SECRETARIA DA EDUCAÇÃO, JUVENTUDE E ESPORTES
TOCANTINS GOVERNO DO ESTADO

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

COLÉGIO ESTADUAL GUILHERME DOURADO						
DISCIPLINA: MATEMÁTICA – 1ª QUINZENA						
NOME		*SÉRIE*	*3ª*	*TURMA*	*33.____*	
PROFESSOR	*BIRA*	*DATA*		*11/05/2021*		

Porcentagem

Porcentagem envolve diversas situações com que nos deparamos frequentemente em nosso cotidiano, por exemplo, em resultados de pesquisas ou promoções. Entendemos porcentagem como sendo a **razão** entre um número qualquer e 100, sendo representada pelo símbolo %. Utilizamos a ideia de porcentagem para representar partes de algo inteiro.

Representações da porcentagem

Sabemos que a porcentagem é uma **razão**, logo, pode ser representada por uma **fração,** que, por sua vez, pode ser escrita na forma decimal. De modo geral, se temos um número acompanhado pelo símbolo %, basta dividi-lo por 100, ou seja:

$$x\% = \frac{x}{100}$$

Veja os exemplos seguintes que mostram as diferentes representações de **porcentagens**. Lembre-se, para “transformar” a porcentagem em **fração**, basta dividir o número que acompanha o símbolo % por 100 e **simplificar** a fração; para “transformar” a fração em forma decimal, basta realizar a divisão.

Exemplo

$$2\% = \frac{2}{100} = \frac{1}{50} = 0,02$$

$$10\% = \frac{10}{100} = \frac{1}{10} = 0,1$$

$$50\% = \frac{50}{100} = \frac{1}{2} = 0,5$$

$$100\% = \frac{100}{100} = \frac{1}{1} = 1$$

$$210\% = \frac{210}{100} = \frac{21}{10} = 2,1$$

Perceba que quando escrevemos a porcentagem 100% é o mesmo que considerar um inteiro, ou seja, quando consideramos **100% de algo,** estamos levando em conta o **total** daquilo. No caso de 210%, estamos considerando mais que um inteiro, isto é, consideramos 2,1 vezes o total.

Para fazer o caminho de volta, ou seja, dado uma **fração** ou um **número decimal** para ser escrito na forma **percentual(porcentagem)**, basta **multiplicar** o número em questão por **100.** Veja:

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

$$0,13 \cdot 100 = 13\%$$

$$0,05 \cdot 100 = 5\%$$

$$0,8 \cdot 100 = 80\%$$

$$4 \cdot 100 = 400\%$$

Cálculo de porcentagem com regra de três

Algumas situações envolvendo **porcentagem** podem ser resolvidas por meio de uma regra de três simples.

Sempre que utilizarmos a **regra de três** no intuito de determinar **porcentagens,** devemos relacionar a parte do todo com o valor de **100%.**

Obs.: Nas situações envolvendo uma **porcentagem,** realizamos a **multiplicação** cruzada por ser uma grandeza diretamente proporcional.

Exemplo 01

Determine o valor de 95% de R$ 105,00

%	R$
100	105
95	x

Solução:

$$100x = 95 \cdot 105$$

$$100x = 9975$$

$$x = \frac{9975}{100}$$

$$x = 99,75 \text{ reais}$$

Portanto, 95% de R$ 105,00 é igual a R$ 99,75.

Exemplo 02

Em uma sala de 40 alunos, foi realizada uma pesquisa, a qual apontou que 30 alunos gostam de praticar esportes. Qual é a porcentagem de alunos que gostam de esportes?

%	Alunos
100	40
x	30

Solução:

$$40x = 100 \cdot 30$$

$$40x = 3000$$

$$x = \frac{3000}{40}$$

$$x = 75\%$$

Temos que 75% dos alunos dessa classe gostam de esportes.

Exemplo 03

Pedro acertou 21 questões de uma prova, que correspondem a 70% do total de questões. Quantas questões tinha a prova?

%	Questões
100	x
70	21

Solução:

$$70x = 21.100$$

$$70x = 2100$$

$$x = \frac{2100}{70}$$

$$x = 30$$

A prova tinha 30 questões.

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

Exemplo 04

Em uma promoção, o preço de um objeto foi reduzido de R$ 76,00 para R$ 57,00. Calcule o valor do desconto em porcentagem.

Solução:

Devemos primeiramente determinar o valor real do desconto: 76 – 57 = 19. Ao compararmos o valor do desconto com o valor sem o desconto, obtemos o valor percentual.

