APS 4

(1) a. Taxa de devolução de 20/15, ou seja, de 4/3 ao dia

Podemos modelar como uma variável aleatória X o número de devoluções que uma loja tem num dia

Dizemos que X segue uma distribuição de Poisson com taxa média de 4/3, ou seja $\begin{cases} X \sim \text{Poisson}(4/3) \\ \lambda = 4/3 \end{cases}$

Queremos:

$$P\left(\begin{matrix}\text{até} \\ 2\end{matrix} \middle| \begin{matrix}\text{teve} \\ \text{devolução}\end{matrix}\right) = P(X \leq 2 \mid X > 0) = \frac{P(X \leq 2 \cap X > 0)}{P(X>0)}$$

$$P(X \leq 2 \mid X > 0) = \frac{P(X=1) + P(X=2)}{1 - P(X=0)}$$

Modelo Poisson:

$$P(X = x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$P(X \leq 2 \mid X > 0) = \frac{\frac{e^{-\frac{4}{3}}(4/3)^1}{1!} + \frac{e^{-\frac{4}{3}}.(4/3)^2}{2!}}{1 - \frac{e^{-\frac{4}{3}}.(4/3)^0}{0!}} = \frac{0{,}351 + 0{,}234}{1 - 0{,}264} = 0{,}795 = 79{,}5\%$$

Os valores da distribuição de X a seguir serão úteis para o próximo item.
Foram calculados aplicando o modelo Poisson

x	$P(X=x)$
0	0,264
1	0,351
2	0,234

1 item (b) Precisamos construir uma nova variável aleatória Y com base nas probabilidades de X.

A variável Y vai ter o valor do bônus distribuído da seguinte forma em função da distribuição de X

y	$P(Y=y)$
15	$P(X=0)$
9	$P(X=1)+P(X=2)$
0	$1-P(X\leq 2)$

Substituindo os valores do item (a) $\Rightarrow$

y	$P(Y=y)$	y^2 ← ÚTIL PARA ACHAR $Var(Y)$
0	0,151	0
9	0,586	81
15	0,264	225

Bônus esperado é igual a $E(Y)=\sum_{\text{todo } y} y\cdot P(Y=y)$

$$E(Y)=15\cdot(0{,}264)+9\cdot(0{,}586)+0\cdot(0{,}151)=\boxed{9{,}226}$$

O desvio padrão do bônus é $DP(Y)=\sqrt{Var(Y)}$

$$Var(Y)=E\left[(Y-E(Y))^2\right]=E(Y^2)-E(Y)^2=106{,}77-(9{,}226)^2=21{,}640$$

$$E(Y^2)=\sum y^2\cdot P(X=y)=0\times 0{,}151+81\times 0{,}586+225\times 0{,}264=106{,}77$$

$$DP(Y)=\sqrt{Var(Y)}=\boxed{4{,}651}$$

1 item C

Vamos supor que cada loja é um ensaio independente de Bernoulli, com probabilidade de sucesso p dada pela soma P(X=0) + P(X=1) + P(X=2), em que X é a variável aleatória do item À

Além disso:
As lojas precisam ser idênticas (mesmo porte, público, produto, etc)
A probabilidade p de sucesso é a mesma em todas as lojas
As lojas precisam ser independentes

Portanto p = 0.849 e n=10

Seja o número de sucessos a variável W

$$W\sim Bin(10;0{,}849)$$

(2) 8500 funcionários (população grande)

$p = 0{,}080$ (Prob. de um funcionário receber spam em um dia)

Y: número de funcionários que recebem SPAM entre os 40 selecionados)

$Y \sim Bin(40; 0{,}08)$

$$P(Y=5 \mid Y \geq 1) = \frac{P(Y=5 \cap Y \geq 1)}{P(Y \geq 1)} = \frac{P(Y=5)}{1 - P(Y=0)} =$$

$$= \frac{\binom{40}{5} 0{,}08^5 \cdot 0{,}92^{35}}{1 - \binom{40}{0} 0{,}08^0 \, 0{,}92^{40}} = \frac{0{,}11648}{1 - 0{,}03561} = 0{,}12078 = \boxed{12{,}1\%}$$