ |J(t)| &= t - \frac{1}{6}K(p, \sigma)t^3 + O(t^3) \end{aligned}$$

onde σ é o espaço bi-dimensional gerado por $V(0)$ e $V'(0)$.

A seguir iremos utilizar nosso conhecimento sobre campos de Jacobi em espaços de curvatura constante para descrever a métrica g em termos de coordenadas geodésicas polares, definidas na proposição. Tal descrição implicará em particular que variedades Riemannianas de mesma curvatura constante são localmente isométricas.

⁹As contas que demonstram esta fórmula podem ser vistas no capítulo 5 de [7], a demonstração foi omitida por se tratar de contas rotineiras e que oferecem pouco insight sobre o objeto.

Proposição 1.43. *Sejam (M^n, g) variedade Riemanniana com curvaturas seccionais constantes K e $\psi : (0, \delta) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow B_\delta(p)$ parametrização geodésica polar, i.e., $\psi(r, v) := \exp_p(rAv)$ onde $A : (\mathbb{R}^n, g_0) \rightarrow (T_p M, g)$ é isometria linear. Então a métrica g em coordenadas geodésicas polares é $dr^2 + (c_k(r))^2 ds^2$ onde ds^2 é a métrica canônica da esfera \mathbb{S}^{n-1} e a função c_K foi definida na Proposição 1.41.¹⁰ Em particular, duas variedades Riemannianas com mesma dimensão e mesmas curvaturas seccionais constantes iguais a K são localmente isométricas.*

Demonstração. Seja $\{e_i\} \subset T_v \mathbb{S}^{n-1}$ referencial ortonormal. Pelo Corolário 1.40

$$\begin{aligned} J_i(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} rAe_i \\ &= d\psi_{(r,v)}(0, e_i) \end{aligned}$$

é campo de Jacobi ao longo da geodésica $r \rightarrow \exp_p(rAv)$. Utilizando Proposição 1.41 podemos verificar que

$$(1.4) \quad g(J_i, J_j) = \delta_{ij} c_K^2$$

Por fim defina

$$\begin{aligned} J_0(r) &:= d(\exp_p)_{rAv} Av \\ &= d\psi_{(r,v)}(1, 0) \end{aligned}$$

e utilizando o Lema de Gauss, Lema 1.31, concluímos que

$$(1.5) \quad g(J_0, J_i) = 0$$

O resultado então seguirá das equações 1.4 e 1.5. □

1.5.2. Pontos Críticos da Aplicação Exponencial, Pontos Conjugados. Terminamos a nossa discussão sobre campos de Jacobi com alguns comentários sobre pontos conjugados.

Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M, g)$ geodésica. **O ponto $\alpha(t_0)$ é conjugado a $\alpha(0)$ ao longo de α** se existe um campo de Jacobi J ao longo de α com $J(0) = 0 = J(t_0)$

O número máximo de campos linearmente independentes é chamado multiplicidade de $\alpha(t_0)$.

Exemplo 1.44. Seja $\alpha : [0, \pi] \rightarrow S_1^n$ geodésica, i.e., um segmento de um grande círculo, com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(\pi) = -p$. Então $\alpha(\pi)$ é ponto conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade $n - 1$.

Note que, pela proposição 1.38 temos que a multiplicidade máxima de um ponto conjugado em uma variedade Riemanniana de dimensão n é $n - 1$. A nossa próxima proposição mostra a relação entre Pontos Conjugados e Pontos Críticos da Aplicação Exponencial.

Proposição 1.45. *Sejam $\exp_p : B_\delta(0) \rightarrow M$ bem definida, $t \rightarrow \alpha(t) := \exp_p(tV_0)$ com $|t| < \delta$ e $|V_0| = 1$. Então $\alpha(t_0)$ é conjugado a $\alpha(0)$ com multiplicidade k se e somente se $\dim(\ker d(\exp_p)_{t_0 V_0}) = k$.*

Demonstração. Basta observar que as afirmações abaixo são todas equivalentes.

- J_1, \dots, J_k são campos de Jacobi linearmente independentes com $J_i(0) = J_i(t_0) = 0$
 - $J_i(t) = d(\exp_p)_{t_0 V_0}(L_0 W_i)$ com W_i linearmente independentes e $J_i(t_0) = 0$, onde $1 \leq i \leq k$
 - W_i são linearmente independentes e $W_i \in \ker d(\exp_p)_{t_0 V_0}$, onde $1 \leq i \leq k$
-

¹⁰Um leitor atento consegue notar uma semelhança entre esta formula para a métrica e a apresentada no exemplo 1.5 isso ocorre pois aquelas coordenadas polares são um exemplo de coordenadas geodésicas polares, apesar de não necessariamente a curvatura lá ser constante.

Proposição 1.46. *Seja $\alpha : [0, a] \rightarrow (M, g)$ uma geodésica. Suponha que $\alpha(a)$ não é conjugado a $\alpha(0)$ ao longo α . Então dado $X \in T_{\alpha(0)}M$ e $Y \in T_{\alpha(a)}M$ existe um único campo de Jacobi ao longo de α tal que $J(0) = X$ e $J(a) = Y$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{J}_{0,a}$ o espaço dos campos de Jacobi com $J(0) = 0$. Defina a aplicação $A : \mathcal{J}_{0,a} \rightarrow T_{\alpha(a)}M$ como $A(J) := J(a)$. Claramente A é aplicação linear. Como $\alpha(a)$ não é ponto conjugado, concluímos que A é injetora. Como os espaços vetoriais $\mathcal{J}_{0,a}$ e $T_{\alpha(a)}M$ tem dimensão n concluímos que A é um isomorfismo. Este fato implica então que existe um campo J_1 com $J_1(0) = 0$ e $J_1(a) = Y$. Por raciocínio análogo obtemos um campo de Jacobi J_2 com $J_2(0) = X$ e $J_2(a) = 0$. Por fim defina $J = J_1 + J_2$. A unicidade segue do fato de $\alpha(a)$ não ser ponto conjugado a $\alpha(0)$. □

2. MECÂNICA LAGRANGIANA DE UM PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO

Na seção anterior entendemos de forma superficial a Geometria Riemanniana, que permite o entendimento de um objeto que permeará todo este trabalho, as *geodésicas*. Nesta sessão veremos como o ponto de vista de *Mecânica Lagrangiana* nos permite entender problemas mais gerais que se assemelham a geodésicas, veremos técnicas introdutórias de uma área atual chamada *Cálculo de Variações* e suas relações com o capítulo anterior. Posteriormente usaremos ferramentas da linguagem deste capítulo, como a Transformada de Legendre, para estudar outras geometrias como Simplética no Capítulo 3 e de Finsler no capítulo 4. As notas de toda esta seção são baseadas fortemente na dissertação de mestrado do meu xará [9].

2.1. Equação de Euler-Lagrange. Nesta subseção entenderemos a Equação de Euler-Lagrange, equação diferencial principal da teoria desta sessão. Para isso antes exibirei dois exemplos que indicam como a teoria se relaciona com o que já foi visto na Seção 1, mesmo antes de definir formalmente alguns dos objetos. Posteriormente esses serão detalhados.

Proposição 2.1. (Equação de Newton) *Sejam M uma variedade Riemanniana, $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva suave por partes, $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave e considere o Lagrangeano $L(v_p) = \frac{1}{2} \langle v_p, v_p \rangle - U(p)$. Então α é solução de Euler-Lagrange¹¹ segundo L se, e somente se, α é suave e $\nabla_{\alpha'} \alpha' = -\text{grad } U$.*

Corolário 2.2.¹² *Se M é uma variedade Riemanniana com métrica g , então uma curva α é geodésica em M se, e somente se, α é solução de Euler-Lagrange para o Lagrangeano $L(v) = g(v, v)$, ou seja, α é geodésica para a métrica g .*

Ainda existe um teorema que nos dá uma conexão ainda mais forte entre os dois resultados, essa será demonstrada posteriormente tanto nesta Seção no teorema 2.7 como na Seção 3 usando técnicas desenvolvidas lá, em 3.24.

Teorema 2.3. (Métrica de Jacobi) *Considere M variedade Riemanniana dotada de métrica g e $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com $U(q) < c, \forall q \in M$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangeano dado por $L(v_p) = \langle v_p, v_p \rangle - U(p)$ e g_J é uma métrica em M tal que $(g_J)_q = (c - U(q))g_q$, então uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é solução da equação de Euler-Lagrange segundo L se, e só se, α é geodésica de g_J , a menos de reparametrização.*

Ou seja, soluções da Equação de Newton para Função Potencial bem comportada podem ser vistas como geodésicas de uma métrica levemente diferente da métrica original da variedade.

¹¹Equação Diferencial que depende de L a ser definida em breve segundo a Definição 2.5 e a Proposição 2.6.

¹²Pode-se pensar aqui como corolário pois a equação da geodésica Riemanniana é justamente o caso $U \equiv 0$. Do ponto de vista físico é o caso que uma partícula percorre o espaço sem ação de força externa, somente seguindo a geometria do espaço em movimento uniforme, a geometria e curvatura do espaço influenciarão a aceleração centrípeta do movimento, enquanto a tangencial é dada pela derivada covariante como visto antes, influência de Forças Externas.

Começaremos agora a desenvolver nossa teoria. Ela será fortemente baseada em [9] e em notas de aulas do meu orientador, Marcos M. Alexandrino, do seu curso de Cálculo Avançado. Uma motivação inicial é pensar no seguinte problema:

Considere M^n variedade mergulhada em \mathbb{R}^{n+k} com métrica Riemanniana induzida (métrica Euclidiana) g^0 no fibrado tangente TM e sua respectiva distância entre pontos $p, q \in M$ como $d(p, q) = \inf_{\alpha \in \Omega_{p,q}} l(\alpha)$, como definido em 1.3, para toda curva α (suave por parte) com $\alpha(0) = p$ e

$\alpha(1) = q$, onde $l(\alpha) = \int_0^1 \sqrt{g_0(\alpha'(t), \alpha'(t))} dt$. Podemos nos perguntar se existe uma curva γ que minimiza distância, ou seja que minimiza o funcional $\alpha \rightarrow l(\alpha)$ para curvas α com $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$. Vale ressaltar que esse é um funcional num espaço de curvas, um espaço de dimensão infinita a priori. Este é um exemplo típico do que chamaremos um *problema variacional* e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $L(\cdot) = |\cdot|$ será o **Lagrangeano** associado ao problema.

Esses *Problemas Variacionais* terão a formulação de um funcional, em geral definido em um espaço de curvas, e nosso objetivo é minimiza-lo ou analisar seus pontos críticos. Esses funcionais serão chamados *funcionais ação* e serão definidos a seguir em função do Lagrangeano. A análise de seus pontos críticos nos dará a desejada *Equação de Euler-Lagrange*. Por motivo de brevidade do texto farei as definições em sua maior generalidade e comentarei depois sobre os pormenores. Para mais detalhes da construção da teoria recomendo fortemente [9] e também [10] para um tratamento mais amplo de Mecânica Geométrica.

Definição 2.4. Seja M variedade e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ função suave que chamaremos **Lagrangeano**. Então o **funcional ação** associado a L é a função $I_L : \Omega_{p,q}(M) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$I_L(\alpha) = \int_0^1 L(\alpha'(t)) dt$$

Definição 2.5. Sejam M variedade e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano. Dada uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, diremos que α é **solução de Euler-Lagrange** segundo L se α é ponto crítico de I_L .

Ou seja, uma curva suave $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é **solução de Euler-Lagrange** associada a um Lagrangeano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ se $\frac{d}{ds} \delta(\gamma_s) \Big|_{s=0} = 0$ para *toda variação de curvas*¹³ (suave por partes) $s \rightarrow \gamma_s$ com $\gamma_s(0) = \gamma(0)$ e $\gamma_s(1) = \gamma(1)$, $\gamma_0 = \gamma$ onde

$$\delta(\gamma_s) = \int_0^1 L(\gamma'_s(t)) dt$$

Essa próxima proposição é a que temos a formulação da Equação de Euler-Lagrange em coordenadas, a equação diferencial que rege na perspectiva física a *Mecânica* do sistema físico determinado pelo Lagrangeano e na matemática é a equação que determina os pontos críticos do funcional ação, candidatos a solução do problema variacional associado a um Lagrangeano. Nas associações que temos feito ao longo deste texto, é a equação que generaliza a nossa geodésica para mais contextos.¹⁴

Para analisar os pontos críticos desse funcional naturalmente usam-se as soluções da *Equação de Euler-Lagrange* em coordenadas, com uma análise para toda carta da variedade. O estudo variacional se dá por conta da próxima proposição:

Proposição 2.6. Uma curva γ é solução de Euler-Lagrange associada ao Lagrangeano L , se e somente se em coordenadas ela atende a **equação de Euler-Lagrange**.¹⁵

$$\frac{\partial L}{\partial q}(q(t), \dot{q}(t)) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), \dot{q}(t)) \right)$$

¹³Aqui uma variação suave por partes de γ é uma aplicação $\psi : (-\epsilon, \epsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$ tal que $\gamma_s = \psi(s, \cdot)$ e $\psi|_{(-\epsilon, \epsilon) \times [t_i, t_{i+1}]}$ é suave (para uma partição de $0 = t_0 < \dots < t_n = 1$), em particular, o vetor velocidade da variação $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \psi(0, t)$ é contínuo ao longo de γ .

¹⁴Para um leitor interessado, essa abordagem de Euler-Lagrange com paralelo com geodésicas é uma perspectiva para uma teoria mais geral que variedades com geometria métrica, a teoria de Variedades com Sprays uma referência do assunto que recomendo é: [14].

¹⁵Nas equações abaixo são omitidas a composição com sistemas de cartas tanto para a curva γ como para o Lagrangeano L para evitar carregar muito a notação, visto que o contexto é claro.

Demonstração. Para verificar a afirmação, consideremos uma partição tal que $\gamma([- \epsilon, \epsilon] \times [t_i, t_{i+1}])$ esteja contido em uma vizinhança coordenada, denotando em coordenadas $p_s(t)$ tal variação. Seja $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t)|_{s=0}$ a velocidade da variação e $\tilde{V} = \frac{d}{ds} p_s|_{s=0}$ sua representação em coordenadas.

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s) \Big|_{s=0} &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial}{\partial s} L(q_s(t), q'_s(t)) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial q}(q(t), q(t)) \tilde{V}(t) + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q(t), q(t)) \tilde{V}'(t) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\ &\quad + \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \tilde{V}(t) \right) dt \end{aligned}$$

Teorema fundamental do Cálculo, $V(0) = 0 = V(1)$ e soma telescópica implicam:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s) \Big|_{s=0} &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\ &\quad + \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \tilde{V}(t) \right) dt \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \\ &\quad + \sum_i \left(\mathcal{L}(\gamma'(t)) \tilde{V}(t) \right) \Big|_{t_i}^{t_{i+1}} \\ &= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\} \tilde{V}(t) dt \end{aligned}$$

Utilizando a arbitrariedade da escolha da variação $\gamma_s(t)$, e.g. $\tilde{V}(t) = f(t) \left\{ \frac{\partial L}{\partial q}(\gamma'(t)) - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(\gamma'(t)) \right) \right\}$ onde $f \geq 0$ é nula fora de $[t_i, t_{i+1}]$, prova-se que Eq. de Euler-Lagrange equivale a $0 = \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s) \Big|_{s=0}$ \square

Agora que entendemos a ideia básica por trás da teoria retornaremos para nossas proposições do início do capítulo para discuti-las.

Aqui segue uma demonstração da proposição 2.1 que é muito semelhante à conta feita anteriormente.

Demonstração. (Proposição 2.1) Considere uma variação $(s, t) \rightarrow \gamma_s(t)$ de $\gamma_0 = \gamma, \gamma_s(0) = \gamma(0), \gamma_s(1) = \gamma(1)$ e campo velocidade $V(t) = \frac{\partial}{\partial s} \gamma_s(t) \Big|_{s=0}$

$$\begin{aligned}
\left. \frac{d}{ds} \delta(\gamma_s) \right|_{s=0} &= \frac{d}{ds} \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} L(\gamma'_s(t)) dt \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} m \left\langle \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} \gamma_s(t), \gamma'_s(t) \right\rangle \Big|_{s=0} - \frac{d}{ds} U(\gamma_s(t)) \Big|_{s=0} dt \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} m \left\langle \frac{d}{dt} V(t), \gamma'(t) \right\rangle - \langle \nabla(U)(\gamma(t)), V(t) \rangle dt \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} -\langle V(t), m\gamma''(t) \rangle - \langle V(t), \nabla(U)(\gamma(t)) \rangle dt \\
&= \sum_i \int_{t_i}^{t_{i+1}} \frac{d}{dt} (\langle V(t), m\gamma'(t) \rangle) dt
\end{aligned}$$

O resto da demonstração segue dos mesmos argumentos da demonstração da Equação de Euler-Lagrange em coordenadas, i.e. aplicar o teorema fundamental do cálculo, soma telescópica e a escolha arbitrária da variação, i.e. do campo velocidade $t \rightarrow V(t) \in T_{\gamma(t)}M$, com $V(0) = V(1) = 0$

□

O Corolário 2.2 tem demonstração imediata a partir do resultado acima. Vale o comentário de que a existência de solução para o *Problema Variacional* do Lagrangeano do comprimento de curvas, que é equivalente ao do Lagrangeano da Energia Cinética como no corolário em questão, para *Variedades Completas* é parte de um teorema conhecido de *Geometria Riemanniana*, chamado *Teorema de Hopf-Rinow*.

Por fim, exibiremos aqui uma demonstração do Teorema 2.3 com Mecânica Lagrangeana e naturalmente Geometria Riemanniana. Porém a demonstração em Teorema 3.24 é mais sofisticada e direta.

Teorema 2.7. (*Métrica de Jacobi*) *Considere M variedade Riemanniana dotada de métrica g e $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com $U(q) < c, \forall q \in M$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangeano dado por $L(v_p) = g(v_p, v_p) - U(p)$ e g_J é uma métrica em M tal que $(g_J)_q = (c - U(q))g_q$, então uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é solução da equação de Euler-Lagrange segundo L se, e só se, α é geodésica de g_J , a menos de reparametrização.*

Demonstração. Ideia da Demonstração Lagrangeana:

- Note que soluções da *Equação de Newton* tem energia constante, ou seja, se α é solução da equação de Newton $\exists c \in \mathbb{R} : E(\dot{\alpha}(t)) = c$, com $E(v_p) = \frac{1}{2}g(v_p, v_p) + U(p)$.¹⁶
- Compare a *Conexão de Levi-Civita* da métrica g com a da métrica g_J usando a compatibilidade com a métrica ou teoremas que são consequências da *Fórmula de Koszul*.
- Lembre-se que pela regra da cadeia, se h é reparametrização e $\beta = \alpha \circ h$, então $\frac{\nabla}{dt}\beta'(t) = h''(t)\alpha'(h(t)) + (h'(t))^2 \frac{\nabla}{dt}\alpha'(h(t))$
- Conclua a existência de h reparametrização que leva soluções do Euler-Lagrange de um Lagrangeano no outro.

