

# Análisis Funcional

Primer Cuatrimestre – 2019

Examen Final



Guido Arnone

# Índice general

<b>Índice general</b>	<b>1</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>2</b>
1.0.1. Proyectores, Teoremas de Representación y Sumas Hilbertianas . . . . .	2
1.0.2. Operadores Compactos . . . . .	6
1.0.3. Teoría Espectral . . . . .	7
<b>2. El teorema espectral, cálculo funcional continuo y aplicaciones</b>	<b>11</b>
2.0.1. El teorema espectral . . . . .	11
2.0.2. Cálculo Funcional . . . . .	12
2.0.3. Aplicaciones . . . . .	15
<b>Bibliografía</b>	<b>18</b>

# Parte 1

## Preliminares

Recuerdo primero algunos resultados que vimos en la materia y serán necesarios para la demostración del teorema espectral.

### 1.0.1. proyectores, Teoremas de Representación y Sumas Hilbertianas

**Teorema 1.0.1 (de la proyección ortogonal).** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $K \subset H$  un subconjunto convexo, cerrado y no vacío. Dado  $f \in H$ , existe un único  $u \in K$  tal que

$$\|f - u\| = \min_{v \in K} \|f - v\|.$$

Más aún, el vector  $u$  se caracteriza por satisfacer

$$\begin{cases} u \in K \\ (f - u, v - u) \leq 0 \quad (\forall v \in K) \end{cases}$$

Notamos  $P_K f := u$ .

*Demostración.* Sea  $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset K$  una sucesión que realiza  $d := \inf_{v \in K} \|f - v\|$  de forma decreciente y veamos que  $\{v_n\}_{n \geq 1}$  es de Cauchy. Notemos  $d_n := \|f - v_n\|$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Usando la identidad del paralelogramo, es

$$\left\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{v_n - v_m}{2}\right\|^2 = \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} \quad (1.1)$$

para cada  $n, m \in \mathbb{N}$ . Como  $K$  es convexo, sabemos que  $1/2(v_n + v_m) \in K$  y por lo tanto es  $\|f - \frac{v_n + v_m}{2}\|^2 \geq d^2$ . De (1.1) tenemos así

$$\|v_n - v_m\|^2 \leq 4 \left( \frac{d_n^2 + d_m^2}{2} - d^2 \right),$$

lo que efectivamente muestra que  $\{v_n\}_{n \geq 1}$  es de Cauchy. Existe entonces un cierto límite  $u \in K$  que realiza  $d(f, K)$ .

Sea ahora  $v \in K$  y  $v_t = tv + (1 - t)u$ . Como  $\varphi(t) = \|f - v_t\|^2$  se minimiza en 0, es  $0 \leq \varphi'(0) = -2(f - u, v - u)$  y entonces  $(f - u, v - u) \leq 0$ . Recíprocamente, si  $u \in K$  es tal que  $(f - u, v - u) \leq 0$  para todo  $v \in K$  entonces

$$\|f - u\|^2 - \|f - v\|^2 = 2(f - u, v - u) \leq 0 \quad (1.2)$$

lo que dice que  $u$  realiza  $d(f, K)$ .

De esta caracterización vemos la unicidad: si  $u$  y  $u'$  minimizan  $d(f, K)$  es entonces

$$\|u - u'\|^2 = (u - f, u - u') + (f - u', u - u') = (f - u, u' - u) + (f - u', u - u') \leq 0,$$

lo que muestra que  $u = u'$ . ◆

**Corolario 1.0.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $K \subset H$  un convexo cerrado no vacío. Entonces  $P_K$  es continua y  $\|P_K f_1 - P_K f_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$ .

*Demostración.* Sea  $u_i = P_M f_i$ . Como es  $(f_i - u_i, v - u_i) \leq 0$  para todo  $v \in K$ , tenemos que

$$(f_2 - f_1, u_1 - u_2) + \|u_1 - u_2\|^2 \leq 0.$$

Ahora, por la desigualdad de Cauchy-Schwartz es

$$\|u_1 - u_2\|^2 \leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2) \leq \|f_1 - f_2\| \|u_1 - u_2\|,$$

de forma que  $\|P_K f_1 - P_K f_2\| = \|u_1 - u_2\| \leq \|f_1 - f_2\|$ . ◆

**Corolario 1.0.2.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $M \leq H$  un subespacio cerrado. La aplicación  $f \in H \mapsto P_M f \in H$  es un operador continuo. Más aún,  $P_M$  es un proyector y para cada  $f \in H$  el vector  $P_M f$  se caracteriza como el único tal que  $(f - u, v) = 0$  para todo  $v \in M$ .

*Demostración.* La linealidad es consecuencia de la caracterización de  $P_M f$  que probamos a continuación, mismo el hecho de que  $P_M$  es un proyector. La suficiencia está dada por el **Teorema 1.0.1**, así que veremos la necesidad.

Como para cada  $v \in M$  es  $P_M f \pm v \in M$ , tenemos que

$$0 \geq (f - P_M f, (P_M f \pm v) - P_M f) = \pm(f - P_M f, v)$$

y por lo tanto  $(f - P_M f, v) = 0$ . ◆

**Teorema 1.0.2 (de representación de Riesz).** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Sin  $\varphi \in H^*$  es un funcional lineal, existe un único  $u \in H$  tal que

$$\langle \varphi, v \rangle = (u, v)$$

para todo  $v \in H$ .

*Demostración.* Basta ver que  $j : v \in H \mapsto (v, -) \in H^*$  tiene imagen densa. Sea  $\Phi : H^* \rightarrow \mathbb{R}$  un funcional que se anula en  $j(H)$ . Como  $H$  es reflexivo, sabemos que  $\Phi = ev_x$  para cierto  $x \in H$  y por lo tanto es

$$0 = \Phi(j(y)) = j(y)(x) = (y, x)$$

para todo  $y \in H$ . En consecuencia debe ser  $x = 0$  y  $\Phi \equiv 0$ . ◆

**Proposición 1.0.1.** Sea  $H$  un espacio de hilbert y  $S \leq H$  un subespacio.

(i)  $S^\perp$  es cerrado.

(i)  $S^{\perp\perp} = \overline{S}$ .

(iii)  $S^\perp = H$  si y sólo si  $S = \{0\}$ .

(iv)  $S$  es denso si y sólo si  $S^\perp = \{0\}$

*Demostración.* Hacemos cada inciso por separado.

