Trabalho Prático – Determinantes e a Complexidade de Seus Algoritmos

João G. Chagas de Freitas

Instituto de Computação – Universidade Federal do Amazonas (UFAM)

Av. Rodrigo Otávio, nº 6.300, Campus Universitário Senador Arthur Virgílio Filho.
SETOR NORTE do Campus Universitário Manaus – AM – CEP 69.077-000

joaoguicf@icomp.ufam.edu.br

Resumo. *Este trabalho tem por objetivo mostrar as otimizações dos códigos dos determinantes de matrizes com números randômicos e seus respectivos tempos de execução, a fim de aperfeiçoar o desempenho do código original disponibilizado pelo Professor Moisés Gomes de Carvalho.*

1. Introdução e Histórico

Na matemática determinante é considerado uma função matricial, associando cada matriz quadrada um escalar. Existem vários métodos de calcular o determinante de uma matriz, porém uns acabam demandando mais tempo e poder de processamento que outros, por exemplo Laplace tem complexidade O(n!) e a triangularização ou mais conhecida como teorema de eliminação de Gauss tem complexidade $O(n^3)$ que resulta numa diferença enorme entre matrizes de ordem maiores que 5.

Surgiu somente em 1683 a ideia de determinante a partir de um trabalho do japonês Seki Kowa. Ele era considerado o maior matemático japonês do século XVII, conseguiu chegar nesta tese a partir dos estudos de sistemas lineares, sistematizando o procedimento chinês.

Dez anos depois Leibniz introduziu no Ocidente o estudo dos determinantes, também considerando os sistemas lineares. Estabeleceu a condição de compatibilidade em um sistema de três equações e duas incógnitas em termos do determinante de ordem 3 formado pelos coeficientes e por seus termos independentes. Criou as suas próprias notações para indicar os índices. Leibniz indicava 1_2 o que hoje seria indicado por a_{12}.

Outra contribuição importante para a história dos determinantes é a Regra de Cramer, criada por Gabriel Cramer para resolver sistemas de n equações a n incógnitas por meio de determinantes.

Em 1764, o francês Étienne Bézout, autor de textos matemáticos de sucesso em seu tempo, sistematizou o processo de estabelecimento dos sinais dos termos de um determinante. E coube a outro francês, Alexandre Vandermonde, em 1771, empreender a primeira abordagem da teoria dos determinantes independente do estudo dos sistemas lineares, embora também os usasse na resolução destes sistemas.

Já em 1772, surgiu o importante Teorema de Laplace que possibilita a expansão de um determinante através dos elementos de r filas escolhidas e seus referentes complementos algébricos, demonstrado pelo próprio Laplace em seu artigo "Pesquisas sobre o cálculo integral e o sistema do mundo".

Em 1810 Friedrich Gauss publicou em seu livro o método de eliminação de Gauss, também conhecido como triangularização. Consiste em uma sequência de operações aplicadas linha a linha de uma matriz, capaz de reduzi-la a uma matriz com zeros abaixo ou acima de sua diagonal principal, caracterizando-se a uma matriz triangular.

Como é conhecido hoje, o termo determinante surgiu em 1812, devido ao trabalho de Cauchy apresentado à Academia de Ciências. Ele simplificou o que era conhecido até então sobre os determinantes, melhorando assim sua notação e demonstrando seu teorema da multiplicação dos mesmos.

1.1 Principais Usos e Aplicações

As matrizes são muito comuns em nosso cotidiano. Apresentam-se como telas gráficas que consiste em uma matriz de pixels. As matrizes são como tabelas muito útil para organizar dados, porém seu uso vai além disso. Na engenharia civil é usada para calcular esforços em estruturas. Na elétrica usado para resolver malhas de circuitos. Na química se utilizam para o balanceamento de equações de redox e na área da computação tem várias aplicações, a principal dela é na computação gráfica.