□

2.2. Transformada de Legendre. Definiremos brevemente aqui a *Transformada de Legendre*, ela será muito útil na Seção 3 e na Seção 4, posteriormente estudaremos mais dessa transformada e veremos que em casos especiais que estudaremos ela nos dá um difeomorfismo canônico entre TM e T^*M .

Definição 2.8. Dado um Lagrangeano $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, definimos a *Transformação de Legendre* $T_L : TM \rightarrow T^*M$ da seguinte forma:

¹⁶Em Definição 2.10 definimos o funcional energia associado a um Lagrangeano qualquer e em 3 vemos que esse está associado ao Hamiltoniano.

$$T_L(v)u := \left. \frac{d}{dt} L(v + tu) \right|_{t=0}$$

para todos $v, u \in T_x M$, para cada $x \in M$.

Lema 2.9. *Seja $\psi : U \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow V \subset TM$ sistema de coordenadas para TM , e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$. Então*

$$\begin{aligned} \psi^* \circ T_L \circ d\psi(q, \dot{q}) &= T_{L_\psi}(q, \dot{q}) \\ &= \left(q, \frac{\partial L_\psi}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}) \right) \end{aligned}$$

onde $L_\psi = L \circ d\psi$. Ou seja, o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T_L} & T^*M \\ \uparrow d\psi & & \downarrow \psi^* \\ T\mathbb{R}^{2n} & \xrightarrow{T_{L_\psi}} & T^*\mathbb{R}^{2n} \end{array}$$

Definição 2.10. Seja M variedade diferenciável e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano, definimos a energia associada a L como o funcional $E_L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ dado por:

$$E(v) = T_L(v)v - L(v)$$

2.3. Teorema de Noether. Aqui apresentaremos brevemente sobre o *Teorema de Noether*, para mais detalhes é recomendado olhar o capítulo 1 de [9]. Focaremos num exemplo clássico desse teorema, a prova que forças centrais preservam momento angular.

Teorema 2.11. (Teorema de Noether). *Sejam M uma variedade Riemanniana, $g : \mathbb{R} \times M \rightarrow M$ um grupo de difeomorfismos a um parâmetro e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano invariante por g_s . Se $\mathcal{I} : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é definido por*

$$\mathcal{I}_L(v) = T_L(v) \left(\left. \frac{d}{ds} g_s(p) \right|_{s=0} \right)$$

onde $p = \pi(v)$, então para toda curva α solução de Euler-Lagrange para L , temos que $\mathcal{I}(\alpha')$ é constante.

Exemplo 2.12. Para ilustrar a utilidade do teorema de Noether, o exemplo a seguir irá usá-lo para deduzir a conservação do momento angular em sistemas conservativos com simetria radial, ou seja, dado por uma *Força Central Conservativa*. Considere $L : T\mathbb{R}^3 \approx \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ o Lagrangeano Newtoniano $L(q, \dot{q}) = \frac{m}{2} \langle \dot{q}, \dot{q} \rangle - U(q)$ tal que U seja invariante por rotações. Dado $\eta = (\eta_1, \eta_2, \eta_3) \in \mathbb{R}^3$, defina a matriz, tal que $\mathfrak{so}(3)$ é a Álgebra de Lie de $SO(3)$ ¹⁷,

$$A_\eta = \begin{bmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2 \\ \eta_3 & 0 & -\eta_1 \\ -\eta_2 & \eta_1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{so}(3)$$

Usaremos aqui o fato de que, dado $v \in \mathbb{R}^3$, $A_\eta v = \eta \times v$, onde \times é o produto vetorial. Esse resultado pode ser verificado apenas calculando ambos os termos e não será provado.

¹⁷Para o leitor não familiarizado com *Grupos de Lie* recomendo o capítulo 2 de [1].

Considere $g_s^\eta = \exp(s\eta)$ grupo a 1 parâmetro de matrizes de $\text{SO}(3)$. Como U é invariante por rotações e a ação de $\text{SO}(3)$ em \mathbb{R}^3 preserva a norma, temos que L é invariante por g_s . Assim, o Teorema de Noether nos garante que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_L(q, \dot{q}) &= \left\langle \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}), \frac{d}{ds} \tilde{g}_s(\alpha) \Big|_{s=0} \right\rangle \\ &= \langle m\dot{q}, A_\eta q \rangle \\ &= \langle m\dot{q}, \eta \times q \rangle \\ &= \langle \eta \times q, m\dot{q} \rangle \\ &= \langle q \times (m\dot{q}), \eta \rangle\end{aligned}$$

é constante ao longo das soluções de Euler-Lagrange de L . Como η foi escolhido arbitrariamente, temos que $q \times (m\dot{q})$ o momento angular é constante.

3. RUDIMENTOS DE GEOMETRIA SIMPLÉTICA VIA MECÂNICA HAMILTONIANA

Nesta sessão veremos uma outra modelagem da *Mecânica Clássica*, ela nos levará a uma nova Geometria, a Simplética. No mundo Simplético há muita teoria a ser explorada que foge totalmente ao escopo deste texto, aqui como sempre visaremos resultados que nos levem a perguntas sobre *geodésicas*. Por isso, veremos esta geometria muito mais como uma ferramenta para entender e resolver problemas do que para estudar a área em si, apesar dessa ser muito vasta e interessante, e para isso teremos uma ponte que liga nossos *problemas variacionais* e “geodésicos” ao mundo simplético. Essa ponte é justamente a Transformada de Legendre definida na Seção 2.2. Com isso teremos uma versão da *Equação de Euler-Lagrange* no contexto Simplético, as *Equações de Hamilton* (Definição 3.14) que nos permitirá entender o *Gradiente Simplético* (Proposição 3.12) e com ele teremos ferramentas para aplicar em problemas interessantes. A aplicação explícita dessa filosofia será feita ao fim da sessão na, já antes citada, segunda demonstração do Teorema 2.3 feita em Teorema 3.24. As notas de toda esta seção são baseadas fortemente na dissertação de mestrado do meu xará [9].

3.1. Estrutura Simplética. Começamos a sessão definindo a estrutura da nossa *Geometria Simplética*, nesta subseção serão feitas muitas definições e resultados iniciais tanto de *Geometria Simplética* como de *Álgebra Linear Simplética*, naturalmente aqui o foco é chegar de forma rápida nas definições e resultados essenciais para o resto do texto, mas mostrando ao leitor não familiarizado alguns resultados e definições importantes. Para mais detalhes recomenda-se [9] e [10].

Definição 3.1. Se V é um espaço vetorial, uma **estrutura simplética linear em V** é um 2-tensor alternado $\omega \in \Lambda^2(V)$ não-degenerado. Da mesma forma, se M é uma variedade diferenciável, uma **forma simplética em M** é uma 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$ fechada e não-degenerada.¹⁸

O par (V, ω) é um **espaço vetorial simplético**.

O par (M, ω) é dito uma **variedade simplética**.

Definição 3.2. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas. Se $f : M_1 \rightarrow M_2$ é um difeomorfismo tal que $\omega_1 = f^*\omega_2$, ele é dito um **simplectomorfismo**. (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) são ditas **simplectomorfas** se existir um simplectomorfismo entre elas.

Com isso, definiremos os dois exemplos mais básicos, porém já são de extrema importância. Primeiro o *espaço vetorial simplético* mais clássico, o \mathbb{R}^{2n} com forma simplética canônica, depois a *variedade simplética* mais clássica, o *Fibrado Cotangente* que para o ponto de vista de *Mecânica* representará nosso espaço de fases em que a mecânica acontece.

Exemplo 3.3 (*Forma Simplética Canônica de \mathbb{R}^{2n}*). Sejam $u, v \in \mathbb{R}^{2n}$; $u = (u_1, u_2), v = (v_1, v_2)$, define-se $\omega : \mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ pela equação:

¹⁸Usarei usualmente ω para ambos e é esperado que o leitor diferencie ambos contextualmente quando não explicitado.

$$\omega((u_1, u_2); (v_1, v_2)) = \langle u_1, v_2 \rangle - \langle v_1, u_2 \rangle$$

Em coordenadas:

$$\omega = \sum_i dx_i \wedge dy_i$$

Exemplo 3.4 (*Forma Simplética do Fibrado Cotangente*). A forma estrutural de T^*M é $\lambda \in \Lambda T^*M$ tal que, para $\alpha_p \in T^*M$ e $v \in T_\alpha T^*M$, temos:

$$\lambda_\alpha(v) = \alpha_p(d\pi_p(v))$$

Então a forma simplética canônica de T^*M é definida por: $\omega = -d\lambda$.

Em coordenadas:

$$\lambda = \sum_i p_i dq_i$$

$$\omega = \sum_i dq_i \wedge dp_i$$

Agora veremos uma construção simples, mas que nos permitirá gerar mais exemplos de espaços simpléticos. Depois teremos dois Lemas que são usados na demonstração do Teorema 3.8 que é clássico e importante para o entendimento do mundo simplético, justamente por isso que ele é apresentado aqui, para a sua demonstração em detalhes recomendo [9]. Esses lemas estão aqui pois tem sua utilidade além de provar o teorema em questão.

Definição 3.5. Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas. A **variedade simplética produto** de M_1 e M_2 é o par $(M_1 \times M_2, \omega)$, onde, se $v_1, w_1 \in TM_1$ e $v_2, w_2 \in TM_2$

$$\omega((v_1, v_2), (w_1, w_2)) = \omega_1(v_1, w_1) + \omega_2(v_2, w_2)$$

ω é chamada a **forma simplética produto** de ω_1 e ω_2 .

Lema 3.6. Sejam M variedade diferenciável e uma família $\omega_t \in \Omega^k(M)$ de formas diferenciáveis. Dadas uma família de campos $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ então existe uma família $\rho_t : M \rightarrow M$ de difeomorfismos com $\rho_0 = Id$ tais que:

$$\frac{d}{dt} \rho_t^* \omega_t = \rho_t^* \left(\mathcal{L}_{X_t} + \frac{d\omega_t}{dt} \right)$$

Lema 3.7. (*Truque de Moser*) Seja M variedade compacta e ω_t família de formas simpléticas tal que $\frac{d\omega_t}{dt}$ é exata para todo t . Então existe uma família de difeomorfismos $\rho_t : M \rightarrow M$ com $\rho_0 = Id_M$ tal que $\rho_t^* \omega_t = \omega_0$

Teorema 3.8. (*Teorema de Darboux*) Toda variedade simplética é localmente symplectomorfa ao \mathbb{R}^{2n} munido da forma simplética canônica.

Com o teorema 3.8 pode-se primeiramente notar que *variedades simpléticas* tem dimensão par e também que a teoria local dessa geometria é trivial, diferentemente do caso Riemanniano, mas isso a torna uma ferramenta forte para problemas globais. Vamos agora exibir uma série de fatos sobre álgebra linear simplética que são importantes para a teoria e por fim definir o *Gradiente Simplético*.

Definição 3.9. Sejam (V, ω) espaço simplético e W subespaço vetorial de V . Então o **complemento simplético de W** é definido por:

$$W^\omega := \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

Com esta definição em mãos, podemos classificar subespaços e subvariedades de acordo com os complementares simpléticos. O mais importante deles para o estudo deste texto será o *coisotrópico*.

Definição 3.10. Sejam (V, ω) é um espaço simplético e W é um subespaço de V . W é dito **subespaço isotrópico** se $W \subset W^\omega$ e **coisotrópico**¹⁹ se $W^\omega \subset W$. Um subespaço isotrópico e coisotrópico é dito **Lagrangeano**. Finalmente W é dito **simplético** se $W \cap W^\omega = 0$.

Analogamente, se (M, ω) é uma variedade simplética e N é subvariedade de M , temos que N é **isotrópica**, **coisotrópica**, **Lagrangeana** ou **simplética** se, para todo $p \in N$, $T_p N$ é um subespaço isotrópico, coisotrópico, Lagrangeano ou simplético de $(T_p M, \omega_p)$, respectivamente.

Proposição 3.11. *Seja (V, ω) espaço simplético e W subespaço simplético de V . Então temos que $\dim(W) + \dim(W^\omega) = \dim(V)$.*

Demonstração. Aqui vale pensar como em Álgebra Linear usual pensando no complemento ortogonal, a teoria é diferente mas a argumentação é semelhante.

Tome $\varphi : V \rightarrow V^*$ a função linear dada por $\varphi(v)(w) = \omega(v, w)$. Como ω é não degenerada, φ é um isomorfismo de espaços vetoriais. Observe que $\varphi(W^\omega) = W^0$ é o anulador de W . Logo $\dim W^\omega = \dim W^0 = \dim V - \dim W$

□

Agora definiremos o *gradiente simplético* e vale notar que o nome é dado em analogia à definição usual de gradiente Riemanniano como campo que age, através da estrutura Riemanniana, no fibrado tangente da mesma forma que a diferencial da função. Ao fim deste texto discutiremos o gradiente Finsler (definição 6.1) que generaliza o conceito Riemanniano de forma semelhante.

Proposição 3.12. *Se M uma variedade simplética, dada $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave, existe um único campo $X_f \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $df = \omega(X_f, \cdot)$. Chama-se X_f de **Gradiente Simplético** ou **Campo Hamiltoniano** de f .*

Demonstração. A existência do *gradiente simplético* é consequência da não degenerescência de ω . Em coordenadas locais basta aplicar df em uma base local de seções de TM para obter as coordenadas explícitas dele.

Para a unicidade, basta supor que existam $X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$ satisfazendo as propriedades do gradiente simplético. Temos então, para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$

$$\begin{aligned} \omega(X_1 - X_2, Y) &= \omega(X_1, Y) - \omega(X_2, Y) \\ &= df(Y) - df(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como ω é não-degenerada e Y é qualquer, temos $X_1 = X_2$.

□

Lema 3.13. *Dada (M, ω) variedade simplética, a aplicação $C^\infty(M) \ni f \mapsto X_f \in \mathfrak{X}(M)$ é linear.*

Demonstração. Sejam $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ e $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$. Então, para todo $p \in M$ e $v \in T_p M$, temos que

$$\begin{aligned} \omega(X_{k_1 f_1 + k_2 f_2}, v) &= d(k_1 f_1 + k_2 f_2)_p(v) \\ &= (k_1 df_1 + k_2 df_2)_p(v) \\ &= \omega(k_1 X_{f_1} + k_2 X_{f_2}, v) \end{aligned}$$

Por fim, basta usar que ω é não degenerada, implicando assim a linearidade.

□

3.2. Equações de Hamilton. Nesta subseção vamos definir a equação que faz o papel de *Euler-Lagrange* no universo da *Mecânica Hamiltoniana*. Com isso teremos ferramentas para entender os problemas variacionais que estamos interessados neste novo contexto. Como dito anteriormente, a ponte entre essas duas teorias será a *Transformada de Legendre* (definida em 2.2) para isso revisitaremos ela brevemente e faremos mais alguns comentários. Posteriormente desenvolveremos o link entre a teoria Riemanniana e Simplética, ou entre a Mecânica de Lagrange e a de Hamilton.

¹⁹Espaços coisotrópicos aparecem na mecânica como exemplos de subníveis de mesma energia de um sistema, logo serão bem importantes para este texto visto que sistemas conservativos preservam energia.

Definição 3.14. As **Equações de Hamilton**, são definidas a partir de uma função $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, que chamaremos de **Hamiltoniano**, da seguinte forma

$$\begin{aligned} q'_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\ p'_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \end{aligned}$$

onde $p, q : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$ são curvas, $\frac{\partial H}{\partial q_i}$ denota a derivada parcial de H com relação à i -ésima coordenada e $\frac{\partial H}{\partial p_i}$ denota a derivada parcial com relação à $(n+i)$ -ésima coordenada. Dizemos, nesse caso, que a curva (q, p) satisfaz as equações de Hamilton para H ou que (q, p) é **solução das equações de Hamilton para H** .

Definição 3.15. Um Lagrangeano L é dito **regular** se a matriz $\left[\frac{d^2 L}{dq^2} \right]$ é sempre invertível. L é dito **hiper-regular** se sua transformada de Legendre T_L é um difeomorfismo. Note que se L é hiper-regular, então

$$dT_L = \begin{bmatrix} \text{Id} & 0 \\ \frac{d^2 L}{dq dq} & \frac{d^2 L}{dq^2} \end{bmatrix}$$

é sempre invertível. Logo todo Lagrangeano hiper-regular também é regular.

Na sessão 1 podemos ver a *Métrica Riemanniana* como um *Lagrangeano Hiper-regular* muito bem comportado. Futuramente, na Seção 4 veremos a *Métrica Finsler* (Definições 4.1 e 4.2) como um Lagrangeano mais geral que o Riemanniano, mas ainda muito especial, não teremos a *Transformada de Legendre* como difeo entre TM e T^*M mas conseguiremos que seja difeo entre $TM \setminus 0$ e $T^*M \setminus 0$. Então, com o devido cuidado estas técnicas podem ser usadas nesse mundo diferente. Daqui para frente nesta subseção nos dedicaremos ao estudo de *Hamiltonianos* que vem de *Lagrangeanos Hiper-regulares*, pois nesses a tradução entre as Mecânicas é um difeo, então preservará boas propriedades.

Definição 3.16. Para um *Lagrangeano hiper-regular* $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir seu **Hamiltoniano associado a L** como a função $H_L = E_L \circ T_L^{-1}$.

Proposição 3.17. Seja $L : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ *Lagrangeano hiper-regular*. Então $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ é solução de Euler-Lagrange em coordenadas para L se, e só se, $T_L(\alpha, \alpha')$ é solução das equações de Hamilton para H_L .

Fato 3.18. Para nos livrarmos de coordenadas e enxergarmos nossos conceitos de modo mais abstrato vamos relacionar soluções das Equações de Hamilton com algo independente de coordenadas, o *Gradiente Simplético*. Basta notar que soluções das equações de Hamilton para um Hamiltoniano H são também soluções do fluxo do campo $X = \left(\frac{\partial H}{\partial p}, -\frac{\partial H}{\partial q} \right)$. Por fim, perceba também que $X = X_H$, gradiente simplético de H para a forma simplética canônica do \mathbb{R}^{2n} . Pelo Teorema de Darboux (teorema 3.8) toda variedade simplética é localmente simplectomorfa ao \mathbb{R}^{2n} canônico (para a dimensão apropriada) então conseguiremos localmente se apoiar nesta discussão para ter definições livre de coordenadas usando o fluxo do gradiente simplético.

