

ECUACIONES DIFERENCIALES - EXAMEN FINAL

El teorema de Malgrange-Ehrenpreis

Guido Arnone

27 de diciembre de 2019

Recordemos que dado un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$ y una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$, se define su *derivada débil* con respecto a cierta coordenada $i \in \llbracket n \rrbracket$ por

$$\langle \partial_i T, \varphi \rangle := -\langle T, \partial_i \varphi \rangle.$$

Usando partes, esto coincide con la noción usual para funciones suaves: la derivada débil de una función suave coincide con la distribución que induce su derivada usual. Dado un polinomio $p = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$, se puede considerar el operador *operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes* asociado a p ,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D}' \\ T &\mapsto \sum_{\alpha} c_{\alpha} D^{\alpha} T. \end{aligned}$$

Se define también el *operador adjunto formal* de \mathcal{L} como

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^*: \mathcal{D}' &\longrightarrow \mathcal{D}' \\ T &\mapsto \sum_{\alpha} (-1)^{|\alpha|} c_{\alpha} D^{\alpha} T, \end{aligned}$$

el cual satisface $\langle \mathcal{L} T, \varphi \rangle = \langle T, \mathcal{L}^* \varphi \rangle$ para todo $T \in \mathcal{D}'$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Análogamente se puede considerar la (co)restricción de \mathcal{L} y \mathcal{L}^* a $\mathcal{C}_c^{\infty}(U)$.

Una *solución fundamental* para \mathcal{L} es una distribución $T \in \mathcal{D}'$ que satisface la ecuación

$$\mathcal{L} T = \delta_0$$

con δ_0 la delta de Dirac. Esto es reminiscente a la ecuación de Laplace

$$\Delta u = 0,$$

para la cual existe una solución $\Phi \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ definida por

$$\Phi(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } n = 2 \\ \frac{1}{n(n-2)\omega_n |x|^{n-2}} & \text{si } n \geq 3 \end{cases}$$

que «concentra toda la masa en el cero». De hecho, en el sentido distribucional Φ es una solución fundamental para el operador $-\Delta$. Sabemos también que si $f \in \mathcal{C}_c^2(\mathbb{R}^n)$, entonces la función $u := \Phi * f$ es de clase $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^n)$ y satisface la ecuación de Poisson,

$$-\Delta u = f.$$

El objetivo de esta presentación es probar el teorema de Malgrange-Ehrenpreis, que garantiza la existencia de soluciones fundamentales para cualquier operador diferencial parcial lineal con coeficientes constantes no nulo. A partir de este resultado y extendiendo la noción de convolución al contexto de las distribuciones, como en el caso del laplaciano se puede concluir que toda ecuación de la forma

$$\mathcal{L}u = f \quad (1)$$

tiene una solución en \mathcal{D}' . De hecho, si f es suave la solución obtenida también lo es.

SOBRE LA NOTACIÓN

Si $q = \sum_{\alpha} c_{\alpha} x^{\alpha} \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$ es un polinomio de grado m , escribiremos

$$|q|_k = \max\{|c_{\alpha}| : |\alpha| = k\}$$

para cada $k \leq m$.

Dado $U \subset \mathbb{R}^n$, notaremos $(,)$ y $\|\cdot\|$ al producto interno y norma de $L^2(U)$ respectivamente. Indicaremos el dominio sólo cuando no se deduzca del contexto.

La expresión «operador diferencial» y el símbolo \mathcal{L} referirán siempre a un operador diferencial parcial lineal (no nulo) con coeficientes constantes, y escribiremos $q(D)$ al operador asociado a un polinomio $q \in \mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

LA DESIGUALDAD DE HÖRMANDER Y SOLUCIONES EN L^2

El resultado de principal utilidad para relacionar las normas en L^2 de una función test y su imagen por un operador diferencial será el siguiente,

TEOREMA 1 (Hörmander). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe entonces $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{L}\varphi\| \geq C\|\varphi\|$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\Omega)$, y ésta depende sólo de los términos de orden máximo de p y el diámetro de Ω .

