Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Prácticas 5 y 6

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí los ejercicios (5) y (7) de la práctica cinco, y el ejercicio (9) de la práctica seis.

Ejercicio 5. Sea M una variedad compacta y sin borde de dimensión n. Probar que si $\omega \in \Omega^n(M)$ es una forma de volumen, entonces ω no es exacta.

Demostración. Supongamos que ω es exacta, y sea entonces $\eta \in \Omega^{n-1}(M)$ tal que $d\eta = \omega$. Por el teorema de Stokes es

$$\int_M \omega = \int_M d\eta = \int_{\partial M} i^*(\eta) = 0,$$

ya que M no tiene borde. Sin embargo, esto es absurdo: como ω es una forma de volumen y M es compacta, su integral da un valor real no nulo. Vemos así que ω no puede ser exacta. □

Ejercicio 7. Si M es una variedad compacta, orientada y con borde, no existe una retracción diferenciable $M \to \partial M$.

Demostración. Supongamos que $r : M \to \partial M$ es una retracción, es decir, que

$$\begin{tikzcd}
\partial M \arrow[r, hook, "i"] \arrow[dr, "id"'] & M \arrow[d, "r"] \\
& \partial M
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Como para cada $q \in \mathbb{N}_0$ la asignación

$$\begin{aligned}
\Omega^q : \mathsf{Man} &\longrightarrow \mathsf{Vect}_{\mathbb{R}} \\
M &\longmapsto \Omega^q(M) \\
\downarrow_f &\longmapsto \quad \uparrow_{f^*} \\
N &\longmapsto \Omega^q(N)
\end{aligned}$$

es funtorial contravariante, el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
\Omega^q(\partial M) & \Omega^q(M) \arrow[l, "i^*"'] \\
& \Omega^q(\partial M) \arrow[u, "r^*"'] \arrow[ul, "id"]
\end{tikzcd}
$$

conmuta. Es decir, para cualquier q-forma ω de ∂M se tiene que

$$i^*r^*(\omega) = \omega. \tag{1}$$

Dado que M es orientable, así lo es su borde, y por lo tanto existe una $(n-1)$-forma de volumen $\eta \in \Omega^{n-1}(\partial M)$. Sabemos además que $d\eta = 0$ pues esta última es una n-forma y ∂M tiene dimensión $n-1$. En particular, la forma $dr^*(\eta) = r^*(d\eta) = r^*(0) = 0$ integra cero sobre ∂M.

Usando (1) y el teorema de Stokes vemos que

$$0 = \int_M dr^*(\eta) = \int_{\partial M} i^*r^*(\eta) = \int_{\partial M} \eta$$

lo cual es una contradicción: como ∂M es compacta (ya que M lo es y ∂M es cerrado) y η es una forma de volumen, su integral sobre ∂M existe y es no nula.

Como el absurdo partió de suponer que r existía, concluimos que no puede haber una retracción diferenciable de M a su borde. □

Lema 1. Sea M una variedad riemanniana orientada y compacta, y notemos dV al elemento de volumen riemanniano. Si tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ y $u \in C^\infty(M)$, entonces

i) $\iota_{uX}(dV) = u\iota_X(dV)$

ii) $du \wedge \iota_X(dV) = \langle \text{grad}(u), X\rangle dV$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

i) Efectivamente, si $p \in M$ y $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_pM$ entonces

$$\begin{aligned}\iota_{uX}(dV)_p(v_1,\ldots,v_{n-1}) &= dV_p(u(p)X_p, v_1, \ldots, v_{n-1}) = u(p)dV_p(X_p, v_1, \ldots, v_{n-1}) \\ &= u(p)\iota_X(dV)_p(v_1,\ldots,v_{n-1}) = (u\iota_X(dV))_p(v_1,\ldots,v_{n-1}).\end{aligned}$$

ii) Basta ver la igualdad al evaluar en cada punto $p \in M$ y vectores $v_1, \ldots, v_n \in T_pM$. Más aún, alcanza hacerlo para una base del espacio tangente.