(i) Sea  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset S^\perp$  tal que  $x_n \rightarrow x$ . Como para cada  $y \in S$  es

$$(x, y) = (\lim_{n \rightarrow \infty} x_n, y) = \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n, y) = 0,$$

debe ser  $x \in S^\perp$ . Por lo tanto, el ortogonal de  $S$  es cerrado.

(ii) Basta ver que  $S$  es denso en  $S^{\perp\perp}$ . Sea  $\varphi : S^{\perp\perp} \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional que se anula en  $S$ . Por el teorema de representación de Riesz, es  $\varphi \equiv (u, -)$  para cierto  $u \in H$ . Como además  $\varphi$  se anula en  $S$ , sabemos que  $u \in S^\perp$  y por lo tanto  $\varphi \equiv 0$ .

(iii) En efecto,  $S^\perp = H$  si y sólo si para todo  $h \in H$  y  $s \in S$  es

$$(s, h) = 0,$$

lo que equivale a decir  $s = 0$  para todo  $s \in S$ .

(iv) Resta notar que  $S$  es denso si y sólo si  $S^{\perp\perp} = \bar{S} = H$ , y por (iii) esto ocurre si y sólo si  $S^\perp = \{0\}$ .



**Definición 1.0.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una función bilineal. Decimos que  $a$  es

- **continua** si existe  $C \geq 0$  tal que  $|a(x, y)| \leq C\|x\|\|y\|$  para todo  $x, y \in H$ .
- **cohesiva** si existe  $\theta > 0$  tal que  $a(x, x) \geq \theta\|x\|^2$  para todo  $x \in H$ .

**Observación 1.0.1.** Si  $a$  es una función bilineal continua y cohesiva en un espacio de Hilbert, induce un producto interno equivalente al original.

**Teorema 1.0.3 (Stampacchia).** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $a : H \times H \rightarrow \mathbb{R}$  una función bilineal continua y cohesiva. Si  $K \subset H$  es convexo cerrado y no vacío y  $\varphi \in H^*$  un funcional lineal, entonces existe un único vector  $u \in K$  tal que

$$a(u, v - u) \geq \langle \varphi, v - u \rangle \quad (\forall v \in K)$$

Si además  $a$  es simétrica, el vector  $u$  se caracteriza por

$$\begin{cases} u \in K \\ \frac{1}{2}a(u, u) - \langle \varphi, u \rangle = \inf_{v \in K} \frac{1}{2}a(v, v) - \langle \varphi, v \rangle \end{cases}$$

*Demostración.* content...



**Teorema 1.0.4 (Lax-Milgram).**

*Demostración.* content...



**Definición 1.0.2.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $(E_n)_{n \geq 1}$  una sucesión de subespacios cerrados de  $H$ . Se dice que  $H$  es **suma hilbertiana** de  $(E_n)_{n \geq 1}$  si

- $E_i \perp E_j$  si  $i \neq j$ , y
- $\text{gen } \{E_n\}_{n \geq 1}$  es denso.

Notamos  $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$ .

**Teorema 1.0.5.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert con  $H = \bigoplus_{n=1}^{\infty} E_n$  y  $u \in H$ . Si notamos  $u_n = P_{E_n} u$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ , entonces

$$(i) \quad u = \sum_{n \geq 1} u_n.$$

$$(ii) \quad \|u\|^2 = \sum_{n \geq 1} \|u_n\|^2.$$

Recíprocamente, si tomamos  $u_n \in E_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  y es  $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|^2 < \infty$ , entonces  $u := \sum_{n \geq 1} u_n$  converge y se tiene que  $u_n = P_{E_n} u$  para cada  $n \in \mathbb{N}$ .

*Demostración.* Para cada  $k \in \mathbb{N}$ , definimos  $S_k := \sum_{n=1}^k P_{E_n} \in \mathcal{L}(H)$ . Por ortogonalidad se tiene que

$$\|S_k u\|^2 = \sum_{n=1}^k \|u_n\|^2 = \sum_{n=1}^k (u, u_n) = (u, S_k u).$$

pues definición de proyector  $P_{E_n}$ , es  $(u_n, u_n - u) = 0$  y por tanto  $\|u_n\|^2 = (u, u_n)$ . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwartz obtenemos

$$\|S_k u\|^2 \leq \|u\| \|S_k u\|,$$

por lo que debe ser  $\|S_k\| \leq 1$ .

Ahora, fijemos  $\varepsilon > 0$ . Por densidad existe  $u_\varepsilon \in \text{gen } \{E_n\}_{n \geq 1}$  tal que  $\|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$  y  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $S_k u_\varepsilon = u_\varepsilon$  si  $k > k_0$ . Por lo tanto, para todo  $k > k_0$  es

$$\|S_k u - u_\varepsilon\| = \|S_k(u - u_\varepsilon)\| \leq \|u - u_\varepsilon\| < \varepsilon$$

y

$$\|S_k u - u\| \leq \|S_k u - u_\varepsilon\| + \|u_\varepsilon - u\| < 2\varepsilon.$$

En otras palabras, vemos que  $\sum_{n \geq 1} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} S_k u = u$ . De aquí es también que

$$\|u\|^2 = \left\| \lim_{n \rightarrow \infty} S_k u \right\|^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \|S_k u\|^2 = \sum_{n \geq 1} \|u_n\|^2.$$

Para terminar veamos el recíproco. Si tomamos  $u_n \in E_n$  para cada  $n \in \mathbb{N}$  tales que  $\sum_{n \geq 1} \|u_n\|^2 < \infty$ , entonces notando  $s_k = \sum_{n=1}^k u_n$  por ortogonalidad vemos que

$$\|s_k - s_l\|^2 \leq \sum_{l < n \leq k} \|u_n\|^2.$$

Esto dice que  $(s_k)_{k \geq 1}$  es de Cauchy, y en consecuencia  $\lim_{k \rightarrow \infty} s_k = \sum_{n \geq 1} u_n$  existe. Por último, resta notar que por la continuidad de los proyectores es

$$P_{E_m}(u) = \sum_{n \geq 1} P_{E_m}(u_n) = u_m$$

para todo  $m \in \mathbb{N}$ . ◆

**Definición 1.0.3.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Una sucesión  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  se dice una **base hilbertiana** si

- $(e_n, e_m) = \delta_{nm}$  para todo  $n, m \in \mathbb{N}$ , y
- $\text{gen } \{e_n\}_{n \geq 1}$  es denso.