2. Apresentação dos Resultados

2.1 Descrição dos métodos

- O método público “detOrdem3”, que retorna um valor long relativo ao cálculo do determinante, onde é aplicado a regra de Sarrus, baseado em uma matriz passada por parâmetro.
- O método público “verificaZero”, que retorna um valor inteiro relativo à linha que possui mais zero da própria matriz de onde está sendo executado o mesmo.
- O método privado “detOrdemNOtim”, que retorna um valor long relativo, ao cálculo do determinante pelo teorema de Laplace, na matriz passada por parâmetro. Porém é utilizado o valor do método “verificaZero”, para utilizar a linha com mais zeros para fazer o cálculo, aumentando assim sua eficiência.
- O método público “troca”, que troca um elemento de uma posição passada por parâmetro com outro elemento também passada por parâmetro.
- O método público “trocaLinha”, que retorna um valor inteiro relativo à quantidade de vezes que a linha foi trocada. Quando um elemento da diagonal principal de uma matriz passada por parâmetro for zero é chamado o método troca que trocará todos os elementos desta linha com uma linha sem zero.
- O método privado “detOrdeNOtim2”, que retorna um valor long referente ao cálculo do determinante, de uma matriz passada por parâmetro, onde chama os seguintes métodos: “trocaLinha” para fazer uma verificação inicial de zeros na diagonal principal, “transformaDouble” de dentro da classe “MatrizDouble”, que converte a matriz de formato long para uma matriz de formato double para que o cálculo da eliminação de Gauss seja possível, e pôr fim a função “Math.round” para poder arredondar os valores do determinante. Este método consiste em zerar todos os valores abaixo da diagonal principal, fazendo a multiplicação de um número por uma linha toda, onde ao somar com a linha que se encontra o elemento que necessita ser zerado, a anulação do mesmo acontece, no final de todo este processo, é multiplicado os elementos da diagonal principal que resulta no determinante e se o número de troca de linhas for par o valor do determinante permanece o mesmo, mas se for ímpar ele é multiplicado por -1 obedecendo as regras de Gauss.

- O método público “detOtimizado” que retorna um valor long relativo ao determinante, este método é uma variação do método determinante fornecido pelo professor Moisés que de acordo com o tamanho da ordem executa um método diferente, e se for maior que dois ele chama o método “detOrdemNOtim”.
- O método público “detOtimizado2” que retorna um valor long relativo ao determinante, neste método é uma cópia do “detOtimizado”, porém caso a ordem for três ele chama o método “detOrdem3” e se for maior chama o método de cálculo do determinante via eliminação de Gauss o “detOrdemNOtim2”.

2.2 Descrição da Máquina:

Executado em um Desktop com processador Intel core i7 4790K com velocidade de 4,00GHz, 20.0 GB de memória ram, placa de vídeo Gigabyte Windforce GTX 1060 3GB, com o Java instalado em um SSD Kingston SA400S37120G 120 GB com leitura de até 500MB/s e 320MB/s de gravação, um HD adicional de 500 GB, Sistema Operacional Windows 10 Pro 64 bits e pacote Java SE Development Kit 8 Update 211.

2.3 Resultado e análises:

Ao realizar os experimentos foi possível perceber diferentes resultados para cada ordem e para cada meio de calcular os determinante.

Durante a execução de ordens menores é possível notar poucas diferenças, porém nas ordens 11 e 13 a diferença é grande entre suas otimizações.

No decorrer dos testes a matriz de ordem 3, tem como algoritmo mais rápido a segunda otimização, mas durante a execução de matrizes de ordem 5 o método mais rápido foi o cálculo original como mostra os gráficos abaixo.

