Estudo da influência de movimentos na função custo do problema de mínima latência

Guilherme Dantas

April 2020

1 Introdução

Este documento tem como interesse analisar como que a função custo de um problema de mínima latência se comporta após algum movimento, e tentar quantificar com fórmulas fechadas quando este movimento é vantajoso. Primeiro serão estabelecidas algumas definições a respeito da natureza do problema e, então, serão feitas análises dos principais movimentos.

2 Definições

2.1 Instância

Definimos uma instância de um problema de mínima latência por uma matriz quadrada D de dimensão n, aonde o elemento $D(i,j)$ desta matriz é distância entre os nós i e j. Definimos o nó 0 como sendo o **depósito**. Definimos os nós $1...n-1$ como sendo os **clientes**. Dizemos que a instância tem tamanho n quando sua matriz tem dimensão n. Trabalharemos apenas com instâncias de dimensão finita.

2.2 Solução

Definimos uma solução como uma permutação dos $n-1$ clientes de uma instância de tamanho n. Dizemos que a solução tem tamanho n se a instância associada tem tamanho n. Trabalharemos apenas com soluções cujas instâncias têm dimensão maior que 2, ou seja, com ao menos dois clientes. Para razões práticas, representamos esta sequência começando e terminando com o depósito, como na equação 1.

$$S = < s_0^*, s_1, ..., s_{n-1}, s_n^* > \quad (1)$$

Aonde ambos os nós com * indicam o **depósito**. Para remover a ambiguidade, chamaremos s_0 de **depósito inicial** e s_n de **depósito final**. Mas lembre-se que ambos os depósitos representam o mesmo nó, o nó de índice 0 na matriz.

2.3 Custo de uma solução

Definimos o custo de uma solução como sendo a soma das latências dos nós $s_1, ..., s_n$. A latência do i-ésimo nó da sequência S, $l(S,i)$ é dado pela sua distância até o depósito inicial, vide a equação 2.

$$l(S,i) = \sum_{j=1}^{i} D(s_{j-1},\ s_j),\ i \leq n \tag{2}$$

Obtemos a equação recursiva 3 para o i-ésimo nó, que não o depósito inicial.

$$l(S,i) = l(S,i-1) + D(s_{i-1},\ s_i),\ 0 < i \leq n \tag{3}$$

Portanto, o custo de uma solução S, $f(S)$ é dado pela equação 4.

$$f(S) = \sum_{i=1}^{n} l(S,i) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} D(s_{j-1},\ s_j) \tag{4}$$

É possível perceber que uma parcela $D(s_{j-1},\ s_j)$, para $1 \leq j \leq n$ ocorre $(n-j+1)$ vezes na função $f(S)$ de uma solução S de tamanho n, o que nos permite reescrever a equação 4 com apenas um somatório na equação 5.

$$f(S) = \sum_{j=1}^{n}(n-j+1) \cdot D(s_{j-1},\ s_j) = \sum_{j=1}^{n} H(S,j) \tag{5}$$

Uma interpretação da equação 5 é que uma aresta mais perto do depósito inicial tem um maior peso no custo da solução. É importante destacar que $H(S,j)$ depende de s_{j-1} e de s_j.

2.4 Movimento

Chamamos de movimento uma função m bijetiva com domínio nos clientes de uma solução S e com contra-domínio nos clientes de uma solução S'.

2.5 Custo de um movimento

Definimos o custo de um movimento m para uma dada solução S como $\delta(m,S)$, dada pela equação 6.

$$\delta(m,S) = f(m(S)) - f(S) \tag{6}$$

2.6 Movimento vantajoso

Dizemos que um movimento m é vantajoso para uma dada solução S quando $\delta(m,S) < 0$, isto é, quando o custo da solução diminui com o movimento.

2.7 Movimento indiferente

Dizemos que um movimento m é indiferente para uma dada solução S quando $\delta(m, S) = 0$, isto é, quando o custo da solução não se altera com o movimento.

2.8 Movimento desvantajoso

Dizemos que um movimento m é desvantajoso para uma dada solução S quando $\delta(m, S) > 0$, isto é, quando o custo da solução aumenta com o movimento.

3 Metodologia

Será definido cada movimento m formalmente em função da posição dos clientes da solução S para a solução $m(S)$. Então, será feito o cálculo do custo do movimento, procurando eliminar o maior número de parcelas possíveis da soma.

Além disso, se possível, serão feitas substituições triviais como a equação 7, pois em casos em que a latência de todos os nós estejam pré-calculados, este cálculo terá complexidade temporal $O(1)$, e não $O(n)$.

$$\sum_{j=a}^{b} D(s_{j-1},\ s_j) = l(S, b) - l(S, a - 1) \tag{7}$$

4 Movimentos

4.1 shift(p,q)

Um cliente na posição p é deslocado para outra posição q.