**Corolario 1.0.3.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $\{e_n\}_{n \geq 1} \subset H$  es una sucesión ortonormal, entonces esta es una base hilbertiana si y sólo si

$$u = \sum_{n \geq 1} (u, e_n) e_n \text{ y } \|u\|^2 = \sum_{n \geq 1} |(u, e_n)|^2.$$

para todo  $u \in H$ .

Recíprocamente, si  $(\alpha_n)_{n \geq 1} \subset \ell^2$  entonces la serie  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n e_n$  converge en  $H$  a un elemento, y su norma es exactamente  $\sum_{n \geq 1} \alpha_n^2$ . ♦

**Observación 1.0.2.** Si  $H$  admite una base Hilbertiana  $\{e_n\}_{n \geq 1}$ , la aplicación  $u \in H \mapsto \{(u, e_n)\}_{n \geq 1} \in \ell^2$  es un isomorfismo isométrico.

**Teorema 1.0.6.** Un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita admite una base hilbertiana.

*Demostración.* Sea  $\{v_n\}_{n \geq 1} \subset H$  denso y  $F_k = \langle v_1, \dots, v_k \rangle$  para cada  $k \in \mathbb{N}$ . Por lo tanto, es

$$\overline{\bigcup_{k \geq 1} F_k} = H.$$

Para cada  $k \geq 1$ , podemos tomar una base ortonormal  $B_{k+1}$  de  $F_{k+1}$  que extienda una base ortonormal de  $F_k$ . Tomando  $B = \bigcup_{k \geq 1} B_k$  obtenemos así una base hilbertiana de  $H$ . ♦

## 1.0.2. Operadores Compactos

**Definición 1.0.4.** Sean  $E$  y  $F$  dos espacios de Banach. Un operador  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  se dice **compacto** si  $\overline{T(B_E)}$  es compacto. Equivalentemente, el operador  $T$  es compacto si para toda sucesión acotada  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset E$  la sucesión  $\{Tx_n\}_{n \geq 1} \subset F$  es precompacta.

**Proposición 1.0.2.** Si  $E$  y  $F$  dos espacios de Banach, el conjunto  $\mathcal{K}(E, F)$  es un subespacio cerrado de  $\mathcal{L}(E, F)$ .

*Demostración.* Supongamos que  $T_n \rightrightarrows T$  para cierta sucesión  $\{T_n\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{K}(E)$  de operadores compactos. Veamos que  $\overline{T(B_E)}$  es compacto, o equivalentemente, que  $T(B_E)$  es totalmente acotada.

Fijemos  $\varepsilon > 0$  y tomemos  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que si  $n > n_0$  entonces  $\|T - T_{n_0}\| < \varepsilon/2$ . Como  $T_{n_0}$  es un operador compacto, existen  $f_1, \dots, f_j \in E$  tales que

$$T_{n_0}(B_E) \subset \bigcup_{s=1}^j B_{\varepsilon/2}(f_s).$$

Afirmamos entonces que  $T(B_E) \subset \bigcup_{s=1}^j B_{\varepsilon}(f_s)$ . En efecto, si  $x \in B_E$ , entonces existe  $s \in \llbracket j \rrbracket_0$  tal que  $T_{n_0}x \in B_{\varepsilon/2}(f_s)$  y por lo tanto, es

$$\|Tx - f_s\| \leq \|Tx - T_{n_0}x\| + \|T_{n_0}x - f_s\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon.$$

♦

**Corolario 1.0.4.** Sean  $E$  y  $F$  son espacios de Banach. Si  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  es un operador que es límite de operadores de rango finito, entonces es compacto.

*Demostración.* Como los operadores compactos forman un subespacio cerrado, resta notar que un operador de rango finito siempre es compacto. ◆

**Teorema 1.0.7.** Sean  $E$  un espacio de Banach y  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $T \in \mathcal{L}(E, H)$  es un operador acotado, entonces existe una sucesión  $(T_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(E, H)$  de operadores de rango finito tal que  $T_n \rightrightarrows T$ .

*Demostración.* Veamos equivalentemente que los operadores de rango finito son densos en los operadores compactos.

Sea  $\varepsilon > 0$ . Como  $T$  es compacto, existen  $f_1, \dots, f_j \in E$  tales que  $\overline{T(B_E)} \subset \bigcup_{s=1}^j B_\varepsilon(f_j)$ . Definamos ahora  $G = \langle f_1, \dots, f_j \rangle$ . Luego  $T_\varepsilon = P_{G_\varepsilon} T$  es de rango finito y si  $x \in B_E$  con  $Tx \in B_\varepsilon(f_s)$ , entonces

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon x - Tx\| &\leq \|T_\varepsilon x - f_s\| + \|f_s - Tx\| = \|P_{G_\varepsilon}(Tx - f_s)\| + \|f_s - Tx\| \\ &\leq \|P_{G_\varepsilon}\| \|Tx - f_s\| + \|f_s - Tx\| \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

lo que prueba que  $\|T_\varepsilon - T\| \leq 2\varepsilon$ . ◆

**Observación 1.0.3.** Sean  $E, F$  y  $G$  espacios de Banach y  $T \in \mathcal{L}(E, F), S \in \mathcal{L}(F, G)$  operadores acotados. Si  $S$  o  $T$  son compactos,  $ST$  lo es.

**Teorema 1.0.8 (Alternativa de Fredholm).** Sea  $E$  un espacio de Banach y  $T \in \mathcal{K}(E)$  un operador compacto. Entonces

- (a)  $\dim N(I - T) < \infty$ .
- (b)  $R(I - T)$  es cerrado y  $R(I - T) = {}^\perp N(I - T^*)$ .
- (c)  $N(I - T) = \{0\} \iff R(I - T) = E$ .
- (d)  $\dim N(I - T^*) = \dim N(I - T)$ .

*Demostración.* content... ◆

### 1.0.3. Teoría Espectral

**Definición 1.0.5.** Sea  $E$  un espacio de Banach y  $T \in \mathcal{L}(E)$  un operador acotado. El **espectro** de  $T$  es el conjunto

$$\sigma(T) := \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \text{ no es inversible}\},$$

y el **espectro puntual** es

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : \ker(T - \lambda I) \neq \{0\}\}.$$

Definimos también la **resolvente** de  $T$  como  $\rho(T) := \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ .

**Proposición 1.0.3.** Si  $E$  un espacio de Banach y  $T \in \mathcal{L}(E)$  un operador acotado, el espectro de  $T$  es compacto y  $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ .



*Demostración.* Veamos primer que  $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|]$ . Consideremos  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que  $|\lambda| > \|T\| \geq 0$  y veamos que  $\lambda \in \rho(T)$ .

Dicho de otra forma, veamos que para todo  $y \in E$  la ecuación

$$x = \frac{1}{\lambda}(Tx - y)$$

tiene solución única. En efecto, por el teorema de punto fijo de Banach basta notar que la aplicación  $J(x) := \frac{1}{\lambda}(Tx - y)$  es una contracción estricta, pues dados  $u, v \in E$  es

$$\|J(u) - J(v)\| = \frac{1}{|\lambda|} \|T(u - v)\| \leq \frac{\|T\|}{|\lambda|} \|u - v\|$$

y por hipótesis sabemos que  $\frac{\|T\|}{|\lambda|} < 1$ .

Para terminar, veamos que el espectro es cerrado mostrando que la resolvente es abierta. Fijemos  $\lambda_0 \in \rho(T)$  y sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Ahora, la aplicación

$$T - \lambda I = T - \lambda_0 I + (\lambda_0 - \lambda)I$$

será biyectiva si y sólo si para cada  $y \in E$  la ecuación

$$x = (T - \lambda_0 I)^{-1}y + (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}x$$

tiene solución única. Esto se satisface en particular cuando la aplicación  $\tilde{J}(x) := (T - \lambda_0 I)^{-1}y + (\lambda - \lambda_0)(T - \lambda_0 I)^{-1}x$  es contractiva, y con el mismo argumento que antes, vemos que esto se puede asegurar si

$$|\lambda - \lambda_0| < \|(T - \lambda_0 I)^{-1}\|^{-1}.$$



**Teorema 1.0.9.** Sea  $E$  un espacio de Banach de dimensión infinita. Si  $T \in \mathcal{K}(E)$  es un operador compacto, entonces

- (i)  $0 \in \sigma(T)$ .
- (ii)  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$ .
- (iii) O bien  $\sigma(T) = \{0\}$ , o bien  $\sigma(T)$  es finito, o bien es  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  con  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

*Demostración.* Hacemos cada inciso por separado.

- (i) Si  $0$  no perteneciese al espectro de  $T$ , éste sería un operador inversible. Pero como a su vez es compacto, tendríamos que  $I = T \circ T^{-1}$  es compacta, lo cual nunca ocurre en dimensión infinita.
- (ii) Sea  $\lambda \in \sigma(T) \setminus \{0\}$ . Notemos que  $T - \lambda I$  es inversible si y sólo si lo es  $\lambda^{-1}T - I$ . Por la Alternativa de Fredholm, éste último es biyectivo si y sólo si es inyectivo. En consecuencia  $\lambda$  pertenece al espectro puntual de  $T$ .

(iii) Como el espectro es compacto, basta ver que para cada  $n \in \mathbb{N}$  el conjunto

$$\sigma(T) \cap \left\{ \lambda \in \mathbb{R} : |\lambda| \geq \frac{1}{n} \right\}$$

es finito. En particular este es discreto, así que debe ser contable. De ser infinito, esto dice además que  $\sigma(T)$  tiene a 0 como punto de acumulación y podemos entonces reordenar sus elementos de forma que resulten una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$  tal que  $\lambda_n \rightarrow 0$ .

Si no fuera así, existiría por compacidad una sucesión  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1} \subset \sigma(T)$  tal que  $\lambda_n \rightarrow \lambda \neq 0$ . Veamos que esto es absurdo. En particular tendríamos para cada  $n \in \mathbb{N}$  un vector unitario  $e_n \in \ker(T - \lambda I)$ .

Como la colección  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  es linealmente independiente, notando  $E_n = \langle e_1, \dots, e_n \rangle$  obtenemos una sucesión estrictamente creciente de subespacios cerrados que satisfacen  $(T - \lambda_n I)(E_n) \subset E_{n-1}$ .

Por el lema de Riesz, existen vectores unitarios  $u_{n+1} \in E_n$  tales que

$$\frac{1}{2} \leq d(u_{n+1}, E_n)$$

para todo  $n \geq 1$ , y podemos definir entonces  $v_n := \lambda_n^{-1} u_n$ . Notemos que como  $\{\lambda_n\}_{n \geq 1}$  converge y los vectores  $\{u_n\}_{n \geq 1}$ , esta es una sucesión acotada. Sin embargo, dados  $1 < m < n$  se tiene que

$$\|Tv_m - Tv_n\| = \left\| \overbrace{\lambda_n^{-1}(T - \lambda_n I)u_n}^{\in E_{n-1}} - \overbrace{\lambda_m^{-1}(T - \lambda_m I)u_m}^{\in E_{m-1} \subset E_{n-1}} + u_n - u_m \right\| \geq d(u_n, E_{n-1}) \geq \frac{1}{2},$$

lo que contradice la compacidad de  $T$ .



**Definición 1.0.6.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T \in \mathcal{L}(H)$ . Decimos que  $T$  es **autoadjunto** si para todo  $x, y \in H$  se tiene que  $(Tx, y) = (x, Ty)$ .

**Teorema 1.0.10.** Sea  $H$  es un espacio de Hilbert y  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operador autoadjunto. Notando

$$m = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x) \text{ y } M = \sup_{\|x\|=1} (Tx, x),$$

se tiene que  $\sigma(T) \subset [m, M]$  y  $m, M \in \sigma(T)$ . Más aún, es  $\|T\| = \max\{|m|, |M|\}$ .

*Demostración.* Por simetría (tomando  $-T$ ) basta probar las afirmaciones sobre  $M$ . En primer lugar, sea  $\lambda > M$  y veamos que  $\lambda \in \rho(T)$ . Como para todo  $x \in H$  es

$$(Tx, x) \leq M\|x\|^2,$$

se tiene que

$$(\lambda x - Tx, x) \geq (\lambda - M)\|x\|^2.$$

Al ser  $\lambda - M > 0$ , el cálculo anterior nos dice que la forma bilineal

$$\begin{aligned} \alpha : H \times H &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto (\lambda x - Tx, y) \end{aligned}$$

es continua y cohesiva. El teorema de Stampacchia nos asegura entonces que para todo  $y \in H$  existe un único elemento  $x \in H$  tal que  $\alpha(x, -) \equiv (y, -)$ .