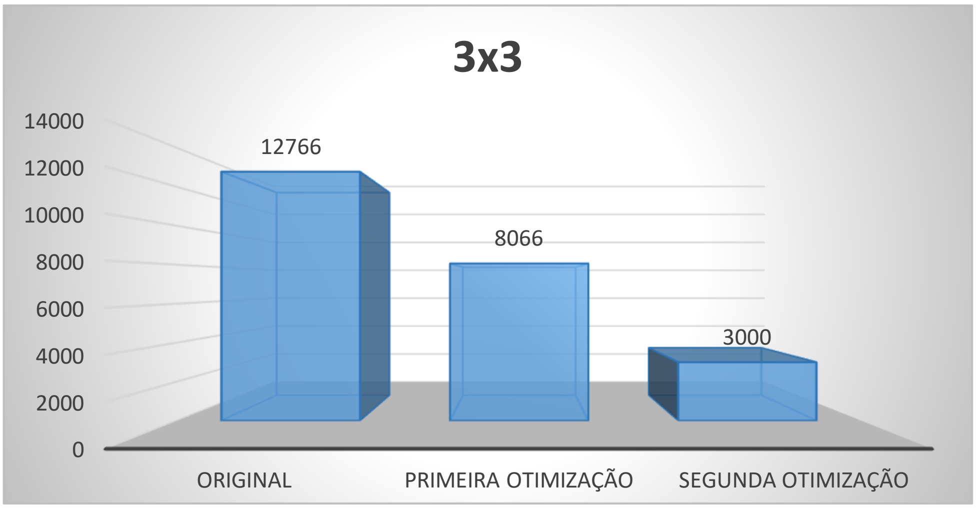


Gráfico 1. Tempo em nano segundos do determinante de ordem 3

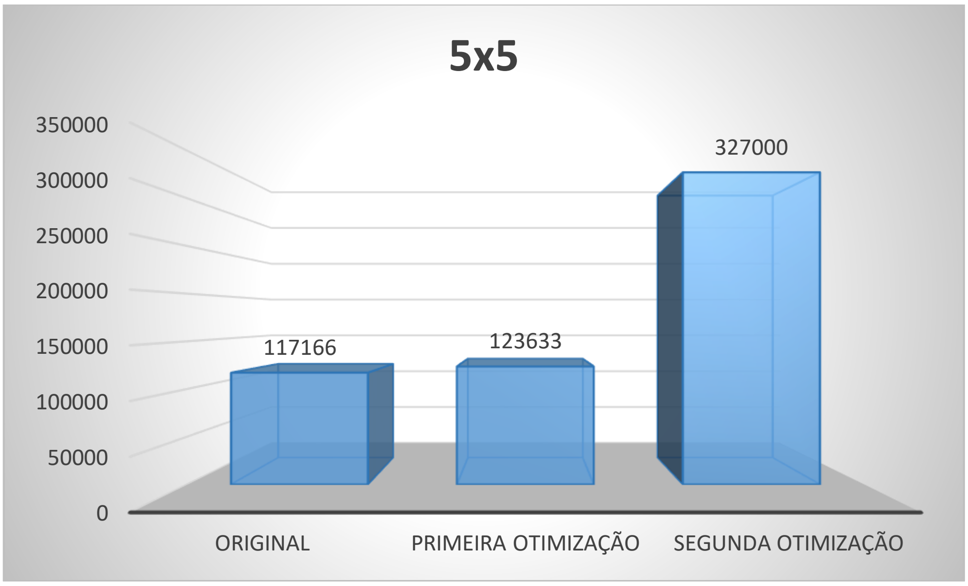


Gráfico 2. Tempo em nano segundos do determinante de ordem 5

O gráfico acima nos mostra que a primeira nem sempre alcança a eficiência desejada, porém a segunda otimização é falha somente nas matrizes de ordem 5, que na maioria das vezes demoram mais que os outros para retornar o cálculo.

A partir das matrizes de ordem 7 a segunda otimização sempre é a mais eficiente, retornando o determinante quase que instantaneamente, conforme é possível notar no gráfico abaixo.