Dado que M posee una métrica riemanniana y trabajaremos con el elemento de volumen riemanniano, vamos a suponer sin pérdida de generalidad que los vectores $v_1, \ldots, v_n$ forman una base ortonormal de T_pM orientada positivamente. De esta forma, resulta $dV_p(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Ahora sí, evaluando es

$$\begin{aligned}(du \wedge \iota_X(dV))_p(v_1,\ldots,v_n) &= \frac{1}{n-1!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma \sigma \cdot (du \otimes \iota_X(dV))_p(v_1,\ldots,v_n) \\ &= \frac{1}{n-1!}\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^\sigma d_pu(v_{\sigma(1)}) \otimes dV_p(X_p, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)}).\end{aligned}$$

Como los vectores $v_1, \dots, v_n$ son una base ortonormal de T_pM, el vector tangente X_p se escribe como

$$X_p = \sum_{j=1}^{n} \langle X_p, v_j \rangle v_j$$

donde $\langle X_p, v_j \rangle$ es el producto interno en T_pM inducido por la métrica. Como dV es multilineal y anstisimétrica, se anula en vectores linealmente dependientes. Por lo tanto, tenemos que

$$\begin{aligned} dV_p(X_p, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) &= \sum_{j=1}^{n} \langle X_p, v_j \rangle dV_p(v_j, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \\ &= \langle X_p, v_{\sigma(1)} \rangle dV_p(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}). \end{aligned}$$

Volviendo a la igualdad anterior, obtenemos

$$\begin{aligned} (du \wedge \iota_X(dV))_p(v_1, \dots, v_n) &= \frac{1}{n-1!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \sigma \cdot (du \otimes \iota_X(dV))_p(v_1, \dots, v_n) \\ &= \frac{1}{n-1!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma d_pu(v_{\sigma(1)}) \otimes \langle X_p, v_{\sigma(1)} \rangle dV_p(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \dots, v_{\sigma(n)}) \\ &= \frac{1}{n-1!} \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma d_pu(v_{\sigma(1)}) \otimes \langle X_p, v_{\sigma(1)} \rangle (-1)^\sigma dV_p(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= \frac{1}{n-1!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle X_p, v_{\sigma(1)} \rangle d_pu(v_{\sigma(1)}) \otimes dV_p(v_1, v_2, \dots, v_n) \\ &= \frac{1}{n-1!} \sum_{\sigma \in S_n} \langle X_p, v_{\sigma(1)} \rangle d_pu(v_{\sigma(1)}) = \sum_{j=1}^{n} \langle X_p, v_j \rangle d_pu(v_j) \\ &= d_pu \left(\sum_{j=1}^{n} \langle X_p, v_j \rangle v_j \right) = d_pu(X_p) = \langle \mathrm{grad}_p(u), X_p \rangle. \end{aligned}$$

Usando una vez más que $dV_p(v_1, \dots, v_n) = 1$, tenemos finalmente que

$$\begin{aligned} (du \wedge \iota_X(dV))_p(v_1, \dots, v_n) &= \langle \mathrm{grad}_p(u), X_p \rangle \cdot 1 \\ &= \langle \mathrm{grad}_p(u), X_p \rangle dV_p(v_1, \dots, v_n) \\ &= (\langle \mathrm{grad}(u), X \rangle dV)_p(v_1, \dots, v_n). \end{aligned}$$

$\square$

Ejercicio 9. Sea M una variedad riemanniana orientada y dV su elemento de volumen riemanniano. Si $X \in \mathfrak{X}(M)$ es un campo sobre M, llamamos *divergencia* de X a la función $\operatorname{div}(X)$ tal que

$$d(i_X(dV)) = \operatorname{div}(X) \cdot dV.$$

Obtenemos de esta forma una función $\operatorname{div} : \mathfrak{X}(M) \to C^\infty(M)$.

a) Si M es compacta, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\int_M \operatorname{div}(X) \cdot dV = \int_{\partial M} \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V},$$

con N la normal unitaria interior a ∂M y $d\tilde{V}$ el elemento de volumen riemanniano sobre ∂M correspondiente a la métrica inducida por la de M.

b) Si $u \in C^\infty(M)$ y $X \in \mathfrak{X}(M)$, entonces

$$\operatorname{div}(uX) = u \cdot \operatorname{div}(X) + \langle \operatorname{grad}(u), X \rangle.$$

y deducir la fórmula de integración por partes

$$\int_M \langle \operatorname{grad}(u), X \rangle \cdot dV = -\int_M u \cdot \operatorname{div}(X) \cdot dV + \int_{\partial M} u \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V}.$$

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

a) Sea M una variedad compacta y $X \in \mathfrak{X}(M)$. Notemos en primer lugar que por el teorema de Stokes es

$$\int_M \operatorname{div}(X) \cdot dV = \int_M d(\iota_X(dV)) = \int_{\partial M} i^*(\iota_X(dV))$$

así que bastaría ver que $i^*(\iota_X(dV)) = \langle X, N \rangle \cdot d\tilde{V}$. Veamos la igualdad para cada $p \in \partial M$ y $v_1, \ldots, v_{n-1} \in T_p \partial M$.

Como las $(n-1)$-formas son funciones multilineales antisimétricas, al evaluarlas en conjuntos linealmente dependientes siempre valen cero. Por lo tanto, podemos asumir que $\{v_i\}_{1 \leq i \leq n-1}$ es un conjunto linealmente independiente, y como $\dim \partial M = n-1$, resulta una base.