4.1.1 rightshift ($p < q$)

Movimento definido para um par de índices $(p,\ q)$, tal que $0 < p < q < n$. Dado uma solução S, rightshift$(S, p, q) = S^*$, e o i-ésimo cliente da solução S^* é definido pela equação 8.

$$s_i^* = \begin{cases} s_i,\ i < p \\ s_{i+1},\ p \leq i < q \\ s_p,\ i = q \\ s_i,\ i > q \end{cases} \tag{8}$$

O custo da solução com o movimento é dado pela equação a seguir. Serão riscados de vermelhos as parcelas que não dependem mais de S^*, mas somente de S, para deixar o papel mais limpo. Mas imagine que elas ainda estão lá.

$$
\begin{aligned}
f(S^*) &= \sum_{j=1}^{n} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=1}^{p-1} H(S^*, j) + \sum_{j=p}^{n} H(S^*, j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j) +} \sum_{j=p}^{n} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=p}^{q+1} H(S^*, j) + \sum_{j=q+2}^{n} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=p}^{q+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=q+2}^{n} H(S, j)} \\
&= H(S^*, p) + \sum_{j=p+1}^{q-1} H(S, j) + \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) \\
&= H(S^*, p) + \sum_{j=p+2}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - (j-1) + 1) + \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) \\
&= H(S^*, p) + \cancel{\sum_{j=p+2}^{q} H(S, j) +} \sum_{j=p+2}^{q} D(s_{j-1}, s_j) + \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) \\
&= H(S^*, p) + l(S, q) - l(S, p+1) + \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) \\
&= D(s_{p-1}, s_{p+1}) \cdot (n - p + 1) \\
&+ D(s_q, s_p) \cdot (n - q + 1) \\
&+ D(s_p, s_{q+1}) \cdot (n - q) \\
&+ l(S, q) - l(S, p+1)
\end{aligned}
$$

O custo da solução S terá os membros anteriormente riscados removidos. Já que nosso interesse é calcular a diferenças dos dois, teremos o mesmo resultado.

$$
\begin{aligned}
f(S) &= \sum_{j=1}^{n} H(S,j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S,j) +} H(s,p) + H(s,p+1) \\
&+ \cancel{\sum_{j=p+2}^{q} H(S,j) +} H(s,q+1) + \cancel{\sum_{j=q+2}^{n} H(S,j)} \\
&= D(s_{p-1}, s_p) \cdot (n-p+1) \\
&+ D(s_p, s_{p+1}) \cdot (n-p) \\
&+ D(s_q, s_{q+1}) \cdot (n-q)
\end{aligned}
$$

Assim, temos que $\delta(\text{rightshift}, S)$ é dado pela seguinte equação.

$$
\begin{aligned}
\delta(\text{rightshift}, S) &= (n-p+1) \cdot [D(s_{p-1}, s_{p+1}) - D(s_{p-1}, s_p)] \\
&+ (n-q) \cdot [D(s_p, s_{q+1}) - D(s_q, s_{q+1})] \\
&+ (n-q+1) \cdot D(s_q, s_p) \\
&+ l(S,q) \\
&- l(S,p+1) \\
&- (n-p) \cdot D(s_p, s_{p+1})
\end{aligned}
$$

4.1.2 leftshift ($p > q$)

Movimento definido para um par de índices $(p,\ q)$, tal que $0 < q < p < n$. Dado uma solução S, lefttshift$(S, p, q) = S^*$, e o i-ésimo cliente da solução S^* é definido pela equação 9.

$$
s_i^* = \begin{cases} s_i,\ i < q \\ s_p,\ i = q \\ s_{i-1},\ q < i \leq p \\ s_i,\ i > p \end{cases} \tag{9}
$$

