Ecuaciones Diferenciales - Examen Final

El teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Guido Arnone

27 de diciembre de 2019

Recordemos que dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y una distribución $T \in \mathscr{D}'(U)$, se define su *derivada débil* con respecto a cierta coordenada $i \in [\![n]\!]$ por

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial_i \varphi \rangle.$$

Usando partes, esto coincide con la noción usual para funciones suaves: la derivada débil de una función suave coincide con la distribución que induce su derivada usual. Dado un polinomio $p = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, se puede considerar el operador *operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes* asociado a p,

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : \mathscr{D}' &\longrightarrow \mathscr{D}' \\ T &\mapsto \sum_\alpha c_\alpha D^\alpha T. \end{aligned}$$

Se define también el *operador adjunto formal* de $\mathscr{L}$ como

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^* : \mathscr{D}' &\longrightarrow \mathscr{D}' \\ T &\mapsto \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha T, \end{aligned}$$

el cual satisface $\langle \mathscr{L} T, \varphi \rangle = \langle T, \mathscr{L}^* \varphi \rangle$ para todo $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$. Análogamente se puede considerar la (co)restricción de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}^*$ a $\mathscr{C}_c^\infty(U)$.

Una *solución fundamental* para $\mathscr{L}$ es una distribución $T \in \mathscr{D}'$ que satisface la ecuación

$$\mathscr{L} T = \delta_0$$

con δ_0 la delta de Dirac. Esto es reminiscente a la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

para la cual existe una solución $\Phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definida por

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

que «concentra toda la masa en el cero». De hecho, en el sentido distribucional Φ es una solución fundamental para el operador $-\Delta$. Sabemos también que si $f \in \mathscr{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $u := \Phi * f$ es de clase $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface la ecuación de Poisson,

$$-\Delta u = f.$$

El objetivo de esta presentación es probar el teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que garantiza la existencia de soluciones fundamentales para cualquier operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes no nulo. A partir de este resultado y extendiendo la noción de convolución al contexto de las distribuciones, como en el caso del laplaciano se puede concluir que toda ecuación de la forma

$$\mathscr{L}u = f \tag{1}$$

tiene una solución en $\mathscr{D}'$. De hecho, si f es suave la solución obtenida también lo es.

Sobre la Notación

Si $q = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ es un polinomio de grado m, escribiremos

$$|q|_k = \text{máx}\{|c_\alpha| : |\alpha| = k\}$$

para cada $k \leq m$.

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, notaremos $(,)$ y $\|\cdot\|$ al producto interno y norma de $L^2(U)$ respectivamente. Indicaremos el dominio sólo cuando no se deduzca del contexto.

La expresión «operador diferencial» y el símbolo $\mathscr{L}$ referirán siempre a un operador diferencial parcial lineal (no nulo) con coeficientes constantes, y escribiremos $q(D)$ al operador asociado a un polinomio $q \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$.

La desigualdad de Hörmander y soluciones en L^2

El resultado de principal utilidad para relacionar las normas en L^2 de una función test y su imagen por un operador diferencial será el siguiente,

Teorema 1 (Hörmander). Sae $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe entonces $C > 0$ tal que

$$\|\mathscr{L}\varphi\| \geq C\|\varphi\|$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, y ésta depende sólamente de los términos de orden máximo de p y el diámetro de Ω.

Demostración. Notemos $\rho := \sup_\Omega \|x\|$. Para cada $j \in [\![n]\!]$, definimos $p_j(D)$ como el operador diferencial que satisface la ecuación

$$p(D)(x_j\varphi) = x_j p(D)\varphi + p_j(D)\varphi$$

para toda función $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como dado α un multiíndice y $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es

$$D^\alpha x_j \varphi = x_j \cdot \sum_{\beta \leq \alpha, \beta_1 = 0} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\varphi + \sum_{\beta \leq \alpha, \beta_1 = 1} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\varphi,$$

el operador $p_j(D)$ está bien definido y viene inducido por un polinomio, que notaremos p_j. Además, de la ecuación anterior se observa que $p_j(D)$ es cero si y sólo si p no tiene monomios que contengan a la variable X_j. Dicho de otra forma, el operador diferencial $p_j(D)$ es nulo si y sólo si «en $p(D)$ no hay derivadas con respecto a la j-ésima variable».