Lema 3.19. Sejam $(M, \omega_M), (N, \omega_N)$ variedades simpléticas e $f : M \rightarrow N$ simplectomorfismo. Se $H_N : N \rightarrow \mathbb{R}$ é Hamiltoniano e $H_M = H_N \circ f$, temos que $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é solução do fluxo de X_{H_M} se, e só se, $f \circ \alpha$ é solução do fluxo de X_{H_N} .

Demonstração. Observe que, dado $p \in M$ e $v \in T_p M$

$$\begin{aligned} \omega_M(X_{H_M}(p), v) &= d(H_M)_p(v) \\ &= d(H_N \circ f)_p(v) \\ &= d(H_N)_{f(p)} \circ df_p(v) \\ &= \omega_N(X_{H_N} \circ f(p), df_p(v)) \\ &= \omega_M(df_p^{-1} \circ X_{H_N} \circ f(p), v) \end{aligned}$$

onde a última igualdade vem do fato de que f é um symplectomorfismo. Como ω_M é não-degenerada, temos que

$$X_{H_M}(p) = df_p^{-1} \circ X_{H_N} \circ f(p)$$

Dessa forma, dada uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$, temos que se $X_{H_N}(f \circ \alpha) = (f \circ \alpha)'$, então

$$\begin{aligned} X_{H_M}(\alpha(t)) &= df_{\alpha(t)}^{-1} \circ X_{H_N}((f \circ \alpha)(t)) \\ &= df_{\alpha(t)}^{-1} \circ (f \circ \alpha)'(t) \\ &= \alpha'(t) \end{aligned}$$

A outra implicação é obtida fazendo o mesmo para f^{-1} .

□

Proposição 3.20. *Seja M uma variedade suave e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano hiper-regular. Então $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ solução de Euler-Lagrange em coordenadas se, e só se, $T_L(\alpha')$ é solução do fluxo Hamiltoniano de H_L .*

Demonstração. Para solucionar isso naturalmente combinaremos resultados que ligam, pela *transformada de Legendre*, soluções de Euler-Lagrange às do *fluxo Hamiltoniano*. Para vermos isso em coordenadas usaremos a comutatividade do diagrama da transformada de Legendre com coordenadas:

$$\begin{array}{ccc} TM & \xrightarrow{T_L} & T^*M \\ \downarrow d\psi^{-1} & & \downarrow \psi^* \\ T\mathbb{R}^n & \xrightarrow{T_{L_\psi}} & T^*\mathbb{R}^n \end{array}$$

Sejam ω a forma simplética natural de T^*M e $\psi : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow V \subset M$ carta de M . Defina então $\tilde{\alpha} = \psi^{-1} \circ \alpha$ e $L_\psi = L \circ d\psi$. Como as equações de Euler-Lagrange são invariantes por difeomorfismos, temos que α é solução de Euler-Lagrange para L se, e só se, $\tilde{\alpha}$ é solução de Euler-Lagrange para L_ψ , o que, pela proposição 3.17 e o fato 3.18 é equivalente a $T_{L_\psi}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}')$ ser solução do fluxo de $X_{H_{L_\psi}}$.

Logo, basta provar que $T_{L_\psi}(\tilde{\alpha}, \tilde{\alpha}')$ é solução do fluxo de $X_{H_{L_\psi}}$ se, e só se, $T_L(\alpha')$ é solução do fluxo de X_{H_L} . Mas observe que, dado $v \in T\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} E_{L_\psi}(v) &= T_{L_\psi}(v)(v) - L_\psi(v) \\ &= T_L(d\psi(v))(d\psi(v)) - L(d\psi(v)) \\ &= E_L \circ d\psi(v) \end{aligned}$$

e, portanto

$$\begin{aligned} H_{L_\psi} &= E_{L_\psi} \circ T_{L_\psi}^{-1} \\ &= E_L \circ d\psi \circ (\psi^* \circ T_L \circ d\psi) \\ &= E_L \circ d\psi \circ d\psi^{-1} \circ T_L^{-1} \circ (\psi^*)^{-1} \\ &= H_L \circ (\psi^*)^{-1} \end{aligned}$$

Note que, como mostrado no Exemplo 3.4, se escrevermos $d\psi^{-1} = (q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ e fizermos ω a forma simplética canônica de T^*M e ω_0 a forma simplética canônica de \mathbb{R}^{2n} , temos $((\psi^*)^{-1})^* \omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i = \omega_0$. Logo $(\psi^*)^{-1}$ é um symplectomorfismo entre (T^*M, ω) e $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$. A solução segue pelo Lema 3.19.

□

Corolário 3.21. *Seja M variedade suave, ω a forma simplética canônica de T^*M . Sejam também $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangeano e $\omega_L = T_L^* \omega$. Então, uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é solução de Euler-Lagrange em coordenadas para L se, e só se, α' é solução do fluxo Hamiltoniano do funcional energia E_L referente à forma simplética ω_L .*

3.3. Métrica de Jacobi. Para finalizar a sessão de *Geometria Simplética* vamos usar a teoria desenvolvida para apresentar dois Lemas que nos levarão à segunda demonstração do teorema 2.3, aqui referenciado como teorema 3.24.

Lema 3.22. *Sejam (M, ω) uma variedade simplética e $H_1, H_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ Hamiltonianos em M tais que existem h_1 e h_2 valores regulares de H_1 e H_2 , respectivamente, com $H_1^{-1}(h_1) = H_2^{-1}(h_2)$. Se α_1, α_2 são soluções dos fluxos de X_{H_1}, X_{H_2} respectivamente, então existe reparametrização $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.*

Demonstração. Defina $\Lambda := H_1^{-1}(h_1) = H_2^{-1}(h_2)$. Se $z \in \Lambda$ e $v \in T_z\Lambda$ então temos que

$$\begin{aligned} 0 &= d(H_1)_z(v) \\ &= \omega(X_{H_1}(z), v) \end{aligned}$$

Isso implica que $X_{H_1}(z) \in (T_z\Lambda)^\omega$. O mesmo vale para H_2 . Pela Proposição 3.11, temos que $\dim T_z\Lambda + \dim (T_z\Lambda)^\omega = \dim M$. Juntando a isso o fato de que $\dim T_z\Lambda = \dim M - 1$, temos que $\dim (T_z\Lambda)^\omega = 1$. Além disso, o fato de h_1 e h_2 serem valores regulares implica que X_{H_1} e X_{H_2} são campos que não se anulam em Λ e que estão ambos contidos no mesmo subespaço unidimensional. Assim, podemos encontrar uma função suave $\lambda : \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$ tal que, para todo $z \in \Lambda$

$$X_{H_2}(z) = \lambda(z)X_{H_1}(z)$$

Vamos agora construir a reparametrização de α_1 para α_2 . Defina a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(t) = \int_0^t \frac{1}{\lambda \circ \alpha_1(s)} ds$. Como $f'(t) = \frac{1}{\lambda \circ \alpha_1(t)} \neq 0$, temos que f é inversível. Vamos provar que $\varphi = f^{-1}$ é a reparametrização desejada. De fato, temos que

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= (f^{-1})'(t) \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(t))} \\ &= (\lambda \circ \alpha_1)(\varphi(t)) \end{aligned}$$

Isso implica que

$$\begin{aligned} (\alpha_1 \circ \varphi)'(t) &= \alpha_1'(\varphi(t))\varphi'(t) \\ &= X_{H_1}(\alpha_1 \circ \varphi(t)) \lambda(\alpha_1 \circ \varphi(t)) \\ &= X_{H_2}(\alpha_1(\varphi(t))) \end{aligned}$$

ou seja, que $\alpha_1 \circ \varphi$ é solução do fluxo de X_{H_2} . Pelo Teorema de Unicidade de soluções de EDO, temos que $\alpha_1 \circ \varphi = \alpha_2$. □

Lema 3.23. *Sejam $L, L_J : TM \rightarrow \mathbb{R}$ os Lagrangeanos apresentados no teorema 3.24 a seguir e denote por $H, H_J : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ os respectivos Hamiltonianos associados. Temos então que:*

$$\begin{aligned} H(v_p) &= \frac{1}{2} |v_p|^2 + U(q) \\ H_J(v_p) &= \frac{|v_p|^2}{2(c - U(q))} \end{aligned}$$

Demonstração. Se provarmos que $H^{-1}(c) = H_J^{-1}(1)$ e c e 1 são valores regulares de H e H_J , respectivamente, pelo Lema 3.22 o teorema estará provado. A igualdade das pré-imagens pode ser provada tomando $v_p \in T_p^*M$ e observando que

$$\begin{aligned} H(v_p) = c &\Leftrightarrow |v_p|^2 = 2(c - U(q)) \\ &\Leftrightarrow \frac{|v_p|^2}{2(c - U(q))} = 1 \\ &\Leftrightarrow H_J(v_p) = 1 \end{aligned}$$

Para provar que c e 1 são valores regulares, note que, como o contra-domínio de H é \mathbb{R} , basta encontrar uma curva $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow T^*M$ tal que $H(\alpha(0)) = c$ e $\frac{d}{dt}H((\alpha(t)))|_{t=0} \neq 0$. O mesmo vale para H_J , mas fazendo $H_J(\alpha(0)) = 1$.

Considere $v_p \in T_p^*M$ e defina $\alpha(t) = (t+1)v_p$ para todo $t \in (-\epsilon, \epsilon)$. Se escolhermos v_p tal que $H(v_p) = c$, teremos que $|v_p|^2 = 2(c - U(q)) \neq 0$ e

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}H((\alpha(t))) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} |(t+1)v_p|^2 + U(q) \right) \right|_{t=0} \\ &= \frac{1}{2} ||v_p||^2 \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

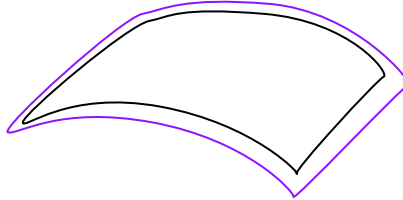
logo c é valor regular de H .

Para provar que 1 é valor regular de H_J , escolha v_p tal que $H_J(v_p) = 1$. Dessa forma temos $|v_p|^2 = 2(c - U(q))$ e, usando α como definido acima

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dt}H_J((\alpha(t))) \right|_{t=0} &= \left. \frac{d}{dt} \frac{(t+1)|v_p|^2}{2(c - U(q))} \right|_{t=0} \\ &= \frac{|v_p|^2}{2(c - U(q))} \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

□

Teorema 3.24. (*Métrica de Jacobi*) Considere M variedade Riemanniana dotada de métrica g e $U : M \rightarrow \mathbb{R}$ função suave com $U(q) < c, \forall q \in M$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Se $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é um Lagrangeano dado por $L(v_p) = \langle v_p, v_p \rangle - U(p)$ e g_J é uma métrica em M tal que $(g_J)_q = (c - U(q))g_q$, então uma curva $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ é solução da equação de Euler-Lagrange segundo L se, e só se, α é geodésica de g_J , a menos de reparametrização.



Ideia da Demonstração:

$$H_1^{-1}(c_1) = H_2^{-1}(c_2)$$

- Os gradientes simpléticos são múltiplos, ou seja: $X_{H_2}(z) = \lambda(z)X_{H_1}(z)$
- Existe φ , tal que se α_1, α_2 são soluções dos fluxos X_{H_1}, X_{H_2} respectivamente, $\alpha_2 = \alpha_1 \circ \varphi$.
- Aplicar o resultado aos Hamiltonianos:

$$H(v_p) = \frac{1}{2} ||v_p||^2 + U(p)$$

$$H_J(v_p) = \frac{||v_p||^2}{2(c - U(p))}$$

Ou seja, como os Hamiltonianos associados aos Lagrangeanos, L e g_J , são respectivamente H e H_J do Lema 3.23 e eles tem a mesma pré-imagem comum, um subespaço co-isotrópico comum correspondendo a um nível de energia constante, pelo Lema 3.22 temos que os fluxos são múltiplos e em particular suas soluções são uma a reparametrização da outra, como queríamos demonstrar.

□

4. BOAS VINDAS AO MUNDO FINSLER

Nesta sessão introduziremos a principal geometria que queremos estudar neste texto, a *Geometria de Finsler*. A abordagem aqui feita tenta focar ao máximo em evitar o uso excessivo de coordenadas e cálculos com índices que podem se tornar bem trabalhosos já em Geometria Riemanniana e em Finsler se tornam ainda mais complicados e trabalhosos. Essa abordagem com muitos índices é a mais comum e pode se encontrar em maior parte das referências clássicas como [5] e [18] que são ótimas referências para um entendimento amplo da área, e alguns grandes resultados clássicos. Porém, para favorecer essa abordagem mais livre de coordenadas e geométrica nossa principal fonte será a tese de doutorado [4] do professor Benigno Alves, as Subseções 4.1 e 4.2 são majoritariamente baseadas nessa tese. Nesta sessão faremos uma introdução focada em inicialmente dar um panorama breve das bases dessa teoria, ressaltando suas diferenças para o caso Riemanniano, e chegar rapidamente no conceito que mais nos interessa, o de *Geodésica*. Como mencionado anteriormente a *Geometria de Finsler* pode ser vista como vinda de um *Lagrangeano* mais geral que o Riemanniano, mas ainda assim muito especial e com boas propriedades. Nesta seção demonstraremos o principal teorema deste texto, o Teorema 4.25. A Subseção 4.3 é dedicada a esse teorema e sua demonstração que é baseada no artigo [8], nesse artigo é apresentada uma demonstração bem curta e na subseção complementei essa demonstração com alguns detalhes que foram omitidos.

4.1. Métrica Finsler e Exemplo Randers. Nesta subseção definimos as primeiras noções deste novo mundo como nossa *Métrica Finsler*, a *Indicatriz*, o *Espaço Normal*, as bolas que a *métrica Finsler* induz e por fim nossas *Geodésicas Finsler* definidas de um ponto de vista *Lagrangeano* ao passo que na Subseção 5.1 definiremos a conexão que vamos trabalhar prioritariamente e veremos que a definição de geodésica lagrangeanamente²⁰ coincide, a *Conexão de Chern*. Também será atentado ao longo desta subseção os fenômenos particulares, em geral ligados a propriedades anisotrópicas, que o *Mundo Finsler* abarca que não são vistos no Riemanniano.

Definição 4.1. Seja $F : V \rightarrow [0, \infty)$ uma função positiva em um espaço vetorial de dimensão finita V . Dizemos que F é uma **norma de Minkowski** quando for positiva homogênea (isto é, $F(\lambda v) = \lambda v$ para todos $\lambda > 0$ e $v \in V$), suave em $V \setminus 0$ e fortemente convexa, ou seja, o tensor fundamental associado a F , definido por

$$g_v(u, w) := \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw) \Big|_{s,t=0}$$

para quaisquer $v, u, w \in V$ com $v \neq 0$, é positivo-definido. O par (V, F) é denominado **espaço de Minkowski**.

Definição 4.2. Uma **norma (métrica) Finsleriana** em uma variedade diferenciável M é uma função contínua $F : TM \rightarrow [0, \infty)$ tal que $F|_{TM \setminus 0} : TM \setminus 0 \rightarrow (0, \infty)$ é suave e $F_p := F|_{T_p M}$ é uma norma de Minkowski para qualquer $p \in M$.

Definição 4.3. Quando $F(v) = F(-v)$ para qualquer $v \in V$ a **métrica Finsleriana** F é dita reversível.

Isso já nos mostra que a *métrica Finsler* não é uma métrica no sentido usual e a *norma Finsler* também não é uma norma no sentido usual mas essas nomenclaturas são usuais da área e dificilmente causarão confusão.²¹ Vale o comentário trivial que uma métrica Riemanniana é uma métrica Finsler reversível fortemente convexa em todo TM não somente em $TM \setminus 0$, mais para frente comentaremos mais sobre a importância de olhar para $TM \setminus 0$ ao invés de TM .

²⁰Para o leitor familiarizado, essa seria a definição de geodésica por Sprays.

²¹Futuramente veremos que a distância definida pela métrica Finsler também não é uma distância no sentido usual.

Proposição 4.4. Para qualquer $v \in TM \setminus 0$, o tensor fundamental de uma variedade Finsleriana (M, F) possui as seguintes propriedades:

- (i) $g_{\lambda v} = g_v$ para qualquer $\lambda > 0$
- (ii) $g_v(v, v) = F^2(v)$
- (iii) $g_v(v, u) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} F^2(v + su) \Big|_{s=0} = \mathcal{L}(v)(u)$, $u \in T_{\pi(v)}M$ tal que $\mathcal{L} : TM \setminus 0 \rightarrow T^*M \setminus 0$ é a Transformada de Legendre (Definição 2.8) relativa a $\frac{1}{2}F^2$.²²
- (iv) $g_v(v, u) \leq F(v)F(u)$, $\forall u \in T_{\pi(v)}M$ (Desigualdade de Cauchy-Schwarz)

Demonstração. (i) Basta notar que, para u, w arbitrários:

$$\begin{aligned} g_{\lambda v}(u, w) &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(\lambda v + su + tw) \Big|_{s,t=0} \\ &= \lambda^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2 \left(v + \frac{s}{\lambda} u + \frac{t}{\lambda} w \right) \Big|_{s,t=0} \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2(v + su + tw) \Big|_{s,t=0} \\ &= g_v(u, w) \end{aligned}$$

- (ii) Basta notar que: $g_v(v, v) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} F^2((1+s+t)v) \Big|_{s,t=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial s \partial t} (1+s+t)^2 F^2(v) \Big|_{s,t=0} = F^2(v)$
- (iii) Conta análoga ao item (ii) e aplicar a definição da transformada de Legendre.
- (iv) Como a conta é feita na fibra $T_{\pi(v)}M$ o vetor u admite decomposição na direção de v somado com um vetor no subespaço ortogonal a v em relação a g_v que é produto interno em $T_{\pi(v)}M$. Então, se $u = \lambda v + w$ temos $g_v(v, u) = \lambda g_v(v, v) = \lambda F^2(v)$. Se $\lambda \leq 0$ a demonstração terminou. Caso contrário, como $w \in T_{\pi(v)}M$ e $w \perp v$ temos que $F(v) \leq F(v + w)$, em particular vale para $\frac{1}{\lambda}w$, então:

$$g_v(v, u) = \lambda F(v)F(v) \leq \lambda F \left(v + \frac{1}{\lambda} w \right) F(v) = F(u)F(v).$$

□

Para os mais versados na *Teoria de Fibrados* é possível enxergar, como ressaltado no capítulo 3 de [5], por conta da Proposição 4.4 item (i) a métrica Finsler como uma métrica Riemanniana induzida num *fibrado pullback* sobre o *fibrado de esfera de M*, usualmente representado por $S(M)$, e as métricas Finsler reversíveis num *fibrado pullback* sobre o *fibrado projetivo tangente*. Por conta do item (iii) é possível provar que \mathcal{L} é um difeomorfismo positivo homogêneo de grau 1 que se estende continuamente para a seção nula, para mais detalhes o leitor pode olhar o seção 3.1 de [18].