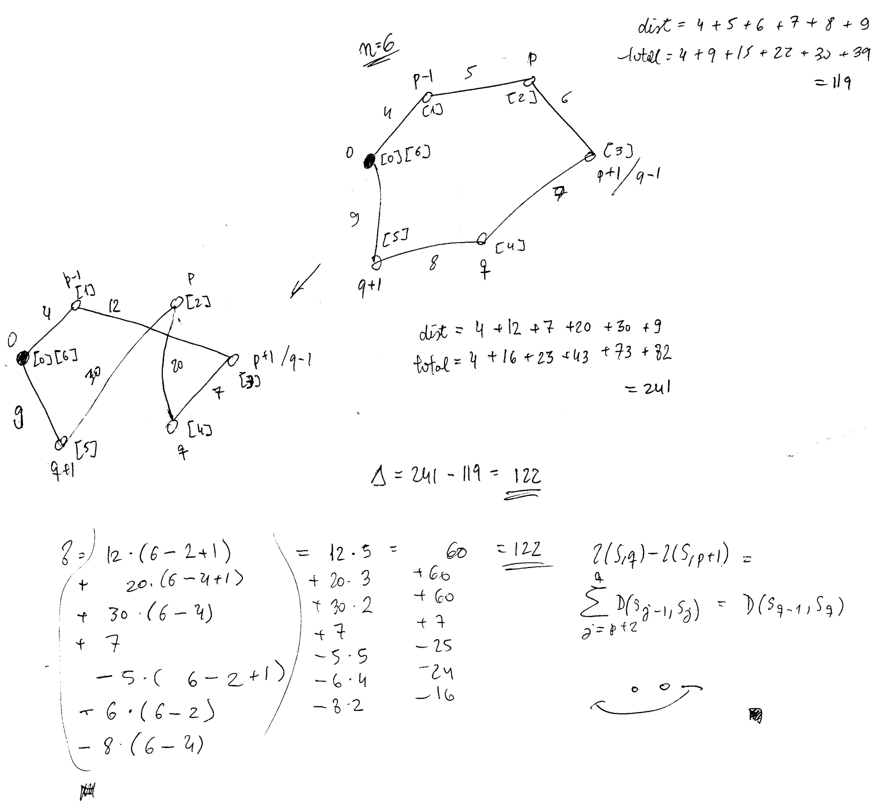

Figure 1: Exemplo de right shift para $n = 6$ com cálculos

$$
\begin{aligned}
f(S^*) &= \sum_{j=1}^{n} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=1}^{q-1} H(S^*, j) + \sum_{j=q}^{n} H(S^*, j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{q-1} H(S, j) +} \sum_{j=q}^{n} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=q}^{p+1} H(S^*, j) + \sum_{j=p+2}^{n} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=q}^{p+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=p+2}^{n} H(S, j)} \\
&= \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) + \sum_{j=q+2}^{p} H(S^*, j) + H(S^*, p+1) \\
&= \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) + \sum_{j=q+2}^{p} \left[D(s^*_{j-1}, s^*_j) \cdot (n - j + 1) \right] + H(S^*, p+1) \\
&= \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) + \sum_{j=q+2}^{p} [D(s_{j-2}, s_{j-1}) \cdot (n - j + 1)] + H(S^*, p+1) \\
&= \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) + \sum_{j=q+1}^{p-1} [D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - (j+1) + 1)] + H(S^*, p+1) \\
&= \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=q+1}^{p-1} H(S, j) -} \sum_{j=q+1}^{p-1} [D(s_{j-1}, s_j)] + H(S^*, p+1) \\
&= H(S^*, q) + H(S^*, q+1) + H(S^*, p+1) + l(S, q) - l(S, p-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(S) &= \sum_{j=1}^{n} H(S, j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{q-1} H(S, j) +} H(s, q) + \cancel{\sum_{j=q+1}^{p-1} H(S, j)} \\
&\quad + H(s, p) + H(s, p+1) + \cancel{\sum_{j=p+2}^{n} H(S, j)} \\
&= H(s, q) + H(s, p) + H(s, p+1)
\end{aligned}
$$