De ser no nulo, el orden de p_j debe ser menor al de p, y existe $j \in [\![n]\!]$ tal que p_j es de orden exactamente $m-1$ y $|p_j|_{m-1} \geq |p|_m$. Esto nos dice que para terminar la demostración alcanzaría probar que para todo $j \in [\![n]\!]$ es ¿por qué?

$$\|p_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|p(D)\varphi\|. \tag{$*$}$$

En efecto, de valer $(*)$ sería

$$\|(((p_{j_1})_{j_2})\cdots)_{j_k}(D)\varphi\| \leq 2A\cdots 2(m-1)A2mA\|p(D)\varphi\| = m!(2A)^m\|p(D)\varphi\|$$

con $q = (((p_{j_1})_{j_2})\cdots)_{j_k}$ de grado 0, así que

$$\|q\|_0 \geq \cdots \geq \|p\|_m$$

y entonces

$$\|p(D)\varphi\| \geq \frac{1}{m!(2A)^m}\|q\varphi\| = \frac{1}{m!(2A)^m}\|q\|_0\|\varphi\| \geq \frac{\|p\|_m}{m!(2A)^m}\|\varphi\|.$$

Para terminar, fijemos $j \in [\![n]\!]$ y veamos $(*)$ por inducción en m. Si $m=0$, entonces $P_j(D)$ es nulo y la desigualdad se satisface. Supongamos ahora que $m>1$ y el enunciado es cierto para polinomios de grado $m-1$. La desigualdad junto con la definición de $p_j(D)$ implican

$$\|p(D)(x_i\varphi)\| \leq (2m+1)A\|p(D)\varphi\| \tag{$\Diamond$}$$

para cualquier $i \in [\![n]\!]$. Aplicando esto a p_j, se obtiene entonces

$$\|p_j(D)\varphi\| \leq (2m-1)A\|p_j(D)\varphi\|.$$

Ahora, observemos[1] que

$$(p(D)(x_j\varphi), p_j(D)\varphi) = (x_j p(D)\varphi, p_j(D)\varphi) + \|p_j(D)\varphi\|^2,$$

y entonces

$$\begin{aligned}\|p_j(D)\varphi\|^2 &= (p(D)(x_j\varphi), p_j(D)\varphi) - (x_j p(D)\varphi, p_j(D)\varphi)\\ &= (p_j(D)^*(x_j\varphi), p(D)^*\varphi) - (x_j p(D)\varphi, p_j(D)\varphi).\end{aligned}$$

Aplicando $(\Diamond)$ a $p_j(D)^*$ es

$$\begin{aligned}\|p_j(D)\varphi\|^2 &\leq (2m-1)A\|p_j(D)^*\varphi\|\|p(D)^*\varphi\| + \|x_j p(D)\varphi\|\|p_j(D)\varphi\|\\ &\leq (2m-1)A\|p_j(D)\varphi\|\|p(D)\varphi\| + A\|p(D)\varphi\|\|p_j(D)\varphi\|\\ &= 2mA\|p_j(D)\varphi\|\|p(D)\varphi\|,\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ◀

A partir de esta desigualdad, se obtiene inmediatamente la existencia de soluciones de (1) en L^2 para abiertos acotados,

Corolario 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Si $\mathscr{L} = p(D)$ es un operador diferencial, la ecuación

$$\mathscr{L}u = g.$$

tiene solución en $L^2(\Omega)$ para toda $g \in L^2(\Omega)$. Más aún, existe una constante $C>0$ que sólo depende de $\mathscr{L}$ y Ω de forma que

$$\|u\| \leq C\|g\|$$

para cada $u, g \in L^2(\Omega)$ tales que $\mathscr{L}u = g$.

[1] Usamos aquí que los operadores diferenciales conmutan entre sí, y en particular es $\|q(D)\varphi\|^2 = \|q(D)^*\varphi\|^2$.

Demostración. Por la desigualdad de Hörmander, la (co)restricción de un operador diferencial a $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ resulta una función lineal inyectiva con inversa continua respecto de la norma en $L^2(\Omega)$. Notando $E := \operatorname{im} \mathscr{L}^*$, esto significa que el operador

$$(\mathscr{L}^*)^{-1} : \mathscr{L}^*\varphi \in E \mapsto \varphi \in L^2(\Omega)$$

está bien definido y resulta continua con respecto a la norma (en el caso de E, inducida) de $L^2(\Omega)$. Componiendo con el funcional representado por g, se obtiene un funcional

$$\eta : \mathscr{L}^*\varphi \in E \mapsto (\varphi, g) \in \mathbb{R},$$

que podemos extender de forma única a $\overline{E}$. Notemos $\widetilde{\eta}$ a su extensión. Como $\overline{E}$ es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$, es de Hilbert, y por el teorema de representación de Riesz existe $u \in \overline{E} \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle g, \varphi \rangle = (\varphi, g) = (u, \mathscr{L}^*\varphi) = \langle u, \mathscr{L}^*\varphi \rangle = \langle \mathscr{L}u, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$. Vemos así que $\mathscr{L}u = g$.