Demostración. Notemos $\rho := \sup_{\Omega} \|x\|$. Para cada $j \in \llbracket n \rrbracket$, definimos $p_j(D)$ como el operador diferencial que satisface la ecuación

$$p(D)(x_j \varphi) = x_j p(D)\varphi + p_j(D)\varphi$$

para toda función $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$. Como dado α un multiíndice y $\varphi \in \mathcal{C}_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ es

$$D^{\alpha} x_j \varphi = x_j \cdot \sum_{\beta \leq \alpha, \beta_1=0} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi + \sum_{\beta \leq \alpha, \beta_1=1} \binom{\alpha}{\beta} D^{\alpha-\beta} \varphi,$$

el operador $p_j(D)$ está bien definido y viene inducido por un polinomio, que notaremos p_j . Además, de la ecuación anterior se observa que $p_j(D)$ es cero si y sólo si p no tiene monomios que contengan a la variable X_j . Dicho de otra forma, el operador diferencial $p_j(D)$ es nulo si y sólo si «en $p(D)$ no hay derivadas con respecto a la j -ésima variable».

De ser no nulo, el orden de p_j debe ser menor al de p , y existe $j \in \llbracket n \rrbracket$ tal que p_j es de orden exactamente $m-1$ y $|p_j|_{m-1} \geq |p|_m$. Esto nos dice que para terminar la demostración alcanzaría probar que para todo $j \in \llbracket n \rrbracket$ es

$$\|p_j(D)\varphi\| \leq 2mA\|p(D)\varphi\|. \quad (*)$$

En efecto, de valer (*) sería

$$\|((p_{j_1})_{j_2} \cdots)_{j_k}(D)\varphi\| \leq 2A \cdots 2(m-1)A 2mA \|p(D)\varphi\| = m!(2A)^m \|p(D)\varphi\|$$

con $q = ((p_{j_1})_{j_2} \cdots)_{j_k}$ de grado 0, así que

$$\|q\|_0 \geq \cdots \geq \|p\|_m$$

y entonces

$$\|p(D)\varphi\| \geq \frac{1}{m!(2A)^m} \|q\varphi\| = \frac{1}{m!(2A)^m} \|q\|_0 \|\varphi\| \geq \frac{\|p\|_m}{m!(2A)^m} \|\varphi\|.$$

Para terminar, fijemos $j \in \llbracket n \rrbracket$ y veamos (*) por inducción en m . Si $m = 0$, entonces $p_j(D)$ es nulo y la desigualdad se satisface. Supongamos ahora que $m > 1$ y el enunciado es cierto para polinomios de grado $m - 1$. La desigualdad junto con la definición de $p_j(D)$ implican

$$\|p(D)(x_i \varphi)\| \leq (2m + 1)A \|p(D)\varphi\| \quad (\diamond)$$

para cualquier $i \in \llbracket n \rrbracket$. Aplicando esto a p_j , se obtiene entonces

$$\|p_j(D)(x_i \varphi)\| \leq (2m - 1)A \|p_j(D)\varphi\|.$$

Ahora, observemos¹ que

$$(p(D)(x_j \varphi), p_j(D)\varphi) = (x_j p(D)\varphi, p_j(D)\varphi) + \|p_j(D)\varphi\|^2,$$

y entonces

$$\begin{aligned} \|p_j(D)\varphi\|^2 &= (p(D)(x_j \varphi), p_j(D)\varphi) - (x_j p(D)\varphi, p_j(D)\varphi) \\ &= (p_j(D)^*(x_j \varphi), p(D)^*\varphi) - (x_j p(D)\varphi, p_j(D)\varphi). \end{aligned}$$

Aplicando (\diamond) a $p_j(D)^*$ es

$$\begin{aligned} \|p_j(D)\varphi\|^2 &\leq (2m - 1)A \|p_j(D)^*\varphi\| \|p(D)^*\varphi\| + \|x_j p(D)\varphi\| \|p_j(D)\varphi\| \\ &\leq (2m - 1)A \|p_j(D)\varphi\| \|p(D)\varphi\| + A \|p(D)\varphi\| \|p_j(D)\varphi\| \\ &= 2mA \|p_j(D)\varphi\| \|p(D)\varphi\|, \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ◀

A partir de esta desigualdad, se obtiene inmediatamente la existencia de soluciones de (1) en L^2 para abiertos acotados,

COROLARIO 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado. Si $\mathcal{L} = p(D)$ es un operador diferencial, la ecuación

$$\mathcal{L}u = g$$

tiene solución en $L^2(\Omega)$ para toda $g \in L^2(\Omega)$. Más aún, existe una constante $C > 0$ que sólo depende de \mathcal{L} y Ω de forma que

$$\|u\| \leq C \|g\|$$

para cada $u, g \in L^2(\Omega)$ tales que $\mathcal{L}u = g$.