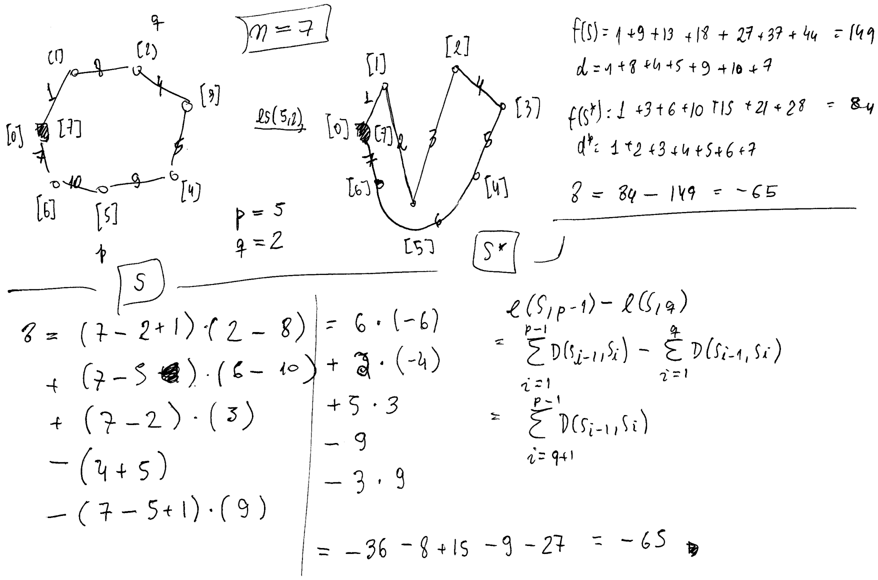

Figure 2: Exemplo de left shift para $n = 7$ com cálculos

$$
\begin{aligned}
\delta(\text{leftshift}, S) = & (n - q + 1) \cdot [D(s_{q-1}, s_p) - D(s_{q-1}, s_q)] \\
& + (n - p) \cdot [D(s_{p-1}, s_{p+1}) - D(s_p, s_{p+1})] \\
& + (n - q) \cdot D(s_p, s_q) \\
& + l(S, q) \\
& - l(S, p - 1) \\
& - (n - p + 1) \cdot D(s_{p-1}, s_p)
\end{aligned}
$$

4.2 swap(p,q)

Um cliente na posição p é trocado com outro na posição q. Como swap$(S, p, q) =$ swap(S, q, p), então os cálculos aqui feitos levarão em conta que $0 < p < q < n$. Dado uma solução S, swap$(S, p, q) = S^*$, e o i-ésimo cliente da solução S^* é definido pela equação 10.

$$
s_i^* = \begin{cases} s_i, \ i < p \\ s_q, \ i = p \\ s_i, \ p < i < q \\ s_p, \ i = q \\ s_i, \ i > q \end{cases} \tag{10}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\text{swap}, S) &= f(S^*) - f(S) \\
&= \sum_{j=1}^{n} H(S^*, j) - \sum_{j=1}^{n} H(S, j) \\
&= \left[\sum_{j=1}^{p-1} H(S^*, j) + \sum_{j=p}^{n} H(S^*, j) \right] - \left[\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j) + \sum_{j=p}^{n} H(S, j) \right] \\
&= \left[\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j) +} \sum_{j=p}^{n} H(S^*, j) \right] - \left[\cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j) +} \sum_{j=p}^{n} H(S, j) \right] \\
&= \sum_{j=p}^{n} H(S^*, j) - \sum_{j=p}^{n} H(S, j) \\
&= \left[\sum_{j=p}^{q+1} H(S^*, j) + \sum_{j=q+2}^{n} H(S^*, j) \right] - \left[\sum_{j=p}^{q+1} H(S, j) + \sum_{j=q+2}^{n} H(S, j) \right] \\
&= \left[\sum_{j=p}^{q+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=q+2}^{n} H(S, j)} \right] - \left[\sum_{j=p}^{q+1} H(S, j) + \cancel{\sum_{j=q+2}^{n} H(S, j)} \right] \\
&= \sum_{j=p}^{q+1} H(S^*, j) - \sum_{j=p}^{q+1} H(S, j) \\
&= \left[\sum_{j=p}^{p+1} H(S^*, j) + \sum_{j=p+2}^{q-1} H(S^*, j) + \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) \right] \\
&- \left[\sum_{j=p}^{p+1} H(S, j) + \sum_{j=p+2}^{q-1} H(S, j) + \sum_{j=q}^{q+1} H(S, j) \right] \\
&= \left[\sum_{j=p}^{p+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=p+2}^{q-1} H(S, j) +} \sum_{j=q}^{q+1} H(S^*, j) \right] \\
&- \left[\sum_{j=p}^{p+1} H(S, j) + \cancel{\sum_{j=p+2}^{q-1} H(S, j) +} \sum_{j=q}^{q+1} H(S, j) \right] \\
&= [H(S^*, p) + H(S^*, p+1) + H(S^*, q) + H(S^*, q+1)] \\
&- [H(S, p) + H(S, p+1) + H(S, q) + H(S, q+1)] \\
&= (n - p + 1) \cdot [D(s_{p-1}, s_q) - D(s_{p-1}, s_p)] \\
&+ (n - p) \cdot [D(s_q, s_{p+1}) - D(s_p, s_{p+1})] \\
&+ (n - q + 1) \cdot [D(s_{q-1}, s_p) - D(s_{q-1}, s_q)] \\
&+ (n - q) \cdot [D(s_p, s_{q+1}) - D(s_q, s_{q+1})]
\end{aligned}
$$