Por último, dado que $\widetilde{\eta}$ es la extensión por densidad de η sabemos que $\|\widetilde{\eta}\|_{\overline{E}^*} = \|\eta\|_{E^*}$, y al u representar a $\widetilde{\eta}$ en definitiva es $\|u\| = \|\eta\|$. Como por definición es $\eta = (g, -) \circ (\mathscr{L}^*)^{-1}$, esto nos dice que

$$\|u\| = \|\eta\| \leq \|(\mathscr{L}^*)^{-1}\| \|g\|,$$

así que podemos tomar $C = \|(\mathscr{L}^*)^{-1}\|$. ◀

La relación entre $\operatorname{sop} u$ y $\operatorname{sop} \mathscr{L}u$

Observación 1. Si $\mathscr{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}(\psi) = e^{\varepsilon x_1} \mathscr{L}(e^{-\varepsilon x_1}\psi)$$

es un operador diferencial. Basta verlo para $\mathscr{L} = D^\alpha$, pues la asignación $\mathscr{L} \mapsto \widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}$ es lineal. Procedemos por inducción en α_1, donde el caso base es cierto pues $\widetilde{D^{(0,\alpha')}} = D^{(0,\alpha')}$. Si $\alpha_1 > 0$ y $\widetilde{D^{(\alpha_1 - 1,\alpha')}} = q(D)$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon x_1} D^\alpha (e^{-\varepsilon x_1}\psi) &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1 - 1, \alpha')}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-\varepsilon x_1}\psi)\right) \\ &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1 - 1, \alpha')}\left(-\varepsilon e^{-\varepsilon x_1}\psi + e^{-\varepsilon x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\psi\right) \\ &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1 - 1, \alpha')}(e^{-\varepsilon x_1}(-\varepsilon\psi)) + e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1 - 1, \alpha')}(e^{-\varepsilon x_1}\partial_1\psi) \\ &= -\varepsilon q(D)(\psi) + q(D)(\partial_1\psi) = -\varepsilon q(D)(\psi) + (X_1 q)(D)(\psi). \end{aligned}$$

Más todavía, los términos de orden mayor de $\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}$ coinciden con los de $\mathscr{L}$ pues

$$e^{\varepsilon x_1} D^\alpha (e^{-\varepsilon x_1}\varphi) = e^{\varepsilon x_1} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha e^{-\varepsilon x_1} D^{\alpha - \beta}\varphi,$$

y el término de orden máximo de esta expresión es $e^{\varepsilon x_1} D^{\mathbf{0}} e^{-\varepsilon x_1} D^\alpha \varphi = D^\alpha \varphi$. De este modo «podemos tomar la misma constante que para $\mathscr{L}$ en la desigualdad de Hörmander».

Proposición 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe $C' > 0$ tal que para todo $\eta \in \mathbb{R}$ es

$$\int_\Omega e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 \geq C \int_\Omega e^{\eta x_1} |\varphi|^2$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $C > 0$ una constante que satisfaga la desigualdad de Hörmander para $\mathscr{L}$. Por la observación anterior, podemos tomar C de forma que para cada $\eta \in \mathbb{R}$ poniendo $\varepsilon = \eta/2$ es

$$\|\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}(e^{\varepsilon x_1}\varphi)\| \geq C \|e^{\varepsilon x_1}\varphi\|.$$

Elevando al cuadrado esta desiguadad, se obtiene precisamente que

$$\int_\Omega e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 \geq C \int_\Omega e^{\eta x_1} |\varphi|^2.$$

◀

Corolario 2. Si $\mathscr{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\mathscr{L}\varphi$ se anula en un semiespacio abierto H, entonces φ se anula en H.

