Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre – 2019

Segundo Parcial

Guido Arnone

Sobre la Resolución

Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio. También incluyo (sin demostración) los resultados vistos en clase que utilicé.

Ejercicio 1. Sea M una variedad riemanniana, sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable $\mathrm{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ y uno solo con la propiedad de que para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle = df(Y).$$

@A Encuentre una expresión en coordenadas para el campo $\mathrm{grad}(f)$.

(b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \mathrm{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \nabla_X \mathrm{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \mathrm{grad}(f)\rangle.$$

(c) Muestre que si el campo $\mathrm{grad}(f)$ tiene norma constante, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\langle \nabla_{\mathrm{grad}(f)} \mathrm{grad}(f), X\rangle = 0$. Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de $\mathrm{grad}(f)$ son geodésicas.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Notemos en primer lugar que la función f induce una 1-forma df que en cada punto $p \in M$ vale $d_pf : v \in T_pM \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$, el diferencial de f bajo la identificación $T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

Fijemos ahora $p \in M$. Como $d_pf \in (T_pM)^*$ es un elemento del espacio dual de T_pM, y este último es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita equipado con un producto interno (inducido por la métrica de M), el teorema de representación de Riesz nos asegura que existe un único vector tangente $v_p \in T_pM$ tal que

$$\langle v_p, w\rangle = d_pf(w) = w(f) \quad (\forall w \in T_pM). \tag{1}$$

Si definimos $\text{grad}_p(f) := v_p$ para cada $p \in M$, reescribiendo la anterior igualdad es

$$\langle \text{grad}(f)_p, w\rangle = d_p f(w) \quad (\forall w \in T_pM).$$

y éste es el único campo con tal propiedad. En particular, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces para cada $p \in M$ es

$$(\langle \text{grad}(f), Y\rangle)_p = \langle \text{grad}(f)_p, Y_p\rangle = d_p f(Y_p) = (df(Y))_p$$

y por lo tanto $\langle \text{grad}(f), Y\rangle \equiv df(Y)$.

Para ver la unicidad, recordemos que para cada $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe $Y^v \in \mathfrak{X}(M)$ con $Y^v_p = v$. Efectivamente, podemos tomar una carta (U, φ) con $U \ni p$ de forma que existan coeficientes $a_1, \dots, a_n$ tales que $v = \sum_{1 \le i \le n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$ y luego tomar el campo

$$Y^v = h \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

con $h \in C^\infty(M)$ una función *bump* (tal que valga 1 en un entorno abierto $V \subset U$ de p y 0 en un abierto $W \supset U^c$).

A partir de esto, podemos concluir que cualquier otro campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ que cumpla $\langle Z, Y\rangle \equiv df(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ deberá satisfacer

$$\langle Z_p, v\rangle = \langle Z_p, Y^v_p\rangle = d_p f(Y^v_p) = v(f)$$

para todo $p \in M$ y $v \in T_pM$. La unicidad de (1) nos dice entonces que $Z_p = v_p = \text{grad}_p(f)$ en todo punto $p \in M$.

Para terminar, veamos una expresión de $\text{grad}_p(f)$ en coordenadas. De aquí se tendrá que el gradiente depende localmente de funciones suaves, y es por lo tanto diferenciable.

Una vez más, fijamos $p \in M$ y consideramos (φ, U) una carta de M tal que $U \ni p$. Como los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}|_p\}$ son una base de T_pM, sabemos que existen únicos coeficientes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Si ahora tomamos el producto interno de v_p con $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$, es

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p(f) = \left\langle v_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (g_p)_{ji}$$

para cada $j \in [\![n]\!]$, y notando $c = (c_1, \dots, c_n)$ esto es equivalente a

$$c \cdot g_p = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\Big|_p \right).$$

Por lo tanto debe ser $c = (\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\big|_p)(g_p)^{-1}$ y

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij}.$$

Volviendo a la expresión original, obtenemos finalmente

$$\operatorname{grad}_p(f) = v_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p = \sum_{i,j} (g_p)^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Esto prueba que para todo $p \in U$ se tiene (contrayendo indices) que

$$\operatorname{grad}(f) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Como afirmamos, esto prueba además que $\operatorname{grad}(f)$ es diferenciable, ya que para cada punto tenemos un abierto donde este es un campo suave.