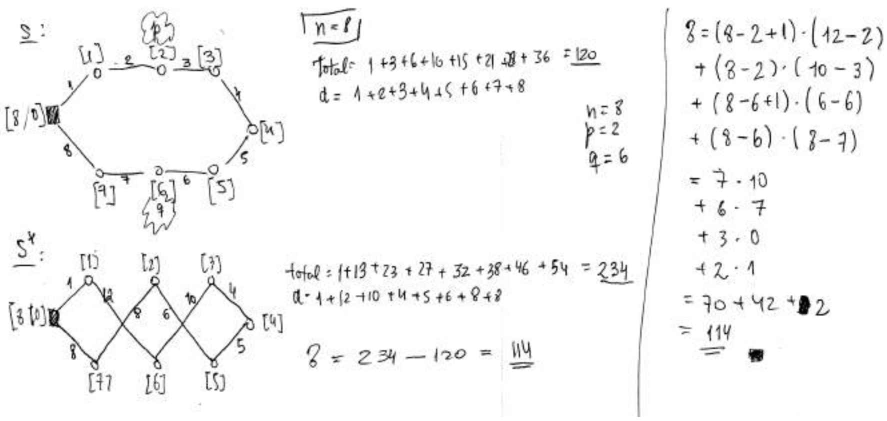

Figure 3: Exemplo de swap para $n = 8$ com cálculos

É importante notar que a equação acima só é válida quando $p + 1 \neq q$, em outras palavras, somente quando p e q não são vizinhos. Contudo, não será coberto este caso pois ele é idêntico ao movimento de shift(p, q).

4.3 2-opt(p,q)

A rota de p a q é invertida. Como 2-opt(S, p, q) = 2-opt(S, q, p), então os cálculos aqui feitos levarão em conta que $0 < p < q < n$. Dado uma solução S, 2-opt$(S, p, q) = S^*$, e o i-ésimo cliente da solução S^* é definido pela equação 11.

$$s_i^* = \begin{cases} s_i, \ i < p \\ s_{\phi(i)}, p \leq i \leq q \\ s_i, \ i > q \end{cases} \tag{11}$$

$$\phi(i) = p + q - i \tag{12}$$

$$\begin{aligned} f(S^*) &= \sum_{j=1}^{n} H(S^*, j) \\ &= \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j)} + \sum_{j=p}^{q+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=q+2}^{n} H(S, j)} \\ &= D(s_{p-1}^*, s_p^*) \cdot (n - p + 1) \\ &+ D(s_q^*, s_{q+1}^*) \cdot (n - q) & \alpha^* \\ &+ \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}^*, s_j^*) \cdot (n - j + 1) & \beta^* \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta^* &= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{p+q-j+1}, s_{p+q-j}) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=p}^{q-1} D(s_{j+1}, s_j) \cdot [n - (p + q - j) + 1] \\
&= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_j, s_{j-1}) \cdot [n - (p + q - j)] \\
&= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n - (p + q - j)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(S) &= \sum_{j=1}^{n} H(S, j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j) +} \sum_{j=p}^{q+1} H(S, j) + \cancel{\sum_{j=q+2}^{n} H(S, j)} \\
&= D(s_{p-1}, s_p) \cdot (n - p + 1) \\
&\quad + D(s_q, s_{q+1}) \cdot (n - q) && \alpha \\
&\quad + \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - j + 1) && \beta
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\text{2-opt}, S) = {} & (n - p + 1) \cdot (D(s_{p-1}, s_q) - D(s_{p-1}, s_p)) \\
& + (n - q) \cdot (D(s_p, s_{q+1}) - D(s_q, s_{q+1})) \\
& + \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (2j - p - q - 1)
\end{aligned}
$$

Esta equação só serve para soluções em que $p + 1 \neq q$, pois presume que p e q não são vizinhos, ou seja, que possuem algum cliente entre eles. Mas caso p e q sejam vizinhos, o efeito será o mesmo de fazer um shift(p, q). E ainda, pode-se ainda desconsiderar o caso de $p + 2 = q$, pois o efeito será o mesmo de um swap(p, q).

4.4 shift2(p,q,r)

Os clientes enter p e q são movidos para depois do cliente r.

4.4.1 rightshift2 ($p < q < r$)

Movimento definido para uma tupla de índices $(p,\ q,\ r)$, tal que $0 < p < q < q + 1 < r < n$ (os clientes q e r não podem ser vizinhos). Dado uma solução