Demostración. Veámoslo primero para $H_0 := \{x_1 > 0\}$. Basta ver que $\|\varphi\|_{H_0} = \|\varphi\|_{\Omega \cap H_0} = 0$. En efecto, si $\Omega \supset \operatorname{sop}\varphi$, por la Proposición 1 es

$$\begin{aligned} 0 \leq C \int_{H_0 \cap \Omega} |\varphi|^2 &\leq C \int_{H_0 \cap \Omega} e^{\eta x_1}|\varphi|^2 \leq \int_\Omega e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1}|\varphi|^2 \\ &= \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2, \end{aligned}$$

y el lado derecho tiende a cero cuando $\eta \to \infty$.

Si ahora H es un hiperplano cualquiera, rotando y trasladando obtenemos un difeomorfismo suave Revisar! $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que envía H_0 a H. Como $\operatorname{sop}\mathscr{L}(\varphi \circ \psi) \subset \operatorname{sop}(\mathscr{L}\varphi) \circ \psi$, sabemos que $\mathscr{L}\varphi \circ \psi$ se anula en H_0, y por lo tanto así lo hace $\varphi \circ \psi$. Esto concluye la demostración. ◀

Corolario 3. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\mathscr{L}\varphi$ está soportada en $B_r(0)$, entonces φ está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Podemos escribir a $B_r(0)$ como intersección de semiespacios. En el complemento de cada uno, sabemos que $\mathscr{L}\varphi$ se anula, así que φ también lo hace. ◀

Proposición 2. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Si $\mathscr{L}f$ está soportada en $B_r(0)$, entonces f está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Basta ver que existen $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $\operatorname{sop} f_\varepsilon \subset B_{r+\varepsilon}(0)$ y $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f$. En tal caso, si $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está soportada en un compacto $K \subset B_r(0)^c$, existe $\mu > 0$ tal que $K \subset B_{r+\mu}(0)^c$ y por lo tanto

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} (f_\varepsilon, \varphi) = 0$$

ya que $\operatorname{sop} f_\varepsilon \cap K = \varnothing$ para $\varepsilon \ll \mu$.

Dado χ un núcleo regularizante, definimos $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$. Esto garantiza la convergencia: veamos para terminar que f_ε está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$. Como éstas son ahora una funciones suaves, basta ver que $\mathscr{L} f_\varepsilon$ está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$ para cada $\varepsilon > 0$. Por definición es

$$\mathscr{L} f * \chi_\varepsilon(z) = \langle \mathscr{L} f, \chi_\varepsilon(z - \cdot)\rangle = \langle f, \mathscr{L}^* \chi_\varepsilon(z-\cdot)\rangle = \langle f, (\mathscr{L}\chi_\varepsilon)(z-\cdot)\rangle = f * (\mathscr{L}\chi_\varepsilon)(z) = \mathscr{L} f_\varepsilon(z),$$

así que si $\mathscr{L} f_\varepsilon(z) \neq 0$ necesariamente sop $\chi_\varepsilon(z-\cdot) \subset B_\varepsilon(z)$ no puede estar contenido fuera de $B_r(0)$, y esto implica que $z \in B_{r+\varepsilon}(0)$.

◀

Aproximación y soluciones en L^2_{loc}

Definición 1. Sean $0 < r < R$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Notaremos

$$N^{\mathscr{L}}_{r,R} = \{v|_{B_r(0)} : v \in L^2(B_R(0)), \quad \mathscr{L} v = 0\}$$

al subespacio de $L^2(B_r(0))$ que consiste de restringir funciones que anulan a $\mathscr{L}$ en $L^2(B_R(0))$.

Lema 1. Sean $0 < r < R$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Si $g \in (N_{r,R,\mathscr{L}})^\perp$, existe $C > 0$ tal que

$$|(\varphi, g)_{B_r(0)}| \le C \|\mathscr{L}\varphi\|_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $\mathscr{L}\varphi = 0$ en $B_R(0)$, sabemos que $\varphi = 0$ allí y por lo tanto $(\varphi, g)_{B_r(0)} = 0$. Si no, sabemos que existe $\psi \in L^2(B_R(0))$ tal que $\mathscr{L}\psi = \mathscr{L}\varphi$. Además, existe $C' > 0$ independiente de ψ y φ tal que $\|\psi\|_{B_R(0)} \le C'\|\mathscr{L}\varphi\|_{B_R(0)}$. Como $g \in (N_{r,R,\mathscr{L}})^\perp$, es

$$(g,\varphi)_{B_r(0)} = (g, \varphi - \psi)_{B_r(0)} + (g, \psi)_{B_r(0)} = (g, \psi)_{B_r(0)}$$