(b) Como ∇ es la conexión de Levi-Civita, sabemos (por construcción) que esta es compactible con la métrica y libre de torsion. Concretamente, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2}$$

y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{3}$$

Sean ahora $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos en M. Por (2) y (3) sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle &= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y] + \nabla_Y X\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_Y X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - (Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle - \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle) - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle + X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que $\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f)\rangle$ si y solo si

$$X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle$$

o lo que es lo mismo,

$$X df(Y) - Y df(X) = df([X, Y]).$$

Para terminar, observemos que esto ocurre siempre, pues

$$X df(Y) - Y df(X) = XY(f) - YX(f) = (XY - YX)(f) = [X, Y](f) = df([X, Y]).$$

(c) Supogamos que $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante. Entonces $\|\operatorname{grad}(f)\|^2 = \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle$ debe valer constantemente c para cierto $c \in \mathbb{R}$. Si ahora tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, para todo $p \in M$ debe ser

$$(X\|\operatorname{grad}(f)\|)_p = X_p(c) = 0,$$

y por lo tanto $X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle \equiv 0$.

Usando la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita, de la anterior igualdad se desprende que

$$\begin{aligned}0 &= X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle + \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X \operatorname{grad}(f)\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle\end{aligned}$$

y por (b) es

$$\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = 0.$$

Por último, si $\gamma : I \to M$ es una curva integral de $\operatorname{grad}(f)$, entonces es $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0$ pues

$$\begin{aligned}\|\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\|^2 &= \langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}, \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}\rangle \\ &= (\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f)\rangle)_{\gamma(t)} = 0\end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Vemos así que las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ resultan geodésicas.

□

Teorema 1. Sea M una variedad orientada, conexa y compacta de dimensión n. Entonces es $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$ via el isomorfismo

$$[\omega] \in H^n(M) \longmapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2. Sean M y N variedades orientadas compactas y conexas de dimensión n. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo que preserva (resp. invierte) la orientación y $\omega \in \Omega^n(N)$ es una n-forma, entonces $\int_M f^*(\omega) = \int_N \omega$ (resp. $-\int_N \omega$).

Lema 3. Sean M y N dos variedades y $f : M \to N$ una función suave. Si $q \in N$ es un valor regular y $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$, existe un entorno abierto $W \subset N$ de q y abiertos conexos disjuntos $U_1, \dots, U_k$ tales que:

(i) para cada $i \in [\![k]\!]$ es $U_i \ni p_i$,

(ii) la preimagen de W por f es $f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$, y

(iii) para cada $i \in [\![k]\!]$ la (co)restricción $f|_{U_i} : U_i \to W$ es un difeomorfismo.

Demostración. En primer lugar, como es $\dim M = \dim N$ sabemos que en cada punto p_i el diferencial de f es un isomorfimo. Por el teorema de la función inversa, existen entonces abiertos $\widetilde{V}_i \ni p_i$ para cada i tales que $f(\widetilde{V}_i)$ es abierto y $f|_{\widetilde{V}_i} : \widetilde{V}_i \to f(\widetilde{V}_i)$ un difeomorfismo. Achicando los abiertos si es necesario (usando que M es Hausdorff y localmente conexa) podemos suponer que son conexos y disjuntos dos a dos.

Notando $\widetilde{W} = \bigcap_{i=1}^n f(\widetilde{V}_i)$, definimos $\widetilde{U}_i := \widetilde{V}_i \cap f^{-1}(\widetilde{W})$. Ahora, como M es compacta y N es Hausdorff (pues es una variedad) sabemos que f es cerrada. Por lo tanto $f\left((\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i)^c\right)$ es cerrado y podemos definir $W := \widetilde{W} \setminus f\left((\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i)^c\right)$ y $U_i := \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W)$.

De aquí se ve que $f^{-1}(W) = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_k$ ya que es

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\widetilde{W} \setminus f\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right) = (f|^{\widetilde{W}})^{-1}\left(f\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^c\right)^c\right)$$
$$= (f|^{\widetilde{W}})^{-1}\left(f|_{\widetilde{W}}\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right)^c \subset \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^{cc} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i$$

de forma que

$$f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W) \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^{n} U_i,$$

y la otra contención está dada por la definición de los abiertos $(U_i)_{i \in [\![n]\!]}$.

Por último, para ver que que cada (co)restricción $f|_{U_i}^{W}$ es un difeomorfismo basta ver que $f(U_i) = W$ pues ya sabemos que la (co)restricción es suave e inyectiva al serlo $f|_{\widetilde{V}_i}$. Por como definimos U_i, basta ver que $W \subset f(U_i)$.