¹Usamos aquí que los operadores diferenciales conmutan entre sí, y en particular es $\|q(D)\varphi\|^2 = \|q(D)^*\varphi\|^2$.

Demostración. Por la desigualdad de Hörmander, la (co)restricción de un operador diferencial a $\mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$ resulta una función lineal inyectiva con inversa continua respecto de la norma en $L^2(\Omega)$. Notando $E := \text{im } \mathcal{L}^*$, esto significa que el operador

$$(\mathcal{L}^*)^{-1} : \mathcal{L}^* \varphi \in E \mapsto \varphi \in L^2(\Omega)$$

está bien definido y resulta continua con respecto a la norma (en el caso de E , inducida) de $L^2(\Omega)$. Componiendo con el funcional representado por g , se obtiene un funcional

$$\eta : \mathcal{L}^* \varphi \in E \mapsto (\varphi, g) \in \mathbb{R},$$

que podemos extender de forma única a \overline{E} . Notemos $\tilde{\eta}$ a su extensión. Como \overline{E} es un subespacio cerrado de $L^2(\Omega)$, es de Hilbert, y por el teorema de representación de Riesz existe $u \in \overline{E} \subset L^2(\Omega)$ tal que

$$\langle g, \varphi \rangle = (\varphi, g) = \tilde{\eta}(\mathcal{L} \varphi) = (u, \mathcal{L}^* \varphi) = \langle u, \mathcal{L}^* \varphi \rangle = \langle \mathcal{L} u, \varphi \rangle$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$. Vemos así que $\mathcal{L} u = g$.

Por último, dado que $\tilde{\eta}$ es la extensión por densidad de η sabemos que $\|\tilde{\eta}\|_{\overline{E}^*} = \|\eta\|_{E^*}$, y al u representar a $\tilde{\eta}$ en definitiva es $\|u\| = \|\eta\|$. Como por definición es $\eta = (g, -) \circ (\mathcal{L}^*)^{-1}$, esto nos dice que

$$\|u\| = \|\eta\| \leq \|(\mathcal{L}^*)^{-1}\| \|g\|,$$

así que podemos tomar $C = \|(\mathcal{L}^*)^{-1}\|$. ◀

LA RELACIÓN ENTRE $\text{sop } u$ Y $\text{sop } \mathcal{L} u$

OBSERVACIÓN 1. Si $\mathcal{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varepsilon > 0$, entonces

$$\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(\psi) = e^{\varepsilon x_1} \mathcal{L}(e^{-\varepsilon x_1} \psi)$$

es un operador diferencial. Basta verlo para $\mathcal{L} = D^\alpha$, pues la asignación $\mathcal{L} \mapsto \widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ es lineal. Procedemos por inducción en α_1 , donde el caso base es cierto pues $\widetilde{D^{(0, \alpha')}} = D^{(0, \alpha')}$. Si $\alpha_1 > 0$ y $\widetilde{D^{(\alpha_1-1, \alpha')}} = q(D)$

$$\begin{aligned} e^{\varepsilon x_1} D^\alpha (e^{-\varepsilon x_1} \psi) &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} (e^{-\varepsilon x_1} \psi) \right) \\ &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} \left(-\varepsilon e^{-\varepsilon x_1} \psi + e^{-\varepsilon x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \psi \right) \\ &= e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} (e^{-\varepsilon x_1} (-\varepsilon \psi)) + e^{\varepsilon x_1} D^{(\alpha_1-1, \alpha')} (e^{-\varepsilon x_1} \partial_1 \psi) \\ &= -\varepsilon q(D)(\psi) + q(D)(\partial_1 \psi) = -\varepsilon q(D)(\psi) + (X_1 q)(D)(\psi). \end{aligned}$$