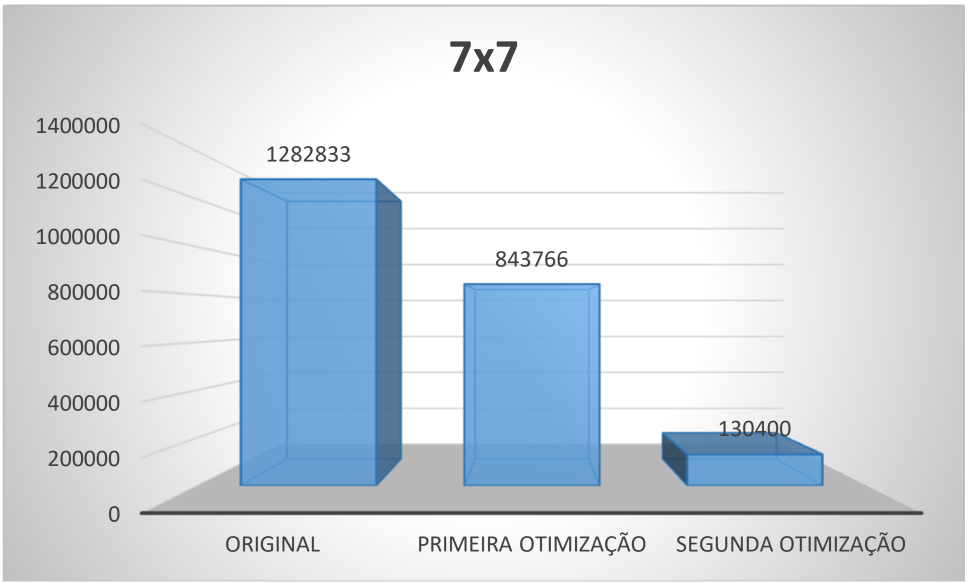


Gráfico 3. Tempo em nano segundos do determinante de ordem 7

O resultado dos tempos das matrizes de ordem 13, usando o algoritmo orginal e a primeira otimização, mostra o quão ineficiente é um metódo de cálculo usando recursividade. Podemos provar isto no gráfico abaixo onde mostra que o primeiro algoritmo leva uma média de 9 minutos para ser executado, enquanto na segunda é praticamente instantâneo.

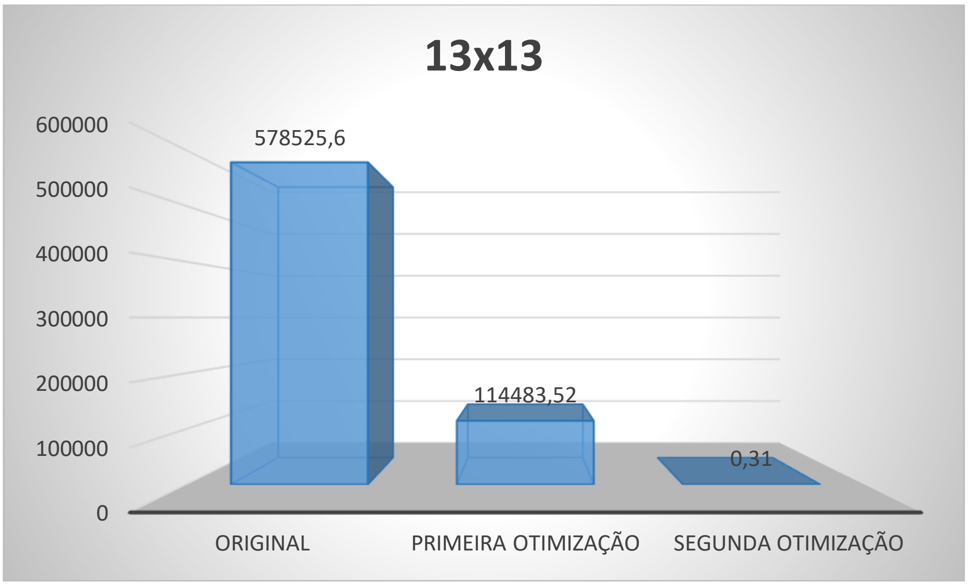
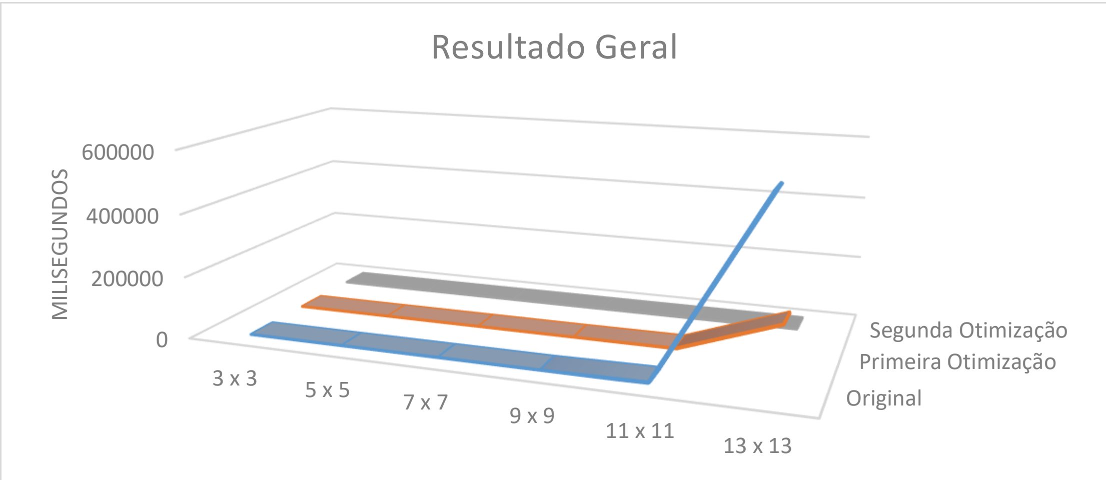