Dicho de otra forma, la ecuación

$$(\lambda I - T)x = y$$

tiene solución única para todo  $y \in H$ , y en consecuencia  $T - \lambda I$  es inversible.

Veamos ahora que  $M \in \sigma(T)$ . Definimos ahora  $\alpha(x, y) := (Mx - Tx, y)$ . Como  $T$  es autoadjunta sabemos que  $\alpha$  es simétrica y positiva. Esto dice que esta función «*debe satisfacer Cauchy-Schwarz*»,

$$|\alpha(x, y)| \leq \alpha(x, x)^{1/2} \cdot \alpha(y, y)^{1/2} \quad (\forall x, y \in H).$$

Como  $\alpha(y, y) \leq (|M| + \|T\|)\|y\|^2$ , poniendo  $y = Mx - Tx$  es

$$\|Mx - Tx\|^2 \leq \alpha(x, x)^{1/2} (|M| + \|T\|)^{1/2} \cdot \|Mx - Tx\|$$

y notando  $C = (|M| + \|T\|)^{1/2}$  en definitiva obtenemos que

$$\|Mx - Tx\| \leq C \cdot \alpha(x, x)^{1/2},$$

para todo  $x \in H$ .

Si ahora tomamos  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  unitarios tales que  $(Tx_n, x_n) \rightarrow M$ , vemos que  $MI - T$  no está acotado inferiormente pues

$$\|(MI - T)x_n\| \leq \alpha(x_n, x_n)^{1/2} \rightarrow 0.$$

Consecuentemente  $T - MI$  no puede ser inversible, o lo que es lo mismo, debe ser  $M \in \sigma(T)$ .

Por último, si definimos  $\mu := \max\{|m|, |M|\}$  entonces dados  $x, y \in H$ , al expandir  $\alpha(v, v)$  para  $v \in \{x + y, x - y\}$  y restar vemos que

$$4(Tx, y) = (T(x + y), x + y) - (T(x - y), x - y) \leq M\|x + y\|^2 - m\|x - y\|^2$$

para todo  $x, y \in H$ . Desarrollando el lado derecho, llegamos a

$$|(Tx, y)| \leq \mu \left( \frac{\|x\|^2 + \|y\|^2}{2} \right)$$

y más aún, si  $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$  debe ser

$$|(Tx, y)| = |(T\alpha x, \alpha^{-1}y)| = \mu \left( \alpha^2 \frac{\|x\|^2 + \alpha^{-2}\|y\|^2}{2} \right).$$

Si  $\|x\| \neq 0$ , tomando  $\alpha = \|y\|/\|x\|$  es  $|(Tx, y)| \leq \mu\|x\|\|y\|$  y finalmente se obtiene

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{\|x\|, \|y\|=1} |(Tx, y)| \leq \mu.$$

**Corolario 1.0.5.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operador autoadjunto. Si  $\sigma(T) = \{0\}$ , es  $T = 0$ .

## Parte 2

# El teorema espectral, cálculo funcional continuo y aplicaciones

### 2.0.1. El teorema espectral

**Teorema 2.0.1 (espectral para operadores compactos y autoadjuntos).** Sea  $H$  un espacio de Hilbert separable. Si  $T \in \mathcal{L}(H)$  es un operador compacto y autoadjunto, entonces existe una base ortonormal de autovectores  $\{e_n\}_{n \geq 1}$  de  $T$ .

*Demostración.* Como  $T$  es compacto, sabemos que  $\sigma(T) \setminus \{0\} = \sigma_p(T) \setminus \{0\}$  y  $\sigma_p(T) = \{\lambda_n\}_{n \in F}$  para cierto  $F$  finito o numerable. Podemos suponer además que  $\sigma(T) \neq \{0\}$ , pues  $T$  es nula en caso contrario. Notando  $\lambda_0 := 0$  y  $F_0 = F \cup \{0\}$ , definimos

$$E_n := \ker(T - \lambda_n I)$$

para cada  $n \in F_0$ .

Afirmamos que  $H$  es la suma hilbertiana de  $(E_n)_{n \in F_0}$ . En primer lugar, sabemos que  $E_i \perp E_j$  si  $i \neq j$  pues para cada  $x \in E_i$  e  $y \in E_j$  es

$$\lambda_i(x, y) = (\lambda_i x, y) = (Tx, y) = (x, Ty) = (x, \lambda_j y) = \lambda_j(x, y),$$

y esto implica que  $(x, y) = 0$ .

Por último, para concluir que  $D = \text{gen}\{E_n\}_{n \in F_0}$  es denso veamos que  $D^\perp = \{0\}$ . Dado que  $T(D) \subset D$ , sabemos que  $T(D^\perp) \subset D^\perp$  y podemos considerar entonces el operador  $T_0 \equiv T|_{D^\perp}$ , que es autoadjunto (y compacto). Se tiene además que  $\sigma(T) = \{0\}$ , ya que si  $u \in D^\perp$  es tal que  $T_0 u = Tu = \lambda u$  para cierto  $\lambda \neq 0$ , es entonces  $u \in D \cap D^\perp = \{0\}$ .

Como  $T_0$  es autoadjunto y sólo tiene a cero en su espectro, es el operador nulo. Por lo tanto, tenemos que

$$D^\perp \subset \ker T \subset D,$$

lo que muestra que  $D^\perp = \{0\}$ .

Para terminar, notemos que para cada  $n \in F$  el subespacio  $E_n$  es de dimensión finita y por lo tanto posee una base ortonormal. Por otro lado, como  $H$  es separable, sabemos que existe una base ortonormal  $E_0 = \ker T$ . En consecuencia, la unión de las bases de cada  $E_n$  con  $n \in F_0$  nos provee de una base de autovectores de  $T$ . ♦

## 2.0.2. Cálculo Funcional

Extendiendo la noción de «*polinomios evaluados en una matriz*», el teorema espectral nos permitira darle sentido a la expresión  $f(T)$  para un operador compacto y autoadjunto  $T$  y cierta clase de funciones  $f$ . Concretamente,

**Definición 2.0.1.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert (no necesariamente separable) y  $T \in \mathcal{K}(H)$  un operador compacto y autoadjunto. Por el teorema espectral, sabemos entonces que  $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n \in F}$  con  $F \subset \mathbb{N}$  contable y que  $H$  es la suma hilbertiana de los autoespacios  $E_n = \ker(T - \lambda_n I)$  de  $T$ .