Más todavía, los términos de orden mayor de $\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon$ coinciden con los de \mathcal{L} pues

$$e^{\varepsilon x_1} D^\alpha (e^{-\varepsilon x_1} \varphi) = e^{\varepsilon x_1} \sum_{\beta \leq \alpha} \binom{\alpha}{\beta} D^\alpha e^{-\varepsilon x_1} D^{\alpha-\beta} \varphi,$$

y el término de orden máximo de esta expresión es $e^{\varepsilon x_1} D^0 e^{-\varepsilon x_1} D^\alpha \varphi = D^\alpha \varphi$. De este modo «podemos tomar la misma constante que para \mathcal{L} en la desigualdad de Hörmander».

PROPOSICIÓN 1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un abierto acotado y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Existe $C' > 0$ tal que para todo $\eta \in \mathbb{R}$ es

$$\int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L}\varphi|^2 \geq C \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\Omega)$.

Demostración. Sea $C > 0$ una constante que satisfaga la desigualdad de Hörmander para \mathcal{L} . Por la observación anterior, podemos tomar C de forma que para cada $\eta \in \mathbb{R}$ poniendo $\varepsilon = \eta/2$ es

$$\|\widetilde{\mathcal{L}}_\varepsilon(e^{\varepsilon x_1}\varphi)\| \geq C\|e^{\varepsilon x_1}\varphi\|.$$

Elevando al cuadrado esta desigualdad, se obtiene precisamente que

$$\int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L}\varphi|^2 \geq C \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2.$$

◀

COROLARIO 2. Si $\mathcal{L} = p(D)$ es un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ es tal que $\mathcal{L}\varphi$ se anula en un semiespacio abierto H , entonces φ se anula en H .

Demostración. Veámoslo primero para $H_0 := \{x_1 > 0\}$. Basta ver que $\|\varphi\|_{H_0} = \|\varphi\|_{\Omega \cap H_0} = 0$. En efecto, si $\Omega \supset \text{sop } \varphi$, por la Proposición 1 es

$$\begin{aligned} 0 &\leq C \int_{H_0 \cap \Omega} |\varphi|^2 \leq C \int_{H_0 \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \leq \int_{\Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L}\varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2 \\ &= \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\mathcal{L}\varphi|^2 - C \int_{H_0^c \cap \Omega} e^{\eta x_1} |\varphi|^2, \end{aligned}$$

y el lado derecho tiende a cero cuando $\eta \rightarrow \infty$.

Si ahora H es un hiperplano cualquiera, rotando y trasladando obtenemos un difeomorfismo suave $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ que envía H_0 a H . Como $\text{sop } \mathcal{L}(\varphi \circ \psi) \subset \text{sop } (\mathcal{L}\varphi) \circ \psi$, sabemos que $\mathcal{L}\varphi \circ \psi$ se anula en H_0 , y por lo tanto así lo hace $\varphi \circ \psi$. Esto concluye la demostración. ◀

COROLARIO 3. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial y $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Si $\mathcal{L}\varphi$ está soportada en $B_r(0)$, entonces φ está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Podemos escribir a $B_r(0)$ como intersección de semiespacios. En el complemento de cada uno, sabemos que $\mathcal{L}\varphi$ se anula, así que φ también lo hace. ◀

PROPOSICIÓN 2. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial y $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de soporte compacto. Si $\mathcal{L}f$ está soportada en $B_r(0)$, entonces f está soportada en $B_r(0)$.

Demostración. Basta ver que existen $(f_\varepsilon)_{\varepsilon>0} \subset L^2(\mathbb{R}^n)$ tales que $\text{sop } f_\varepsilon \subset B_{r+\varepsilon}(0)$ y $f_\varepsilon \xrightarrow{L^2} f$. En tal caso, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ está soportada en un compacto $K \subset B_r(0)^c$, existe $\mu > 0$ tal que $K \subset B_{r+\mu}(0)^c$ y por lo tanto

$$(f, \varphi) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f_\varepsilon, \varphi) = 0$$

ya que $\text{sop } f_\varepsilon \cap K = \emptyset$ para $\varepsilon \ll \mu$.