Agora veremos nosso primeiro exemplo *não Riemanniano*, e *não reversível*, os *Espaços de Randers*. Eles nos acompanharão ao longo de todo texto e serão definidos de uma segunda forma na ao fim desta subseção para serem estudados mais a fundo, usando a *Deformação de Zermelo*.

Definição 4.5. Uma *Norma Randers*, R , numa variedade é uma *Norma de Finsler* dada por uma *métrica Riemanniana* somada de uma 1-forma, de tamanho menor que 1, ou seja:

$$\begin{aligned} R : TM &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto \alpha(v) + \beta(v) \end{aligned}$$

Em que α é a norma induzida por uma métrica Riemanniana, g , ou seja $\alpha(v) = \sqrt{g(v, v)}$ e β é uma 1-forma tal que $\|\beta\|_\alpha < 1$, com $\|\cdot\|_\alpha$ a norma induzida por α no espaço dual.

²²Como essa transformada será importante e também para explicitar que estamos olhando para os fibrados sem a seção nula usaremos essa notação definida no texto ao invés de $T_{\frac{1}{2}F^2}$ que seria a notação usual segundo a Subseção 2.2.

As *Normas Randers* são intuitivamente *métricas Finsler* formadas por pequenas perturbações de *métricas Riemannianas* e são reversíveis se e somente se são Riemannianas, o que é fácil de ver pois α é positiva homogênea e β é linear.

Veremos agora um objeto que nos acompanhará muito ao longo do texto, as *indicatrizes*. Diferentemente da *Geometria Riemanniana* que procuramos fazer o máximo de teoria dentro da variedade, em Finsler é comum resolver as contas no fibrado pois lá a norma se comporta melhor e para isso a *indicatriz* será bem útil. Depois veremos, no Teorema 4.7 um resultado que mostra que as indicatrizes definem a geometria de Finsler e consequentemente quão geral e natural é a estrutura Finsler.

Definição 4.6. A *indicatriz* em $p \in M$ de raio $r > 0$ de uma métrica Finsleriana $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é o conjunto

$$\mathcal{I}_p^F(r) := \{v \in T_p M; F(v) = r\}$$

Teorema 4.7. Sejam V um espaço vetorial e B um subconjunto fechado de V contendo a origem. Suponha que B satisfaz as seguintes condições:

1. B é estrelado com respeito à origem;
2. B intersecta todas as direções;
3. $S := \partial B$ é uma hipersuperfície fechada de V tal que qualquer $v \in S$ é transversal;
4. Para qualquer $v \in V \setminus 0$ existe um único $\lambda_v > 0$ tal que $\frac{v}{\lambda_v} \in S$
5. S fortemente convexa.

Então a aplicação $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ que associa a cada $v \in V$ o número λ_v dado no item (4) é uma métrica de Minkowski cuja indicatriz é S . Reciprocamente, se $F : V \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica de Minkowski, então $B := F^{-1}[0, 1]$ satisfaz os cinco itens acima e neste caso $S = \mathcal{I}^F$.

Assim como no caso Riemanniano em que pela *Transformada de Legendre* associada à métrica, ou à energia, temos uma identificação canônica entre TM e T^*M , no caso Finsler a nossa *métrica Finsler* também nos dá uma identificação desse tipo e munimos T^*M com a métrica Finsleriana $F_p^*(\beta) := \sup\{\beta(v), v \in \mathcal{I}_p^F\}$, chamada **métrica dual**. Vale notar que usando a *Transformada de Legendre* \mathcal{L} definida na Proposição 4.4 temos $F = F^* \circ \mathcal{L}$.

Antes de seguirmos em frente, faremos uma breve digressão explorando mais o exemplo Randers e a construção da *Deformação de Zermelo* que nos dará exemplos Finsler muito mais concretos e artifícios práticos para trabalhar neles. Essa definição é central para o Teorema 4.25, que é o principal deste texto, e também será para a Seção 6.

Definição 4.8. Se $F : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma *métrica Finsler* e W um campo suave em M com $F(-W) < 1$, define-se a translação de F por W como a *métrica Finsler* $F_W : TM \rightarrow \mathbb{R}$ definida implicitamente pela equação:²³

$$F\left(\frac{v}{F_W(v)} - W\right) = 1, v \in TM \setminus 0$$

Chama-se F_W de **Deformação de Zermelo** de F por W (ou **Métrica de Zermelo** com data (F, W)).

Veremos no Lema 4.10 que toda *Métrica Randers* (vide Definição 4.5) é equivalente a uma *Métrica de Zermelo* com data (h, W) para h métrica Riemanniana e W campo satisfazendo $h(W, W) < 1$.

²³Será comum ao longo do texto chamar o campo W relativo a uma *Deformação de Zermelo* de vento.

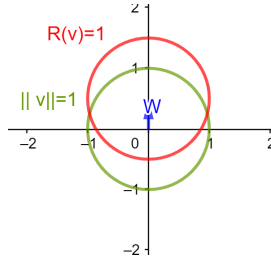


FIGURA 2. Imagem representando a indicatriz de uma *norma Riemanniana* $h = \|\cdot\|$ e a de uma *norma Randers* R com data (h, W) , exemplificando a fórmula da proposição 4.9.

Primeiramente veremos uma relação muito útil entre indicatrizes de uma *métrica Finsler* e de sua *Deformação de Zermelo*.

Proposição 4.9. *As indicatrizes de uma métrica Finsleriana, F e uma métrica de Zermelo com data (F, W) de uma mesma variedade M são relacionadas por:*

$$\mathcal{I}_p^{F_W}(r) = \mathcal{I}_p^F(r) + rW,$$

para todo, $p \in M$ e $r > 0$. Vide Figura 2.

Demonstração. Pela homogeneidade positiva da norma Finsler temos:

$$F(v - F_W(v)W) = F_W(v) \quad \text{e} \quad F(v) = F_W(v + F_W(v)W)$$

Basta fazer $F_W(v) = r$ na primeira equação e $F(v) = r$ na segunda. □

Lema 4.10. *A aplicação $Z : TM \rightarrow \mathbb{R}$ é uma métrica de Zermelo com data (h, W) , em que h é métrica Riemanniana, se e somente se, for a métrica Randers:*

$$\alpha + \beta = \sqrt{a} + \beta$$

onde a e β são respectivamente norma Riemanniana e 1-forma, dadas por:

$$a(u, v) = \frac{\lambda h(u, v) + h(u, W)h(v, W)}{\lambda^2} \quad \text{e} \quad \beta(v) = -\frac{h(v, W)}{\lambda}$$

com $\lambda = 1 - h(W, W)$, Além disso,

$$(4.1) \quad h(v, u) = \eta(a(v, u) - \beta(v)\beta(u))$$

onde B é o campo vetorial a -dual a β definido por $\beta(\cdot) = a(B, \cdot)$. Temos assim, $W = -\frac{B}{\eta}$ com $\eta = 1 - a(B, B)$.

Demonstração. Suponha que Z é uma métrica de Zermelo de data (h, W) . Seja $u \in TM$ tal que $h(u, u) = 1$. Escreva $u = \frac{v}{Z(v)} - W$. Por definição, $h\left(\frac{v}{Z(v)} - W, \frac{v}{Z(v)} - W\right) = 1$, logo, denotando $\lambda = 1 - h(W, W)$ e usando apenas a bilinearidade de h , obtém-se que

$$Z(v)^2 + \frac{2h(v, W)}{\lambda}Z(v) - \frac{h(v, v)}{\lambda} = 0$$

E resolvendo esta equação do segundo grau em termos de $Z(v)$, conclui-se que

$$Z(v) = \sqrt{\frac{\lambda h(v, v) + [h(v, W)]^2}{\lambda^2}} - \frac{h(v, W)}{\lambda}$$

A ida do resultado segue pela 1-homogeneidade de Z .

Reciprocamente,²⁴ dada uma métrica Randers $R = \alpha + \beta$, considere a métrica Riemanniana h e o campo vetorial W dados em 4.1. Seja Z a métrica de Zermelo com data de navegação (h, W) . Provaremos que $Z = R$. Como Z e R são positiva-homogêneas, basta provar que $Z(v) = R(v)$ para qualquer $v \in \Sigma^R$, ou seja, $R(v) = \alpha(v) + \beta(v) = 1$. Primeiro note que

$$a(W, W) - \beta(W)^2 = a(W, W) - a(W, B)^2 = \frac{a(B, B)}{\eta}.$$

Logo

$$\begin{aligned} h(v - W, v - W) &= h(v, v) - 2h(v, W) + h(W, W) \\ &= \eta [a(v, v) - \beta(v)^2 - 2(a(v, W) - \beta(v)\beta(W)) + a(W, W) - \beta(W)^2] \\ &= \eta \left[\alpha(v)^2 - \beta(v)^2 - 2\beta(v)\frac{1}{\eta}(-1 + a(B, B)) + \frac{a(B, B)}{\eta} \right] \\ &= \eta \left[(\alpha(v) + \beta(v))(\alpha(v) - \beta(v)) + 2\beta(v) + \frac{a(B, B)}{\eta} \right] \\ &= \eta \left[\alpha(v) + \beta(v) + \frac{a(B, B)}{\eta} \right] = \eta \left[1 + \frac{a(B, B)}{\eta} \right] \\ &= \eta + a(B, B) = 1. \end{aligned}$$

Logo por definição $Z(v) = 1$ e portanto $Z = R$. □

Exemplo 4.11. Vale o comentário de que para o caso de uma *norma Randers* advinda da Deformação de Zermelo de uma métrica euclidiana e com vento W constante a indicatriz é um elipsoide de revolução no sentido do vento e deslocado no mesmo sentido.

Agora veremos uma conta na Proposição 4.12 que para fins deste texto servirá somente de exemplo que é possível fazer contas bem explícitas com métricas Randers. Já o Lema 4.13 será útil para entender propriedades de ortogonalidade Finsler, ver Definição 4.21.

Proposição 4.12. O Tensor Fundamental de uma métrica Randers $R = \alpha + \beta = \sqrt{a} + \beta$ é dado pela seguinte expressão:

$$g_v(w, u) = \frac{R(v)}{\alpha(v)} \left[a(w, u) - \frac{a(v, w)a(v, u)}{\alpha^2(v)} \right] + \left(\frac{a(v, w)}{\alpha(v)} + \beta(w) \right) \left(\frac{a(v, u)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right).$$

Lema 4.13. Seja $R(\cdot) = \alpha(\cdot) + \beta(\cdot) = \sqrt{a(\cdot, \cdot)} + a(\cdot, B)$ uma métrica Randers com data (h, W) , respectivamente métrica Riemanniana e Campo satisfazendo $h(W, W) \leq 1$ sobre uma variedade M . Então dado $v \in T_p M \setminus 0$ obtemos as seguintes expressões para a aplicação de Legendre:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_v(u) &:= g_v(v, u) = R(v) \left(\frac{a(v, u)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right) = \frac{R(v)}{\alpha(v)} a(v + \alpha(v)B, u) \\ &= \frac{R(v)}{\lambda \alpha(v)} h(v - R(v)W, u) \end{aligned}$$

para qualquer $u \in T_p M$.

²⁴Nesta parte do argumento havia um erro em [4], que o próprio autor do texto, Prof. Benigno, me mostrou como contornar.

Demonstração. Pela definição de tensor fundamental e pela regra da cadeia segue que

$$\begin{aligned} g_v(v, u) &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} R^2(v + tu) \Big|_{t=0} = R(v) \frac{\partial}{\partial t} R(v + tu) \Big|_{t=0} \\ &= R(v) \frac{\partial}{\partial t} [\alpha(v + tu) + \beta(v + tu)] \Big|_{t=0} = R(v) \left[\frac{\partial}{\partial t} \alpha(v + tu) \Big|_{t=0} + \beta(u) \right] \\ &= R(v) \left[\frac{1}{2\alpha(v)} \frac{\partial}{\partial t} a(v + tu, v + tu) \Big|_{t=0} + \beta(u) \right] = R(v) \left(\frac{a(u, v)}{\alpha(v)} + \beta(u) \right) \end{aligned}$$

Por outro lado, usando estas mesmas contas e a relação entre a, β e h presentes no Lema 4.10, temos que

$$\begin{aligned} g_v(v, u) &= R(v) \left[\frac{1}{2\alpha(v)} \frac{\partial}{\partial t} a(v + tu, v + tu) + \beta(u) \right] \Big|_{t=0} \\ &= R(v) \left[\frac{1}{2\alpha(v)} \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\lambda^2} (\lambda h(v + tu, v + tu) + h(v + tu, W)^2) \Big|_{t=0} - \frac{1}{\lambda} h(u, W) \right] \\ &= \frac{R(v)}{\alpha(v)} \left[\frac{1}{2\lambda^2} (2\lambda h(v, u) + 2h(v, W)h(u, W)) - \frac{\alpha(v)}{\lambda} h(u, W) \right] \\ &= \frac{R(v)}{\lambda\alpha(v)} \left[\left(h(v, u) + \frac{1}{\lambda} h(v, W)h(u, W) \right) - \alpha(v)h(u, W) \right] \\ &= \frac{R(v)}{\lambda\alpha(v)} h \left(v + \left(\frac{1}{\lambda} h(v, W) - \alpha(v) \right) W, u \right) = \frac{R(v)}{\lambda\alpha(v)} h(v - R(v)W, u) \end{aligned}$$

□

Agora retornaremos para o tratamento geral da estrutura Finsler para definir nosso principal objeto, as *Geodésicas*.

4.2. Distância e Geodésica. Nesta subseção definiremos, de modo Lagrangeano, nosso modo de *medir distâncias* e *geodésicas*, aliados a isso falaremos sobre **Vizinhanças Normais Convexas** no caso Finsler (caso Riemanniano no Teorema 1.33), com isso estaremos prontos para entender o Teorema 4.25 e sua demonstração. Antes de partirmos para o teorema do próximo capítulo, definiremos nossas noções de *ortogonalidade* e o Lema 4.24 conectará inicialmente *geodésicas* e *ortogonalidade*, a relação entre esses dois tópicos será mais explorada na Seção 6.

Definição 4.14. Dada uma variedade Finsleriana conexa (M, F) define-se uma estrutura de comprimento considerando o **funcional comprimento** que associa a cada curva suave por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ o número real

$$l_F(\gamma) = \int_a^b F(\gamma'(s)) ds$$

Já a **distância entre p e q** dois pontos quaisquer em (M, F) é definida por ²⁵

$$d(p, q) = d_F(p, q) = \inf_{\gamma \in \Omega_{p,q}} l_F(\gamma),$$

onde $\Omega_{p,q}$ é o conjunto das curvas C^1 por partes ligando p a q , vide Definição 1.3.

É importante notar que caso F não seja simétrica a distância definida d_F não será *reflexiva*, ou seja $d_F(p, q) \neq d_F(q, p), \forall p, q \in (M, F)$, como se esperaria de uma *função distância* usual em Espaços Métricos, porém chamaremos a distância Finsler de distância ainda assim como é comum na literatura. Isso nos dará dois tipos de bolas na nossa variedade, mas usualmente para os argumentos trabalharemos ao máximo em uma só direção, por exemplo no caso da Seção 6 em específico as folheações terem codimensão 1, no caso dadas por pré-imagens, nos dará uma direção preferencial a seguir, que será a direção do complemento ortogonal; mais particularmente seguiremos a direção do gradiente da função.

²⁵Usaremos $l(\cdot)$ para funcional comprimento de curva independente da geometria, quando não houver risco de confusão.

Definição 4.15. Para cada $p \in M$ e $r > 0$ temos dois tipos de bolas; a **bola futura** $B^+(p, r) = \{q \in M; d(p, q) < r\}$ a **bola passada** $B^-(p, r) = \{q \in M; d(q, p) < r\}$.

Com a perspectiva da métrica Finsler como um Lagrangeano especial podemos definir uma energia associada a ela e naturalmente definir nossas *Geodésicas*, como no caso Riemanniano, como soluções da *Equação de Euler-Lagrange* relativa ao Lagrangeano da energia (ou comprimento). Com isso segue a definição:

Definição 4.16. Uma curva é uma **Geodésica de Finsler** quando a curva é ponto crítico do funcional energia²⁶

$$E_F(\gamma) = \int_a^b F^2(\gamma'(s))ds$$

definido no espaço das curvas suaves por partes $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tais que $\gamma(a) = p$ e $\gamma(b) = q$.

Exemplo 4.17. A geodésica em um espaço de Minkowski (V, F) que parte de $p \in V$ com velocidade v é a reta $\gamma(t) = p + tv$.

Vale o comentário agora de que a aplicação exponencial faz sentido no contexto Finsler²⁷, mas será definida e estudada melhor na Subseção 5.2. Então, para cada $v \in T_p M$ existe uma única geodésica $\gamma_v : I_v \rightarrow M$ tal que $\gamma'_v(0) = v$, onde I_v é o intervalo máximo de definição de γ_v . Como no caso Riemanniano vale a pergunta se existe *Bola Normal* e mais precisamente se existe *Bola Normal Convexa*²⁸ e a resposta é afirmativa também, ou seja:

Fato 4.18. Dado $p \in M$ com $\gamma(0) = p$, existe $\epsilon > 0$ tal que $d(\gamma(0), \gamma_v(t)) = l_F(\gamma_v|_{(0,t)})$ para qualquer $t \in (0, \epsilon)$. E também para cada ponto $p \in M$ existe $U \subset M$ uma vizinhança de p tal que para qualquer $q \in U$ existe um único segmento de geodésica minimizante conectando p a q , chamaremos essa bola de **Bola** (ou vizinhança) **Normal Convexa** como no caso Riemanniano. Não demonstraremos este fato, mas vale o comentário de que esta também é uma propriedade mais geral vinda de *Sprays* e para o leitor interessado recomendo ler a Seção 5.1.4 de [14] para uma demonstração e mais detalhes. Este fato, porém, será utilizado futuramente durante a demonstração do Teorema 4.25, principal teorema deste texto.

