Ecuaciones Diferenciales - Examen Final

El teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Guido Arnone

27 de diciembre de 2019

Recordemos que dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y una distribución $T \in \mathscr{D}'(U)$, se define su *derivada débil* con respecto a cierta coordenada $i \in [\![n]\!]$ por

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial_i \varphi \rangle.$$

Usando partes, esto coincide con la noción usual para funciones suaves: la derivada débil de una función suave coincide con la distribución que induce su derivada usual. Dado un polinomio $p = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$, se puede considerar el operador *operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes* asociado a p,

$$\begin{aligned} \mathscr{L} : \mathscr{D}' &\longrightarrow \mathscr{D}' \\ T &\mapsto \sum_\alpha c_\alpha D^\alpha T. \end{aligned}$$

Se define también el *operador adjunto formal* de $\mathscr{L}$ como

$$\begin{aligned} \mathscr{L}^* : \mathscr{D}' &\longrightarrow \mathscr{D}' \\ T &\mapsto \sum_\alpha (-1)^{|\alpha|} c_\alpha D^\alpha T, \end{aligned}$$

el cual satisface $\langle \mathscr{L} T, \varphi \rangle = \langle T, \mathscr{L}^* \varphi \rangle$ para todo $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$. Análogamente se puede considerar la (co)restricción de $\mathscr{L}$ y $\mathscr{L}^*$ a $\mathscr{C}_c^\infty(U)$.

Una *solución fundamental* para $\mathscr{L}$ es una distribución $T \in \mathscr{D}'$ que satisface la ecuación

$$\mathscr{L} T = \delta_0$$

con δ_0 la delta de Dirac. Esto es reminiscente al la ecuación de Laplace,

$$\Delta u = 0$$

para la cual existe una solución $\Phi \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definida por

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

que «concentra toda la masa en el cero». De hecho, en el sentido distribucional Φ es una solución fundamental para el operador $-\Delta$. Sabemos también que si $f \in \mathscr{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $u := \Phi * f$ es de clase $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface la ecuación de Poisson,

$$-\Delta u = f.$$

El objetivo de esta presentación es probar el teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que garantiza la existencia de soluciones fundamentales para cualquier operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes no nulo. A partir de este resultado y extendiendo la noción de convolución al contexto de las distribuciones, como en el caso del laplaciano se puede concluir que toda ecuación de la forma

$$\mathscr{L}u = f \tag{1}$$

tiene una solución en $\mathscr{D}'$. De hecho, si f es suave la solución obtenida también lo es.

Sobre la Notación

Si $q = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ es un polinomio de grado m, escribiremos

$$|q|_k = \text{máx}\{|c_\alpha| : |\alpha| = k\}$$

para cada $k \leq m$.

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, notaremos $(,)$ y $\|\cdot\|$ al producto interno y norma de $L^2(U)$ respectivamente. Indicaremos el dominio sólo cuando no se deduzca del contexto.

La expresión «operador diferencial» y el símbolo $\mathscr{L}$ referirán siempre a un operador diferencial parcial lineal (no nulo) con coeficientes constantes, y escribiremos $q(D)$ al operador asociado a un polinomio $q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

La desigualdad de Hörmander y soluciones en L^2

El resultado de principal utilidad para relacionar las normas en L^2 de una función test y su imagen por un operador diferencial será el siguiente,

Teorema 1 (Hörmander). Sae $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe entonces $C > 0$ tal que

$$\|\mathscr{L}\varphi\| \geq C\|\varphi\|$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, y ésta depende sólamente de los términos de orden máximo de p y el diámetro de Ω.

Demostración. Notemos $\rho := \sup_\Omega \|x\|$. Para cada $j \in [\![n]\!]$, definimos $p_j(D)$ como el operador diferencial que satisface la ecuación

$$p(D)(x_j\varphi) = x_j p(D)\varphi + p_j(D)\varphi$$

para toda función $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Como dado α un multiíndice y $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es

$$D^\alpha x_j \varphi = x_j \cdot \sum_{\beta \leq \alpha, \beta_1 = 0} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\varphi + \sum_{\beta \leq \alpha, \beta_1 = 1} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta}\varphi,$$

el operador $p_j(D)$ está bien definido y viene inducido por un polinomio, que notaremos p_j. Además, de la ecuación anterior se observa que $p_j(D)$ es cero si y sólo si p no tiene monomios que contengan a la variable X_j. Dicho de otra forma, el operador diferencial $p_j(D)$ es nulo si y sólo si «en $p(D)$ no hay derivadas con respecto a la j-ésima variable».