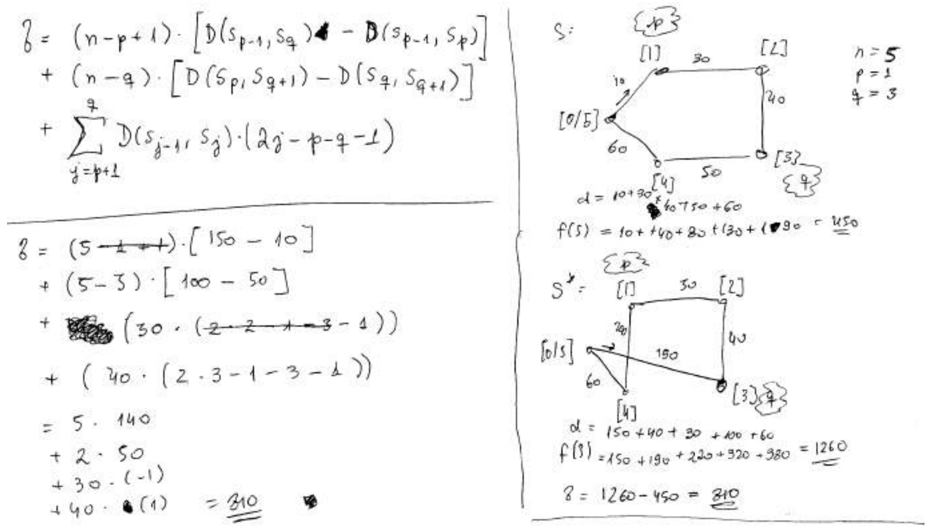

Figure 4: Exemplo de 2-opt para $n = 5$ com cálculos

S, rightshift2$(S, p, q, r) = S^*$, e o i-ésimo cliente da solução S^* é definido pela equação 13.

$$s_i^* = \begin{cases} s_i, \ i < p \\ s_{\phi(i)}, \ p \leq i < p + r - q, \ \phi(i) = i - p + q + 1 \\ s_{\psi(i)}, \ p + r - q \leq i \leq r, \ \psi(i) = i - r + q \\ s_i, \ i > r \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{aligned} f(S^*) &= \sum_{j=1}^{n} H(S^*, j) \\ &= \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S, j) +} \sum_{j=p}^{r+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{j=r+2}^{n} H(S, j)} \\ &= [H(S^*, p) + H(S^*, p + r - q) + H(S^*, r + 1)] \leftarrow \alpha^* \\ &+ \left[\sum_{j=p+1}^{p+r-q-1} H(S^*, j) \right] \leftarrow \beta_1^* \\ &+ \left[\sum_{j=p+r-q+1}^{r} H(S^*, j) \right] \leftarrow \beta_2^* \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f(S) &= \sum_{j=1}^{n} H(S,j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{p-1} H(S,j) +} \sum_{j=p}^{r+1} H(S,j) + \cancel{\sum_{j=r+2}^{n} H(S,j)} \\
&= [H(S,p) + H(S,q+1) + H(S,r+1)] \leftarrow \alpha \\
&+ \left[\sum_{j=p+1}^{q} H(S,j) \right] \leftarrow \beta_2 \\
&+ \left[\sum_{j=q+2}^{r} H(S,j) \right] \leftarrow \beta_1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha = {} & D(s_{p-1}, s_p) \cdot (n-p+1) \\
& + D(s_q, s_{q+1}) \cdot (n-q) \\
& + D(s_r, s_{r+1}) \cdot (n-r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= D(s^*_{p-1}, s^*_p) \cdot (n-p+1) \\
&+ D(s^*_{p+r-q-1}, s^*_{p+r-q}) \cdot [n - (p+r-q) + 1] \\
&+ D(s^*_r, s^*_{r+1}) \cdot (n-r) \\
&= D(s_{p-1}, s_{q+1}) \cdot (n-p+1) \\
&+ D(s_r, s_p) \cdot [n - (p+r-q) + 1] \\
&+ D(s_q, s_{r+1}) \cdot (n-r)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^* &= \sum_{j=p+1}^{p+r-q-1} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=p+1}^{p+r-q-1} D(s_{j-1}^*, s_j^*) \cdot (n-j+1) \\
&= \sum_{j=p+1}^{p+r-q-1} D(s_{j-p+q}, s_{j-p+q+1}) \cdot (n-j+1) \\
&= \sum_{j=q+2}^{r} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n-(j+p-q-1)+1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_2^* &= \sum_{j=p+r-q+1}^{r} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=p+r-q+1}^{r} D(s_{j-1}^*, s_j^*) \cdot (n-j+1) \\
&= \sum_{j=p+r-q+1}^{r} D(s_{j-r+q-1}, s_{j-r+q}) \cdot (n-j+1) \\
&= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n-(j+r-q)+1]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_1^* - \beta_1 &= \sum_{j=q+2}^{r} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n-(j+p-q-1)+1] \\
&\quad - \sum_{j=q+2}^{r} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n-j+1) \\
&= \sum_{j=q+2}^{r} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (q-p+1) \\
&= [l(S, r) - l(S, q+1)] \cdot (q-p+1)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\beta_2^* - \beta_2 &= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n - (j + r - q) + 1] \\
&- \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (q - r) \\
&= -[l(S,q) - l(S,p)] \cdot (r - q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\text{rightshift2}, S) &= \alpha^* - \alpha + \beta_1^* - \beta_1 + \beta_2^* - \beta_2 \\
&= (n - p + 1) \cdot [D(s_{p-1}, s_{q+1}) - D(s_{p-1}, s_p)] \\
&+ (n - r) \cdot [D(s_q, s_{r+1}) - D(s_r, s_{r+1})] \\
&+ (n - p - r + q + 1) \cdot D(s_r, s_p) \\
&+ (q - p + 1) \cdot [l(S,r) - l(S, q+1)] \\
&- (n - q) \cdot D(s_q, s_{q+1}) \\
&- (r - q) \cdot [l(S,q) - l(S,p)]
\end{aligned}
$$