Dado χ un núcleo regularizante, definimos $f_\varepsilon = f * \chi_\varepsilon$. Esto garantiza la convergencia: veamos para terminar que f_ε está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$. Como éstas son ahora una funciones suaves, basta ver que $\mathcal{L}f_\varepsilon$ está soportada en $B_{r+\varepsilon}(0)$ para cada $\varepsilon > 0$. Por definición es

$$\mathcal{L}f * \chi_\varepsilon(z) = \langle \mathcal{L}f, \chi_\varepsilon(z - \cdot) \rangle = \langle f, \mathcal{L}^* \chi_\varepsilon(z - \cdot) \rangle = \langle f, (\mathcal{L} \chi_\varepsilon)(z - \cdot) \rangle = f * (\mathcal{L} \chi_\varepsilon)(z) = \mathcal{L}f_\varepsilon(z),$$

así que si $\mathcal{L}f_\varepsilon(z) \neq 0$ necesariamente $\text{sop } \chi_\varepsilon(z - \cdot) \subset B_\varepsilon(z)$ no puede estar contenido fuera de $B_r(0)$, y esto implica que $z \in B_{r+\varepsilon}(0)$. ◀

APROXIMACIÓN Y SOLUCIONES EN L^2_{loc}

DEFINICIÓN 1. Sean $0 < r < R$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Notaremos

$$N_{r,R}^{\mathcal{L}} = \{v|_{B_r(0)} : v \in L^2(B_R(0)), \mathcal{L}v = 0\}$$

al subespacio de $L^2(B_r(0))$ que consiste de restringir funciones que anulan a \mathcal{L} en $L^2(B_R(0))$.

LEMA 1. Sean $0 < r < R$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Si $g \in (N_{r,R}^{\mathcal{L}})^\perp$, existe $C > 0$ tal que

$$|(\varphi, g)_{B_r(0)}| \leq C \|\mathcal{L}\varphi\|_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Si $\mathcal{L}\varphi = 0$ en $B_r(0)$, sabemos que $\varphi = 0$ allí y por lo tanto $(\varphi, g)_{B_r(0)} = 0$. Si no, sabemos que existe $\psi \in L^2(B_R(0))$ tal que $\mathcal{L}\psi = \mathcal{L}\varphi$. Además, existe $C' > 0$ independiente de ψ y φ tal que $\|\psi\|_{B_R(0)} \leq C' \|\mathcal{L}\varphi\|_{B_R(0)}$. Como $g \in (N_{r,R}^{\mathcal{L}})^\perp$, es

$$(g, \varphi)_{B_r(0)} = (g, \varphi - \psi)_{B_r(0)} + (g, \psi)_{B_r(0)} = (g, \psi)_{B_r(0)}$$

y por lo tanto

$$|(\varphi, g)_{B_r(0)}| = |(g, \psi)_{B_r(0)}| \leq \|g\| \cdot \|\psi\|_{B_r(0)} \leq \|g\| C' \cdot \|\mathcal{L}\varphi\|_{B_R(0)},$$

así que poniendo $C = \|g\| C'$ se obtiene la desigualdad. ◀

LEMA 2. Sean $0 < r < R$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in (N_{r,R}^{\mathcal{L}})^\perp$, existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathcal{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Demostración. Consideremos $E = \{\mathcal{L}\psi|_{B_r(0)} : \psi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)\}$ como subespacio de $L^2(B_r(0))$. El lema anterior nos dice que la aplicación

$$\eta : \mathcal{L}\varphi \in E \mapsto (\varphi, g)_{B_r(0)} \in \mathbb{R}$$

está bien definida, y más aún define un funcional continuo. En particular podemos extenderlo a un funcional $\tilde{\eta} : \bar{E} \subset L^2(B_r(0)) \rightarrow \mathbb{R}$ y como éste es de Hilbert, por el teorema de representación de Riesz existe $w \in \bar{E} \subset L^2(B_r(0))$ tal que $\tilde{\eta} \equiv (w, -)_{B_r(0)}$. Esto termina de probar que

$$(\varphi, g)_{B_r(0)} = \eta(\mathcal{L}\varphi) = (w, \mathcal{L}\varphi)_{B_R(0)}$$