De ser no nulo, el orden de p_j debe ser menor al de p, y existe $j \in [\![n]\!]$ tal que p_j es de orden exactamente $m-1$ y $|p_j|_{m-1} \geq |p|_m$. ¿por qué?

Terminar!

A partir de esta desigualdad, se obtiene inmediatamente la existencia de soluciones de (1) en L^2 para abiertos acotados,

Corolario 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Dada $g \in L^2(\Omega)$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial, existe una solución $u \in L^2(\Omega)$ a la ecuación

$$\mathscr{L}u = g.$$

Demostración. Por la desigualdad de Hörmander, la (co)restricción de un operador diferencial a $\mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$ resulta una función lineal inyectiva con inversa continua respecto de la norma en $L^2(\Omega)$. Notando $E := \operatorname{im} \mathscr{L}^*$, esto significa que el operador

$$(\mathscr{L}^*)^{-1} : \mathscr{L}^*\varphi \in E \mapsto \varphi \in L^2(\Omega)$$

está bien definido y resulta continua con respecto a la norma (en el caso de E, inducida) de $L^2(\Omega)$. Componiendo con el funcional representado por g, se obtiene un funcional

$$\eta : \mathscr{L}^*\varphi \in E \mapsto (\varphi, g) \in \mathbb{R},$$

que tiene una única extensión $\widetilde{\eta}$ a $\overline{E}$, ya que $\overline{E}$ es de Hilbert al ser un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$. Por el teorema de representación de Riesz, existe entonces $u \in \overline{E} \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle g, \varphi \rangle = (\varphi, g) = (u, \mathscr{L}^*\varphi) = \langle u, \mathscr{L}^*\varphi \rangle = \langle \mathscr{L}u, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$, y esto prueba finalmente que $\mathscr{L}u = g$. ◀

La relación entre $\operatorname{sop} u$ y $\operatorname{sop} \mathscr{L}u$

Observación 1. Si $\mathscr{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}(\psi) = e^{\varepsilon x_1} \mathscr{L}(e^{-\varepsilon x_1}\psi)$$

es un operador diferencial. Basta verlo para $\mathscr{L} = D^\alpha$, pues la asignación $\mathscr{L} \mapsto \widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}$ es lineal. Procedemos por inducción en α_1, donde el caso base es cierto pues $\widetilde{D^{(0,\alpha')}} = D^{(0,\alpha')}$. Si $\alpha_1 > 0$ y $\widetilde{D^{(\alpha_1-1,\alpha')}} = q(D)$

$$\begin{aligned}
e^{\varepsilon x_1} D^\alpha(e^{-\varepsilon x_1}\psi) &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1,\alpha')}\left(\frac{\partial}{\partial x_1}(e^{-\varepsilon x_1}\psi)\right) \\
&= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1,\alpha')}\left(-\varepsilon e^{-\varepsilon x_1}\psi + e^{-\varepsilon x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}\psi\right) \\
&= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1,\alpha')}(e^{-\varepsilon x_1}(-\varepsilon\psi)) + e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1,\alpha')}(e^{-\varepsilon x_1}\partial_1\psi) \\
&= -\varepsilon q(D)(\psi) + q(D)(\partial_1\psi) = -\varepsilon q(D)(\psi) + (X_1 q)(D)(\psi).
\end{aligned}$$

Más todavía, los términos de orden mayor de $\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}$ coinciden con los de $\mathscr{L}$ pues

$$e^{\varepsilon x_1} D^\alpha(e^{-\varepsilon x_1}\varphi) = e^{\varepsilon x_1} \sum_{\beta \le \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha e^{-\varepsilon x_1} D^{\alpha-\beta}\varphi,$$

y el término de orden máximo de esta expresión es $e^{\varepsilon x_1} D^0 e^{-\varepsilon x_1} D^\alpha \varphi = D^\alpha \varphi$. De este modo «podemos tomar la misma constante que para $\mathscr{L}$ en la desigualdad de Hörmander».