Por lo tanto si  $x \in H$ , entonces  $x = \sum_{n \geq 1} P_{E_n}(x)$  y más aún se tiene que  $Tx = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_{E_n}(x)$  pues cada vector  $P_{E_n}(x)$  es un autovector de autovalor  $\lambda_n$ .

En vista de lo anterior, dada  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$  una función acotada definimos **la evaluación de  $f$  en  $T$**  como

$$\text{ev}_T(f)(x) := \sum_{n \geq 1} f(\lambda_n) P_{E_n}(x).$$

Observemos que esta función está bien definida pues  $\sum_{n \geq 1} \|f(\lambda_n) P_{E_n}(x)\|^2 \leq \|f\|_\infty^2 \|x\|^2$ , y más aún este argumento dice que  $\|\text{ev}_T(f)\| \leq \|f\|_\infty$ .

Notar además que esta definición no depende del orden de los autovalores: cualquier reordenamiento da el mismo operador restringiendo a cada autoespacio, y como  $H$  es la suma hilbertiana de los mismos, la «*nueva*» definición debe coincidir con  $\text{ev}_T(f)$ .

A partir de ahora  $H$  denotará un espacio de Hilbert. Fijamos también un operador  $T$  compacto y autoadjunto y un orden de sus de autovectores  $\sigma(T) = \{\lambda_n\}_{n \in F}$  de  $T$  en el sentido anterior.

**Teorema 2.0.2.** La aplicación

$$\begin{aligned} \text{ev}_T : B(\sigma(T), \mathbb{R}) &\rightarrow \mathcal{L}(H) \\ f &\mapsto \text{ev}_T(f) \end{aligned}$$

es un morfismo de álgebras de Banach continuo que satisface  $\|\text{ev}_T\| \leq 1$ . Más aún, se tiene que  $\text{ev}_T(1) = I$  y  $\text{ev}_T(\text{id}) = T$ . Notaremos  $f(T) := \text{ev}_T(f)$ .

*Demostración.* Al definir  $\text{ev}_T(f)$  vimos que se satisface  $\|\text{ev}_T(f)\| \leq \|f\|_\infty$ . Por otro lado, es

$$\text{ev}_T(1)x = \sum_{n \geq 1} 1(\lambda_n) P_{E_n}(x) = \sum_{n \geq 1} P_{E_n}(x) = x$$

y

$$\text{ev}_T(\text{id})x = \sum_{n \geq 1} \text{id}(\lambda_n) P_{E_n}(x) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n P_{E_n}(x) = \sum_{n \geq 1} T P_{E_n}(x) = T \left[ \sum_{n \geq 1} P_{E_n}(x) \right] = Tx,$$

así que  $\text{ev}_T(1) = I$  y  $\text{ev}_T(\text{id}) = T$ .

La linealidad es consecuencia de la linealidad de las series: si  $f, g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$  son acotadas y  $\mu \in \mathbb{R}$ , entonces

$$\begin{aligned} (f + \mu g)(T)x &= \sum_{n \geq 1} (f + \mu g)(\lambda_n) P_{E_n}(x) = \sum_{n \geq 1} f(\lambda_n) P_{E_n}(x) + \mu \sum_{n \geq 1} g(\lambda_n) P_{E_n}(x) \\ &= f(T)x + \mu g(T)x = (f(T) + \mu g(T))x. \end{aligned}$$

Por último, veamos que  $ev_T$  es un morfismo de álgebras de Banach: si  $f, g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$ , entonces

$$f(T)g(T)x = f(T) \left[ \sum_{n \geq 1} g(\lambda_n) P_{E_n}(x) \right] = \sum_{n \geq 1} g(\lambda_n) [f(T) P_{E_n}(x)] = \sum_{n \geq 1} f(\lambda_n) g(\lambda_n) P_{E_n}(x) = fg(T)x$$

para todo  $x \in H$ . ♦

**Proposición 2.0.1.** Si  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$  es una función acotada, entonces

- (i)  $\sigma(f(T)) = f(\sigma(T))$ .
- (ii)  $f(T)$  es autoadjunta.
- (iii)  $\|f(T)\| = \|f|_{\sigma(T)}\|_\infty$ .
- (iv) Si  $f \geq 0$  entonces  $f(T) \geq 0$ .

*Demostración.* Hacemos cada inciso por separado.

- (i) Si  $\lambda_j \in \sigma(T)$ , existe  $u_j \in E_j \setminus \{0\}$  y

$$f(T)u_j = f(\lambda_j)p_{E_j}(u_j) = f(\lambda_j)e_j,$$

así que  $f(\sigma(T)) \subset \sigma(f(T))$ .

Recíprocamente, tomemos  $\lambda \notin f(\sigma(T))$ . Como esto dice que función  $g(t) = (f(t) - \lambda)^{-1}$  está bien definida en  $\sigma(T)$  y es allí acotada, está bien definida su evaluación  $g(T)$  en  $T$ . Como es  $g(f - \lambda) = (f - \lambda)g = 1$ , aplicando  $ev_T$  obtenemos que

$$g(T)(f(T) - \lambda I) = (f(T) - \lambda I)g(T) = I.$$

y en consecuencia  $\lambda$  no pertenece al espectro de  $f(T)$ ,

- (ii) Por un cálculo directo, tomando  $x, y \in H$  se tiene que

$$(f(T)x, y) = \sum_{n \geq 1} f(\lambda_n) (P_{E_n}(x), P_{E_n}(y)) = (f(T)y, x) = (x, f(T)y).$$

- (iii) Como es  $\|ev_T\| \leq 1$ , ya sabemos que  $\|f(T)\| \leq \|f|_{\sigma(T)}\|_\infty$ . En vista de (i) tenemos la otra desigualdad, pues acotando inferiormente por los autovectores de norma 1 se tiene que

$$\|f(T)\| = \sup_{\|x\|=1} \|f(T)(x)\| \geq \sup_{\lambda \in \sigma(f(T))} |\lambda| = \sup_{\lambda \in f(\sigma(T))} |\lambda| = \|f|_{\sigma(T)}\|_\infty.$$

(iv) Supongamos ahora que  $f \geq 0$  y sea  $x \in H$ . Por definición de  $f(T)$  es

$$(f(T)x, x) = \sum_{n \geq 1} f(\lambda_n) \|P_{E_n}(x)\|^2 \geq 0$$

pues por hipótesis sabemos que  $f(\lambda_n) \geq 0$  para todo  $n \geq 1$ .