y por lo tanto

$$|(\varphi, g)_{B_r(0)}| = |(g, \psi)_{B_r(0)}| \le \|g\| \cdot \|\psi\|_{B_r(0)} \le \|g\| C' \cdot \|\mathscr{L}\varphi\|_{B_R(0)},$$

así que poniendo $C = \|g\| C'$ se obtiene la desigualdad. ◀

Lema 2. Sean $0 < r < R$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in (N_{r,R,\mathscr{L}})^\perp$, existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Consideremos $E = \{\mathscr{L}\psi|_{B_R(0)} : \psi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)\}$ como subespacio de $L^2(B_R(0))$. El lema anterior nos dice que la aplicación

$$\eta : \mathscr{L}\varphi \in E \mapsto (\varphi, g)_{B_r(0)} \in \mathbb{R}$$

está bien definida, y más aún define un funcional continuo. En particular podemos extenderlo a un funcional $\tilde{\eta} : \overline{E} \subset L^2(B_R(0)) \to \mathbb{R}$ y como éste es de Hilbert, por el teorema de representación de Riesz existe $w \in \overline{E} \subset L^2(B_R(0))$ tal que $\tilde{\eta} \equiv (w, -)_{B_R(0)}$. Esto termina de probar que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = \eta(\mathscr{L}\varphi) = (w, \mathscr{L}\varphi)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$. ◀

Proposición 3. Sean $0 < r < r' < R$. Dado un operador diferencial $\mathscr{L} = p(D)$ y $v \in L^2(B_{r'}(0))$ tal que $\mathscr{L}v = 0$ en $B_{r'}(0)$, existe una sucesión $(v_j)_{j\geq 1} \subset L^2(B_R(0))$ que satisface $\mathscr{L}v_j = 0$ en $B_R(0)$ y

$$v_j \xrightarrow{L^2(B_r(0))} v.$$

Demostración. Supongamos primero que v es suave y de soporte compacto. Notando

$$S = \{w|_{B_r(0)} : w \in L^2(B_R(0)),\ \mathscr{L}w = 0 \text{ en } B_R(0)\} \leq L^2(B_r(0)),$$

basta ver que S es denso en $T := \langle S, v|_{B_r(0)}\rangle$. A su vez, para ello alcanza probar que un funcional $f : T \to \mathbb{R}$ que se anula en S es nulo. Un tal funcional se extiende a $\overline{T}$ y por el teorema de representación de Riesz, existe cierta $g \in L^2(B_r(0))$ tal que $f \equiv (g, -)$.

En definitiva, es suficiente probar que si $g \in L^2(B_r(0))$ es tal que

$$(g, w)_{B_r(0)} = 0$$

para toda $w \in S$, entonces $(g, v)_{B_r(0)} = 0$. Por el Lema 2, sabemos que existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que $(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$ para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considerando las extensiones por cero $\widetilde{g}, \widetilde{w} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de g y w respectivamente, por definición es

$$\langle \mathscr{L}^*\widetilde{w}, \varphi\rangle = (\widetilde{w}, \mathscr{L}\varphi) = (w, \mathscr{L}\varphi)_{B_R(0)} = (g, \varphi)_{B_r(0)} = \langle g, \varphi\rangle$$

y por lo tanto $\mathscr{L}^*\widetilde{w} = \widetilde{g}$. Como $\widetilde{g}$ tiene soporte en $B_r(0)$ y $\widetilde{w}$ tiene soporte compacto, luego $\widetilde{w}$ está soportada en $B_r(0)$. En particular w está soportada en $B_r(0)$, y como $\mathscr{L}v$ se anula allí, es

$$(v, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}v, w)_{B_R(0)} = (\mathscr{L}v, w)_{B_r(0)} = 0.$$

Para terminar, veamos que el resultado sigue siendo cierto cuando v no es suave de soporte compacto. Convolucionando con χ_ε donde χ es una aproximación de la identidad, conseguimos $v_\varepsilon \to v$ en $L^2(B_R(0))$. Eventualmente para $\varepsilon \ll 1$ podemos achicar[2] r' de tal modo que $\mathscr{L}v_\varepsilon$ se anule en una bola de radio $\eta_\varepsilon \in (r, r']$, y aplicar el resultado para funciones suaves, consiguiendo así sucesiones $v_j^i \to v_{1/i}$ en $L^2(B_r(0))$ tales que $\mathscr{L}v_j^i = 0$ en $B_R(0)$ para cada $i \geq 1$. Ahora, para cada $i \geq 1$ existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_{j_i}^i - v_{1/i}\| < 1/i$ y entonces

$$\|v - v_{j_i}^i\| \leq \|v - v_{i/1}\| + \|v_{j_i}^i - v_{1/i}\| \leq \|v - v_{i/1}\| + 1/i \to 0.$$

En consecuencia, la sucesión $(v_{j^i}^i)_{i\geq 1}$ satisface la condición buscada. ◀

Teorema 2. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathscr{L}u = g$.