%	R$
100	76
x	19

$$76x = 100 \cdot 19$$

$$76x = 1900$$

$$x = \frac{1900}{76}$$
$$x = 25\%$$

O desconto dado foi de 25%.

Exemplo 05

Uma conta de restaurante, incluindo os 10% de serviço, ficou em R$ 143,00. Qual o valor da conta sem a taxa de serviço?

%	R$
100 + 10	143
100	x

Solução:

$$110x = 143 \cdot 100$$

$$110x = 14300$$

$$x = \frac{14300}{110}$$
$$x = 130$$

A conta sem o valor do serviço é de R$ 130,00.

Juros Simples e Compostos

Os juros simples e compostos são cálculos efetuados com o objetivo de corrigir os valores envolvidos nas transações financeiras, isto é, a correção que se faz ao emprestar ou aplicar uma determinada quantia durante um período de tempo.

O valor pago ou resgatado dependerá da taxa cobrada pela operação e do período que o dinheiro ficará emprestado ou aplicado. Quanto maior a taxa e o tempo, maior será este valor.

Diferença entre juros simples e compostos

Enquanto nos juros simples a correção aplicada em todo o período leva em consideração apenas o valor inicial envolvido, nos juros compostos a correção é feita em cima de valores já corrigidos.

Por isso, os juros compostos também são chamados de juros sobre juros, ou seja, o valor é corrigido sobre um valor que também já foi corrigido.

Sendo assim, para períodos maiores de aplicação ou empréstimo a correção por juros compostos fará com que o valor final a ser recebido ou pago seja bem maior que o valor inicialmente aplicado ou emprestado.

A grande maioria das operações financeiras utiliza a correção pelo sistema de juros compostos. Os juros simples se restringem as operações de curto período de tempo.

Fórmula de juros simples

Os juros simples são calculados aplicando a seguinte fórmula:

$$J = C.i.t$$

Sendo,

J: juros
C: valor inicial da transação, chamado em matemática financeira de capital
i: taxa de juros (valor normalmente expresso em porcentagem)
t: período da transação

Podemos ainda calcular o valor total que será resgatado (no caso de uma aplicação) ou o valor a ser quitado (no caso de um empréstimo) ao final de um período predeterminado.

Esse valor, chamado de **montante**, é igual a soma do capital com os juros, ou seja:

$$M = C + J$$

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

Podemos substituir o valor de **J**, na fórmula acima e encontrar a seguinte expressão para o montante:

M = C + J

M = C + C.i.t

M = C. (1 +i.t)

A fórmula que encontramos é uma função afim, desta forma, o valor do montante cresce linearmente em função do tempo.

Exemplo 1

Se o capital de R$ 1 000,00 rende mensalmente R$ 25,00, qual é a taxa anual de juros no sistema de juros simples?

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema.

C = R$ 1 000,00
J = R$ 25,00
t = 1 mês
i = ?

Agora que fizemos a identificação de todas as grandezas, podemos substituir na fórmula dos juros:

$$J = C.i.t$$

$$25 = 1000.i.1$$

$$i = \frac{25}{1000}$$

$$i = 0{,}025 = 2{,}5\%$$

Entretanto, observe que essa taxa é mensal, pois usamos o período de 1 mês. Para encontrar a taxa anual precisamos multiplicar esse valor por 12, assim temos:

i = 2,5.12= 30% ao ano

Exemplo 2

Ao ser aplicado no regime de juro simples, um capital R$ 3 800,00, após 2 ano e 6 meses, rendeu um montante de R$ 8 360,00 a uma taxa de 48% a.a. Determine o juros e o montante desse capital aplicado ao final do período.

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema.

C = R$ 3 800,00
M = R$ 8 360,00
t = 2 anos e 6 meses = 30 meses
i = 48% ao ano ÷ 12 = 4% ao mês ÷ 100 = 0,04
J =?
M=?

Agora que fizemos a identificação de todas as grandezas, podemos substituir na fórmula dos juros:

Entretanto, observe que essa taxa é anual, pois usamos o período de 30 meses. Para encontrar a taxa mensal precisamos dividir esse valor por 12, assim temos:

48% ao ano ÷ 12 = 4% ao mês ÷ 100 = 0,04

$$\mathbf{J = C.i.t}$$

$$J = 3\,800\,.\,0{,}04\,.\,30$$

$$J = 4\,560$$

Para o cálculo do montante, aplicamos a fórmula **M = C + J.** Logo temos:

M = 3 800 + 4 560 = 8360

Portanto, o capital rendeu juros de R$ 4 560,00 e montante R$ 8 360,00 aplicado ao final do período.