**Observación 2.0.1.** Lo anteriores resultados también valen cuando  $f$  está definida en un dominio que contiene al espectro (mientras esté acotada allí) precomponiendo  $ev_T$  con la restricción de  $f$  al  $\sigma(T)$ . Más aún, el operador  $f(T)$  sólo depende de los valores que  $f$  toma en su espectro. En particular, esto nos dice que podemos definir  $f(T)$  para  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  continua o medible Borel.

Más aún, la aplicación  $ev_T : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{L}(H)$  es el único morfismo de álgebras de Banach continuo que tiene a  $I$  por imagen de  $1$  y  $T$  por imagen de  $id$ .

**Proposición 2.0.2.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua, entonces existe un operador compacto  $S \in \mathcal{K}(H)$  tal que

$$f(T) = S + f(0)I.$$

*Demostración.* Por el teorema de Stone-Weierstraß, sabemos que existe una sucesión de polinomios  $(p_n)_{n \geq 1}$  tal que  $p_n \rightarrow f$  uniformemente y en particular, es  $p_n(0) \rightarrow f(0)$ . Ahora, para cada  $n \in \mathbb{N}$  definimos

$$q_n = p_n - p_n(0),$$

y en vista de la observación anterior, se tiene que  $q_n \rightarrow f - f(0)$ . Aplicando  $ev_T$  y usando que ésta es continua, es

$$q_n(T) \rightarrow (f - f(0))(T) = f(T) - f(0)I. \quad (2.1)$$

Fijemos ahora  $n \in \mathbb{N}$ . Como  $q_n(0) = p_n(0) - p_n(0) = 0$ , existe  $r \in \mathbb{R}[X]$  tal que  $q_n = Xr$ . Por lo tanto, obtenemos  $q_n(T) = (Xr)(T) = ev_T(X) \circ ev_T(r) = T \circ r(T)$ . Al ser  $A$  un operador compacto, el operador  $q_n(T)$  es compacto para cada  $n \in \mathbb{N}$ . En vista de (2.1), obtenemos finalmente que el operador  $f(T) - f(0)I$  es compacto. Resta notar entonces que

$$f(T) = (f(T) - f(0)I) + f(0)I.$$



**Corolario 2.0.1.** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es una función continua que se anula en  $0$ , el operador  $f(T)$  resulta compacto.  $\square$

**Observación 2.0.2.** Aún cuando  $f(T)$  no es compacto, la **Proposición 2.0.2** nos da información a través de la Alternativa de Fredholm. Por ejemplo, sabemos que el núcleo de la evaluación siempre es de dimensión finita.

**Proposición 2.0.3.** Si  $f, g \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  son dos funciones continuas, entonces  $(f \circ g)(T) = f(g(T))$ .

*Demostración.* Como  $\sigma(g(T)) = g(\sigma(T))$ , es

$$f(g(T))x = \sum_{n \geq 1} f(g(\lambda_n)) P_{E_n}(x) = \sum_{n \geq 1} (f \circ g)(\lambda_n) P_{E_n}(x) = (f \circ g)(T)x.$$



### 2.0.3. Aplicaciones

En primer lugar, veamos que todo operador  $T$  compacto y autoadjunto «tiene una raíz enésima». Esto es, para cada  $n \in \mathbb{N}$  existe un operador  $S$  tal que  $S^n = T$ .

**Teorema 2.0.3.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T \in \mathcal{L}(H)$  un operador compacto y autoadjunto. Dado  $n \in \mathbb{N}$ , se tiene que

- (i) Si  $n$  es impar, existe un único operador  $S \in \mathcal{L}(H)$  tal que  $S^n = T$ .
- (ii) Si  $n$  es par, existe un operador positivo  $S \in \mathcal{L}(H)$  tal que  $S^n = T$  si y solo si  $T \geq 0$ . En tal caso existe un único operador  $S$  positivo con esta propiedad.

Notaremos  $A^{1/n} := S$  en ambos casos a este operador, que de existir resulta siempre compacto.

*Demostración.* Para cada  $n \geq 1$ , definimos (cuando sea posible)  $f : t \in \sigma(T) \mapsto t^{1/n} \in \mathbb{R}$ .

- (i) Sea  $S = f_n(A)$ . Por definición, es  $S^n = f_n(T) \circ \cdots \circ f_n(T) = f_n^n(T) = \text{id}(T) = T$ . Además, si  $\tilde{S}$  es tal que  $\tilde{S}^n = T$ , entonces

$$\tilde{S} = \text{id}(\tilde{S}) = (f_n^n \circ (t \mapsto t^n))(\tilde{S}) = f_n^n(\tilde{S}^n) = f_n^n(T) = S.$$

- (ii) Recordemos que como  $T$  es autoadjunta, es  $\inf \sigma(T) = \inf_{\|x\|=1} (Tx, x)$  y por lo tanto tenemos que  $T \geq 0$  si y sólo si  $\sigma(T) \subset [0, +\infty)$ . Esto nos permite hacer la misma construcción que antes para este caso, y como ahora es  $f_n \geq 0$ , de aquí se concluye que  $T^{1/n} \geq 0$ . Para la unicidad resta notar que si  $\tilde{S} \geq 0$  es otra raíz  $n$ -ésima, entonces  $\tilde{S} = |\tilde{S}| = (\tilde{S}^n)^{1/n} = T^{1/n}$ .

Finalmente, como para todo  $n \geq 1$  es  $f_n(0) = 0$ , sabemos que  $T^{1/n}$  siempre resulta compacto.  $\blacklozenge$

La siguiente aplicación es una adaptación del **Teorema 12.44** de [3], que es una versión del teorema ergódico medio de Von Neumann para transformaciones unitarias,

**Teorema.** Si  $H$  es un espacio de Hilbert y  $U \in \mathcal{L}(H)$  una transformación unitaria, entonces para cada  $x \in H$  los promedios  $\frac{1}{n}(x + Ux + \cdots + U^{n-1}x)$  convergen puntualmente a un elemento  $y \in H$ .