Proposición 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe $C' > 0$ tal que para todo $\eta \in \mathbb{R}$ es

$$\int_\Omega e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 \geq C \int_\Omega e^{\eta x_1} |\varphi|^2$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $C > 0$ una constante que satisfaga la desigualdad de Hörmander para $\mathscr{L}$. Por la observación anterior, podemos tomar C de forma que para cada $\eta \in \mathbb{R}$ poniendo $\varepsilon = \eta/2$ es

$$\|\widetilde{\mathscr{L}_\varepsilon}(e^{\varepsilon x_1}\varphi)\| \geq C \|e^{\varepsilon x_1}\varphi\|.$$

Elevando al cuadrado esta desiguadad, se obtiene precisamente que

$$\int_\Omega e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 \geq C \int_\Omega e^{\eta x_1} |\varphi|^2.$$

◀

Corolario 2. Si $\mathscr{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\mathscr{L}\varphi$ se anula en un semiespacio abierto H, entonces φ se anula en H.

Demostración. Veámoslo primero para $H_0 := \{x_1 > 0\}$. Basta ver que $\|\varphi\|_{H_0} = \|\varphi\|_{\Omega \cap H_0} = 0$. En efecto, si $\Omega \supset \operatorname{sop}\varphi$, por la Proposición 1 es

$$\begin{aligned} 0 \leq C \int_{H_0 \cap \Omega} |\varphi|^2 &\leq C \int_{H_0 \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \leq \int_\Omega e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \\ &= \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\mathscr{L}\varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2, \end{aligned}$$

y el lado derecho tiende a cero cuando $\eta \to \infty$.

Si ahora H es un hiperplano cualquiera, rotando y trasladando obtenemos un difeomorfismo suave $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ que envía H_0 a H. Como $\operatorname{sop}\mathscr{L}(\varphi \circ \psi) \subset \operatorname{sop}(\mathscr{L}\varphi) \circ \psi$, sabemos que $\mathscr{L}\varphi \circ \psi$ se anula en H_0, y por lo tanto así lo hace $\varphi \circ \psi$. Esto concluye la demostración. ◀

Revisar!

Corolario 3. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\mathscr{L}\varphi$ está soportada en $B_r(0)$, entonces φ está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Podemos escribir a $B_r(0)$ como intersección de semiespacios. En el complemento de cada uno, sabemos que $\mathscr{L}\varphi$ se anula, así que φ también lo hace. ◀

Proposición 2. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Si $\mathscr{L}f$ está soportada en $B_r(0)$, entonces f está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Basta ver que existen $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $\operatorname{sop} f_\varepsilon \subset B_{r+\varepsilon}(0)$ y $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f$. En tal caso, si $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está soportada en un compacto $K \subset B_r(0)^c$, existe $\mu > 0$ tal que $K \subset B_{r+\mu}(0)^c$ y por lo tanto

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon \to 0} (f_\varepsilon, \varphi) = 0$$

ya que $\operatorname{sop} f_\varepsilon \cap K = \varnothing$ para $\varepsilon \ll \mu$.

Dado χ un núcleo regularizante, definimos $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$. Esto garantiza la convergencia: veamos para terminar que f_ε está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$. Como éstas son ahora una funciones suaves, basta ver que $\mathscr{L} f_\varepsilon$ está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$ para cada $\varepsilon > 0$. Por definición es

$$\mathscr{L} f * \chi_\varepsilon(z) = \langle \mathscr{L} f, \chi_\varepsilon(z - \cdot)\rangle = \langle f, \mathscr{L}^* \chi_\varepsilon(z-\cdot)\rangle = \langle f, (\mathscr{L}\chi_\varepsilon)(z-\cdot)\rangle = f * (\mathscr{L}\chi_\varepsilon)(z) = \mathscr{L} f_\varepsilon(z),$$

así que si $\mathscr{L} f_\varepsilon(z) \neq 0$ necesariamente $\operatorname{sop} \chi_\varepsilon(z - \cdot) \subset B_\varepsilon(z)$ no puede estar contenido fuera de $B_r(0)$, y esto implica que $z \in B_{r+\varepsilon}(0)$.

