

# Geometría Diferencial

## Ejercicios para Entregar - Práctica 4

Guido Arnone

### Sobre los Ejercicios

Elegí los ejercicios (6), (8) y el inciso (d) del ejercicio (11).

---

**Ejercicio 6.** Si  $M$  y  $N$  son variedades no vacías, entonces  $M \times N$  es orientable si y sólo si  $M$  y  $N$  lo son.

*Demostración.* Veamos ambas implicaciones

( $\Rightarrow$ ) Supongamos que  $M \times N$  es orientable, y veamos que  $M$  lo es. Un argumento similar prueba lo mismo para  $N$ .

Sea  $(\psi, V)$  una carta de  $N$ . Como  $M \times N$  es orientable, así lo es  $M \times V$  pues tomando una forma de volumen en  $M \times N$  y restringiéndola a  $M \times V$  obtenemos nuevamente una forma de volumen. Dado que  $\psi$  es una carta de  $N$ , ésta es un difeomorfismo de  $V$  a  $\mathbb{R}^n$  y por lo tanto  $\text{id}_M \times \psi : M \times V \rightarrow M \times \mathbb{R}^n$  es un difeomorfismo de  $M \times V$  a  $M \times \mathbb{R}^n$ , con inversa  $\text{id}_M \times \psi^{-1}$ . En particular de aquí vemos que  $M \times \mathbb{R}^n$  es orientable.

En vista de esto, basta probar que si  $M$  es una variedad y  $M \times \mathbb{R}^n$  es orientable entonces  $M$  es orientable. De hecho alcanza probar lo anterior para  $n = 1$ , pues en tal caso esto nos permitirá probar que de ser  $M \times \mathbb{R}^n \simeq (M \times \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbb{R}$  orientable así lo será  $M \times \mathbb{R}^{n-1}$ . Inductivamente, obtendremos que  $M \times \mathbb{R}$  es orientable, y finalmente por el mismo argumento esto dirá que  $M$  lo es.

Veamos para terminar que si  $M \times \mathbb{R}$  es orientable, entonces  $M$  es orientable. En vista de que  $T(M \times \mathbb{R}) \simeq TM \times T\mathbb{R}$ , para cada carta  $(U \times \mathbb{R}, \varphi \times \text{id})$ , notaremos a los *ganchos* como

$$\left. \frac{\partial}{\partial(\varphi \times \text{id})^i} \right|_{(p,q)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi^i} |_{(p,q)} & \text{si } i \leq n \\ \frac{d}{dt} |_{(p,q)} & \text{si } i = n+1 \end{cases}$$

Sabemos que existe una forma de volumen  $\omega \in \Omega^{m+1}(M \times \mathbb{R})$ , con cierta expresión local

$$\omega|_U = f_U \cdot d\varphi^1 \wedge \dots \wedge d\varphi^m \wedge dt$$

para cada carta  $\varphi \times \text{id} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{m+1}$  de  $M \times \mathbb{R}$ . Ahora, definimos  $i : p \in M \mapsto (p, 0) \in M \times \mathbb{R}$  y consideramos  $\eta : M \rightarrow \text{Alt}^m(M)$  definida en cada carta  $(U, \varphi)$  como

$$\eta_p(v_1, \dots, v_m) := \omega_{(p,0)} \left( d_p i(v_1), \dots, d_p i(v_m), \frac{d}{dt} \Big|_{(p,0)} \right).$$

Como  $\eta$  se define a partir de la expresión local de  $\omega$ , sabemos que está bien definida y es suave. Más aún como  $\omega_{(p,0)}$  es  $(m+1)$ -multilineal alternada y  $d_p i$  es lineal, tenemos que  $\eta_p$  es  $m$ -lineal alternada: esto dice que  $\eta$  es una  $m$ -forma de  $M$ .

Para concluir que  $M$  es orientable resta notar que  $\eta$  es de volumen: dado  $p \in M$  y una carta  $(U, \varphi)$  de  $M$  con  $U \ni p$ , como para cada  $i \in \llbracket n \rrbracket$  es  $d_p i(\frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_p) = \frac{\partial}{\partial \varphi^i} \Big|_{(p,0)}$  se tiene que

$$\eta_p \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \Big|_p \right) = \omega_{(p,0)} \left( \frac{\partial}{\partial \varphi^1} \Big|_{(p,0)}, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n} \Big|_{(p,0)}, \frac{\partial}{\partial t} \Big|_{(p,0)} \right) \neq 0$$

pues como  $\omega_{(p,0)} \neq 0$ , evaluando una base de  $T_{(p,0)} M \times \mathbb{R}$  debe dar un valor no nulo.