para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. ◀

PROPOSICIÓN 3. Sean $0 < r < r' < R$. Dado un operador diferencial $\mathcal{L} = p(D)$ y $v \in L^2(B_{r'}(0))$ tal que $\mathcal{L}v = 0$ en $B_{r'}(0)$, existe una sucesión $(v_j)_{j \geq 1} \subset L^2(B_R(0))$ que satisface $\mathcal{L}v_j = 0$ en $B_R(0)$ y

$$v_j \xrightarrow{L^2(B_r(0))} v.$$

Demostración. Supongamos primero que v es suave y de soporte compacto. Notando

$$S = \{w|_{B_r(0)} : w \in L^2(B_R(0)), \mathcal{L}w = 0 \text{ en } B_R(0)\} \leq L^2(B_r(0)),$$

basta ver que S es denso en $T := \langle S, v|_{B_r(0)} \rangle$. A su vez, para ello alcanza probar que un funcional $f : T \rightarrow \mathbb{R}$ que se anula en S es nulo. Un tal funcional se extiende a \bar{T} y por el teorema de representación de Riesz, existe cierta $g \in L^2(B_r(0))$ tal que $f \equiv (g, -)$.

En definitiva, es suficiente probar que si $g \in L^2(B_r(0))$ es tal que

$$(g, w)_{B_r(0)} = 0$$

para toda $w \in S$, entonces $(g, v)_{B_r(0)} = 0$. Por el Lema 2, sabemos que existe $w \in L^2(B_R(0))$ tal que $(\varphi, g)_{B_r(0)} = (\mathcal{L}\varphi, w)_{B_R(0)}$ para toda $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Considerando las extensiones por cero $\tilde{g}, \tilde{w} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ de g y w respectivamente, por definición es

$$\langle \mathcal{L}^* \tilde{w}, \varphi \rangle = (\tilde{w}, \mathcal{L}\varphi) = (w, \mathcal{L}\varphi)_{B_R(0)} = (g, \varphi)_{B_r(0)} = \langle g, \varphi \rangle$$

y por lo tanto $\mathcal{L}^* \tilde{w} = \tilde{g}$. Como \tilde{g} tiene soporte en $B_r(0)$ y \tilde{w} tiene soporte compacto, luego \tilde{w} está soportada en $B_r(0)$. En particular w está soportada en $B_r(0)$, y como $\mathcal{L}v$ se anula allí, es

$$(v, g)_{B_r(0)} = (\mathcal{L}v, w)_{B_R(0)} = (\mathcal{L}v, w)_{B_r(0)} = 0.$$

Para terminar, veamos que el resultado sigue siendo cierto cuando v no es suave de soporte compacto. Convolucionando con χ_ε donde χ es una aproximación de la identidad, conseguimos $v_\varepsilon \rightarrow v$ en $L^2(B_R(0))$. Eventualmente para $\varepsilon \ll 1$ podemos achicar² r' de tal modo que $\mathcal{L}v_\varepsilon$ se anule en una bola de radio $\eta_\varepsilon \in (r, r']$, y aplicar el resultado para funciones suaves, consiguiendo así sucesiones $v_j^i \rightarrow v_{1/i}$ en $L^2(B_r(0))$ tales que $\mathcal{L}v_j^i = 0$ en $B_R(0)$ para cada $i \geq 1$. Ahora, para cada $i \geq 1$ existe $j_i \in \mathbb{N}$ tal que $\|v_{j_i}^i - v_{1/i}\| < 1/i$ y entonces

$$\|v - v_{j_i}^i\| \leq \|v - v_{1/i}\| + \|v_{j_i}^i - v_{1/i}\| \leq \|v - v_{1/i}\| + 1/i \rightarrow 0.$$

En consecuencia, la sucesión $(v_{j_i}^i)_{i \geq 1}$ satisface la condición buscada. ◀

TEOREMA 2. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Dada $g \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$, existe $u \in L_{loc}^2(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{L}u = g$.