En efecto, puesto que es $W \subset \widetilde{W} \subset f(\widetilde{V}_i)$, si $x \in W$ entonces existe $v_i \in \widetilde{V}_i$ con $f(v_i) = x$, y dado que además es $v_i \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(\widetilde{W})$, se obtiene que

$$v_i \in \widetilde{V}_i \cap f^{-1}(\widetilde{W}) = \widetilde{U}_i.$$

En consecuencia debe ser $v_i \in \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W) = U_i$, y así $x \in f(U_i)$.

□

Ejercicio 2. Sean M y N dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Muestre que hay un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para toda forma $\omega \in \Omega^n(N)$ se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos *grado* de f y lo escribimos $\deg(f)$.

(b) Supongamos que $q \in N$ es valor regular de f, de manera que, en particular, el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito. Si $p \in f^{-1}(q)$ la diferencial es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$sgn_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sgn_f(p).$$

Demostración. Observemos en primer lugar una consecuencia del Teorema 1 que usaremos a continuación: este nos dice que en una variedad orientada conexa y compacta, dos n-formas son cohomólogas si y sólo si sus integrales sobre la variedad coinciden.

(a) En vista del Teorema 1, sabemos que existe una n-forma ω de N tal que $\int_N \omega = 1$. De existir, el grado debe cumplir que $\int_M f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_N \omega = \deg(f)$, por lo que definimos

$$\deg(f) := \int_M f^*(\omega).$$

Además $\deg(f)$ está bien definido pues no depende de la forma que elegimos: si η es otra n-forma de N que integra 1, entonces es $[\eta] = [\omega]$ y por tanto $[f^*(\omega)] = [f^*(\eta)]$, de lo que resulta $\int_M f^*(\omega) = \int_M f^*(\eta)$.

Veamos ahora que este número satisface la propiedad deseada. Consideremos una forma n-forma abritraria η de N. Una vez más por el Teorema 1, del isomorfismo $H^n(N) \simeq \mathbb{R}$ sabemos que existe $c \in \mathbb{R}$ de forma que $[\eta] = c[\omega] = [c\omega]$. En consecuencia existe $\kappa \in \Omega^{n-1}(N)$ tal que $\eta - c\omega = d\kappa$ y usando el teorema de Stokes[1] es

$$\int_N \eta = \int_N c \cdot \omega + d\kappa = c \cdot \int_N \omega + \int_N d\kappa = c \cdot \int_N \omega + \int_{\partial N} i^*(\kappa) = c$$

ya que N no tiene borde.

Por otro lado, como

$$f^*(\eta) = f^*(c \cdot \omega + d\kappa) = c \cdot f^*(\omega) + f^*(d\kappa) = c \cdot f^*(\omega) + df^*(\kappa)$$

y M tampoco tiene borde, volvemos a apelar al teorema de Stokes para obtener

$$\begin{aligned}\int_M f^*(\eta) &= c \cdot \int_M f^*(\omega) + \int_M df^*(\kappa) = c \cdot \deg(f) + \int_{\partial M} i^*(f^*(\kappa)) \\ &= c \cdot \deg(f) = \deg(f) \cdot \int_N \eta\end{aligned}$$

como buscábamos.

(b) Será de utilidad la siguiente observación: para cualquier abierto $U \subset N$, existe una n-forma ω de N tal que $1 = \int_N \omega = \int_U \omega$.

Para construirla, consideramos primero η una forma de volumen, una carta (V, φ) tal que $V \subset U$ y una función *bump* $h \in C^\infty$ no negativa que satisfaga $\operatorname{sop} h \subset V$. De esta forma, en el abierto V la forma η tiene una escritura en coordenadas $\eta = g \cdot d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$ con g nunca nula.

Definimos ahora $\widetilde{\omega} = h\eta$. Como $\operatorname{sop}(\widetilde{\omega}) \subset \operatorname{sop} h \subset U$, es $\int_N \widetilde{\omega} = \int_U \widetilde{\omega}$. Además, en V la forma $\widetilde{\omega}$ tiene una expresión de la forma $hg \cdot d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$ así que

$$\int_U \widetilde{\omega} = \int_V hg \; d\varphi^i \wedge \cdots \wedge d\varphi^n = \int_{\varphi(V)} (hg) \circ \varphi^{-1} \; dx_1 \dots dx_n = \int_{\operatorname{sop} h} (hg) \circ \varphi^{-1} \; dx_1 \dots dx_n > 0$$

pues $(hg) \circ \varphi^{-1}$ es continua, nunca nula en $\operatorname{sop} h$ y no cambia de signo en $V \supset \operatorname{sop} h$. Basta tomar entonces $\omega := (\int_N \widetilde{\omega})^{-1} \cdot \widetilde{\omega}$.