4.4.2 leftshift2 ($r < p < q$)

Movimento definido para uma tupla de índices $(p,\ q,\ r)$, tal que $0 < r < p - 1 < p < q < n$ (os clientes r e p não podem ser vizinhos). Dado uma solução S, leftshift2$(S, p, q, r) = S^*$, e o i-ésimo cliente da solução S^* é definido pela equação 14.

$$
s_i^* = \begin{cases} s_i,\ i < r \\ s_{\phi(i)},\ r \leq i \leq r + q - p,\ \phi(i) = i + p - r \\ s_{\psi(i)},\ r + q - p < i \leq q,\ \psi(i) = i + p - q - 1 \\ s_i,\ i > q \end{cases} \tag{14}
$$

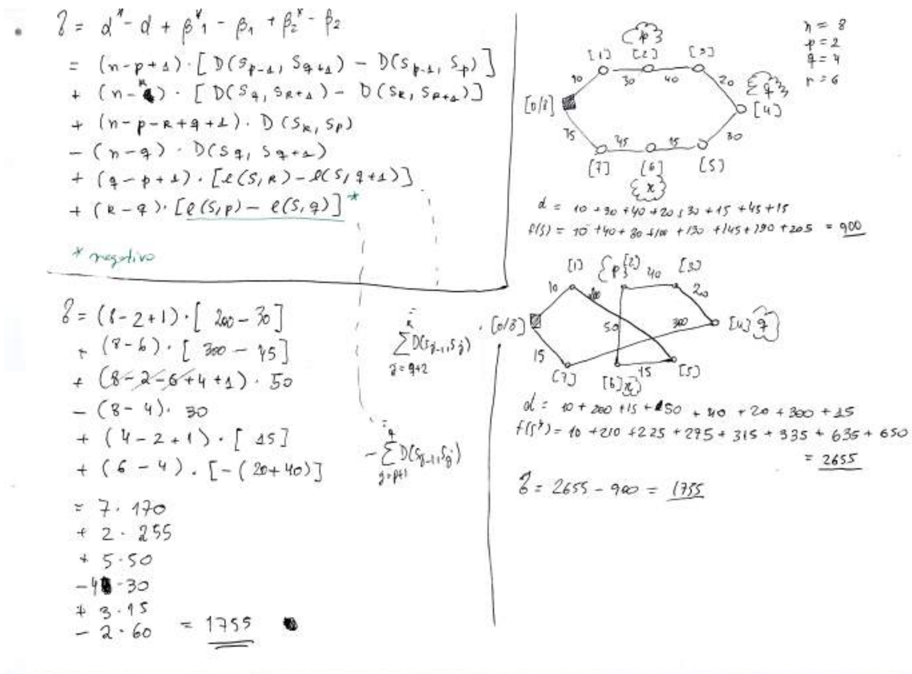

Figure 5: Exemplo de rightshift2 para $n = 8$ com cálculos

$$
\begin{aligned}
f(S^*) &= \sum_{j=1}^{n} H(S^*, j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{r-1} H(S,j) +} \sum_{j=r}^{q+1} H(S^*, j) + \cancel{\sum_{q=r+2}^{n} H(S,j)} \\
&= [H(S^*, r) + H(S^*, r+q-p+1) + H(S^*, q+1)] \leftarrow \alpha^* \\
&+ \left[\sum_{j=r+1}^{r+q-p} H(S^*, j)\right] \leftarrow \beta_1^* \\
&+ \left[\sum_{j=r+q-p+2}^{q} H(S^*, j)\right] \leftarrow \beta_2^*
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(S) &= \sum_{j=1}^{n} H(S, j) \\
&= \cancel{\sum_{j=1}^{r-1} H(S,j) +} \sum_{j=r}^{q+1} H(S, j) + \cancel{\sum_{q=r+2}^{n} H(S,j)} \\
&= [H(S, r) + H(S, p) + H(S, q+1)] \leftarrow \alpha \\
&+ \left[\sum_{j=r+1}^{p-1} H(S, j)\right] \leftarrow \beta_1 \\
&+ \left[\sum_{j=p+1}^{q} H(S, j)\right] \leftarrow \beta_2
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha = & \, D(s_{r-1}, s_r) \cdot (n - r + 1) \\
& + D(s_{p-1}, s_p) \cdot (n - p + 1) \\
& + D(s_q, s_{q+1}) \cdot (n - q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\alpha^* &= D(s^*_{r-1}, s^*_r) \cdot (n - r + 1) \\
&\quad + D(s^*_{r+q-p}, s^*_{r+q-p+1}) \cdot [n - (r + q - p + 1) + 1] \\
&\quad + D(s^*_q, s^*_{q+1}) \cdot (n - q) \\
&= D(s_{r-1}, s_p) \cdot (n - r + 1) \\
&\quad + D(s_q, s_r) \cdot [n - (r + q - p + 1) + 1] \\