Demostración. Sea $u_1 \in L^2(B_2(0))$ una solución de $\mathcal{L}u = g$ allí. Inductivamente construiremos u_{k+1} del siguiente modo: tomamos una solución w de $\mathcal{L}u = g$ en $L^2(B_{k+2}(0))$, de forma que $\mathcal{L}(u_k - w) = 0$ en $B_{k+1}(0)$. Por la Proposición 3, existe $v \in L^2(B_{k+2}(0))$ tal que $\mathcal{L}v = 0$ y $\|u_k - w - v\|_{B_k(0)} < 1/2^k$. Definiendo $u_{k+1} := v + w$, la sucesión $(u_k)_{k \geq 1}$ satisface

- $\mathcal{L}u_k = g$ en $B_{k+1}(0)$, y
- $\|u_{k+1} - u_k\|_{B_k(0)} < 1/2^k$.

²Como $\text{sop } \mathcal{L}v_\varepsilon = \text{sop } \mathcal{L}v * \chi_\varepsilon = \text{sop } \mathcal{L}v + B_\varepsilon(0)$ y $B_{r'}(0) \subset (\text{sop } \mathcal{L}v)^\complement$, entonces $B_{r'-\varepsilon}(0) \subset (\text{sop } \mathcal{L}v_\varepsilon)^\complement$.

Veamos que $(u_k)_{k \geq 1}$ es de Cauchy en $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Fijemos $K \subset \mathbb{R}^n$ compacto. Existe entonces $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $B_k(0) \supset K$ si $k > k_0$. Por lo tanto, si $m > n > k$ es

$$\begin{aligned} \|u_m - u_n\|_K &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_K + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_K \\ &\leq \|u_m - u_{m-1}\|_{B_m(0)} + \cdots + \|u_{n+1} - u_n\|_{B_n(0)} \\ &\leq 1/2^{m-1} + \cdots + 1/2^n \leq \sum_{j \geq n} 1/2^j, \end{aligned}$$

y esto tiende a cero si $n \rightarrow \infty$. Para terminar, veamos que $u := \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ satisface $\mathcal{L}u = g$. En efecto, si $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle &= (u, \mathcal{L}^* \varphi)_{\text{sop } \varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, \mathcal{L}^* \varphi)_{\text{sop } \varphi} = \lim_{k \rightarrow \infty} (u_k, \mathcal{L}^* \varphi)_{B_{k+1}(0)} \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} (g, \mathcal{L}^* \varphi)_{B_{k+1}(0)} = (g, \mathcal{L}^* \varphi) \\ &= \langle \mathcal{L}g, \varphi \rangle. \end{aligned}$$



EXISTENCIA DE SOLUCIONES FUNDAMENTALES Y CONSECUENCIAS

LEMA 3. La función $H : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $H(x_1, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^n \chi_{\{x_i > 0\}}$ es un elemento de $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ y satisface

$$\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H = \delta_0.$$

Demostración. Si $\varphi \in \mathcal{D}$, es

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) dx_i &= \lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(x_1, \dots, \overbrace{t}^i, \dots, x_n) - \varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n) \\ &= -\varphi(x_1, \dots, 0, \dots, x_n), \end{aligned}$$

ya que φ tiene soporte compacto. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H, \varphi \right\rangle &= \left\langle H, (-1)^n \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \varphi \right\rangle = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n} H \cdot \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \varphi \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^n \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \varphi \cdot dx_1 \cdots dx_n \\ &= (-1)^n (-1)^n \varphi(0, \dots, 0) = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle. \end{aligned}$$



TEOREMA 3 (Malgrange-Ehrenpreis). Todo operador diferencial parcial lineal no nulo con coeficientes constantes admite una solución fundamental.

Demostración. Sea $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Por el **Teorema 2**, existe $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\mathcal{L}u = H$. Considerando la distribución $\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} u$ se tiene efectivamente que

$$\mathcal{L} \left(\frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} u \right) = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \mathcal{L}u = \frac{\partial^n}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} H = \delta_0.$$



LEMA 4. Si $f \in \mathcal{D}$, entonces $\delta_0 * f = f$.