Demostración. Sea $u_1 \in L^2(B_2(0))$ una solución de $\mathscr{L}u = g$ allí. Inductivamente construiremos u_{k+1} del siguiente modo: tomamos una solución w de $\mathscr{L}u = g$ en $L^2(B_{k+2}(0))$, de forma que $\mathscr{L}(u_k - w) = 0$ en $B_{k+1}(0)$. Por la Proposición 3, existe $v \in L^2(B_{k+2}(0))$ tal que $\mathscr{L}v = 0$ y $\|u_k - w - v\|_{B_k(0)} < 1/2^k$. Definiendo $u_{k+1} := v + w$, la sucesión $(u_k)_{k\geq 1}$ satisface

- $\mathscr{L}u_k = g$ en $B_{k+1}(0)$, y
- $\|u_{k+1} - u_k\|_{B_k(0)} < 1/2^k$.

[2]Como $\operatorname{sop}\mathscr{L}v_\varepsilon = \operatorname{sop}\mathscr{L}v * \chi_\varepsilon = \operatorname{sop}\mathscr{L}v + B_\varepsilon(0)$ y $B_{r'}(0) \subset (\operatorname{sop}\mathscr{L}v)^c$, entonces $B_{r'-\varepsilon}(0) \subset (\operatorname{sop}\mathscr{L}v_\varepsilon)^c$.

Veamos que $(u_k)_{k\geq 1}$ es de Cauchy en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Fijemos $K\subset\mathbb{R}^n$ compacto. Existe entonces $k_0\in\mathbb{N}$ tal que $B_k(0)\supset K$ si $k>k_0$. Por lo tanto, si $m>n>k$ es

$$\begin{aligned}\|u_m-u_n\|_K &\leq \|u_m-u_{m-1}\|_K+\cdots+\|u_{n+1}-u_n\|_K\\ &\leq \|u_m-u_{m-1}\|_{B_m(0)}+\cdots+\|u_{n+1}-u_n\|_{B_n(0)}\\ &\leq 1/2^{m-1}+\cdots+1/2^n\leq \sum_{j\geq n}1/2^j,\end{aligned}$$

y esto tiende a cero si $n\to\infty$. Para terminar, veamos que $u:=\lim_{k\to\infty}u_k$ satisface $\mathscr{L}u=g$. En efecto, si $\varphi\in\mathscr{C}^\infty_c(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned}\langle\mathscr{L}u,\varphi\rangle=(u,\mathscr{L}^*\varphi)_{\operatorname{sop}\varphi}&=\lim_{k\to\infty}(u_k,\mathscr{L}^*\varphi)_{\operatorname{sop}\varphi}=\lim_{k\to\infty}(u_k,\mathscr{L}^*\varphi)_{B_{k+1}(0)}\\ &=\lim_{k\to\infty}(g,\mathscr{L}^*\varphi)_{B_{k+1}(0)}=(g,\mathscr{L}^*\varphi)\\ &=\langle\mathscr{L}g,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

◀

Existencia de soluciones fundamentales y consecuencias

Lema 3. La función $H:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ definida por $H(x_1,\dots,x_n)=\prod_{i=1}^n\chi_{\{x_i>0\}}$ es un elemento de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}H=\delta_0.$$

Demostración. Si $\varphi\in\mathscr{D}$, es

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)dx_i&=\lim_{t\to\infty}\varphi(x_1,\dots,\overbrace{t}^{i},\dots,x_n)-\varphi(x_1,\dots,0,\dots,x_n)\\ &=-\varphi(x_1,\dots,0,\dots,x_n),\end{aligned}$$

ya que φ tiene soporte compacto. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned}\left\langle\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}H,\varphi\right\rangle=\left\langle H,(-1)^n\cdot\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\varphi\right\rangle&=(-1)^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\varphi\cdot dx_1\cdots dx_n\\ &=(-1)^n\int_0^\infty\cdots\int_0^\infty\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\varphi\cdot dx_1\cdots dx_n\\ &=(-1)^n(-1)^n\varphi(0,\dots,0)=\varphi(0)=\langle\delta_0,\varphi\rangle.\end{aligned}$$

◀

Teorema 3 (Malgrange-Ehrenpreis). Todo operador diferencial parcial lineal no nulo con coeficientes constantes admite una solución fundamental.