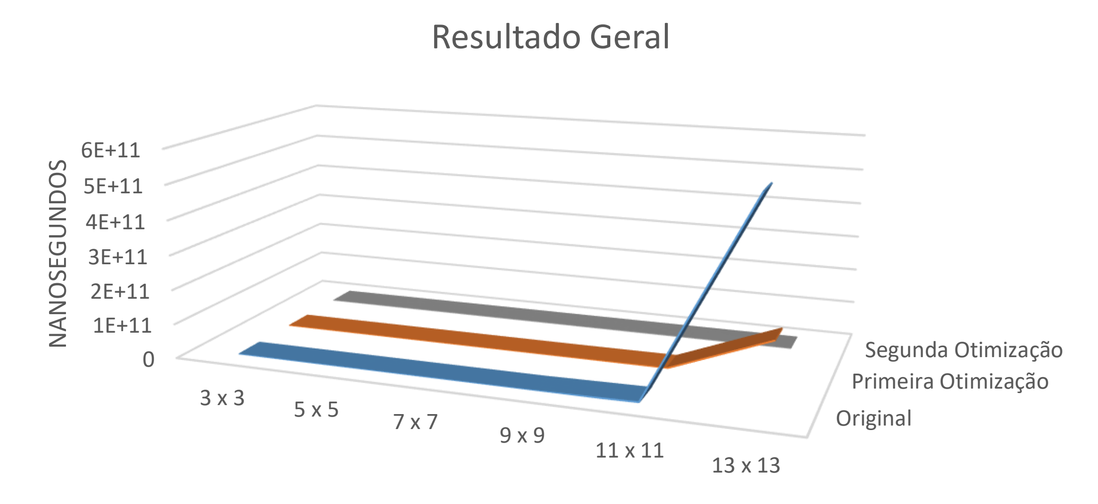
Gráfico 4. Tempo em milisegundos do determinante de ordem 13

Os gráficos a seguir mostram o resultado geral de todos as ordens tanto em milisegundos quanto em nano segundos.



	3 x 3	5 x 5	7 x 7	9 x 9	11 x 11	13 x 13
Original	0,012	0,117	1,282	38,877	3748,411	578525,606
Primeira Otimização	0,008	0,123	0,843	16,973	1043,788	114483,525
Segunda Otimização	0,003	0,327	0,13	0,181	0,223	0,312

Gráfico 5. Tempo em milisegundos de todas as ordens



	3 x 3	5 x 5	7 x 7	9 x 9	11 x 11	13 x 13
Original	12766,66	117166	1282833,33	38871300	3748411400	5,78526E+11
Primeira Otimização	8066,66	126633,66	843766,66	16973366,66	1043788767	1,14484E+11
Segunda Otimização	3000	327000	130400	181233,33	223300	312566,66

Gráfico 6. Tempo em nano segundos de todas as ordens

Isto mostra que algoritimos que usam recursão são mais eficiente para cálculos menores, porem, quando se trata de cálculos maiores, outros códigos tem sua eficiência maior, retornando o resultado de forma mais rápida executando poucos passos.

3. Referências

SANTOS, R. N. (2007) "Uma breve história do desenvolvimento das teorias dos determinantes e das matrizes", Universidade de São Paulo, http://milanesa.ime.usp.br/imath/files/1/43.pdf, Junho.

DOMINGUES, H. H. "Origem dos sistemas lineares e determinantes", http://www.somatematica.com.br/historia/sistemas.php, Junho.

BUGLIA, F. (2016) "Definições e Aplicações dos Determinantes", http://www.infoenem.com.br/matematica-definicao-e-aplicacoes-das-determinantes/, Junho.