La demostración presente en [3] hace uso del teorema espectral en un caso más general. Usando que los autovalores de una transformación unitaria yacen en el círculo de radio 1, el teorema se reduce a un cálculo directo de convergencia puntual para una cierta sucesión de funciones.

Siguiendo la idea de esta demostración pero en el caso de operadores compactos y autoadjuntos, definimos a continuación el concepto de medida espectral y con esto probamos un resultado auxiliar de convergencia.

Concluimos con el **Teorema 2.0.4**, el cual afirma que si  $T$  es un operador compacto, autoadjunto y de norma 1, entonces sus promedios convergen puntualmente a la proyección ortogonal del subespacio de sus puntos fijos.



**Teorema (Riesz-Markov-Kakutani).** Sea  $X$  un espacio topológico Hausdorff y localmente compacto. Si  $\psi : C(X) \rightarrow \mathbb{R}$  es un funcional lineal positivo, existe una única medida Borel regular  $\mu$  en  $X$  tal que

$$\psi(f) = \int_X f d\mu.$$

para toda  $f \in C(X)$ .

**Definición 2.0.2.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T : H \rightarrow H$  un operador compacto y autoadjunto. Para cada  $h \in H$ , la aplicación

$$f \in C(\sigma(T)) \mapsto (f(T)h, h) \in \mathbb{R}$$

resulta un funcional lineal positivo. El teorema de Riesz-Markov-Kakutani nos asegura entonces que existe una única medida Borel regular  $\mu_h$  en  $\sigma(T)$  que satisface

$$(f(T)h, h) = \int_{\sigma(T)} f d\mu_h$$

para toda  $f : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$  continua. Llamamos a  $\mu_h$  la **medida espectral de  $T$  asociada a  $h$** .

**Proposición 2.0.4.** Sea  $H$  un espacio de Hilbert y  $T \in \mathcal{K}(H)$  un operador compacto y autoadjunto. Si  $(g_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{C}(\sigma(T), \mathbb{R})$  es una sucesión uniformemente acotada que converge puntualmente a cierta función  $g : \sigma(T) \rightarrow \mathbb{R}$ , la sucesión de operadores  $\{g_n(T)\}_{n \geq 1} \subset \mathcal{L}(H)$  **sof**-converge a  $g(T)$ .

*Demostración.* Observemos que por el teorema de convergencia dominada, para cada  $h \in H$  es

$$(g_n(T)h, h) = \int_{\sigma(T)} g_n d\mu_h \rightarrow \int_{\sigma(T)} g d\mu_h = (g(T)h, h).$$

Usando la identidad de polarización, vemos que  $(g_n(T)x, y) \rightarrow (g(T)x, y)$  para todo  $x, y \in H$ . Por lo tanto tenemos convergencia débil,

$$g_n(T)x \rightharpoonup g(T)x$$

para cada  $x \in H$ . Para terminar alcanza ver que siempre es  $\|g_n(T)x\| \rightarrow \|g(T)x\|$ .

Por hipótesis sabemos que las funciones  $(g_n^2)_{n \geq 1}$  también están uniformemente acotadas y  $g_n^2 \rightarrow g^2$  puntualmente. Por lo tanto, el argumento anterior nos dice que para cada  $x \in H$  es

$$\|g_n(T)x\|^2 = (g_n(T)x, g_n(T)x) = (g_n(T)g_n(T)x, x) = (g_n^2(T)x, x) \rightarrow (g^2(T)x, x) = \|g(T)x\|^2.$$

y tomando raíces vemos que  $\|g_n(T)x\| \rightarrow \|g(T)x\|$ . ♦

**Teorema 2.0.4 (un caso particular del teorema ergódico medio de Von Neumann).** Sea  $H$  un espacio de Hilbert. Si  $T \in \mathcal{K}(H)$  un operador compacto y autoadjunto tal que  $\|T\| \leq 1$ , entonces los promedios de  $T$  **sof**-convergen al proyector  $\pi_T$  del subespacio de puntos fijos de  $T$ . Es decir, si notamos  $E_1 = \{x \in H : Tx = x\}$  y  $\pi_T := P_{E_1}$ , entonces

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \pi_T x.$$

para todo  $x \in H$ .

*Demostración.* Notemos en primer lugar que  $\sigma(T) \subset [-\|T\|, \|T\|] \subset [-1, 1]$ . Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , definimos  $g_n(x) := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x^i$  para cada  $x \in [-1, 1]$ . Tenemos así que  $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n T^i = g_n(T)$ . Por otro lado, la proyección  $\pi_T$  coincide con la evaluación en  $T$  de

$$g(x) := \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

En vista de la **Proposición 2.0.4**, basta probar que la sucesión  $(g_n)_{n \geq 1}$  está uniformemente acotada y converge puntualmente a  $g$ . Lo primero se deduce de que si  $x \in [-1, 1]$  entonces

$$|g_n(x)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |x|^i \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1 = 1.$$

Ahora veamos la convergencia puntual. En primer lugar, la sucesión  $(g_n(1))_{n \geq 1}$  es constantemente 1 y por lo tanto converge a  $g(1) = 1$ . Por otro lado, sabemos que  $g_n(-1)$  es cero para  $n$  par y  $-1/n$  para  $n$  impar. De aquí se ve que entonces que  $g_n(-1) \rightarrow 0 = g(-1)$ . Finalmente, si  $\lambda \in (-1, 1)$  entonces

$$|g_n(\lambda)| \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\lambda|^i \leq \frac{1}{n} \sum_{i \geq 0} |\lambda|^i = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{1-|\lambda|} \rightarrow 0.$$

Consecuentemente, debe ser  $g_n(\lambda) \rightarrow 0 = g(\lambda)$ . ♦

# Bibliografía

- [1] H. Brezis. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. Springer, 2010.
- [2] M. Reed, B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics*. Academic Press Inc., 1980.
- [3] W. Rudin. *Functional Analysis*. International Series in Pure and Applied Mathematics, McGraw-Hill, 1991.
- [4] G. Teschl. *Topics in Real and Functional Analysis*, versión del 9/7/19 (<https://www.mat.univie.ac.at/~gerald/ftp/book-fa/fa.pdf>).