Análisis Funcional

Primer Cuatrimestre – 2019

Examen Final

Guido Arnone

Índice general

1. Preliminares **2**
1.0.1. Operadores Compactos . . . 2
1.0.2. Teoría Espectral . . . 2

2. El teorema espectral, cálculo funcional continuo y aplicaciones **3**
2.0.1. El teorema espectral . . . 3
2.0.2. Cálculo Funcional . . . 3
2.0.3. Algunas propiedades básicas . . . 3
2.0.4. Aplicaciones . . . 5

Parte 1

Preliminares

Repaso primero algunos resultados que vimos en la materia, y voy a necesitar para la demostración del teorema espectral.

1.0.1. Operadores Compactos

1.0.2. Teoría Espectral

Parte 2

El teorema espectral, cálculo funcional continuo y aplicaciones

2.0.1. El teorema espectral

Teorema 2.0.1 (espectral para operadores compactos y autoadjuntos)**.** Sea H un espacio de Hilbert separable. Si $A \in \mathcal{L}(H)$ es un operador compacto y autoadjunto, entonces existe una base ortonormal de autovectores $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de A.

2.0.2. Cálculo Funcional

Definición 2.0.1. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Tenemos entonces una base ortonormal de autovectores $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de A con $\sigma(A) = \{\lambda_n\}_{n\geq 1}$. Si $f : \sigma(A) \to \mathbb{R}$ una función acotada, definimos

$$\mathrm{ev}_A(f)(x) := \sum_{n\geq 1} f(\lambda_n)(e_n, x)e_n.$$

Notaremos $f(A) := \mathrm{ev}_A(f)$. Observemos que esta función está bien definida, es continua, y no depende de la base elegida. **[HACER]**

2.0.3. Algunas propiedades básicas

Teorema 2.0.2. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Entonces, la aplicación

$$\begin{aligned} \mathrm{ev}_A : B(\sigma(A), \mathbb{R}) &\to \mathcal{L}(H) \\ f &\mapsto \mathrm{ev}_A(f) \end{aligned}$$

es un morfismo de álgebras de Banach continuo que satisface $\|ev_A\| \leq 1$. Más aún, se tiene que $\mathrm{ev}_A(1) = I$ y $\mathrm{ev}_A(\mathrm{id}) = A$.

Demostración. content... ♦

Proposición 2.0.1. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Si $f : \sigma(A) \to \mathbb{R}$ es una función acotada en, entonces

(i) $\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$.

(ii) $f(A)$ es autoadjunta.

(iii) $\|f(A)\| = \|f|_{\sigma(A)}\|_\infty$.

(iv) Si $f \geq 0$ entonces $f(A) \geq 0$.

Demostración. Fijemos una base ortonormal $\{e_n\}_{n\geq 1}$ de autovectores de A con $Ae_n = \lambda_n e_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

(i) Si $\lambda_j \in \sigma(A)$, es

$$f(A)e_j = \sum_{n\geq 1} f(\lambda_n)(e_n, e_j)e_n = f(\lambda_j)e_j,$$

así que $f(\sigma(A)) \subset \sigma(f(A))$.

Recíprocamente, tomemos $\lambda \notin f(\sigma(A))$. Como esto dice que función $g(t) = (f(t)-\lambda)^{-1}$ está bien definida en $\sigma(A)$ y es allí acotada, está bien definida su evaluación $g(A)$ en A. Como es $g(f-\lambda) = (f-\lambda)g = 1$, aplicando ev_A obtenemos que

$$g(A)(f(A)-\lambda I) = (f(A)-\lambda I)g(A) = I.$$

y en consecuencia λ no pertenece al espectro de $f(A)$,

(ii) Por un cálculo directo, tomando $x, y \in H$ se tiene que

$$(f(A)x, y) = \sum_{n\geq 1} f(\lambda_n)(e_n, x)(e_n, y) = (f(A)y, x) = (x, f(A)y).$$

(iii) Como es $\|ev_A\| \leq 1$, ya sabemos que $\|f(A)\| \leq \|f_{\sigma(A)}\|_\infty$. En vista de **(i)** tenemos la otra desigualdad, pues acotando inferiormente por los autovectores de norma 1 se tiene que

$$\|f(A)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(A)(x)\| \geq \sup_{\lambda\in\sigma(f(A))} |\lambda| = \sup_{\lambda\in f(\sigma(A))} |\lambda| = \|f|_{\sigma(A)}\|_\infty.$$

(iv) Supongamos ahora que $f \geq 0$ y sea $x \in H$. Por definición de $f(A)$ es

$$(f(A)x, x) = \sum_{n\geq 1} f(\lambda_n)(e_n, x)^2 \geq 0$$

pues por hipótesis sabemos que $f(\lambda_n) \geq 0$ para todo $n \geq 1$.

♦

Observación 2.0.1. Lo anteriores resultados también valen cuando f está definida en un dominio que contiene al espectro (mientras esté acotada allí) precomoponiendo ev_A con la restricción de f al $\sigma(A)$. Más aún, el operador $f(A)$ sólo depende de los valores que f toma en su espectro. En particular, esto nos dice que podemos definir $f(A)$ para $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua o medible Borel.

Más aún, la aplicación $ev_A : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{L}(H)$ es el único morfismo de álgebras de Banach continuo que tiene a I por imagen de 1 y A por imagen de id.