Remark 4.19. Assim como a distância entre dois pontos não é reflexiva é valido notar que se γ é uma geodésica, então não necessariamente $s \mapsto \gamma(-s)$ é uma geodésica, fenômeno que não acontece no caso Riemanniano. Dada uma subvariedade P de (M, F) define-se as seguintes funções distâncias, ou seja funções que calculam a distância de um dado ponto à subvariedade ou da subvariedade ao ponto,

$$\rho_+(q) := d(P, q) := \inf_{p \in P} d(p, q) \text{ e } \rho_-(p) := d(p, P) := \inf_{q \in P} d(p, q)$$

Em geral ρ_+ e ρ_- são distintos e usualmente tentaremos fazer todas as contas com só uma das duas, usualmente ρ_+ , pois para os resultados Topológicos/Geométricos isso costuma ser suficiente e as análises em cada direção costumam ser análogas, vale salientar que completude pode ser um problema e em particular a completude para Finsler pode ser só para frente ou só para trás exemplos que explicitam essas distinções podem ser encontrados no livro [5].

Agora vamos estudar o conceito de ortogonalidade brevemente, ele será retomado na Subseção 5.2 e na Seção 6.

²⁶Um resultado clássico sobre primeira variação do funcional energia, pode ser visto no capítulo 9 de [7], é que pontos críticos da energia automaticamente são parametrizados por comprimento de arco, diferentemente de pontos críticos do comprimento.

²⁷Isso é natural, pois ela faz sentido no contexto mais geral de *Variedades com Sprays*.

²⁸Às vezes referida na literatura como *vizinhança totalmente normal*.

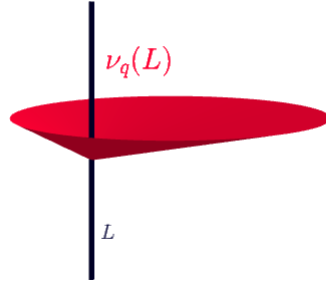


FIGURA 3. Imagem representando o *cone ortogonal* (Definição 4.21) $\nu_q(L)$ a subvariedade L de Finsler no ponto q .

Definição 4.20. Dada uma subvariedade L de M um vetor $v \in T_p M \setminus 0$ é **ortogonal** a L quando $p \in L$ e $g_v(v, w) = 0$ para qualquer $w \in T_p L$.²⁹

Definição 4.21. O espaço dos vetores ortogonais a L em p é denominado **cone ortogonal a L em p** e será denotado por $\nu_p(L)$, vide Figura 3. A união disjunta de todos os *cones ortogonais* a L denotado por $\nu(L) := \cup_{p \in L} \nu_p(L)$ será referido como **fibrado normal**. Para cada intervalo, possivelmente degenerado, J em $(0, \infty)$ defina

$$\nu_p^J(L) := \nu_p(L) \cap F^{-1}(J) \text{ e } \nu^J(L) := \cup_{p \in L} \nu_p^J(L)$$

Lema 4.22. Se L é uma k – subvariedade de uma variedade Finsleriana (M^n, F) , então $\nu_p(L), \nu_p^r(L), \nu(L)$ e $\nu^r(L)$ são subvariedades de dimensões $n - k, n - k - 1, n$ e $n - 1$ respectivamente³⁰, para qualquer $r > 0$. Além disso, $\rho|_{\nu^r(L)} : \nu^r(L) \rightarrow L$ e $\rho|_{\nu(L)} : \nu(L) \rightarrow L$ são submersões.

Demonstração. Considere $\mathcal{N}_p := \{\beta \in T_p M^*; \beta|_{T_p L} = 0\}$ que é espaço vetorial $(n - k)$ dimensional de $T_p M^*$.

Observe que $\nu_p(L) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{N}_p)$ e $\nu_p^r(L) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{N}_p \cap (F^*)^{-1}(r))$ para cada $p \in L$; $\nu(L) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{N})$ e $\nu^r(L) = \mathcal{L}^{-1}(\mathcal{N} \cap (F^*)^{-1}(r))$, $r > 0$. Logo, como \mathcal{N}_p é uma $(n - k)$ variedade e \mathcal{L} é um difeomorfismo segue que $\nu_p(L)$, $\nu_p^r(L)$, $\nu(L)$ e $\nu^r(L)$ são subvariedades de dimensões $n - k, n - k - 1, n$ e $n - 1$, respectivamente.

Agora, basta analisar as candidatas a submersão. O conjunto $\nu^r(L)$ pode ser escrito localmente como o produto $\nu_p^r(L) \times U$ para algum U aberto de L . Neste caso, $\rho(v, q) = q$ para qualquer $(v, q) \in \nu_p^r(L) \times U$ e portanto $\rho|_{\nu^r(L)}$ é uma submersão. Analogamente prova-se que $\rho|_{\nu(L)}$ também é uma submersão. □

Lema 4.23. Seja L subvariedade Finsleriana de (M, F) uma variedade Finsler, então para qualquer $v \in \nu_p(L)$ o espaço tangente a $\nu_p(L)$ em v coincide com o subespaço g_v – ortogonal a L em p , em símbolos

$$T_v \nu_p(L) = \{u \in T_p M : g_v(u, w) = 0; \forall w \in T_p L\}$$

Demonstração. Para verificar este resultado basta notar que os subespaços em questão possuem a mesma dimensão e que se α é uma curva suave em $\nu_p(L)$, então $g_\alpha(\alpha', w) = 0$, para qualquer $w \in T_p L$ fixado.

²⁹Do ponto de vista da *Transformada de Legendre* temos $T_p L \subset \text{Ker}(\mathcal{L}(v))$.

³⁰Pelas dimensões pode-se conferir que ν^r significa que o intervalo J da Definição 4.21 é o intervalo degenerado $J = \{r\}$

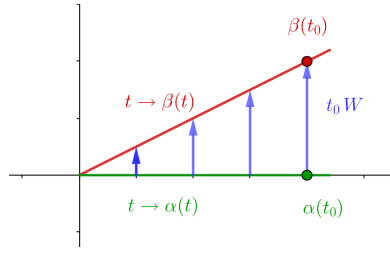


FIGURA 4. Imagem representando a geodésica de Minkowski $\beta(t)$ como composição do fluxo do vento W (dependente do tempo) com a geodésica Riemanniana $\alpha(t)$ segundo a fórmula do Teorema 4.25.

□

Lema 4.24. *Sejam (M, F) uma variedade Finsleriana e P uma subvariedade fechada em M . Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é uma geodésica tal que $L(\gamma) = d(P, \gamma(1))$, então $\gamma'(0) \in \nu(P)$.*

4.3. Um Teorema sobre Geodésicas via Deformação de Zermelo. Nesta parte será apresentada uma versão de uma demonstração do Teorema 1 de [8], neste texto Teorema 4.25. A demonstração aqui apresentada é uma complementação, escrita pelo autor do texto e cuja ideia foi sugerida pelo meu orientador Marcos M. Alexandrino, pois a demonstração do artigo tinha detalhes importantes omitidos, detalharei essa questão ao fim da demonstração.

Teorema 4.25. *Seja (M, F) uma variedade Finsler e W campo vetorial de Killing, ou seja cujo fluxo é isometria, tal que $F(-W(p)) < 1; \forall p \in M$. Seja φ_t fluxo de W e \tilde{F} a deformação de Zermelo de F por W . Então, para toda geodésica F -parametrizada por comprimento de arco $\gamma(t)$ de F , temos que $\tilde{\gamma} : t \mapsto \varphi_t(\gamma(t))$ é geodésica \tilde{F} -parametrizada por comprimento de arco de \tilde{F} .³¹*

Antes de entender a demonstração do Teorema 4.25 é útil entender *Geometricamente* o que o teorema afirma. Para isso chamo a atenção para as Figuras 5 e 4, a primeira é um modo simples de entender uma construção complicada da teoria de Randers; a segunda um exemplo básico para deixar clara a construção da demonstração. Além disso, há breves comentários no Exemplo 4.26 e no Lema 4.27 sobre a construção da Figura 5 que merece seu estudo a parte, mas que não será abordado aqui e para o leitor interessado há o artigo clássico de W. Ziller [20].

Exemplo 4.26. [Exemplo de Katok na Esfera] Seja (S^2, h) esfera Euclidiana unitária mergulhada em \mathbb{R}^3 e seja W campo vetorial descrito por:

$$W(x, y, z) = \varepsilon(-y, x, 0)$$

com $|\varepsilon| < 1$. A métrica de Randers R advinda da deformação de Zermelo com data (h, W) é a métrica de Katok.³²

Lema 4.27. *No exemplo anterior, se ε é irracional, então (S^2, R) possui somente duas geodésicas fechadas.*

Agora será feita a demonstração do Teorema 4.25 abaixo, vale ressaltar que ela é um maior detalhamento da demonstração em [8]. Além disso, esse teorema já possui versões mais gerais, para *Campos Homotéticos* ao invés de *Campos Killing*, mas isso não será abordado neste texto e pode ser encontrado em [11]. O leitor astuto perceberá que [11] prova um resultado mais geral e é mais antigo, mas o valor da demonstração alternativa em [8] é justamente que é livre de coordenadas, mais elementar e geométrica que a de [11].

³¹Esse teorema nos permite entender de modo prático como montar as geodésicas do exemplo de Katok vide Figura 5, um exemplo mais simples de como o teorema funciona é a Figura 4.

³²Uma representação desse exemplo para $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{5}}$ está na Figura 5.

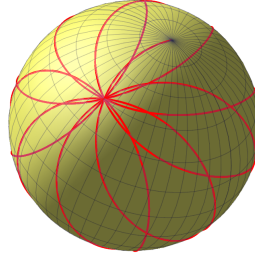


FIGURA 5. **Geodésica Randers** na esfera, obtida com data de Zermelo (h, W) onde h é a métrica Euclidiana induzida na esfera S^2 e W é uma rotação com velocidade angular irracional $\frac{1}{\sqrt{5}}$. Veja Exemplo 4.26 e Lema 4.27.

Ideia da Demonstração do Teorema 4.25: Ao longo desta demonstração chamaremos curvas da forma $t \rightarrow \varphi(t, \gamma(t))$ de *deformação de Zermelo* da curva $\gamma(t)$. Para demonstrar o teorema o primeiro passo é calcular o vetor tangente de uma curva F -parametrizada por comprimento de arco após a deformação de Zermelo. Seja $x(t)$ curva F -parametrizada por comprimento de arco, queremos derivar em t a curva $\varphi(t, x(t)) = \tilde{x}(t)$, então:

$$\tilde{x}'(t) = \left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \varphi(t+s, x(t+s))$$

$$\tilde{x}'(t) = \varphi'(t, x(t)) + \varphi_{t*}(x'(t))$$

$$(4.2) \quad \tilde{x}'(t) = W(\varphi(t, x(t))) + \varphi_{t*}(x'(t))$$

Como o fluxo φ preserva W , ou seja $W = \varphi_* W$ que ocorre pois φ é fluxo de W ,³³ e preserva F , pelo campo ser de Killing, ele preservará \tilde{F} pois para cada fibra de $TM \setminus 0$ vale a relação:

$$\begin{aligned} F(v) &= F(\varphi_*(v)) = \tilde{F}(\varphi_*(v) + F(\varphi_*(v))W) \\ &= \tilde{F}(\varphi_*(v) + F(\varphi_*(v))\varphi_*W) \\ &= \tilde{F}(\varphi_*((v) + F(\varphi_*(v))W)) \\ \tilde{F}(v + F(v)W) &= F(v) = \tilde{F}(\varphi_*((v) + F(v)W)) \end{aligned}$$

Na primeira linha usamos que se pela *deformação de Zermelo* $\tilde{F}(v) = F(v - \tilde{F}(v)W)$ então também é válido que $F(v) = \tilde{F}(v + F(v)W)$. Na segunda linha usamos que W é preservado por φ para trocar W por $\varphi_* W$.³⁴ Na terceira linha usamos que o *push-forward* é linear. Na quarta usamos novamente que $F(v) = F(\varphi_* v)$.

Agora calcularemos que a *deformação de Zermelo* leva uma curva F -parametrizada por comprimento de arco em uma curva \tilde{F} -parametrizada por comprimento de arco.

³³Basta notar pela conta: $d\varphi_{t_0}(W(p)) = d\varphi_{t_0}(\frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_t(p)) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_{t_0} \circ \varphi_t(p) = \frac{d}{dt}|_{t=0}\varphi_{t_0+t}(p) = W(\varphi_{t_0}(p))$.

³⁴Essas contas talvez aparentem estar nas fibras erradas, mas não há problema, pois com as fibras explícitas a conta é: $W(\varphi(p)) = \varphi_*(W(p))$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}(\tilde{x}'(t)) &= \tilde{F}(W(\varphi(t, x(t))) + \varphi_{t*}(x'(t))) \\
&= \tilde{F}(\varphi_{t*}(W(x(t))) + \varphi_{t*}(x'(t))) \\
&= \tilde{F}(\varphi_{t*}(W(x(t)) + x'(t))) \\
&= \tilde{F}(W(x(t)) + x'(t)) \\
&= F(x'(t)) = 1
\end{aligned}$$

Na primeira linha é usada somente a fórmula 4.2, calculada no início da demonstração. Na segunda e terceira usa-se novamente que W é preservado por φ e linearidade do *push-forward*, respectivamente. Depois é usado que o fluxo de W preserva \tilde{F} e então a definição da *deformação de Zermelo* junto com o fato que $F(x'(t)) = 1$ duas vezes.

Para toda curva F -parametrizada por comprimento de arco $x(t)$ mostramos que sua *deformação de Zermelo* $\tilde{x}(t)$ é \tilde{F} -parametrizada por comprimento de arco. Então,

$$(4.3) \quad \int_a^b F(x'(t))dt = \int_a^b \tilde{F}(\tilde{x}'(t))dt$$

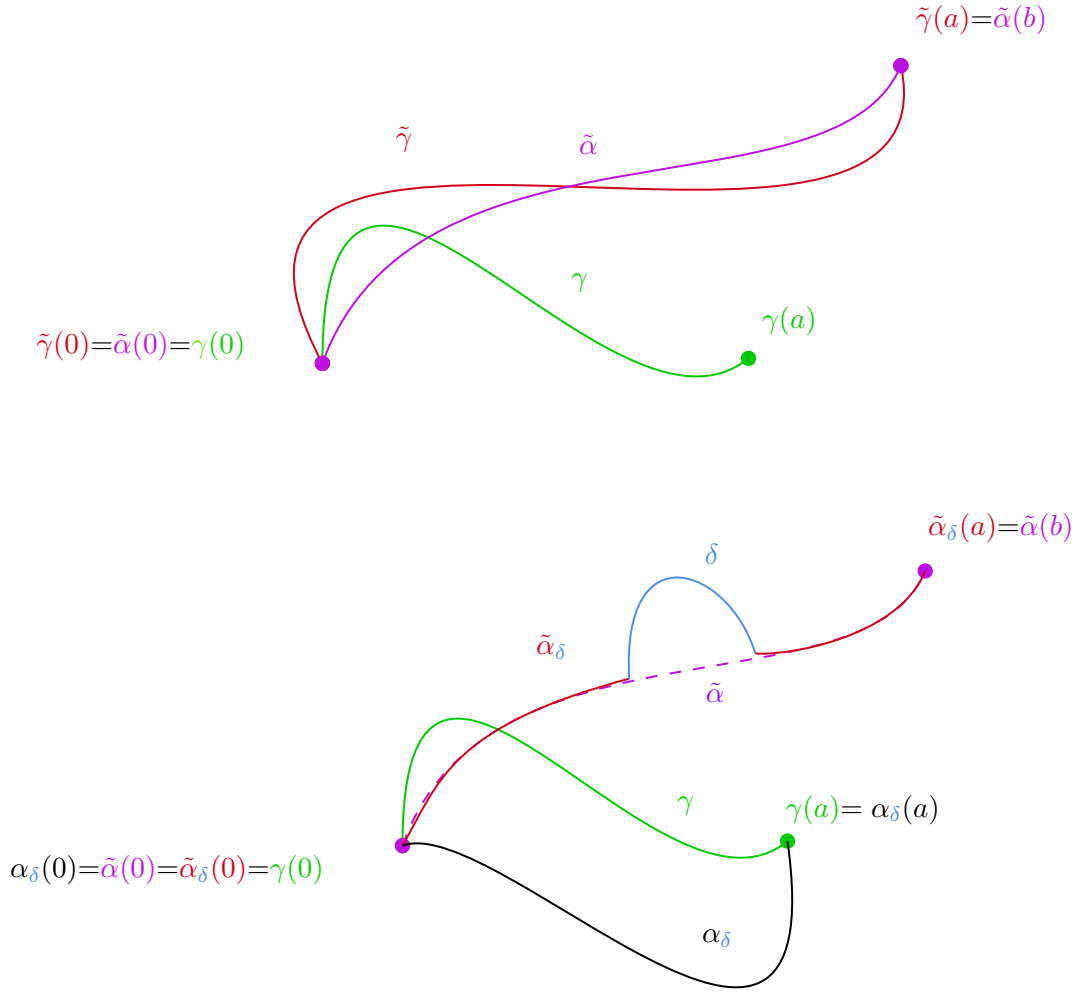
Para completar a demonstração do teorema construiremos a partir de agora um argumento por absurdo, nosso objetivo é criar em (M, F) duas curvas que minimizam localmente a distância entre os mesmos pontos dentro de uma vizinhança normal convexa e pré-compacta.³⁵ Para $p \in M$ genérico tome vizinhança de p suficientemente pequena U , nosso argumento se restringirá a essa vizinhança daqui em diante. Seja $\gamma : [0, a] \rightarrow U$, F -geodésica parametrizada por comprimento de arco (minimizante) com $\gamma(0) = p$, U é vizinhança normal convexa para F , que existe vide Fato 4.18.

Seja $\tilde{\gamma} : [0, a] \rightarrow \tilde{U}$ *deformação de Zermelo* da curva γ , ou seja $\tilde{\gamma} = \varphi(t, \gamma(t))$ e tendo escolhido U suficientemente pequeno podemos garantir que toda geodésica cai numa vizinhança normal convexa \tilde{U} em relação a \tilde{F} e pré-compacta. Suporemos por absurdo que $\tilde{\gamma}$ não é \tilde{F} -geodésica, mas sabemos pela parte anterior que será parametrizada por comprimento de arco. Seja $\tilde{\alpha} : [0, b] \rightarrow \tilde{U}$ \tilde{F} -geodésica parametrizada por comprimento de arco ligando $\tilde{\gamma}(0) = p$ a $\tilde{\gamma}(a) = \tilde{\alpha}(b)$. Note que, como $L_{\tilde{F}}(\tilde{\alpha}) < L_{\tilde{F}}(\tilde{\gamma})$, então $b < a$.