◀

Aproximación y soluciones en L^2_{loc}

Lema 1. Sean $0 < r < R$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Si $g \in L^2(B_r(0))$, existe $C > 0$ tal que

$$|(\varphi, g)_{B_r(0)}| \leq C \|\mathscr{L}\varphi\|_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $\mathscr{L}\varphi = 0$ en $B_R(0)$, sabemos que $\varphi = 0$ allí y por lo tanto $(\varphi, g)_{B_r(0)} = 0$. Si no, existe $\psi \in L^2(B_R(0))$ tal que $\mathscr{L}\psi = \mathscr{L}\varphi$ y

$$\|\psi\| = (\psi, \mathscr{L}\varphi)$$

◀ ?????

Lema 2. Sean $0 < r < R$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in L^2(B_r(0))$, existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. el lema probaría que la composición

pero no.. o si?

$$E \xrightarrow{\mathscr{L}^{-1}} \mathscr{C}_c^\infty(B_R(0)) \xrightarrow{\cdot\,|_{B_r(0)}} \mathscr{C}_c^\infty(B_r(0)) \xrightarrow{(g,-)} \mathbb{R}$$

es define un funcional continuo. Éste se extendería así a $\overline{E}$, que es de Hilbert, y por el teorema de representación de Riesz existiría $w \in \overline{E} \subset L^2 B_R(0)$ tal que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(B_R(0))$. ◀

Y porqué esto alcanza para todas las funciones suaves de soporte compacto en todo el espacio????

Proposición 3. Sean $0 < r < r' < R$. Dado un operador diferencial $\mathscr{L} = p(D)$ y $v \in L^2(B_{r'}(0))$ tal que $\mathscr{L}v = 0$ en $B_{r'}(0)$, existe una sucesión $(v_j)_{j\geq 1} \subset L^2(B_R(0))$ que satisface $\mathscr{L}v_j = 0$ en $B_R(0)$ y

$$v_j \xrightarrow{L^2(B_r(0))} v.$$

Demostración. Supongamos primero que v es suave y de soporte compacto. Notando

$$S = \{w|_{B_r(0)} : w \in L^2(B_R(0)),\ \mathscr{L}w = 0 \text{ en } B_R(0)\} \leq L^2(B_r(0)),$$

basta ver que S es denso en $T := \langle S, v|_{B_r(0)}\rangle$. A su vez, para ello alcanza probar que un funcional $f : T \to \mathbb{R}$ que se anula en S es nulo. Un tal funcional se extiende a $\overline{T}$ y por el teorema de representación de Riesz, existe cierta $g \in L^2(B_r(0))$ tal que $f \equiv (g, -)$.

En definitiva, es suficiente probar que si $g \in L^2(B_r(0))$ es tal que

$$(g, w)_{B_r(0)} = 0$$

para toda $w \in S$, entonces $(g, v)_{B_r(0)} = 0$. Por el Lema 2, sabemos que existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que $(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$ para toda $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considerando las extensiones por cero $\widetilde{g}, \widetilde{w} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de g y w respectivamente, por definición es

$$\langle \mathscr{L}^*\widetilde{w}, \varphi\rangle = (\widetilde{w}, \mathscr{L}\varphi) = (w, \mathscr{L}\varphi)_{B_R(0)} = (g, \varphi)_{B_r(0)} = \langle g, \varphi\rangle$$

y por lo tanto $\mathscr{L}^*\widetilde{w} = \widetilde{g}$. Como $\widetilde{g}$ tiene soporte en $B_r(0)$ y $\widetilde{w}$ tiene soporte compacto, luego $\widetilde{w}$ está soportada en $B_r(0)$. En particular w está soportada en $B_r(0)$, y como $\mathscr{L}v$ se anula allí, es

$$(v, g)_{B_r(0)} = (\mathscr{L}v, w)_{B_R(0)} = (\mathscr{L}v, w)_{B_r(0)} = 0.$$