Ahora sí, analicemos primero qué ocurre cuando $q \notin \operatorname{im} f$. Como M es compacta y N es Hausdorff (pues es una variedad), la función f es cerrada. Por lo tanto la imagen de f es un cerrado, y en consecuencia existe un abierto $U \ni q$ contenido en $f(M)^c$.

[1] También podríamos apelar de vuelta al Teorema 1. De hecho, una pequeña modificación de la cuenta que sigue justifica que la aplicación del teorema está bien definida.

Podemos tomar entonces una n-forma ω tal que $\operatorname{sop}\omega \subset U$ y $\int_N \omega = 1$. Como $\operatorname{sop} f^*(\omega) \subset f^{-1}(\operatorname{sop}\omega) = \emptyset$, es

$$\deg(f) = \deg(f)\int_N \omega = \int_M f^*(\omega) = 0$$

lo que nos dice que

$$\deg(f) = 0 = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \mathrm{sgn}_f(p).$$

Ahora sí, supongamos que $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset M$ con $n \geq 1$. Usando el Lema 3, tomemos un abierto W de N y abiertos conexos disjuntos $U_i \ni p_i$ tales que $f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$ y cada (co)restricción $f|_{U_i}^W$ es un difeomorfismo.

En particular, como $\mathrm{sgn}_f(p)$ varía suavemente con p y tiene codominio discreto, en cada abierto conexo U_i debe ser constante. Es decir, para cada $i \in [\![n]\!]$ la función f preserva o invierte la orientación en *todo* el abierto U_i.

Una vez más, podemos considerar una n-forma ω tal que $\operatorname{sop}\omega \subset W$ y $1 = \int_W \omega = \int_M \omega$. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned}\deg(f) &= \int_M f^*(\omega) = \int_{f^{-1}(\operatorname{sop}\omega)} f^*(\omega) = \int_{f^{-1}(W)} f^*(\omega) \\ &= \int_{\bigsqcup_{i=1}^n U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*(\omega).\end{aligned}$$

Usando el Teorema 2 para cada difeomorfismo $f|_{U_i}^W : U_i \to W$ y recordando que sgn_f es constante en U_i, es

$$\int_{U_i} f^*(\omega) = \mathrm{sgn}_f(p_i) \cdot \int_W \omega = \mathrm{sgn}_f(p_i).$$

Se obtiene así

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \mathrm{sgn}_f(p_i).$$

□

Lema 4. Sea $\eta \in \mathbb{S}^1$ una 1-forma y $n \in \mathbb{N}$. Si definimos $\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$ con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada, entonces

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta\right)^n.$$

Demostración. Dadas proyecciones estereográficas $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{S}^1$, tenemos una carta

$$\Psi := \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}^n$$

de $\mathbb{T}^n$ que satisface $\pi_i(\Psi) = \varphi_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$. Más aún[2], para cada $i \in [\![n]\!]$ es

$$d_p\pi_i\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right) = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}.$$

A partir de esto último, afirmamos que $\pi_i^*(d\varphi_i) = d\Psi^i$. Basta probar que en cada punto $p \in U_1 \times \cdots \times U_n$ ambas 1-formas coinciden en una base de $T_p\mathbb{T}^n$. Tomando los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \Psi^i}\big|_p\}$, efectivamente es

$$\begin{aligned}
(\pi_i)_p^*(d\varphi_i)\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right) &= d_{p_i}\varphi_i\left(d_p\pi_i\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right)\right) = d_{p_i}\varphi_i\left(\delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}\right) \\
&= \delta_{ij} d_{p_i}\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}\right) = \delta_{ij} \cdot \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij} = d_p\Psi^i\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right).
\end{aligned}$$

Como η es una 1-forma, para cada $i \in [\![n]\!]$ existe una función suave $g_i \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\eta = g_i \cdot d\varphi_i$, y se tiene[3] entonces que $\pi_i^*(\eta) = g_i \circ \pi_i \cdot \pi_i^*(d\varphi_i) = g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^i$. Reescribiendo, tenemos una expresión para ω en terminos de $d\Psi^1, \ldots, d\Psi^n$,

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta) = g_1 \circ \pi_1 \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge g_n \circ \pi_n \cdot d\Psi^n = \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge d\Psi^n.$$

Tanto Ψ como cada carta ψ_i tienen dominio denso cuyo complemento es de medida cero, así que en vista de las anteriores caracterizaciones de ω y η podemos calcular sus integrales como

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot dx_1 \cdots dx_n \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{S}^1} \eta = \int_{\mathbb{R}} g_i(x)dx$$

para cada $i \in [\![n]\!]$.