Criaremos então uma curva, através de $\tilde{\alpha}$ que liga p a $\tilde{\alpha}(b)$, mas tem comprimento $a = L_{\tilde{F}}(\tilde{\gamma})$. Para isso, criaremos uma curva analítica³⁶ por partes parametrizada por comprimento de arco usando a geodésica $\tilde{\alpha}$, pode-se enxergar o processo como um remendo de um pedaço de curva parametrizada por comprimento de arco suave por partes que completa o comprimento até o valor que desejamos. Vide o desenho abaixo:

³⁵O que resultará em um absurdo, pela unicidade da geodésica dentro de uma vizinhança normal convexa.

³⁶Apesar de os argumentos comumente serem feitos com curvas suaves para esta questão usar uma curva quebrada em partes nos permite fazer o caso mais abrangente de tratar de curvas analíticas sem problemas extras.



Suponha, por hora, que estamos com esta curva analítica por partes criada, $\tilde{\alpha}_\delta$, chegamos à contradição desejada, basta aplicar a *deformação de Zermelo* reversa, ou seja aplicar a *deformação de Zermelo* em (M, \tilde{F}) com campo $-W$, e com isso criar a curva por partes parametrizada por comprimento de arco deformada³⁷ na nossa geometria inicial F , curva essa que chamamos de α_δ . Assim criamos duas curvas diferentes de tamanho igual ligando os mesmos pontos dentro de uma vizinhança normal convexa U inicial. Absurdo!

Tendo a ideia central da demonstração, agora faremos a construção da curva $\tilde{\alpha}_\delta$ e então a demonstração estará completa.

Para a solução funcionar no caso analítico usaremos um argumento de analítico (suave) por partes. Para isso provaremos que conseguimos "quebrar" nossa curva para aumentar seu tamanho, vide o lema a seguir:

Lema 4.28. (*Quebrando a geodésica*) *Seja (N, F) variedade Finsler completa para frente³⁸, sejam $c_1, c_2, l \in \mathbb{R}$ com $\frac{l}{2} < c_1, c_2 < l$ e seja $\alpha : [0, l] \rightarrow M$ F -geodésica parametrizada por comprimento de arco minimizante ligando $p = \alpha(0)$ a $q = \alpha(l)$, então existe $x_{c_1 c_2} \in M$ tal que*

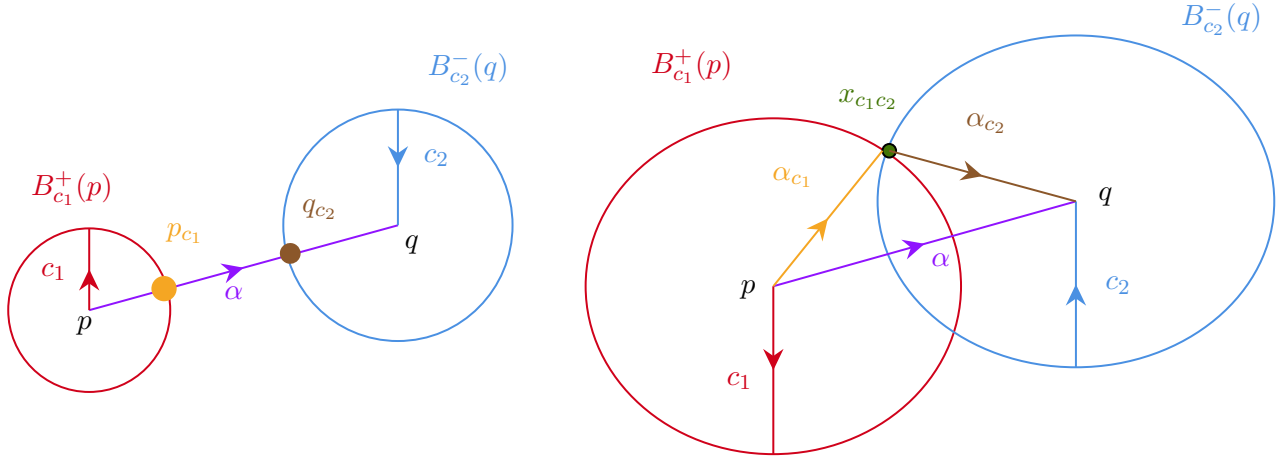
³⁷De modo explícito o processo aqui feito é: Se $\tilde{\alpha}_\delta(t)$ é a curva por partes criada na demonstração e Φ é o fluxo de $-W$, então a curva que gera o absurdo é $\Phi(t, \tilde{\alpha}_\delta(t)) = \alpha_\delta(t)$.

³⁸Esta condição pode ser fortalecida resolvendo o problema localmente, mas este enunciado é suficiente.

$d_F(p, x_{c_1 c_2}) = c_1$, $d_F(x_{c_1 c_2}, q) = c_2$ e existem geodésicas parametrizadas por comprimento de arco $\alpha_{c_1}, \alpha_{c_2}$ que realizam essas distâncias respectivamente.

Demonstração. Provar que existe algum ponto $x_{c_1 c_2}$ é equivalente a provar que o conjunto $B_{c_1}^+(p) \cap B_{c_2}^-(q)$ é não vazio.

Suponha, por absurdo, que esse conjunto seja vazio. Então, $l = d_F(p, q) > d_F(p, p_{c_1}) + d_F(q_{c_2}, q) = c_1 + c_2$, em que $p_{c_1} = \alpha([0, l]) \cap \partial B_{c_1}^+(p)$ e $q_{c_2} = \alpha([0, l]) \cap \partial B_{c_2}^-(q)$. Vide o desenho da esquerda abaixo:



Então, concluímos que $l > c_1 + c_2$, porém por hipótese $\frac{l}{2} < c_1, c_2$. Absurdo!

Então, provamos que $B_{c_1}^+(p) \cap B_{c_2}^-(q)$ é não vazio.³⁹ Então, a intersecção das bordas também não será, que é onde estão os candidatos a $x_{c_1 c_2}$, vide o desenho da direita acima.

As geodésicas que realizam a distância existem pois a variedade é completa para frente por hipótese. □

Voltando à demonstração do teorema. Com o lema anterior conseguimos quebrar nossa geodésica em uma curva por partes em que cada pedaço é uma geodésica parametrizada por comprimento de arco e com um comprimento $c_1 + c_2 = c$ tal que $l < c < 2l$ em que l é o comprimento da geodésica original. Como nossas geodésicas são curtas e a resolução é local, dado que queremos provar que nossa curva minimiza localmente a distância, então com a técnica de quebrar a curva faremos isso na geodésica $\tilde{\alpha}$ inteira, não somente em um pedaço no meio dela.

Então, conseguimos aumentar o comprimento da nossa geodésica de b para valores menores que $2b$, mas desejamos atingir a e não sabemos a priori a relação entre b e a . Então precisamos mostrar que conseguimos construir curvas também no caso $a \geq 2b$. Para isso, considero a seguinte função que calcula distâncias em relação a um ponto $x_{c_1 c_2}$ gerado pelo lema anterior:

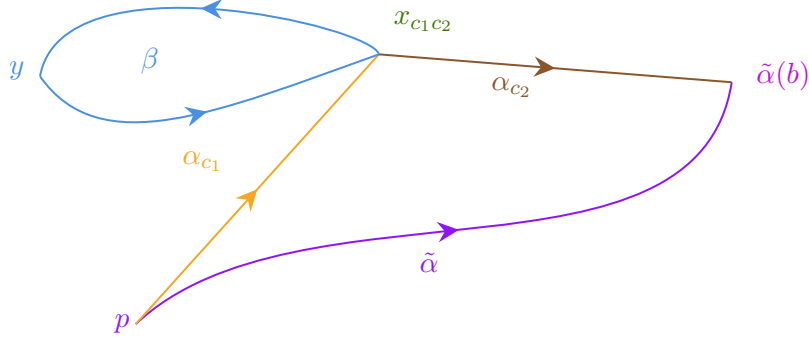
$$\begin{aligned} H : \tilde{U} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ y &\longmapsto d_{\tilde{F}}(x_{c_1 c_2}, y) + d_{\tilde{F}}(y, x_{c_1 c_2}) \end{aligned}$$

Note que, pela continuidade da função distância, temos que H é contínua. Além disso, como \tilde{U} é pré-compacto, a função H é limitada superiormente, então basta escolher um número natural n tal que $\frac{a-c}{n}$ seja menor que o supremo do desenho. Então, pela continuidade e existência de tal n garantimos a existência de $y \in \tilde{U}$ tal que $H(y) = \frac{a-c}{n}$.

Então, para completar o argumento, a curva que desejo criar é a concatenação do pedaço da quebra com, no ponto singular da parte quebrada, a concatenação n vezes das geodésicas parametrizadas por comprimento de arco que realizam as distâncias da função H até y . Ou seja, para o caso $a < 2b$: a nova curva é somente a curva quebrada que é $\alpha_{c_1[0, c_1]} * \alpha_{c_2[0, c_2]}$. No outro caso, a curva construída será $\tilde{\alpha}_\delta = \alpha_{c_1[0, c_1]} * (\beta_{[0, \frac{a-c}{n}]}^n * \alpha_{c_2[0, c_2]})$ em que $(\beta_{[0, \frac{a-c}{n}]}^n)^n$

³⁹Note que esse conjunto é aberto, logo como é não vazio é também infinito.

simboliza a concatenação n vezes da curva β com ela mesma e β é a curva por partes composta pela geodésica parametrizada por comprimento de arco que liga $x_{c_1c_2}$ a y concatenada com a geodésica parametrizada por comprimento de arco que liga y a $x_{c_1c_2}$. Vide desenho:



Essas geodésicas existem pois o aberto \tilde{U} sendo um pré-compacto dentro de uma vizinhança normal convexa pode ser visto como sub-variedade completa para frente de M .

Logo, a *deformação de Zermelo* de uma F -geodésica parametrizada por comprimento de arco é uma \tilde{F} -geodésica parametrizada por comprimento de arco. \square

• *Problema:* No artigo [8] a demonstração usa a Equação 4.3 para concluir diretamente que se $x(t)$ minimiza localmente a distância de F , ou seja é F -geodésica, então $\tilde{x}(t)$ também deveria minimizar localmente a de \tilde{F} e por tanto seria \tilde{F} -geodésica, porém o argumento não é tão simples assim.

Isso se dá pois o ponto final da curva não é fixo, dado que vista pontualmente um ponto $x(t_0)$ é transportado pelo fluxo φ por tempo t_0 . Isso implica que para duas curvas parametrizadas por comprimento de arco ligando os mesmos pontos, mas de comprimentos diferentes, teremos que as curvas depois da deformação terão seus comprimentos preservados (como demonstrado até a Equação 4.3) mas seus pontos finais deixarão de ser iguais, pois o tempo percorrido até chegar neles é diferente.⁴⁰ Essa solução foi pensada durante os encontro de discussão do meu primeiro projeto de Iniciação Científica financiado pela FAPESP (2019/22488-1) com meu orientador Marcos Alexandrino que sugeriu a ideia de alongar a geodésica com concatenação de curvas analíticas por partes.

5. MAIS FERRAMENTAS FINSLERIANAS

Agora nos aprofundaremos mais no Mundo Finsler estudando uma *Conexão* muito especial, chamada *Conexão de Chern* e definiremos *aplicação exponencial* e *L-Campos de Jacobi*. Nessa generalização de *Campos de Jacobi* o L é uma subvariedade e estudaremos soluções da *Equação de Jacobi* com pontos iniciais variando sobre L , naturalmente essa definição faz sentido no ambiente *Riemanniano*, mas para as aplicações que estudamos não era necessário. A Subseção 5.1 é fortemente baseada em [4] e a Subseção 5.2 é fortemente baseada em [4] e [3].

5.1. Conexão de Chern. Nesta subseção estudaremos uma *Conexão* importante para o mundo Finsler, a *Conexão de Chern*, ela tenta replicar a *Conexão de Levi-Civita* no caso Riemanniano, mas no caso Finsler não é possível obter conexão tão bem comportada. Como é possível ver em [5, 18, 14] existem outras conexões importantes em Finsler que são usadas variando com o problema, mas neste texto usaremos somente a *Conexão de Chern*. Veremos no teorema 5.12 que a definição de *Geodésicas* usando essa *Conexão* concorda com a nossa definição na subseção anterior (definição 4.16).

⁴⁰Isso também ajuda a notar a importância de as curvas serem parametrizadas por comprimento de arco, assim é possível compará-las em pé de igualdade só pelo intervalo de tempo em que são definidas.

Primeiramente definiremos o *Tensor de Cartan* que nos auxiliará a definir a *Conexão de Chern* e é uma derivada do *Tensor Fundamental* $g_{(\cdot)}$ da métrica Finsler.

Definição 5.1. Seja um tensor trilinear C_v dado por:

$$C_v(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+sw_1}(w_2, w_3) \Big|_{s=0} = \frac{1}{4} \frac{\partial^3}{\partial s_3 \partial s_2 \partial s_1} F^2 \left(v + \sum_{i=1}^3 s_i w_i \right) \Big|_{s_1, s_2, s_3=0}$$

para quaisquer $v, w_1, w_2, w_3 \in T_{\pi(v)}M$ com v não nulo. A família $C = \{C_v; v \in TM \setminus 0\}$ é denominada Tensor de Cartan.⁴¹

Lema 5.2. Para qualquer $v \in T_p M \setminus 0$, o tensor de Cartan possui as seguintes propriedades:

- (i) C_v é simétrico.
- (ii) C_v é positivo homogêneo de grau -1 , isto é, $C_{\lambda v} = \frac{1}{\lambda} C_v, \lambda > 0$.
- (iii) $C_v(v, u, w) = C_v(u, v, w) = C_v(u, w, v) = 0; u, w \in T_p M$.

Demonstração. (i) F é suave fora do zero, então vale Schwartz, logo C_v é simétrico.

(ii) Como temos que, para $\lambda > 0$, $g_{\lambda v} = g_v$, então basta reescrever $C_{\lambda v}(w_1, w_2, w_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{\lambda v+sw_1}(w_2, w_3) \Big|_{s=0}$ como $\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+(\frac{s}{\lambda})w_1}(w_2, w_3) \Big|_{s=0}$ e pela regra da cadeia obtemos o resultado desejado.

(iii) Note que $C_v(v, w_2, w_3) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{v+sv}(w_2, w_3) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_{(1+s)v}(w_2, w_3) \Big|_{s=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial s} g_v(w_2, w_3) \Big|_{s=0} = 0$. Na última passagem usamos novamente que $g_{\lambda v} = g_v$, para $\lambda > 0$. Para concluir o resto do lema basta usar a condição (i) de ser simétrico. \square

Vale notar que é imediato da definição do *Tensor de Cartan* que ele é zero se e somente se F é *Riemanniana*.

Definição 5.3. Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Dado V um campo suave em um aberto $U \subset M$ sem singularidades, considere uma conexão linear ∇^V no fibrado tangente TU . Dizemos que ∇^V é *livre de torção* quando $[X, Y] = \nabla_X^V Y - \nabla_Y^V X, X, Y \in \Gamma(TU)$. E se ∇^V cumpre com a equação

$$Xg_V(Y, Z) = g_V(\nabla_X^V Y, Z) + g_V(Y, \nabla_X^V Z) + 2C_V(\nabla_X^V V, Y, Z)$$

para quaisquer $X, Y, Z \in \Gamma(TU)$, dizemos que ∇^V é *quase compatível com a métrica*.

Proposição 5.4. Dado um campo de vetores V sem singularidades definido em um aberto $U \subset M$ existe uma única conexão afim livre de torção e quase g -compatível ∇^V . Tal conexão é determinada pela seguinte fórmula tipo Koszul.

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_X^V Y, Z) &= Xg_V(Y, Z) - Zg_V(X, Y) + Yg_V(Z, X) \\ &\quad + g_V([X, Y], Z) + g_V([Z, X], Y) - g_V([Y, Z], X) \\ &\quad + 2(-C_V(\nabla_X^V V, Y, Z) - C_V(\nabla_Y^V V, Z, X) + C_V(\nabla_Z^V V, X, Y)) \end{aligned}$$

Para a demonstração desse resultado no capítulo 2 de [5] a Conexão de Chern é vista como uma conexão linear no fibrado pullback π^*TM sobre $TM \setminus 0$, os detalhes fogem do escopo destas notas e são feitos na referência. Uma demonstração mais próxima da abordagem feita aqui pode ser encontrada na seção 4 de [12] em que são introduzidas as técnicas de Cálculo Tensorial Anisotrópico e o resultado é demonstrado.

⁴¹Vale o comentário que ao longo do texto muitos objetos que se comportam semelhantemente a tensores aparecerão, mas em geral eles serão famílias de tensores, como o dito *Tensor de Cartan*, isso é um fenômeno comum em Finsler e para isso existe uma teoria denominada Cálculo Anisotrópico que generaliza as noções de Cálculo Tensorial para esses novos contextos, infelizmente isso foge do escopo deste documento mas pode ser encontrando em [12] e [13].

Definição 5.5. A família de conexões dada pela proposição acima é chamada de **Conexão de Chern**.

Proposição 5.6. Verifica-se que $\nabla^{\lambda V} = \nabla^V$ para qualquer $\lambda > 0$ e que ∇_p^V depende apenas de $v = V(p)$ para qualquer $p \in U$.

Demonstração. Para provar que $\nabla^{\lambda V} = \nabla^V$ basta notar que ambos satisfazem a fórmula na proposição 5.4 então pela unicidade as conexões são iguais. A segunda afirmação segue de fato que ∇^V é uma conexão em TU , então seu valor de em um ponto depende só do valor da conexão naquele ponto que é um vetor $v \in TU$, como o campo V está fixo a escolha de um $v \in TU$ é equivalente a de um $\pi(v) = p \in U$. □

Definição 5.7. Um campo suave V definido em um aberto de M é **campo geodésico** quando $\nabla_V^V V = 0$.

Veremos em breve no teorema 5.12 que campos geodésicos em curvas integrais como *Geodésicas Finsler* pela definição 4.16, como esperado do nome.

Agora veremos que a *Conexão de Chern*, em situações específicas, se comporta como uma *Conexão de Levi-Civita* o que nos permite simplificar o entendimento de certos fenômenos e contas nos apoiando no caso Riemanniano.

Lema 5.8. Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Se V é um campo geodésico definido em um aberto U de M , então

$$\tilde{\nabla}_V = \nabla_V^V$$

onde ∇^V é a conexão de Chern e $\tilde{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita da métrica Riemanniana g_V .