Demostración. Sea $\mathscr{L}=p(D)$ un operador diferencial. Por el Teorema 2, existe $u\in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathscr{L}u=H$. Considerando la distribución $\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}u$ se tiene efectivamente que

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}u\right)=\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}\mathscr{L}u=\frac{\partial^n}{\partial x_1\cdots\partial x_n}H=\delta_0.$$

◀

Lema 4. Si $f \in \mathscr{D}$, entonces $\delta_0 * f = f$.

Demostración. Por definición, es

$$\delta_0 * f(x) = \langle \delta_0, f(x - \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \cdot) d\delta_0 = f(x - 0) = f(x).$$

◀

Corolario 4. Sea $f \in \mathscr{D}$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Entonces la ecuación $\mathscr{L}u = f$ tiene una solución en $\mathscr{D}$.

Demostración. Sea s una solución fundamental para $\mathscr{L}$. Si ponemos $u := s * f$, esto define una función test y

$$\mathscr{L}(s * f) = (\mathscr{L}s) * f = \delta_0 * f = f,$$

lo que concluye la demostración. ◀

Ejemplo 1. Notemos que el corolario anterior describe además como encontrar soluciones suaves a partir de una solución fundamental. Usemos esto para tratar un caso ya conocido: hallemos soluciones suaves a la ecuación

$$b_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + b_n \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = \beta u + g \tag{2}$$

con $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}_{<0}$.

Observemos que notando $p = \sum_{i=1}^n b_i X_i - \beta$ y $\mathscr{L} = p(D)$, la ecuación se puede rescribir como

$$\mathscr{L}u = g.$$

Busquemos en primer lugar la solución fundamental del operador $\mathscr{L}$. Proponemos

$$\langle u, \varphi \rangle := \int_0^{+\infty} \varphi(tb) e^{\beta t} dt,$$

ya que

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{L}u, \varphi \rangle = \langle u, \mathscr{L}^* \varphi \rangle &= -\sum_{i=1}^n b_i \int_0^{+\infty} \varphi_i(tb) e^{\beta t} dt + \beta \int_0^{\infty} \varphi(tb) e^{\beta t} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(tb) \right) e^{\beta t} dt + \int_0^{\infty} \varphi(tb) \beta e^{\beta t} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \varphi(tb) e^{\beta t} + \varphi(tb) \frac{d}{dt} e^{\beta t} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\varphi(tb) e^{\beta t}) dt = \varphi(tb) e^{\beta t} \Big|_{+\infty}^{0} = \varphi(0).
\end{aligned}$$

para cada $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, una solución para (2) es

$$v(x) = u * g(x) = \langle u, g(x - \cdot) \rangle = \int_0^{+\infty} g(x - tb) e^{\beta t} dt.$$

◀

Apéndice: sobre la convolución de distribuciones

Definición 2. Sean $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$. Se define la *convolución* de T y φ como

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot)\rangle.$$

Definición 3. Sea $T \in \mathscr{D}'(U)$ y $V \subset U$ un abierto. Decimos que T se anula en V si para toda $\varphi \in \mathscr{D}$ con $\operatorname{sop}\varphi \subset V$ se tiene que $\langle T, \varphi\rangle = 0$.

Definición 4. El *soporte* de una distribución $T \in \mathscr{D}'(U)$ es el abierto maximal[3] en V tal que T se anula en V^c.

Teorema 4 ([2], Theorem 4.1.1). Si $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$, entonces $T * \varphi$ es una función suave de soporte compacto con $\operatorname{sop} T * \varphi \subset \operatorname{sop} T + \operatorname{sop}\varphi$ y

$$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$$

para todo multiíndice α. ◄

Referencias

[1] Jean-Pierre Rosay. *A Very Elementary Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*. The American Mathematical Monthly, 1991.

[2] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer, 1990.

[3] Esto está bien definido, y más aún se puede verificar que el soporte es el complemento de la unión de los abiertos donde T se anula.