( $\Leftarrow$ ) Ahora supongamos que tanto  $M$  como  $N$  son variedades orientables de dimensión  $m$  y  $n$  respectivamente, de forma que existen atlas orientables  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  de  $M$  y  $N$  respectivamente. Veamos que el atlas

$$\mathcal{A} = \{(\phi \times \psi, U \times V) : (\phi, U) \in \mathcal{A}, (\psi, V) \in \mathcal{A}'\}$$

de  $M \times N$  resulta orientable.

Sean  $\phi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  y  $\phi' \times \psi' : U' \times V' \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$  dos cartas de  $\mathcal{A}$  y  $(p, q)$  un punto de  $U \times V \cap U' \times V'$ . Notando  $\pi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$  a la proyección a la  $i$ -ésima coordenada, para cada  $i, j \in \llbracket n+m \rrbracket$  es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(\phi(p), \psi(q))} [(\phi' \times \psi')^i \circ (\phi \times \psi)^{-1}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(\phi(p), \psi(q))} [\pi_i \circ (\phi' \times \psi') \circ \phi^{-1} \times \psi^{-1}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(\phi(p), \psi(q))} [(\phi' \phi^{-1} \times \psi' \psi^{-1})^i] \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\phi(p)} (\phi' \phi^{-1})^i & \text{si } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m \\ 0 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n \\ \frac{\partial}{\partial x_{j-n}} \Big|_{\psi(q)} (\psi' \psi^{-1})^{i-n} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m, n+1 \leq j \leq n+m \end{cases}$$

Como por definición tenemos que  $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\phi(p)} (\phi' \phi^{-1})^i = \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p$  y  $\frac{\partial}{\partial x_{j-n}} \Big|_{\psi(q)} (\phi' \phi^{-1})^{i-n} = \frac{\partial \psi'^{i-n}}{\partial \psi^{j-n}} \Big|_q$ , en definitiva resulta

$$\left( \frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right)_{i,j} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j} \Big|_q \right)_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Finalmente como los atlas  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{A}'$  son orientados, las matrices de cambio de coordenadas de las cartas  $\phi, \phi'$  y  $\psi, \psi'$  tienen determinante positivo. De aquí vemos que

$$\begin{aligned} \det \left( \frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} \right)_{i,j} &= \det \begin{pmatrix} \left( \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right)_{i,j} & 0 \\ 0 & \left( \frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j} \Big|_q \right)_{i,j} \end{pmatrix} \\ &= \det \left( \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right)_{i,j} \cdot \det \left( \frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j} \Big|_q \right)_{i,j} > 0, \end{aligned}$$

lo que termina de probar que  $\mathcal{A}$  es orientado.

□

### Ejercicio 8.

a) Si  $f : M \rightarrow N$  es una función diferenciable entre variedades, probar que los pull-backs  $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$  son tales que

- (i)  $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$
- (ii)  $f^*(h \cdot \omega_1) = h \circ f \cdot f^*(\omega_1)$
- (iii)  $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$

para cada  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\bullet(N)$  y  $h \in C^\infty(N)$ .

b) Si  $U$  y  $V$  son abiertos de  $\mathbb{R}^n$  y  $f : U \rightarrow V$  es diferenciable, entonces

$$f^*(dx_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k$$

y

$$f^*(g \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = g \circ f \cdot \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  y cada  $g \in C^\infty(V)$ .

*Demostración.* Hacemos cada inciso por separado.

- (a) Sean  $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(N)$  y  $\eta \in \Omega^l(N)$ . Para verificar las igualdades del enunciado basta ver que, en cada punto de la variedad, las formas coinciden en todo vector tangente. Fijamos entonces  $p \in N$  y  $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l} \in T_p N \subset TN$ .