Demonstração. Pelas formulas de Koszul Finsleriana (Proposição 5.4) e Riemanniana, pela propriedade (iii) do Lema 5.2 e pela hipótese de V ser campo geodésico, temos que

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_V^V Y, Z) &= Vg_V(Y, Z) - Zg_V(V, Y) + Yg_V(Z, V) \\ &\quad + g_V([V, Y], Z) + g_V([Z, V], Y) - g_V([Y, Z], V) = 2g_V(\tilde{\nabla}_V Y, Z) \end{aligned}$$

para quaisquer $Y, Z \in \Gamma(U)$. □

Definição 5.9. Dada uma curva suave $\gamma : [a, b] \rightarrow U$ para uma extensão V de γ' existe uma única aplicação $D_\gamma^V : \Gamma(\gamma^*TM) \rightarrow \Gamma(\gamma^*TM)$, $X \mapsto D_\gamma^V X$ tal que:

- (i) $D_\gamma^V(X + Y) = D_\gamma^V(X) + D_\gamma^V(Y)$, para quaisquer $X, Y \in \Gamma(\gamma^*TM)$.
- (ii) $D_\gamma^V(fX) = f'(t_0)X(t_0) + f(t_0)D_\gamma^V X$ para quaisquer $f \in C^\infty([a, b])$, $X \in \Gamma(\gamma^*TM)$.
- (iii) $D_\gamma^V X(t) = \nabla_{\gamma'(t)}^V X$ para qualquer $t \in [a, b]$ e $X \in \Gamma(TU)$.

A **derivada covariante de γ** é a aplicação $D_\gamma^{\gamma'} := D_\gamma^V : \Gamma(\gamma^*TM) \rightarrow \Gamma(\gamma^*TM)$, que está bem definida pois não depende da escolha da extensão V . Quando não houver o risco de confusão, será usada a notação: $X' := D_\gamma^{\gamma'} X$.

Dado um campo V sem singularidades, considere $\{E_i\}$ um referencial local g_V -ortonormal. A *derivada covariante* em coordenadas respeita:⁴²

⁴²Trocamos γ' por $\dot{\gamma}$ quando for conveniente notacionalmente, como é o caso a seguir.

$$(D_\gamma^V X)(t) = \sum_{k=1}^n \left(\dot{X}^k(t) + \sum_{i,j=1}^n X^i(t) \dot{\gamma}^j(t) \Gamma_{ij}^k(V(t)) \right) E_k$$

onde $\Gamma_{ij}^k(V) := g_V(\nabla_{E_i}^V E_j, E_k)$ são os símbolos de Christoffel que dependem suavemente de $V(t)$.⁴³

Lembrando que a definição de *Fibrado PullBack* está em 1.10.

Lema 5.10. *Seja $c : D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ uma aplicação suave em dois parâmetros. Defina as seguintes curvas: $t \mapsto \gamma_s(t) := c(t, s)$ e $s \mapsto \beta_t(s) := c(t, s)$. Então:*

$$\nabla_{\gamma'_{s_0}(t_0)} \beta'_t(s_0) = \nabla_{\beta'_{t_0}(s_0)} \gamma'_s(t_0)$$

onde V é um campo suave sem singularidades ao longo de $c(D)$.

Definição 5.11. Um campo X ao longo de uma curva regular $\gamma : [a, b] \rightarrow (M, F)$ é dito **paralelo** quando $D_\gamma^\gamma X = 0$. O **Transporte Paralelo** pode ser definido analogamente a 1.9.

Teorema 5.12. *Verifica-se que uma curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ suave é uma geodésica se, e somente se, seu campo velocidade é paralelo, isto é, $D_\gamma^\gamma \gamma' = 0$.*

Com isso agora mostraremos um lema simples, mas bem útil para provar resultados análogos a Riemannianos no Mundo Finsler. Em essência ele nos garante que ao andar ao longo de uma geodésica Finsleriana a geometria que enxergamos é Riemanniana, isso facilita muitas contas e argumentos.

Lema 5.13. *Se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica e X, Y são campos ao longo de γ , então*

$$\frac{d}{dt} g_{\gamma'}(X, Y) = g_{\gamma'}(D_\gamma^\gamma X, Y) + g_{\gamma'}(X, D_\gamma^\gamma Y)$$

isto é, a conexão de Chern é g -compatível na direção da geodésica.

Demonstração. Observando que $\frac{d}{dt} g_{\gamma'}(X, Y) = \gamma' g_{\gamma'}(X, Y)$, o resultado segue diretamente da quase g -compatibilidade da conexão de Chern e o teorema 5.12. □

Por fim, temos este lema, semelhante ao Lema 5.8, porém agora apesar de o campo não precisar ser geodésico, temos somente o cálculo feito no próprio campo.

Lema 5.14. *Seja (M, F) uma variedade Finsleriana. Se V é um campo suave definido em um aberto $U \subset M$ sem singularidades, então:*

$$\nabla_V^V V = \tilde{\nabla}_V V$$

onde $\tilde{\nabla}$ é conexão Levi-Civita da métrica $\tilde{g} = g_V$. Em particular, uma curva regular $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ é uma geodésica de F se, e somente se, for uma geodésica da métrica Riemanniana g_V , para qualquer V extensão local de γ' sem singularidades.

Demonstração. Usando fórmulas de Koszul Finsleriana e Riemanniana e pelo Lema 5.2 sobre as propriedades do tensor de Cartan segue que:

$$\begin{aligned} 2g_V(\nabla_V^V V, Z) &= Vg_V(V, Z) - Zg_V(V, V) + Vg_V(Z, V) \\ &\quad + g_V([V, V], Z) + g_V([Z, V], V) - g_V([V, Z], V) = 2g_V(\tilde{\nabla}_V V, Z) \end{aligned}$$

para qualquer $Z \in \Gamma(U)$, onde $\tilde{\nabla}$ é a conexão Levi-Civita de g_V . Isto termina a prova. □

⁴³Aqui pode-se notar novamente o fenômeno da dependência do sentido. Esses objetos são tensoriais no fibrado tangente e não na variedade.

5.2. Aplicação Exponencial e L-Campos de Jacobi. Nesta subseção terminaremos nossa introdução breve e seleta ao Mundo Finsler. Aqui novamente falaremos sobre objetos relacionados a *geodésicas*, veremos como definir a aplicação exponencial no mundo Finsler e algumas de suas particularidades. Assim como no caso *Riemanniano* com ela em mãos falaremos sobre *Campos de Jacobi*, desta vez faremos L-Campos de Jacobi, uma generalização que também existe no contexto Riemanniano, mas para as aplicações da Seção 1 não eram necessárias, essa generalização se dá em que L é uma subvariedade e então faremos a análise da equação de Jacobi com pontos iniciais sobre essa subvariedade. Esse estudo de *L-Campos de Jacobi* será especialmente importante na Seção 6.

Usando-se dos comentários e notações do Fato 4.18 podemos definir a *Aplicação Exponencial*.

Definição 5.15. Seja $p \in (M, F)$ e $U_p \subset T_p M$ vizinhança apropriada de 0_p define-se a **aplicação exponencial em p** $\exp_p : U_p \setminus 0 \rightarrow M$ com $\exp_p(v) = \gamma_v(1)$.

A *aplicação exponencial em p* é naturalmente suave em $U_p \setminus 0$, mas também é possível provar que se estende de modo C^1 para a origem e que $d(\exp_p)_0$ é a identidade, como no caso Riemanniano. Porém, uma diferença drástica é que se a exponencial for C^2 na origem então a *norma Finsler* é na verdade uma *norma Riemanniana*⁴⁴, ver por exemplo [2].

Definição 5.16. Considerando uma variação de γ por geodésicas, temos que o campo variacional J é solução da seguinte equação diferencial:

$$(5.1) \quad J''(t) + R_{\dot{\gamma}(t)}(J(t)) = 0$$

em que, para cada $p \in M$ e $v \in T_p M \setminus \{0\}$, define-se o operador $R_v : T_p M \rightarrow T_p M$, uma aplicação linear simétrica em relação a g_v , como $R_v(w) = R_v(w, v)v$ para cada $w \in T_p M$. Uma melhor definição para esse operador é como restrição de um tensor anisotrópico vide Seção 5 de [3], mas não abordaremos *cálculo tensorial anisotrópico* neste texto.⁴⁵ Dada uma geodésica γ , o operador $R_{\dot{\gamma}}$, definido para campos vetoriais ao longo de γ , e as soluções da Equação 5.1 são nomeadas respectivamente como **Operador de Jacobi de γ** , e **Campo de Jacobi de γ** .

Agora introduziremos a subvariedade L na figura. Para isso teremos que levar em conta a geometria de L dentro de M , quem medirá isso será o *Shape Operator* definido na Definição 5.18, esse foi um dos assuntos não abordados também na parte Riemanniana, mas a intuição e a conta são suficientes para as aplicações presentes neste texto. Para mais detalhes sobre a parte Riemanniana olhar Seção 5 de [1] e para a versão Finsler olhar Seção 4 de [4].

Definição 5.17. Seja uma subvariedade L , dizemos que uma **geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ é ortogonal a L** em $t_0 \in I$ se $\dot{\gamma}(t_0)$ é ortogonal a L .

Definição 5.18. Seja L uma subvariedade de uma variedade Finsler (M, F) e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma geodésica ortogonal a L em $p = \gamma(a)$. Diremos que um Campo de Jacobi é **L -Jacobi** se $J(a)$ é tangente a L , $\mathcal{S}_{\dot{\gamma}(a)}J(a) = \tan_{\dot{\gamma}(a)}J'(a)$, em que $\mathcal{S}_{\dot{\gamma}} : T_p L \rightarrow T_p L$ é o **Shape Operator** definido como $\mathcal{S}_{\dot{\gamma}}(u) = \tan_{\dot{\gamma}(a)} \nabla_u^{\dot{\gamma}(a)} \xi$ com ξ um campo vetorial ortogonal ao longo de L tal que $\xi_p = \dot{\gamma}(a)$ e $\tan_{\dot{\gamma}(a)}$, a projeção $g_{\dot{\gamma}(a)}$ -ortogonal em $T_p L$, sobrejetivamente.

Definição 5.19. Um dado tempo t_1 é dito **L -focal** e $\gamma(t_1)$ um **ponto focal** se existe um L -Campo de Jacobi J tal que $J(t_1) = 0$.

Definição 5.20. Vamos chamar um ponto $\gamma(r)$ de **ponto focal de L** se existir um L -Campo de Jacobi $J(t)$ ao longo de $\gamma(t)$, não identicamente nulo, tal que $J(r) = 0$.

⁴⁴Esses resultados não serão demonstrados aqui, mas uma boa referência para eles é [14] pois exponencial é um objeto que existe no contexto mais geral de Sprays.

⁴⁵Vale porém notar que como as contas são feitas para v fixo e em relação a g_v essas contas são Riemannianas.

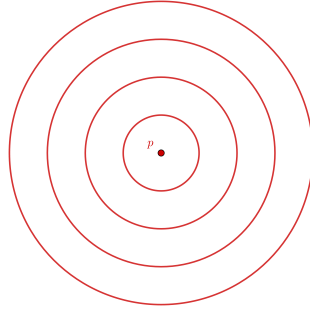


FIGURA 6. Imagem representando a folheação dada por uma função distância Riemanniana a um ponto, folheações por função distância são casos específicos de *transnormais*, como será explorado nesta seção.

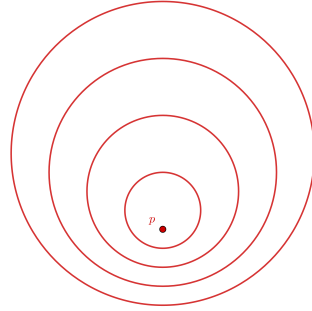


FIGURA 7. Imagem representando a folheação dada por uma função distância Randers a um ponto, essa pode ser vista como a *Deformação de Zermelo da Figura 6 com um vento na direção do deslocamento das ondas.*

6. FOLHEAÇÕES FINSLER TRANSNORMAIS

Nesta seção será feita uma breve introdução ao estudo de *Folheações Transnormais de Finsler*. A Subseção 6.1 apresentará algumas definições iniciais e motivações para esse estudo, incluindo aplicações no estudo de frentes de onda; vide [6]; e queimadas vide [16]. A Subseção 6.2 introduzirá algumas definições usuais de teoria geral de Folheações com suas particularidades do caso Finsler, aqui ficará claro que as *geodésicas* também são muito presentes neste estudo nas Definições 6.3 e 6.11. A Subseção 6.3 começa estudando a influência da *Deformação de Zermelo* (4.8) no gradiente para convergir na Proposição 6.14 que caracteriza *Partições Finsler Transnormais* no caso *Randers*, depois são tratados alguns resultados sobre *Partições Finsler Transnormais* em geral, terminando com o enunciado do Teorema 6.24 que é o resultado principal de [2] artigo no qual toda esta seção foi fortemente baseada.

6.1. Motivações: Frentes de Onda e Funções Transnormais. Frentes de ondas podem ser modeladas por *Folheações Transnormais* usando as propriedades de paralelismo que esses objetos tem. No caso Riemanniano há usualmente uma simetria na folheação, uma propagação isotrópica, vide Figura 6. Já no caso Finsler há uma propagação anisotrópica que gerará fenômenos interessantes a serem estudados nesta seção, vide Figura 7. O estudo dessas ondas é especialmente importante para o entendimento do comportamento de queimadas florestais, nesse contexto a ação do vento altera a propagação do fogo, mudando sua geometria como a *Deformação de Zermelo*, tornando a *Geometria de Finsler* útil para estudar esse fenômeno, vide [16].

Definiremos agora *Funções Transnormais* em relação a F , para isso usaremos o *gradiente Finsler* de uma função que usualmente é definido como o campo que age de modo igual à diferencial da função, ou como a pré-imagem da diferencial da função pela *Transformada de Legendre* da

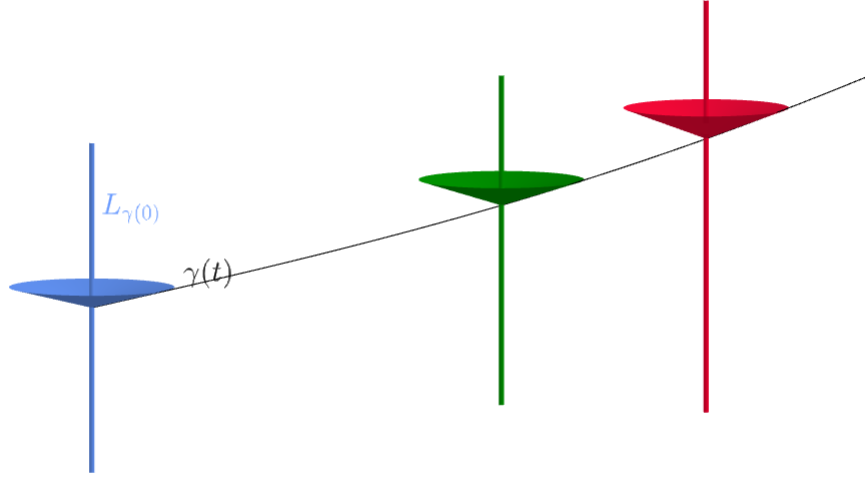


FIGURA 8. Imagem representando uma geodésica cortando folhas de uma folheação e tendo em cada folha seu vetor tangente pertencente ao cone normal da folha, vide Definição 6.3 e vide Definição 6.11

Energia. As Folheações Transnormais, dadas por pré-imagens de *funções transnormais*, admitem propriedades de paralelismo, num sentido métrico vide Definição 6.3, Teorema 6.24 e Proposição 6.14.

Definição 6.1. Seja (M, F) variedade Finsler e uma função suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ podemos definir ∇f (o **gradiente com respeito a F**) como $\nabla f = \mathcal{L}^{-1}df$, isso é, $df(\cdot) = g_{\nabla f}(\nabla f, \cdot)$.

Definição 6.2. Um funcional suave $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ numa variedade Finsleriana (M, F) é dito **função F -transnormal** se existir uma função contínua $\mathfrak{b} : f(M) \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $F(\nabla f)^2 = \mathfrak{b}(f)$.

6.2. Partições de Finsler e Vizinhanças Tubulares. Nesta subseção definiremos o básico da *Teoria de Folheações Singulares* que usaremos, também definiremos *vizinhanças tubulares* (Definição 6.7) que assim como as *bolas* na Subseção 4.2 existirão duas, uma futura e uma passada. Com isso conseguiremos discutir em mais detalhes questões de paralelismo das folhas que é uma propriedade importante de Folheações Transnormais, paralelismo esse que também admitirá uma diferenciação entre paralelo para frente (ou futuro) e para trás (ou passado), vide Definição 6.11.

Definição 6.3. Seja (M, F) uma variedade Finsler. A partição $\mathcal{F} = \{L\}$ de M em subvariedades suaves conexas e imersas (as folhas) é chamada uma **Partição Finsler** se cada geodésica $\gamma : (a, b) \rightarrow M$, com $0 \in (a, b) \in \mathbb{R}$ que é ortogonal à folha $L_{\gamma(0)}$ é horizontal, isso é, é ortogonal a cada folha que encontra. Vide Figura 8

Definição 6.4. Uma partição é dita **Folheação Singular** se para cada $v \in T_p L_p$ existe um campo vetorial suave X tangente as folhas tal que $X(p) = v$.⁴⁶

Exemplo 6.5. Aqui apresentarei um compendio de exemplos (e de não exemplos) para o leitor manter em mente:

- Primeiro exemplo de Folheação Singular é a dada pela distância a um ponto dado, como na Figura 6 que pode representar uma *distância Euclidiana* para a origem do \mathbb{R}^2 e na Figura 7 que pode representar a distância para a origem em \mathbb{R}^2 com *norma Randers-Minkowski*. Vale notar que o conceito de *Função Transnormal* é justamente uma generalização de funções distância. Nestes casos a folha singular tem dimensão zero e é a própria origem.

⁴⁶O nome *Folheação Singular* vem do fato que a dimensão da folhas pode mudar, ao contrário do caso usualmente conhecido como *Folheação Regular* cuja dimensão das folhas é constante.

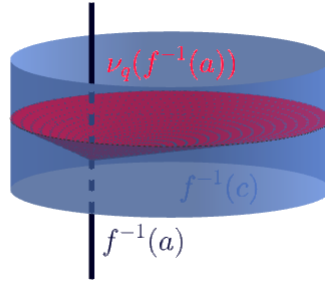


FIGURA 9. Imagem representando o cilindro em torno de uma placa e o cone normal à placa. Essa imagem também será vista em breve aos olhos de uma Folheação Finsleriana Singular.

