

ECUACIONES DIFERENCIALES - EXAMEN FINAL

El teorema de Malgrange-Eherenpreis

Guido Arnone

27 de diciembre de 2019

Recordemos que dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$, se define su *derivada débil* con respecto a cierta coordenada $i \in \llbracket n \rrbracket$ por

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial_i \varphi \rangle.$$

Usando partes, esto coincide con la noción usual para funciones suaves: la derivada débil de una función suave coincide con la distribución que induce su derivada usual. Dado un polinomio $p = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, se puede considerar el operador *operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes* asociado a p ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D}' \\ T &\mapsto \sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} T. \end{aligned}$$

Se define también el *operador adjunto formal* de \mathcal{L} como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D}' \\ T &\mapsto \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} D^{\alpha} T, \end{aligned}$$

el cual satisface $\langle \mathcal{L}T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{L}^* \varphi \rangle$ para todo $T \in \mathcal{D}'$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Análogamente se puede considerar la (co)restricción de \mathcal{L} y \mathcal{L}^* a $\mathcal{C}_c^{\infty}(U)$.

Una *solución fundamental* para \mathcal{L} es una distribución $T \in \mathcal{D}'$ que satisface la ecuación

$$\mathcal{L}T = \delta_0$$

con δ_0 la delta de Dirac. Esto es reminiscente al la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = 0$$

para la cual existe una solución $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definida por

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

que «concentra toda la masa en el cero». De hecho, en el sentido distribucional Φ es una solución fundamental para el operador $-\Delta$. Sabemos también que si $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $u := \Phi * f$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface la ecuación de Poisson,

$$-\Delta u = f.$$

El objetivo de esta presentación es probar el teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que garantiza la existencia de soluciones fundamentales para cualquier operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes no nulo. A partir de este resultado y extendiendo la noción de convolución al contexto de las distribuciones, como en el caso del laplaciano se puede concluir que toda ecuación de la forma

$$\mathcal{L}u = f \quad (1)$$

tiene una solución en \mathcal{D}' . De hecho, si f es suave la solución obtenida también lo es.

revisar,
por las
dudas,
cuando lo
agregue.

SOBRE LA NOTACIÓN

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, notaremos (\cdot, \cdot) y $\|\cdot\|$ al producto interno y norma de $L^2(U)$ respectivamente. Indicaremos el dominio sólo cuando no se deduzca del contexto. La expresión «operador diferencial» y el símbolo \mathcal{L} referirán siempre a un operador diferencial parcial lineal (no nulo) con coeficientes constantes, y escribiremos $q(D)$ al operador asociado a un polinomio $q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

LA DESIGUALDAD DE HÖRMANDER Y SOLUCIONES EN L^2

El resultado de principal utilidad para relacionar las normas en L^2 de una función test y su imagen por un operador diferencial será el siguiente,

TEOREMA 1 (Hörmander). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe entonces $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{L}\varphi\| \geq C\|\varphi\|$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, y ésta depende sólo de los términos de orden máximo de p y el diámetro de Ω .

Demostración.

Hacer!

A partir de esta desigualdad, se obtiene inmediatamente la existencia de soluciones de (1) en L^2 para abiertos acotados,

COROLARIO 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Dada $g \in L^2(\Omega)$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial, existe una solución $u \in L^2(\Omega)$ a la ecuación

$$\mathcal{L}u = g.$$

Demostración. Por la desigualdad de Hörmander, la (co)restricción de un operador diferencial a $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ resulta una función lineal inyectiva con inversa continua respecto de la norma en $L^2(\Omega)$. Notando $E := \text{im } \mathcal{L}^*$, esto significa que el operador

$$(\mathcal{L}^*)^{-1} : \mathcal{L}^*\varphi \in E \mapsto \varphi \in L^2(\Omega)$$

está bien definido y resulta continua con respecto a la norma (en el caso de E , inducida) de $L^2(\Omega)$. Componiendo con el funcional representado por g , se obtiene un funcional

$$\eta : \mathcal{L}^*\varphi \in E \mapsto (\varphi, g) \in \mathbb{R},$$

que tiene una única extensión $\tilde{\eta}$ a \overline{E} , ya que \overline{E} es de Hilbert al ser un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$. Por el teorema de representación de Riesz, existe entonces $u \in \overline{E} \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$(g, \varphi) = (\varphi, g) = (u, \mathcal{L}^*\varphi) = \langle u, \mathcal{L}^*\varphi \rangle = \langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$, y esto prueba finalmente que $\mathcal{L}u = g$.