En primer lugar, (i) e (ii) son ciertas pues

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 + \omega_2)_p(v_1, \dots, v_k) &= (\omega_1 + \omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= (\omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) + (\omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= f^*(\omega_1)_p(v_1, \dots, v_k) + f^*(\omega_2)_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f^*(h \cdot \omega_1)_p(v_1, \dots, v_k) &= (h \cdot \omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p)) \cdot \omega_{1f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p)) \cdot f^*(\omega_1)_p(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Ahora observemos que si tomamos  $\sigma \in S_{k+l}$  y notamos  $\tilde{v}_i := d_p f(v_i)$ , entonces

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\omega \otimes \eta)_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{k+l})) &= (\omega \otimes \eta)_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(1)}, \dots, \tilde{v}_{\sigma(k+l)}) \\ &= \omega_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(1)}, \dots, \tilde{v}_{\sigma(k)}) \cdot \eta_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(k+1)}, \dots, \tilde{v}_{\sigma(k+l)}) \\ &= f^*(\omega_p)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot f^*(\eta)_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sigma \cdot (f^*(\omega) \otimes f^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) &= (\omega \wedge \eta)_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \sigma \cdot (\omega \otimes \eta)_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \sigma \cdot (f^*(\omega) \otimes f^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= (f^*(\omega) \wedge f^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}), \end{aligned}$$

lo que prueba (iii).

- b) Dado  $s \in \llbracket n \rrbracket$ , para cada  $p \in U$  y  $g \in C^\infty(V)$  es

$$\begin{aligned} d_p f \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) (g) &= \frac{\partial g f}{\partial x_s} \Big|_p = (D_p(gf))_s = (D_{f(p)} g D_p f)_s \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} (g). \end{aligned}$$

y entonces

$$d_p f \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)}.$$

Si ahora tomamos  $i \in \llbracket n \rrbracket$ , se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(dx_i)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) &= dx_{if(p)} \left( d_p f \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) \right) = dx_{if(p)} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot dx_{if(p)} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

Como a su vez se satisface

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (dx_k)_p \left( \frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta_{ks} = \frac{\partial f_i}{\partial x_s},$$

deber ser

$$f^*(dx_i)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (dx_k)_p$$

pues ambos lados de la igualdad coinciden en la base de los *ganchos*  $\{\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p\}_{1 \leq s \leq n}$ . Dado que esto es cierto para cualquier punto  $p \in U$ , se tiene

$$f^*(dx_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (1)$$

Finalmente, usando (a) vemos que

$$f^*(g \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = g \circ f \cdot f^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n)$$

así que para terminar debemos probar que

$$f^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n) = \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

En efecto, de (1) es

$$\begin{aligned}
 f^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n) &= \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_n} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \\
 &= \sum_{i_1 < \cdots < i_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= \left( \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= \det \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
 \end{aligned}$$

□

**Ejercicio 11 (d).** Calcule la cohomología de un producto cartesiano de dos esferas.

*Demostración.* Sean  $n, m \in \mathbb{N}$ . Como  $S^n$  es una variedad compacta, podemos usar la fórmula de Künneth: para todo  $q \geq 0$  es

$$H^q(S^n \times S^m) = \bigoplus_{r+s=q} H^r(S^n) \otimes H^s(S^m). \quad (2)$$

Sabemos además que la cohomología de la  $k$ -esfera es  $\mathbb{R}$  en los grados 0 y  $k$ , y nula en los demás.

Por lo tanto, para que  $H^r(S^n \times S^m)$  sea no nulo es condición necesaria que  $r \in \{0, n\}$  y  $s \in \{0, m\}$ . En particular debe ser  $r + s \in \{0, n, m, n + m\}$ . Al  $S^n \times S^m$  ser arcoconexo, ya sabemos que  $H^0(S^n \times S^m) \simeq \mathbb{R}$ .

En los otros casos, usando (2) tenemos que

$$H^n(S^n \times S^m) = H^n(S^n) \otimes H^0(S^m) \oplus H^0(S^n) \otimes H^n(S^m) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^{\delta_{nm}} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^{\delta_{nm}}$$

y similarmente  $H^m(S^n \times S^m) = \mathbb{R}^{\delta_{nm}} \oplus \mathbb{R}$ .

Por último, del mismo modo es

$$H^{n+m}(S^n \times S^m) = H^n(S^n) \otimes H^m(S^m) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, si  $n = m$  entonces

$$H^q(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0 \text{ o } q = 2n \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } q = n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y en los demás casos, es

$$H^q(S^n \times S^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q \in \{0, n, m, n+m\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□