&\quad + D(s_{p-1}, s_{q+1}) \cdot (n - q)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^*_1 &= \sum_{j=r+1}^{r+q-p} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=r+1}^{r+q-p} D(s^*_{j-1}, s^*_j) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=r+1}^{r+q-p} D(s_{j+p-r-1}, s_{j+p-r}) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n - (j - p + r) + 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta^*_2 &= \sum_{j=r+q-p+2}^{q} H(S^*, j) \\
&= \sum_{j=r+q-p+2}^{q} D(s^*_{j-1}, s^*_j) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=r+q-p+2}^{q} D(s_{j+p-q-2}, s_{j+p-q-1}) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=r+1}^{p-1} D(s_{j-1}, s_j) \cdot [n - (j - p + q + 1) + 1]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_1^* - \beta_1 &= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - (j - p + r) + 1) \\
&- \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=p+1}^{q} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (p - r) \\
&= [l(S, q) - l(S, p)] \cdot (p - r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\beta_2^* - \beta_2 &= \sum_{j=r+1}^{p-1} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - (j - p + q + 1) + 1) \\
&- \sum_{j=r+1}^{p-1} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (n - j + 1) \\
&= \sum_{j=r+1}^{p-1} D(s_{j-1}, s_j) \cdot (p - q - 1) \\
&= -[l(S, p-1) - l(S, r)] \cdot (q - p + 1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\delta(\text{leftshift2}, S) &= \alpha^* - \alpha + \beta_1^* - \beta_1 + \beta_2^* - \beta_2 \\
&= (n - r + 1) \cdot [D(s_{r-1}, s_p) - D(s_{r-1}, s_r)] \\
&+ (n - q) \cdot [D(s_{p-1}, s_{q+1}) - D(s_q, s_{q+1})] \\
&+ (n + p - q - r) \cdot D(s_q, s_r) \\
&+ (p - r) \cdot [l(S, q) - l(S, p)] \\
&- (q - p + 1) \cdot [l(S, p-1) - l(S, r)] \\
&- (n - p + 1) \cdot D(s_{p-1}, s_p)
\end{aligned}
$$

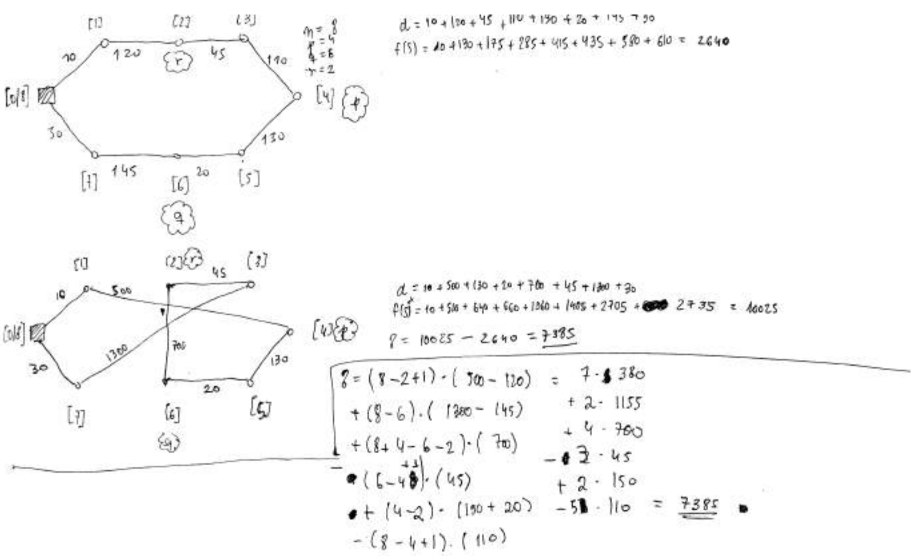

Figure 6: Exemplo de leftshift2 para $n = 8$ com cálculos