LA RELACIÓN ENTRE $\text{sop } u$ Y $\text{sop } \mathcal{L}u$

OBSERVACIÓN 1. Si $\mathcal{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(\psi) = e^{\varepsilon x_1} \mathcal{L}(e^{-\varepsilon x_1} \psi)$$

es un operador diferencial. Basta verlo para $\mathcal{L} = D^\alpha$, pues la asignación $\mathcal{L} \mapsto \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ es lineal. Procedemos por inducción en α_1 , donde el caso base es cierto pues $\widetilde{D^{(0, \alpha')}} = D^{(0, \alpha')}$. Si $\alpha_1 > 0$ y $\widetilde{D^{(\alpha_1-1, \alpha')}} = q(D)$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon x_1} D^\alpha (e^{-\varepsilon x_1} \psi) &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (e^{-\varepsilon x_1} \psi) \right) \\ &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon x_1} \psi + e^{-\varepsilon x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \psi \right) \\ &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} (e^{-\varepsilon x_1} (-\varepsilon \psi)) + e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} (e^{-\varepsilon x_1} \partial_1 \psi) \\ &= -\varepsilon q(D)(\psi) + q(D)(\delta_1 \psi) = -\varepsilon q(D)(\psi) + (X_1 q)(D)(\psi). \end{aligned}$$

Más todavía, los términos de orden mayor de $\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ coinciden con los de \mathcal{L} pues

$$e^{\varepsilon x_1} D^\alpha (e^{-\varepsilon x_1} \varphi) = e^{\varepsilon x_1} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha e^{-\varepsilon x_1} D^{\alpha-\beta} \varphi,$$

y el término de orden máximo de esta expresión es $e^{\varepsilon x_1} D^0 e^{-\varepsilon x_1} D^\alpha \varphi = D^\alpha \varphi$. De este modo «podemos tomar la misma constante que para \mathcal{L} en la desigualdad de Hörmander».

PROPOSICIÓN 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe $C' > 0$ tal que para todo $\eta \in \mathbb{R}$ es

$$\int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L} \varphi|^2 \geq C \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $C > 0$ una constante que satisfaga la desigualdad de Hörmander para \mathcal{L} . Por la observación anterior, podemos tomar C de forma que para cada $\eta \in \mathbb{R}$ poniendo $\varepsilon = \eta/2$ es

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(e^{\varepsilon x_1} \varphi)\| \geq C \|e^{\varepsilon x_1} \varphi\|.$$

Elevando al cuadrado esta desigualdad, se obtiene precisamente que

$$\int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L} \varphi|^2 \geq C \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2.$$



COROLARIO 2. Si $\mathcal{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\mathcal{L} \varphi$ se anula en un semiespacio abierto H , entonces φ se anula en H .

Demostración. Veámoslo primero para $H_0 := \{x_1 > 0\}$. Basta ver que $\|\varphi\|_{H_0} = \|\varphi\|_{\Omega \cap H_0} = 0$. En efecto, si $\Omega \supset \text{sop } \varphi$, por la Proposición 1 es

$$\begin{aligned} 0 &\leq C \int_{H_0 \cap \Omega} |\varphi|^2 \leq C \int_{H_0 \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \leq \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L} \varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \\ &= \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L} \varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2, \end{aligned}$$

y el lado derecho tiende a cero cuando $\eta \rightarrow \infty$.

Si ahora H es un hiperplano cualquiera, rotando y trasladando obtenemos un difeomorfismo suave $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que envía H_0 a H . Como $\text{sop } \mathcal{L}(\varphi \circ \psi) \subset \text{sop}(\mathcal{L}\varphi) \circ \psi$, sabemos que $\mathcal{L}\varphi \circ \psi$ se anula en H_0 , y por lo tanto así lo hace $\varphi \circ \psi$. Esto concluye la demostración. Revisar!

COROLARIO 3. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\mathcal{L}\varphi$ está soportada en $B_r(0)$, entonces φ está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Podemos escribir a $B_r(0)$ como intersección de semiespacios. En el complemento de cada uno, sabemos que $\mathcal{L}\varphi$ se anula, así que φ también lo hace.

PROPOSICIÓN 2. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Si $\mathcal{L}f$ está soportada en $B_r(0)$, entonces f está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Basta ver que existen $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $\text{sop } f_\varepsilon \subset B_{r+\varepsilon}(0)$ y $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f$. En tal caso, si $x \notin B_r(0)$ entonces existen $\mu > 0$ y $U \ni x$ abierto tales que $x \in U \subset (B_{r+\mu}(0))^c$, por lo que

$$\|f\|_U = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|f_\varepsilon\|_U = 0,$$

dado que $\text{sop } f_\varepsilon \subset U^c$ para $\varepsilon \ll \mu$.

Dado χ un núcleo regularizante, definimos $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$. Esto garantiza la convergencia: veamos para terminar que f_ε está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$. Como esta es ahora una función suave, basta ver que $\mathcal{L}f_\varepsilon$ está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$. Por definición, es

$$\mathcal{L}f * \chi_\varepsilon(z) = \langle \mathcal{L}f, \chi_\varepsilon(z - \cdot) \rangle = \langle f, \mathcal{L}^* \chi_\varepsilon(z - \cdot) \rangle = \langle f, (\mathcal{L} \chi_\varepsilon)(z - \cdot) \rangle = f * (\mathcal{L} \chi_\varepsilon)(z) = \mathcal{L}f_\varepsilon(z),$$

así que si $\mathcal{L}f_\varepsilon(z) \neq 0$, luego $\chi_\varepsilon(z - \cdot)$ que tiene soporte en $B_\varepsilon(z)$ no está contenido fuera de $B_r(0)$, y así $z \in B_{r+\varepsilon}(0)$.