Exemplo 03

Ao ser aplicado no regime de juro simples, um capital rende, após 1 ano e 8 meses, juro de R$ 850,00 a uma taxa de 36% a.a.(taxa ao ano). Determine o capital aplicado e o montante ao final ao final do período.

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema e em seguida aplicamos as fórmulas do juro simples e montante.

J = 850
i = 36% a.a. = 36 ÷ 12 = 3% a.m.(taxa mensal) ÷ 100 = 0,03
t = 1 anos e 8 meses = 20 meses
J =?
M=?

$$\mathbf{J = C.i.t}$$

$$850 = C\,.\,0{,}03\,.\,20$$

$$850 = 0{,}6.C$$

$$C = \frac{850}{0{,}6} = 1416{,}67$$

M = C + J

M = 1416,67 + 850

M = 2266,67

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

Exemplo 04

De quanto tempo um capital necessita para ser quadruplicado, se aplicado a uma taxa de juro simples de 48% a.a.?

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema e em seguida aplicamos a fórmula do juro simples.

Dados:
C = x
M = 4.x
J = ?
i = 48% a.a. ÷ 100 = 0,48
t = ?

- Cálculo do juros

M = C + J
4.x = x + J
4x – x = J
J = 3x

- Cálculo do Período(tempo)

$$J = C.i.t$$

$$3x = x\,.\,0{,}48\,.\,t$$

$$3x = 0{,}48xt$$

$$t = \frac{3x}{0{,}48x} = 6{,}25\ anos$$

Fórmula de juros compostos

O **montante** capitalizado a **juros compostos** é encontrado aplicando a seguinte fórmula:

$$\mathbf{M = C.(1 + i)^{t}}$$

Sendo,

M: montante
C: capital
i: taxa de juros
t: período de tempo

Diferente dos juros simples, neste tipo de capitalização, a fórmula para o cálculo do montante envolve uma variação exponencial. Daí se explica que o valor final aumente consideravelmente para períodos maiores.

Exemplo 1

Calcule o montante produzido por R$ 2 000,00 aplicado à taxa de 4% ao mês, após quatro meses, no sistema de juros compostos.

Solução:

Identificando as informações dadas, temos:

C = 2 000
i = 4% ou 0,04 ao mês
t = 4 meses
M = ?

Substituindo esses valores na fórmula de juros compostos, temos:

$$\mathbf{M = C.(1 + i)^{t}}$$

$$M = 2000\,(1 + 0{,}04)^4$$
$$M = 2000.1{,}1698$$
$$M = 2339{,}71$$

Portanto, ao final de um ano o montante será igual a R$ 2 339,71.

Exemplo 2

Calcule o período que um capital R$ 2 000,00 aplicado à taxa de 4% ao mês rendeu um montante de R$ 2 432,00 no sistema de juros compostos. Use log 1,216 = 0,084 e log 1,04 = 0,017

Solução:

Identificando as informações dadas, temos:

C = 2 000
i = 4% ou 0,04 ao mês
M = 2 432
t = ?

Substituindo esses valores na fórmula de juros compostos, temos:

$$M = C.(1 + i)^{t}$$

$$2\,432 = 2\,000.(1 + 0{,}04)^{t}$$

$$\frac{2\,432}{2\,000} = 1{,}04^{t}$$

$$1{,}216 = 1{,}04^{t}$$

Aplicando o logaritmo, nos primeiro e segundo membros, temos:

$$\log 1{,}216 = \log 1{,}04^{t}$$

$$0{,}084 = t.\ \log 1{,}04$$

$$0{,}084 = t.\ 0{,}017$$

$$t = \frac{0{,}084}{0{,}017}$$

$$t = 4{,}9 \cong 5 \text{ meses}$$

Portanto, o período da aplicação no regime de juros compostos será igual a 5 meses.

Lucro e prejuízo

O **lucro** é considerado todo o rendimento positivo obtido através de uma negociação econômica ou de qualquer outro gênero. Na economia, o lucro é tudo o que foi ganhou ou recebido a partir de um ato de comercialização financeira.

O **prejuízo financeiro** ocorre quando alguém ou alguma instituição gasta mais do que arrecada.
Em contabilidade, o prejuízo é o oposto do lucro. Ambos são saldos na conta denominada "resultados" ou "lucros e perdas" , que podem ocorrer ao final do exercício (em geral, um período de doze meses).