Para terminar, veamos que el resultado sigue siendo cierto cuando v no es suave de soporte compacto. Convolucionando con χ_ε donde χ es una aproximación de la identidad, conseguimos $v_\varepsilon \to v$ en $L^2(B_R(0))$. Eventualmente para $\varepsilon \ll 1$ podemos achicar[1] r' de tal modo que $\mathscr{L}v_\varepsilon$ se anule en una bola de radio $\eta_\varepsilon \in (r, r']$, y aplicar el resultado para funciones suaves, consiguiendo así sucesiones $v_j^i \to v_{1/i}$ en $L^2(B_r(0))$ tales que $\mathscr{L}v_j^i = 0$ en $B_R(0)$ para cada $i \geq 1$. Ahora, para cada $i \geq 1$ existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_{j_i}^i - v_{1/i}\| < 1/i$ y entonces

$$\|v - v_{j_i}^i\| \leq \|v - v_{i/1}\| + \|v_{j_i}^i - v_{1/i}\| \leq \|v - v_{i/1}\| + 1/i \to 0.$$

En consecuencia, la sucesión $(v_{j_i}^i)_{i\geq 1}$ satisface la condición buscada. ◀

Teorema 2. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$, existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathscr{L}u = g$.

Demostración. Sea $u_1 \in L^2(B_2(0))$ una solución de $\mathscr{L}u = g$ allí. Inductivamente construiremos u_{k+1} del siguiente modo: tomamos una solución w de $\mathscr{L}u = g$ en $L^2(B_{k+2}(0))$, de forma que $\mathscr{L}(u_k - w) = 0$ en $B_{k+1}(0)$. Por la Proposición 3, existe $v \in L^2(B_{k+2}(0))$ tal que $\mathscr{L}v = 0$ y $\|u_k - w - v\|_{B_k(0)} < 1/2^k$. Definiendo $u_{k+1} := v + w$, la sucesión $(u_k)_{k\geq 1}$ satisface

- $\mathscr{L}u_k = g$ en $B_{k+1}(0)$, y
- $\|u_{k+1} - u_k\|_{B_k(0)} < 1/2^k$.

Veamos que $(u_k)_{k\geq 1}$ es de Cauchy en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Fijemos $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Existe entonces $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_k(0) \supset K$ si $k > k_0$. Por lo tanto, si $m > n > k$ es

$$\begin{aligned}\|u_m - u_n\|_K &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_K + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_K \\ &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_{B_m(0)} + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_{B_n(0)} \\ &\leq 1/2^{m-1} + \cdots + 1/2^n \leq \sum_{j\geq n} 1/2^j,\end{aligned}$$

[1] Como $\operatorname{sop} \mathscr{L}v_\varepsilon = \operatorname{sop} \mathscr{L}v * \chi_\varepsilon = \operatorname{sop} \mathscr{L}v + B_\varepsilon(0)$ y $B_{r'}(0) \subset (\operatorname{sop} \mathscr{L}v)^c$, entonces $B_{r'-\varepsilon}(0) \subset (\operatorname{sop} \mathscr{L}v_\varepsilon)^c$.

y esto tiende a cero si $n \to \infty$. Para terminar, veamos que $u := \lim_{k\to\infty} u_k$ satisface $\mathscr{L}u = g$. En efecto, si $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned}\langle \mathscr{L}u, \varphi\rangle &= (u, \mathscr{L}^*\varphi)_{\operatorname{sop}\varphi} = \lim_{k\to\infty} (u_k, \mathscr{L}^*\varphi)_{\operatorname{sop}\varphi} = \lim_{k\to\infty} (u_k, \mathscr{L}^*\varphi)_{B_{k+1}(0)} \\ &= \lim_{k\to\infty} (g, \mathscr{L}^*\varphi)_{B_{k+1}(0)} = (g, \mathscr{L}^*\varphi) \\ &= \langle \mathscr{L}g, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

◀

Existencia de soluciones fundamentales y consecuencias

Lema 3. La función $H : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $H(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^n \chi_{\{x_i>0\}}$ es un elemento de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H = \delta_0.$$

Demostración. Si $\varphi \in \mathscr{D}$, es

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)dx_i &= \lim_{t\to\infty} \varphi(x_1, \ldots, \overbrace{t}^{i}, \ldots, x_n) - \varphi(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n) \\ &= -\varphi(x_1, \ldots, 0, \ldots, x_n),\end{aligned}$$

ya que φ tiene soporte compacto. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned}\left\langle \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H, \varphi \right\rangle &= \left\langle H, (-1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\varphi \right\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\varphi \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\varphi \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^n(-1)^n\varphi(0, \ldots, 0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.\end{aligned}$$

◀

Teorema 3 (Malgrange-Ehrenpreis). Todo operador diferencial parcial lineal no nulo con coeficientes constantes admite una solución fundamental.