APROXIMACIÓN Y SOLUCIONES EN L^2_{loc}

LEMA 1. Sean $0 < r < R$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Si $g \in L^2(B_R(0))$, existe $C > 0$ tal que

$$|(\varphi, g)_{B_r(0)}| \leq C \|\mathcal{L}\varphi\|_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $\mathcal{L}\varphi = 0$ en $B_R(0)$, sabemos que $\varphi = 0$ allí y por lo tanto $(\varphi, g)_{B_r(0)} = 0$. Si no, existe $\psi \in L^2(B_R(0))$ tal que $\mathcal{L}\psi = \mathcal{L}\varphi$ y

$$\|\psi\| = (\psi, \mathcal{L}\varphi)$$

LEMA 2. Sean $0 < r < R$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in B_R(0)$, existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathcal{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Pasar esto directamente al teorema de convoluciones y soporte, ver si además se puede probar la diferencia-bilidad

Demostración. el lema probaría que la composición

pero no..
o si?

$$E \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} \mathcal{C}_c^\infty(B_R(0)) \xrightarrow{\cdot|_{B_r(0)}} \mathcal{C}_c^\infty(B_r(0)) \xrightarrow{(g, -)} \mathbb{R}$$

es define un funcional continuo. Éste se extendería así a \bar{E} , que es de Hilbert, y por el teorema de representación de Riesz existiría $w \in \bar{E} \subset L^2(B_R(0))$ tal que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathcal{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(B_R(0))$.

PROPOSICIÓN 3. Sean $0 < r < r' < R$. Dado un operador diferencial $\mathcal{L} = p(D)$ y $v \in L^2(B_r(0))$ tal que $\mathcal{L}v = 0$ en $B_{r'}(0)$, existe una sucesión $(v_j)_{j \geq 1} \subset L^2(B_R(0))$ que satisface $\mathcal{L}v_j = 0$ en $B_R(0)$ y

$$v_j \xrightarrow{L^2(B_r(0))} v.$$

TEOREMA 2. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, existe $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{L}u = g$.

Demostración. Sea $u_1 \in L^2(B_2(0))$ una solución de $\mathcal{L}u = g$ allí. Inductivamente construiremos u_{k+1} del siguiente modo: tomamos una solución w de $\mathcal{L}u = g$ en $L^2(B_{k+2}(0))$, de forma que $\mathcal{L}(u_k - w) = 0$ en $B_{k+1}(0)$. Por la Proposición 3, existe $v \in L^2(B_{k+2}(0))$ tal que $\mathcal{L}v = 0$ y $\|u_k - w - v\|_{B_k(0)} < 1/2^k$. Definiendo $u_{k+1} := v + w$, la sucesión $(u_k)_{k \geq 1}$ satisface

- $\mathcal{L}u_k = g$ en $B_{k+1}(0)$, y
- $\|u_{k+1} - u_k\|_{B_k(0)} < 1/2^k$.

Veamos que $(u_k)_{k \geq 1}$ es de Cauchy en $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$. Fijemos $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Existe entonces $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_k(0) \supset K$ si $k > k_0$. Por lo tanto, si $m > n > k$ es

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_K &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_K + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_K \\ &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_{B_m(0)} + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_{B_n(0)} \\ &\leq 1/2^{m-1} + \cdots + 1/2^n \leq \sum_{j \geq n} 1/2^j, \end{aligned}$$

y esto tiende a cero si $n \rightarrow \infty$. Para terminar, veamos que $u := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ satisface $\mathcal{L}u = g$. En efecto, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle &= (u, \mathcal{L}^* \varphi)_{\text{sop } \varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, \mathcal{L}^* \varphi)_{\text{sop } \varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, \mathcal{L}^* \varphi)_{B_{k+1}(0)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g, \mathcal{L}^* \varphi)_{B_{k+1}(0)} = (g, \mathcal{L}^* \varphi) \\ &= \langle \mathcal{L}g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

◀

Y porqué esto alcanza para todas las funciones suaves de soporte compacto en todo el espacio???

EXISTENCIA DE SOLUCIONES FUNDAMENTALES Y CONSECUENCIAS

LEMA 3. La función $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \chi_{\{x_i > 0\}}$ es un elemento de $L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H = \delta_0.$$

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, es

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x_1, \dots, \overbrace{t}^i, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) \\ &= -\varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ya que φ tiene soporte compacto. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H, \varphi \right\rangle &= \left\langle H, (-1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \varphi \right\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \varphi \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \varphi \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^n (-1)^n \varphi(0, \dots, 0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$

TEOREMA 3 (Malgrange-Ehrenpreis). Todo operador diferencial lineal (no nulo) con coeficientes constantes admite una solución fundamental.

Demostración. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Por el **Teorema 2**, existe $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{L}u = H$. Considerando la distribución $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} u$ se tiene efectivamente que

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} u \right) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \mathcal{L}u = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H = \delta_0.$$

definir convoluciones, dar propiedades, y definir soporte, teo 4.1.1 Hörmander

Agregar la existencia de soluciones, revisar que son suaves si el dato es suave