Fórmulas:

• $V = C + L$; • $V = C – L$; • $P_L = \frac{L}{C}$; • $P_L = \frac{L}{V}$; • $P_P = \frac{P}{V}$; • $P_P = \frac{P}{C}$

Onde:

- **V** → venda
- **C** → compra ou custo
- **L** → lucro ou rendimento
- **P_L** → porcentagem do lucro
- **P_P** → porcentagem do prejuízo

Exemplo 01

Um quadro, cujo preço de custo era de R$ 800,00, foi vendido por R$ 980,00. De quanto por cento foi o lucro sobre o preço de custo?

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema e em seguida aplicamos as fórmulas do lucro e da porcentagem do lucro sobre o preço de custo.

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

C = 800
V = 980

- Cálculo do lucro (L) :

V = C + L
980 = 800 + L
L = 980 – 800 = 180

- cálculo da porcentagem do lucro sobre o preço de custo (P_L)

$$P_L = \frac{L}{C} \cdot 100\%$$

$$P_L = \frac{180}{800} \cdot 100\%$$

$$P_L = 22{,}5\%$$

Portanto, o percentual do lucro sobre o preço de custo foi de 22,5%.

Exemplo 02

Um produto que custa R$ 780,00 é vendido com um prejuízo de 30% sobre o preço de venda. Qual é o preço de venda dessa mercadoria?

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema e em seguida aplicamos as fórmulas da porcentagem do prejuízo sobre o preço de custo e venda com prejuízo.

Dados:

C = 780

P_P = 30% = $\frac{30}{100}$

P = ? (prejuízo)

V = ?

- Cálculo do prejuízo.

$$P_P = \frac{P}{C}$$

$$\frac{30}{100} = \frac{P}{780}$$

$$100P = 23400$$

$$P = \frac{23400}{100}$$

$$P = 234$$

- Cálculo da venda com prejuízo.

V = C – P
V = 780 – 234
V = 546

Logo, o preço de venda dessa mercadoria, é R$ 546,00

Exemplo 03

Marina teve um lucro de R$ 56,00 ao vender um objeto por R$ 194,00. Qual foi o preço de custo desse objeto?

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema e em seguida aplicamos a fórmula da venda com lucro.

Dados:

V = 194
L = 56,00
C = ?

V = C + L
C = V – L
C = 194 – 56 = 138

Logo, o preço de custo é R$ 138,00.

Exemplo 04

Um certo número de ações vendidas por R$ 1200,00 deu um lucro de R$ 300,00 sobre o preço de venda. De quanto por cento foi o lucro sobre o preço de venda?

Solução:

Primeiro, vamos identificar cada grandeza indicada no problema e em seguida aplicamos as fórmulas do lucro e da porcentagem do lucro sobre o preço de custo.

Dados:

V = 1200
L = 300
P_L = ?

$$P_L = \frac{L}{V} \cdot 100\%$$

$$P_L = \frac{300}{1200} \cdot 100\%$$

$$P_L = 25\%$$

Logo, a taxa percentual do lucro sobre o preço de venda é 25%

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

Aumentos e descontos sucessivos

É bastante comum que sejam feitos aumentos sucessivos em salários ou descontos sucessivos em faturas ou preços de mercadorias. Por isso, é importante saber efetuar esse tipo de cálculo com a finalidade, entre outras, de controlar esses aumentos e descontos

A cada mês que você passa devendo um valor, os juros vão aumentando, e a isso damos o nome de **aumentos sucessivos**. Porém, em algumas compras, quando as lojas entram em promoção, são aplicados **descontos**. Se você pagar a vista, é aplicado mais um **desconto**. A isso damos o nome de **descontos sucessivos**.

I . Valor final com aumentos sucessivos de taxas de porcentagem.

$$V = V_0 \,.\, (1 + i_1) \,.\, (1 + i_2) \,.\, \ldots \,.\, (1 + i_n)$$

II . Valor final com descontos sucessivos de taxas de porcentagem.

$$V = V_0 \,.\, (1 - i_1) \,.\, (1 - i_2) \,.\, \ldots \,.\, (1 - i_n)$$

III . Taxa total com aumentos sucessivos de taxas de porcentagem.

$$i_T + 1 = (1 + i_1) \,.\, (1 + i_2) \,.\, \ldots \,.\, (1 + i_n)$$

IV . Taxa total com descontos sucessivos de taxas de porcentagem.

$$i_T + 1 = (1 - i_1) \,.\, (1 - i_2) \,.\, \ldots \,.\, (1 - i_n)$$

Onde:

- **V** → valor final
- **V_0** → valor inicial
- **i_T** → taxa total
- **$i, i_1, i_2, i_3, \ldots, i_n$** → taxas sucessivas.

Obs.: Para os cálculos de taxas percentuais, multiplicamos o resultado por 100%.