En consecuencia los *pushforwards* $\{d_p i(v_i)\}_{1 \leq i \leq n-1}$ por la inclusión $i : \partial M \to M$ son un conjunto linealmente independiente de $T_p M$. Por definición del campo normal N, agregando N_p podemos completar estos a una base $B = \{N_p, d_p i(v_1), \ldots, d_p i(v_{n-1})\}$. Recordemos también que por definición es

$$d\tilde{V}_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) = i^*(\iota_N(dV))_p(v_1, \ldots, v_{n-1}) = dV_p(N_p, d_p i(v_1), \ldots, d_p i(v_{n-1})). \quad (2)$$

Ahora, dado que B es base de $T_p M$, el vector tangente X_p tiene una escritura única como combinación lineal de los vectores de V,

$$X_p = \alpha N_p + \sum_{j=1}^{n-1} \beta_j d_p i(v_j).$$

A partir de la multilinealidad de dV y usando la una vez más que las formas se anulan en conjuntos linealmente dependientes, se tiene que

$$\begin{aligned} i^*(\iota_X(dV))_p(v_1,\dots,v_{n-1}) &= \iota_X(dV)_p(d_p i(v_1),\dots,d_p i(v_{n-1})) \\ &= dV_p(X_p, d_p i(v_1),\dots,d_p i(v_{n-1})) \\ &= dV_p\left(\alpha N_p + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j d_p i(v_j), d_p i(v_1),\dots,d_p i(v_{n-1})\right) \\ &= \alpha dV_p\left(N_p, d_p i(v_1),\dots,d_p i(v_{n-1})\right). \end{aligned}$$

Más aún, como N_p es unitario y ortogonal a $d_p i(v_1),\dots,d_p i(v_{n-1})$, es

$$\begin{aligned} \langle X_p, N_p\rangle &= \left\langle \alpha N_p + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j d_p i(v_j), N_p\right\rangle \\ &= \alpha\langle N_p,N_p\rangle + \sum_{j=1}^{n-1}\beta_j\langle N_p, d_p i(v_j)\rangle = \alpha\langle N_p,N_p\rangle = \alpha. \end{aligned}$$

En definitiva, usando (2) obtenemos

$$\begin{aligned} i^*(\iota_X(dV))_p(v_1,\dots,v_{n-1}) &= \langle X_p,N_p\rangle dV_p\left(N_p, d_p i(v_1),\dots,d_p i(v_{n-1})\right) \\ &= \langle X_p,N_p\rangle d\tilde{V}_p(v_1,\dots,v_{n-1}). \end{aligned}$$

Como esto es cierto para cada punto $p\in\partial M$ y elección de vectores $v_1,\dots,v_{n-1}\in T_p\partial M$, resulta $i^*(\iota_X(dV)) = \langle X,N\rangle d\tilde{V}$, que es lo que queríamos probar.

b) Notemos en primer lugar que, en vista del Lema 1, es

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(uX)dV = d(\iota_{uX}(dV)) &= d(u\iota_X(dV)) = du\wedge\iota_X(dV) + (-1)^0 u\wedge d(\iota_X(dV)) \\ &= \langle \operatorname{grad}(u), X\rangle dV + u\operatorname{div}(X)dV = (\langle\operatorname{grad}(u),X\rangle + u\operatorname{div}(X))dV. \end{aligned}$$

Si tomamos $p\in M$ y $v_1,\dots,v_n\in T_pM$ una base ortonormal orientada positivamente, evaluando vemos que

$$\operatorname{div}(uX)_p = \langle \operatorname{grad}_p(u), X_p\rangle + u(p)\operatorname{div}(X)_p$$

y por lo tanto, efectivamente resulta

$$\operatorname{div}(uX) = \langle\operatorname{grad}(u),X\rangle + u\operatorname{div}(X).$$

Ahora integrando y usando el ítem (a) es

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} u\langle X,N\rangle d\tilde{V} = \int_{\partial M}\langle uX,N\rangle d\tilde{V} = \int_M \operatorname{div}(uX)dV &= \int_M \langle\operatorname{grad}(u),X\rangle dV + u\operatorname{div}(X)dV \\ &= \int_M\langle\operatorname{grad}(u),X\rangle dV + \int_M u\operatorname{div}(X)dV. \end{aligned}$$

Restando llegamos a la identidad de «integración por partes»,

$$\int_M\langle\operatorname{grad}(u),X\rangle dV = -\int_M u\cdot\operatorname{div}(X)dV + \int_{\partial M} u\langle X,N\rangle d\tilde{V}.$$

□