Proposición 2.0.2. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua, entonces existe un operador compacto $S \in \mathcal{K}(H)$ tal que

$$f(A) = S + f(0)I.$$

Demostración. Por el teorema de Stone-Weierstraß, sabemos que existe una sucesión de polinomios $(p_n)_{n\geq 1}$ tal que $p_n \to f$ fuertemente y en particular, es $p_n(0) \to f(0)$. Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$q_n = p_n - p_n(0),$$

y en vista de la observación anterior, se tiene que $q_n \to f - f(0)$. Aplicando ev_A y usando que ésta es continua, es

$$q_n(A) \to (f - f(0))(A) = f(A) - f(0)I. \tag{2.1}$$

Fijemos ahora $n \in \mathbb{N}$. Como $q_n(0) = p_n(0) - p_n(0) = 0$, existe $r \in \mathbb{R}[X]$ tal que $q_n = Xr$. Por lo tanto, obtenemos $q_n(A) = (Xr)(A) = ev_A(X) \circ ev_A(r) = A \circ r(A)$. Al ser A un operador compacto, el operador $q_n(A)$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$. En vista de (2.1), obtenemos finalmente que el operador $f(A) - f(0)I$ es compacto. Resta notar entonces que

$$f(A) = (f(A) - f(0)I) + f(0)I.$$

♦

Corolario 2.0.1. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función continua que se anula en 0, el operador $f(A)$ resulta compacto. □

2.0.4. Aplicaciones

Teorema 2.0.3. Sea H un espacio de Hilbert y $A \in \mathcal{L}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Dado $n \in \mathbb{N}$, se tiene que

(i) Si n es impar, existe un único operador $B \in \mathcal{L}(H)$ tal que $B^n = A$.

(ii) Si n es par, existe un operador $B \in \mathcal{L}(H)$ tal que $B^n = A$ sí y solo si $A \geq 0$. En tal caso B es además el único con esta propiedad.

Notaremos $A^{1/n} := B$ en ambos casos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ para el cual exista $A^{1/n}$, sabemos tambien que A es compacto sí y sólo si lo es $A^{1/n}$.

Demostración. ♦

Teorema 2.0.4 (Riesz-Markov-Kakutani). Sea X un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Si $\psi : C(X) \to \mathbb{R}$ es un funcional lineal positivo, existe una única medida Borel regular μ en X tal que

$$\psi(f) = \int_X f d\mu.$$

para toda $f \in C(X)$.

Definición 2.0.2. Sea H un espacio de Hilbert y $A : H \to H$ un operador compacto y autoadjunto. Para cada $h \in H$, la aplicación

$$f \in C(\sigma(A)) \mapsto (f(A)h, h) \in \mathbb{R}$$

resulta un funcional lineal positivo. El teorema de Riesz-Markov-Kakutani nos asegura entonces que existe una única medida Borel regular μ_h en $\sigma(A)$ que satisface

$$(f(A)x, y) = \int_{\sigma(A)} f d\mu_h$$

para toda $f : \sigma(A) \to \mathbb{R}$ continua. Llamamos a μ_h la **medida espectral de A asociada a h.**

Proposición 2.0.3. Sea H un espacio de Hilbert separable y $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y autoadjunto. Si $(g_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{C}(\sigma(A), \mathbb{R})$ es una sucesión uniformemente acotada que converge puntualmente a cierta función $g : \sigma(A) \to \mathbb{R}$, la sucesión de operadores $\{g_n(A)\}_{n\geq 1} \subset \mathcal{L}(H)$ converge **fuertemente** a $g(A)$.

Demostración. ♦

Teorema 2.0.5 (un caso particular del teorema ergódico de Von Neumann). Sea H un espacio de Hilbert separable. Si $A \in \mathcal{K}(H)$ un operador compacto y autoadjunto tal que $\sigma(A) \subset [-1, 1]$, entonces los promedios de A convergen **fuertemente** al proyector π_A del subsepacio de puntos fijos de A. Es decir, si notamos $E_1 = \{x \in H : Ax = x\}$ y $\pi_A := P_{E_1}$, entonces

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^n \rightrightarrows \pi_A.$$

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos $g_n(x) := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^i$ para cada $x \in [-1, 1]$. Tenemos así que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} A^n = g_n(A)$. Por otro lado, la proyección π_A coincide con la evaluación en A de

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En vista de la **Proposición 2.2.3**, basta probar que la sucesión $(g_n)_{n\geq 1}$ está uniformemente acotada y converge puntualmente a g. Lo primero se deduce de que si $x \in [-1, 1]$ entonces

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x|^i \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = 1.$$

Ahora veamos la convergencia puntual. En primer lugar, la sucesión $(g_n(1))_{n\geq 1}$ es constantemente 1 y por lo tanto converge a $g(1) = 1$. Por otro lado, sabemos que $g_n(-1)$ es cero para n par y $-1/n$ para n impar. De aquí se ve que entonces que $g_n(-1) \to 0 = g(-1)$. Finalmente, si $\lambda \in (-1, 1)$ entonces

$$|g_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x|^i \leq \frac{1}{n}\sum_{i\geq 1} |x|^i = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1 - |\lambda|} \to 0.$$

Consecuentemente, debe ser $g_n(\lambda) \to 0 = g(\lambda)$. ♦