Exemplo 01

Uma pessoa teve um aumento de salário de 5% no mês de janeiro e outro aumento de 10% no mês seguinte. Calcule a taxa total do aumento que essa pessoa recebeu nesses dois meses?

Solução:

Primeiro, vamos identificar as taxas percentuais de aumento em cada mês indicadas no problema e em seguida aplicamos a fórmula da taxa total do aumento nos dois meses.

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

Dados:

$i_1 = 5\%$
$i_2 = 10\%$
$i_T = ?$

Cálculo da taxa percentual total dos dois aumentos

$$i_T + 1 = (1 + i_1).(1 + i_2)$$
$$i_T + 1 = (1 + 0{,}05).(1 + 0{,}10)$$
$$i_T + 1 = 1{,}05 . 1{,}10$$
$$i_T + 1 = 1{,}155$$
$$i_T = 1{,}155 - 1$$
$$i_T = 0{,}155$$
$$i_T = 0{,}155 . (100\%)$$

Logo, a taxa percentual total do aumento nos dois meses, é de 15,5%

Exemplo 02

Um certo produto era vendido a R$50,00 e, com a chegada das festas de final de ano, sofreu um acréscimo de 20%. Porém, após as festividades nem todo o estoque foi vendido e o dono da loja resolveu reduzir o preço em 25%. Qual o valor do produto após as festividades?

Solução:

Primeiro, vamos identificar o valor inicial do produto e as taxas percentuais de aumento e desconto atribuídas indicadas no problema e em seguida aplicamos a fórmula do valor final após as taxas do aumento e desconto no produto.

Dados:

$V_0 = 50$
$i_1 = 20\% = 20 \div 100 = 0{,}20$
$i_2 = 25\% = 25 \div 100 = 0{,}25$
$V = ?$

● Cálculo do valor final após sofrer aumento e desconto sucessivos.

$$V = V_0 .(1 + i_1).(1 + i_2)$$
$$V = 50 .(1 + 0{,}20).(1 - 0{,}25)$$
$$V = 50 .1{,}20 . 1{,}25$$
$$V = 45$$

Logo, o valor do produto é R$ 45,00

Exemplo 03

Colégio Estadual Guilherme Dourado
guilhermedourado@ue.seduc.to.gov.br/3421-3112
Rua Adeuvaldo de Morais, 284- Centro – CEP – 77805-120 - Araguaína – TO.

A proprietária de uma loja de produtos importados, devido a instabilidade cambial e a escassez de mercadorias, realizou 3 acréscimos sucessivos de 5%, 6%, 3%, respectivamente sobre cada produto. Se fosse realizar um único acréscimo aos produtos, equivalente a esses três acréscimos, qual seria a porcentagem?

Solução:

Primeiro, vamos identificar as taxas percentuais de aumento em cada mês indicadas no problema e em seguida aplicamos a fórmula da taxa total do aumento nos três meses.

Dados:

$i_1 = 5\%$
$i_2 = 6\%$
$i_3 = 3\%$
$i_T = ?$

● Cálculo da taxa percentual total

$$i_T + 1 = (1 + i_1).\ (1 + i_2).\ (1 + i_3)$$
$$i_T + 1 = (1 + 0{,}05)\ .\ (1 + 0{,}06)\ .\ (1 + 0{,}03)$$
$$i_T + 1 = 1{,}05\ .\ 1{,}06\ .\ 1{,}03$$
$$i_T + 1 = 1{,}1463$$
$$i_T = 1{,}1463 - 1$$
$$i_T = 0{,}1463$$
$$i_T = 0{,}1463\ .\ (100\%)$$
$$i_T = 14{,}63\%$$

Logo, a taxa percentual total do aumento nos três meses, é de 14,63%

Exemplo 04

Um veículo novo custa R$ 30.000,00 e sofre depreciações de 20% e 15% nos dois primeiros anos. Qual o valor do veículo após a depreciação (descontos)?

Solução:

Primeiro, vamos identificar as taxas percentuais de depreciações (descontos) em cada mês indicadas no problema e em seguida aplicamos a fórmula da taxa total do aumento nos dois meses.

Dados:

$V_0 = 30000$
$i_1 = 20\%$
$i_2 = 15\%$
$V = ?$

● Cálculo do valor final após sofrer depreciações sucessivas.

$$V = V_0\ .(1 + i_1).\ (1 + i_2)$$
$$V = 30\ 000\ .(1 - 0{,}20)\ .\ (1 - 0{,}15)$$
$$V = 30\ 000\ .0{,}80\ .\ 0{,}85$$
$$V = 20\ 400$$

Portanto, o valor final após as depreciações, é de R$ 20 400,00.