- Outro exemplo usual de Folheação Singular é dado pelas pré-imagens da função $f(v) = \|v\|^2$ de \mathbb{R}^3 para \mathbb{R} , as folhas regulares são esferas concêntricas (homeomorfas a S^2) e a singular é a origem, no caso Euclidiano. Note que esse exemplo generaliza o anterior e não só vale para qualquer dimensão como aqui terá comportamento semelhante ao da Figura 7 no caso *Randers-Minkowski*.
- Um caso que não é exemplo de *partição por subvariedades suaves* é a função $f(x, y) = xy$ com domínio \mathbb{R}^2 . Suas folhas regulares são hipérboles no plano, mas a folha singular é a união dos eixos x e y que não é uma variedade suave.⁴⁷ Neste caso não temos subvariedade mas temos uma *estratificação*, isso advém de um teorema clássico de Geometria Algébrica Real, mas foge do escopo deste texto.⁴⁸ Vale notar que essa função também não é *Transnormal*.
- Um caso que não é exemplo de folheação, mas as folhas são subvariedades suaves (então a condição sobre existência de campos é a que falha) é a partição do \mathbb{R}^2 dada pelos conjuntos de semi-retas da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}$ e da forma $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y < 0\}$ e da reta $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = 0\}$.
- Um exemplo também interessante é a Folheação Riemanniana Singular dada pela função altura em S^2 , ela é dada pela pré-imagem de função transnormal. Para o leitor que entende da teoria, vale o comentário que essa função também é *Morse-Bott*, mais comentários sobre a relação entre essas teorias podem ser encontrados na seção 6 de [2].

Definição 6.6. Seja P_q uma **Placa** de um folha L , ou seja, uma vizinhança pré-compacta e conexa de q em L . Denote $\nu_q P_q$ como o conjunto de todos os vetores ortogonais não-nulos a P_q em q e o chamaremos de **cone ortogonal em q** .

Definição 6.7. Uma **vizinhança tubular futura** (de raio ϵ) de uma placa P_q é uma vizinhança pré-compacta U^+ de P_q tal que a *aplicação exponencial*, \exp , manda $\nu(P_q) \cap F^{-1}((0, \epsilon))$ difeomorficamente em $U^+ \setminus P_q$, ou seja, cada geodésica ortogonal parametrizada por comprimento de arco vinda da placa minimiza a distância da placa até vizinhança, pelo menos no intervalo $[0, \epsilon]$.

Se restringirmos a exponencial para o ϵ -ortogonal fibrado de cone $\nu^\epsilon(P_q) := \nu(P_q) \cap F^{-1}(\epsilon)$, então a exponencial manda $\nu^\epsilon(P_q)$ para o dito **cilindro futuro** $C_\epsilon^+(P_q)$. Outra perspectiva é, definindo $f_+ : U^+ \rightarrow [0, +\infty)$ como a distância (futura) $f_+(x) := d(P_q, x)$, teremos $C_\epsilon^+(P_q) = f_+^{-1}(\epsilon)$. Semelhantemente, pode-se definir a **vizinhança tubular passada** (ou reversa) U^- , e o **cilindro passado** $C_\epsilon^-(P_q)$ considerando a métrica reversa $F^-(v) := F(-v)$; vide Figura 9.

Definição 6.8. Considere um subconjunto compacto K de M . Então a **vizinhança tubular futura de raio r** (resp. vizinhança tubular passada) de K é definida como o conjunto dos pontos $x \in M$ tal que $d(K, x) < r$ (resp. $d(x, K) < r$). Um **cilindro futuro** (resp. cilindro passado)

⁴⁷Apesar de não ser variedade suave é uma variedade algébrica, pois é pré-imagem de função polinomial.

⁴⁸Para o leitor interessado na demonstração do Teorema 6.24 (ela pode ser vista em [2]) esse comentário é relevante e esse exemplo mostra parte da importância do teorema em si.

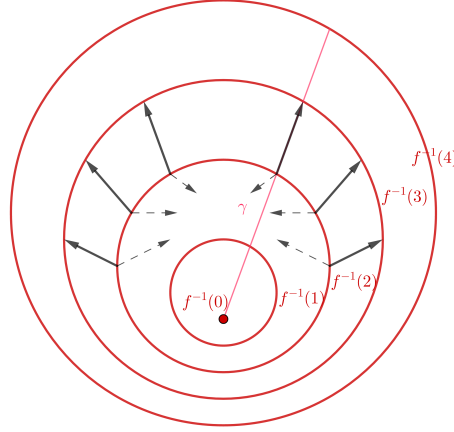


FIGURA 10. Imagem representando a *folheação de função distância de Randers* e há uma reta que representa a geodésica ortogonal para frente, passando pelo cone normal de cada folha, veja 6.11 e o comentário em seguida.

neste caso general é o conjunto de $x \in M$ tal que $d(K, x) = r$ (resp. $d(x, K) = r$). Cilindros futuro e passado serão também denotados por $\mathcal{C}_r^+(K)$ e $\mathcal{C}_r^-(K)$, respectivamente.

Definição 6.9. Uma partição \mathcal{F} é chamada **localmente equidistante para frente** (resp. para trás) se dada uma *placa* P_q , uma *vizinhança tubular futura* U^+ (resp. uma vizinhança tubular passada U^-) de P_q e um ponto $x \in U^+$ (resp. $x \in U^-$) que pertence ao cilindro futuro $\mathcal{C}_{\epsilon_1}^+(P_q)$ (resp. cilindro passado $\mathcal{C}_{\epsilon_2}^-(P_q)$), então a *placa* $P_x \subset U^+$ (resp. $P_x \subset U^-$) está contida em $\mathcal{C}_{\epsilon_1}^+(P_q)$ (resp. $\mathcal{C}_{\epsilon_2}^-(P_q)$).

Agora com essas *estruturas tubulares* definidas temos o Lema 6.10 que era esperado, o conceito de *paralelismo Finsler* requer o *paralelismo futuro e passado*.

Lema 6.10. Uma partição \mathcal{F} é Finsler se e somente se suas folhas são localmente equidistantes para frente e para trás.

Definição 6.11. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional suave, $f^{-1}(c_1)$ e $f^{-1}(c_2)$ dois conjuntos de nível regular, com $c_1 < c_2$. Diz-se que $f^{-1}(c_1)$ é **paralelo futuro (ou paralelo para frente)** a $f^{-1}(c_2)$ se para cada geodésica parametrizada por comprimento de arco $\beta : [0, r] \rightarrow M$ que começa ortogonal a $f^{-1}(c_1)$ e corta $f^{-1}(c_2)$ (pela primeira vez no tempo $t = r$) é ortogonal a $f^{-1}(c_2)$ em $\beta(r)$. Vide Figura 10.

Na Figura 10 há curvas que seguem o cone normal se aproximando da origem que não continuarão ortogonais, mostrando válida a distinção de paralelismo para frente e para trás, fenômeno que não é perceptível na *Geometria Riemanniana*.

6.3. Folheações de Randers e Consequências da Transnormalidade. Nesta subseção analisaremos como o gradiente e a ortogonalidade são afetadas pela *Deformação de Zermelo* para convergirmos na Proposição 6.14. Após isso, apresenta-se o equivalente Finsler de algumas propriedades clássicas de *Folheações Transnormais Riemannianas*, vide Proposição 6.20 e o Corolário 6.23. A demonstração dos resultados desta subseção fogem do escopo do texto mas constarão no relatório final da FAPESP projeto 2021/00551-3 e estão presentes em [2]. Por fim, termina-se com a menção do Teorema 6.24, principal teorema do artigo [2] e do meu segundo projeto de Iniciação Científica FAPESP (2021/00551-3), cuja demonstração completa foge do escopo deste texto. Vale lembrar que esta subseção é toda fortemente baseada em [2].

O Lema 6.12 será útil não só para contas posteriores, mas ele dá uma noção geométrica da relação entre vetores normais numa *métrica Finsler* e na sua *Deformação de Zermelo*.

Lema 6.12. *Seja Z uma métrica de Zermelo com data (F, W) . Então para $v \neq 0$*

$$g_v^Z(v, u) = k(v)g_{v-Z(v)W}^F(v - Z(v)W, u)$$

em que $k(v) > 0$, g^Z e g^F são os tensores fundamentais com respeito a Z e F , respectivamente.

Lema 6.13. *Seja $f : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave sem pontos críticos em U . Seja Z uma métrica de Zermelo com data (F, W) e ∇f , $\tilde{\nabla} f$ são os gradientes de f com respeito às métricas Z e F , respectivamente. Então:*

- (a) $\frac{F(\tilde{\nabla} f)}{Z(\nabla f)}(\nabla f - Z(\nabla f)W) = \tilde{\nabla} f$
- (b) $Z(\nabla f) = F(\tilde{\nabla} f) + df(W)$

Proposição 6.14. *Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave Z -transnormal em um espaço Randers (M, Z) com data de Zermelo (h, W) . Então os conjuntos de nível regulares são folhas de uma partição de Finsler, se e somente se W é um campo vetorial \mathcal{F} -folheado, para $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}_{c \in \mathbb{R}}$.*

Agora veremos exemplos inspirados pela Proposição 6.14 que discutem algumas das sutilezas que uma folheação transnormal Randers pode ter.

Exemplo 6.15. Seja (V, Z) um espaço de Randers Minkowski com data de Zermelo (h, W) e defina $f(x) := d(0, x)$. De ([18], Lema 3.2.3) sabe-se que $\mathbf{b} = 1$, isso é, $f : V \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função suave Z -transnormal. Resultados a seguir nos garantirão que a partição $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}_{c > 0}$ é paralela para frente. A proposição 6.14 acima implica porém que tal partição não é de Finsler. Isso também segue pelo Lema 6.10 pois as esferas futuras com centro em 0 (isso é, translações das h -esferas na direção de W) não são as mesmas que as esferas passadas com o centro em 0 (isso é, translações das h -esferas na direção oposta a W). Esse fenômeno difere do caso Riemanniano em que transnormalidade já nos garante equidistância entre os conjuntos de nível.

Exemplo 6.16. Considere $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ em que D é um disco de raio menor que 1 e $f(x, y) = x^2 + y^2$. Seja Z métrica Randers com data de Zermelo (h_0, W) em que h_0 é a norma Euclideana do \mathbb{R}^2 e $W = (x, y)$. Pelo Lema 6.13 concluímos que $\mathbf{b}(t) = (2\sqrt{t} + 2t)^2$.

Agora adotaremos a direção de ∇f como nossa “direção preferencial” e obteremos alguns resultados fazendo contas nessa direção, lembrando que dada um direção fixa contas Finslerianas passam a se assemelhar com as contas Riemannianas o que nos permitirá obter usar resultados clássicos de *Folheações Riemannianas Singulares*.

Lema 6.17. *Seja (M, F) um espaço Finsler, U um subconjunto aberto de M e f uma função suave em U sem pontos críticos em U . Defina $\hat{g} := g_{\nabla f}$ e $\hat{F} := \sqrt{\hat{g}}$. Então:*

$$\nabla f = \hat{\nabla} f$$

em que $\hat{\nabla} f$ denota o gradiente de f com respeito a \hat{F} . Além disso,

$$F(\nabla f) = \hat{F}(\hat{\nabla} f)$$

Lema 6.18. ([18], Lema 3.2.2), *O gradiente ∇f de uma função f em um espaço Finsler (M, F) é ortogonal a cada conjunto de nível regular de f .*

O Lema 6.19 é somente escrever o Lema 5.14 em outra notação, foi repetido aqui para facilitar para o leitor, e ele é demonstrado na sua primeira aparição.

Lema 6.19. *Seja X um campo vetorial suave sem singularidades no conjunto aberto U . Sejam ∇^X a conexão de Chern, $\hat{g} := g_X$ uma métrica Riemanniana em U e $\hat{\nabla}$ a conexão de Levi-Civita associada à métrica Riemanniana \hat{g} . Então $\nabla_X^X X = \hat{\nabla}_X X$. Em particular, X é um campo vetorial em U tal que suas curvas integrais são geodésicas com respeito a F se e somente se X tem a mesma propriedade com respeito a $\hat{F} := \sqrt{\hat{g}}$.*

Proposição 6.20. *Seja (M, F) um espaço Finsler e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função F -transnormal. Então:*

- (a) As curvas integrais do campo vetorial ∇f quando parametrizadas por comprimento de arco são geodésicas horizontais.
- (b) Além disso, se (M, F) é variedade Finsler completa para frente⁴⁹ e $c < d$ são valores regulares de $f(M)$ tal que $[c, d]$ não possui valores singulares, então

$$d(f^{-1}(c), q) = l(\beta) = d(f^{-1}(c), f^{-1}(d)) = r = \int_c^d \frac{ds}{\sqrt{\mathbf{b}(s)}}$$

em que $\beta : [0, r] \rightarrow M$ é a curva integral de ∇f parametrizada por comprimento de arco ligando $f^{-1}(c)$ a $q \in f^{-1}(d)$ e $l(\beta)$ é o comprimento de β .

Definição 6.21. A proposição anterior garante que dada uma função transnormal $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, cada curva integral do campo vetorial ∇f , quando parametrizada por comprimento de arco é uma geodésica. Definiremos esse seguimento de geodésica pelo nome ***f*-segmento**.

Definição 6.22. Seja (M, F) uma variedade Finsler completa e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função suave. Para o conjunto de nível regular $f^{-1}(c)$, considere o campo vetorial normal unitário ξ ao longo de $f^{-1}(c)$. Define-se o **end-point map** $\eta_{t\xi} : f^{-1}(c) \rightarrow M$ como $\eta_{t\xi}(x) = \gamma_{\xi(x)}(t)$.

Corolário 6.23. Seja $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica em uma variedade analítica compacta M . Assuma que a função é transnormal em uma vizinhança de um conjunto de nível regular $f^{-1}(c)$. Seja $\eta_{t\xi} : f^{-1}(c) \rightarrow M$ o end-point map, em que $\xi = \frac{\nabla f}{F(\nabla f)}$. Então:

- (a) para cada t existe $d \in f(M)$ tal que $\eta_{t\xi} : f^{-1}(c) \rightarrow f^{-1}(d)$;
- (b) a geodésica $t \rightarrow \gamma_{\xi(x)}(t) = \eta_{t\xi}(x)$ é ortogonal a cada conjunto de nível regular de f que ela encontra.

Dentre outros motivos o Teorema 6.24 é interessante pois não há motivo para os conjuntos de níveis críticos serem subvariedades e o ambiente compacto nos permite garantir o paralelismo nas duas direções, ou seja o *paralelismo Finsler*, não somente para frente como seria esperado.

Teorema 6.24. Seja (M, F) uma variedade Finsler conexa, compacta e analítica e $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função analítica F -transnormal com $f(M) = [a, b]$. Suponha que os conjuntos de nível são conexos e a e b são os únicos valores singulares em $[a, b]$. Então:

- (a) os conjuntos de níveis críticos $f^{-1}(a)$ e $f^{-1}(b)$ são subvariedades.
- (b) Os conjuntos de nível são equidistantes uns aos outros, isso é, $\mathcal{F} = \{f^{-1}(c)\}_{c \in [a, b]}$ é uma partição de Finsler. Em particular, para cada valor regular c , $f^{-1}(c)$ é um cilindro passado e futuro de cada conjunto de nível singular.

REFERÊNCIAS

- [1] Alexandrino, Marcos M. *Introdução a Geometria Riemanniana*, Notas de Aula (2019) <https://www.ime.usp.br/malex/teachingnew.htm>
- [2] Alexandrino, M. M.; Alves, B. O.; Dehkordi, H. R. *On Finsler transnormal functions* Differential Geometry and its Applications v 65 (2019) 93–107.
- [3] Alexandrino, M. M.; Alves, B. O.; Javaloyes, M. A. *On Equifocal Finsler Submanifolds and Analytic Maps*, <https://arxiv.org/pdf/2102.01257.pdf>
- [4] Alves, Benigno O. *Sobre Folheações Finslerianas Singulares* Tese de Doutorado IME-USP 2017 (orientador Prof. M. Alexandrino) <https://teses.usp.br/teses/disponiveis/45/45131/tde-14122017-130959/pt-br.php>
- [5] Bao, D.; Chern, S.-S., Shen, Z.; *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*, GTM; Springer (1991)
- [6] Dehkordi, H.R.; Alberto, S. *Huygens? envelope principle in Finsler spaces and analogue gravity*. Classical and Quantum Gravity 36.8 (2019): 085008.
- [7] do Carmo, Manfredo P. *Geometria Riemanniana*, IMPA (2015).
- [8] Foulon, Patrick; Matveev, Vladimir. S.; *Zermelo Deformation of Finsler Metrics by Killing Vector Fields*, Electronic Research Announcements, **25** (2018), 1-7.
- [9] Gonçalves, Guilherme Casas; *Rudimento de Mecânica, Ações Hamiltonianas e Aplicação Momento* Dissertação de Mestrado IME-USP 2015 (orientador Prof. M. Alexandrino)

⁴⁹A definição de variedade completa para frente é semelhante a de Espaço Métrico completo, porém a ordem dos pontos da sequência calculado pela *distância* é sempre $d(x_i, x_j)$, para $i < j$, visto que no caso Finsler a *distância* não é simétrica.

- [10] Holm, D.D.; Schmah, T.; Stoica, C.; *Geometric Mechanics and Symmetry: From Finite to Infinite Dimensions* Oxford University Press; 1 edition (October 11, 2009)
- [11] Huang, L.; Mo, X. *On geodesics of Finsler metrics via Navegation Problem*, Proceeding of the American Mathematical Society, vol 139, n 8 (2011) 3015–3024.
- [12] Javaloyes, M. A. *Anisotropic tensor calculus*, Int. J. Geom. Methods Mod. Phys., 16(2): 1941001, 26, (2019).
- [13] Javaloyes, M. A. *Curvature computations in Finsler geometry using a distinguished class of anisotropic connections*, Mediterr. J. Math., 17, pp. Art. 123, 21, (2020).
- [14] Kertész, Dávid Cs; Lovas, Rezső L.; Szilasi, József, *Connections, Sprays and Finsler Structures*, World Scientifi, (2014)
- [15] Kobayashi, S.; Nomizu, K. *Foundations of Differential Geometry*, Vol. 1, Wiley-Interscience; 1^a edição (22 fevereiro 1996)
- [16] Markvorsen, S. *A Finsler geodesic spray paradigm for wildfire spread modelling*, Nonlinear Anal., Real World Appl. 28 (2016) 208–228.
- [17] Morita , Shigeyuki *Geometry of Differential Forms*, American Mathematical Society; Translations of mathematical monographs, Iwanami series in modern mathematics; Vol. 201 (2001)
- [18] Shen, Z. *Lectures on Finsler Geometry*, World Scientific, (23 maio 2001)
- [19] Spivak, M. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*, Vol. 1 Publish or Perish; 3rd edition (January 1, 1999)
- [20] Ziller., Wolfgang *Geometry of the Katok examples*, Ergodic Theory and Dynamical Systems, 3(01): 135-157, (1983) . iii, v, 1, 99