Demostración. Sea $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Por el **Teorema 2**, existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathscr{L}u = H$. Considerando la distribución $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} u$ se tiene efectivamente que

$$\mathscr{L}\left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} u\right) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n}\mathscr{L}u = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H = \delta_0.$$

◀

Lema 4. Si $f \in \mathscr{D}$, entonces $\delta_0 * f = f$.

Demostración. Por definición, es

$$\delta_0 * f(x) = \langle \delta_0, f(x - \cdot)\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \cdot)d\delta_0 = f(x - 0) = f(x).$$

◀

Corolario 4. Sea $f \in \mathscr{D}$ y $\mathscr{L} = p(D)$ un operador diferencial. Entonces la ecuación $\mathscr{L}u = f$ tiene una solución en $\mathscr{D}$.

Demostración. Sea s una solución fundamental para $\mathscr{L}$. Si ponemos $u := s * f$, esto define una función test y

$$\mathscr{L}(s * f) = (\mathscr{L}s) * f = \delta_0 * f = f,$$

lo que concluye la demostración. ◀

Ejemplo 1. Notemos que el corolario anterior describe además como encontrar soluciones suaves a partir de una solución fundamental. Usemos esto para tratar un caso ya conocido: hallemos soluciones suaves a la ecuación

$$b_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + b_n \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = \beta u + g \tag{2}$$

con $g \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}_{<0}$.

Observemos que notando $p = \sum_{i=1}^n b_i X_i - \beta$ y $\mathscr{L} = p(D)$, la ecuación se puede rescribir como

$$\mathscr{L}u = g.$$

Busquemos en primer lugar la solución fundamental del operador $\mathscr{L}$. Proponemos

$$\langle u, \varphi \rangle := \int_0^{+\infty} \varphi(tb) e^{\beta t} dt,$$

ya que

$$\begin{aligned}
\langle \mathscr{L}u, \varphi \rangle = \langle u, \mathscr{L}^* \varphi \rangle &= -\sum_{i=1}^n b_i \int_0^{+\infty} \varphi_i(tb) e^{\beta t} dt + \beta \int_0^{\infty} \varphi(tb) e^{\beta t} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(tb) \right) e^{\beta t} dt + \int_0^{\infty} \varphi(tb) \beta e^{\beta t} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \varphi(tb) e^{\beta t} + \varphi(tb) \frac{d}{dt} e^{\beta t} dt \\
&= -\int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\varphi(tb) e^{\beta t}) dt = \varphi(tb) e^{\beta t} \Big|_{+\infty}^{0} = \varphi(0).
\end{aligned}$$

para cada $\varphi \in \mathscr{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, una solución para (2) es

$$v(x) = u * g(x) = \langle u, g(x - \cdot) \rangle = \int_0^{+\infty} g(x - tb) e^{\beta t} dt.$$

◀

Apéndice: sobre la convolución de distribuciones

Definición 1. Sean $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$. Se define la *convolución* de T y φ como

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

Definición 2. Sea $T \in \mathscr{D}'(U)$ y $V \subset U$ un abierto. Decimos que T se anula en V si para toda $\varphi \in \mathscr{D}$ con $\operatorname{sop} \varphi \subset V$ se tiene que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

Definición 3. El *soporte* de una distribución $T \in \mathscr{D}'(U)$ es el abierto maximal[2] en V tal que T se anula en V^c.

Teorema 4 ([2], Theorem 4.1.1). Si $T \in \mathscr{D}'$ y $\varphi \in \mathscr{D}$, entonces $T * \varphi$ es una función suave de soporte compacto con $\operatorname{sop} T * \varphi \subset \operatorname{sop} T + \operatorname{sop} \varphi$ y

$$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$$

para todo multiíndice α. ◄

Referencias

[1] Jean-Pierre Rosay. *A Very Elementary Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*. The American Mathematical Monthly, 1991.

[2] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I.* Springer, 1990.

[2]Esto está bien definido, y más aún se puede verificar que el soporte es el complemento de la unión de los abiertos donde T se anula.