Demostración. Por definición, es

$$\delta_0 * f(x) = \langle \delta_0, f(x - \cdot) \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - \cdot) d\delta_0 = f(x - 0) = f(x).$$

COROLARIO 4. Sea $f \in \mathcal{D}$ y $\mathcal{L} = p(D)$ un operador diferencial. Entonces la ecuación $\mathcal{L}u = f$ tiene una solución en \mathcal{D} .

Demostración. Sea s una solución fundamental para \mathcal{L} . Si ponemos $u := s * f$, esto define una función test y

$$\mathcal{L}(s * f) = (\mathcal{L}s) * f = \delta_0 * f = f,$$

lo que concluye la demostración.

EJEMPLO 1. Notemos que el corolario anterior describe además como encontrar soluciones suaves a partir de una solución fundamental. Usemos esto para tratar un caso ya conocido: hallemos soluciones suaves a la ecuación

$$b_1 \cdot \frac{\partial u}{\partial x_1} + \cdots + b_n \cdot \frac{\partial u}{\partial x_n} = \beta u + g \quad (2)$$

con $g \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$, $b = (b_1, \dots, b_n) \in \mathbb{R}$ y $\beta \in \mathbb{R}_{<0}$.

Observemos que notando $p = \sum_{i=1}^n b_i X_i - \beta$ y $\mathcal{L} = p(D)$, la ecuación se puede rescribir como

$$\mathcal{L}u = g.$$

Busquemos en primer lugar la solución fundamental del operador \mathcal{L} . Proponemos

$$\langle u, \varphi \rangle := \int_0^{+\infty} \varphi(tb) e^{\beta t} dt,$$

ya que

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{L}u, \varphi \rangle &= \langle u, \mathcal{L}^* \varphi \rangle = - \sum_{i=1}^n b_i \int_0^{+\infty} \varphi_i(tb) e^{\beta t} dt + \beta \int_0^{+\infty} \varphi(tb) e^{\beta t} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \left(\sum_{i=1}^n b_i \varphi_i(tb) \right) e^{\beta t} dt + \int_0^{+\infty} \varphi(tb) \beta e^{\beta t} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} \varphi(tb) e^{\beta t} + \varphi(tb) \frac{d}{dt} e^{\beta t} dt \\ &= - \int_0^{+\infty} \frac{d}{dt} (\varphi(tb) e^{\beta t}) dt = \varphi(tb) e^{\beta t} \Big|_{+\infty}^0 = \varphi(0). \end{aligned}$$

para cada $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n)$. Por lo tanto, una solución para (2) es

$$v(x) = u * g(x) = \langle u, g(x - \cdot) \rangle = \int_0^{+\infty} g(x - tb) e^{\beta t} dt.$$

APÉNDICE: SOBRE LA CONVOLUCIÓN DE DISTRIBUCIONES

DEFINICIÓN 2. Sean $T \in \mathcal{D}'$ y $\varphi \in \mathcal{D}$. Se define la *convolución* de T y φ como

$$(T * \varphi)(x) := \langle T, \varphi(x - \cdot) \rangle.$$

DEFINICIÓN 3. Sea $T \in \mathcal{D}'(U)$ y $V \subset U$ un abierto. Decimos que T se anula en V si para toda $\varphi \in \mathcal{D}$ con $\text{sop } \varphi \subset V$ se tiene que $\langle T, \varphi \rangle = 0$.

DEFINICIÓN 4. El *soporte* de una distribución $T \in \mathcal{D}'(U)$ es el abierto maximal³ en V tal que T se anula en V^c .

TEOREMA 4 ([2], Theorem 4.1.1). Si $T \in \mathcal{D}'$ y $\varphi \in \mathcal{D}$, entonces $T * \varphi$ es una función suave de soporte compacto con $\text{sop } T * \varphi \subset \text{sop } T + \text{sop } \varphi$ y

$$D^\alpha(T * \varphi) = (D^\alpha T) * \varphi = T * (D^\alpha \varphi)$$

para todo multiíndice α . ◀

REFERENCIAS

- [1] Jean-Pierre Rosay. *A Very Elementary Proof of the Malgrange-Ehrenpreis Theorem*. The American Mathematical Monthly, 1991.
- [2] Lars Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*. Springer, 1990.

³Esto está bien definido, y más aún se puede verificar que el soporte es el complemento de la unión de los abiertos donde T se anula.