Finalmente usando el teorema de Fubini, es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i(x_i) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x_1)dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x_n)dx_n\right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta\right)^n.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Muestre que cuando $n \geq 2$ el grado de toda función diferenciable $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{T}^n$ de la n-esfera al n-toro es nulo.

[2]Esta es una cuenta muy similar al ejercicio (1) de la práctica 1, que corresponde a la primera entrega.
[3]Estas propiedades son parte del ejercicio (8) de la práctica 4, que elegí resolver para la cuarta entrega.

Demostración. Consideremos $\eta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ una forma de volumen. Definimos entonces

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$$

con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada.

Al ser $n \geq 2$ sabemos que $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$, y por lo tanto para todo $i \in [\![n]\!]$ resulta $[f^*\pi_i^*(\eta)] = 0 \in H^1(\mathbb{S}^n)$. Como $f^* : H^\bullet(\mathbb{T}^n) \to H^\bullet(\mathbb{S}^n)$ es un morfismo de álgebras, esto dice que

$$\begin{aligned}
[f^*(\omega)] &= f^*([\omega]) = f^*([\pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta)]) \\
&= f^*([\pi_1^*(\eta)]) \wedge \cdots \wedge f^*([\pi_1^*(\eta)]) \\
&= [0] \wedge \cdots \wedge [0] = [0].
\end{aligned}$$

Vemos así que $f^*(\omega)$ es exacta y por lo tanto, existe $\zeta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ tal que $f^*(\omega) = d\zeta$. Por el teorema de Stokes, esto implica que

$$\int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \int_{\mathbb{S}^n} d\zeta = \int_{\partial\mathbb{S}^n} i^*(\zeta) = 0$$

ya que $\mathbb{S}^n$ no tiene borde.

Del Lema 4 y la definición de grado, obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_{\mathbb{T}^n} \omega = \deg(f) \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n.$$

Al ser η una forma de volumen de $\mathbb{S}^1$, su integral es no nula, y consecuentemente es $\deg(f) = 0$. □

Teorema 5 (dualidad de Poincaré). Sea M una variedad conexa y orientable de dimensión n. Entonces, para cada $k \in [\![n]\!]$ se tiene que $H_c^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$ y el isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned}
p : H_c^k(M) &\longrightarrow H^{n-k}(M)^* \\
[\omega] &\mapsto \left([\eta] \mapsto (-1)^{|\omega|} \int_M \omega \wedge \eta \right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea M una variedad compacta, orientable, conexa de dimensión n. Sabemos que la cohomología de De Rham de M tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M)$$

al que llamamos la *característica de Euler* de M.

(a) Si la dimensión n de M es impar, entonces $\chi(M) = 0$.

(b) Si la dimensión n de M es par y la de $H^{n/2}(M)$ es par, entonces $\chi(M)$ es un entero par.

Demostración. Notemos que como la variedad M es compacta, su cohomología a soporte compacto coincide con la cohomología de de Rham «a secas». Además, dado que la cohomología de una variedad compacta es finitamente generada, por el Teorema 5 se tiene que

$$H^i(M) = H^i_c(M) \simeq H^{n-i}(M)^* \simeq H^{n-i}(M)$$

para cada $i \in [\![n]\!]_0$. En particular, si notamos $\beta_i := \dim H^i(M)$ a la dimensión del i-ésimo grupo de cohomología, debe ser $\beta_i = \beta_{n-i}$. Ahora,

(a) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned}
2\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-i}\beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\beta_{i} \\
&= \chi(M)(1+(-1)^n) = \chi(M)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es $\chi(M) = 0$.

(b) De una forma similar, si n y es par y $\beta_{n/2}$ también, entonces

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=n/2+1}^{n}(-1)^i\beta_i \\
&= \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^{n-i}\beta_{n-i} \\
&= 2\sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} \equiv \beta_{n/2} \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la característica de Euler de M es par.

□

Teorema 6 (fórmula de Koszul). Si (M, g) es una variedad riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita, entonces para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ es

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle.$$

Ejercicio 5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_eG$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$.

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y sean $X_1, \ldots, X_n$ los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$.

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares $c_{i,j}^k$ y $g_{i,j}$ los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita de G con respecto a los campos $X_1, \ldots, X_n$, de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

(c) Sea $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada $(a, b), (c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro G es $e = (1, 0)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en $T_e G$ restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas que pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i,j \leq n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Definimos

$$g_h(v, w) := g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) \in \mathbb{R}$$

para cada $h \in G$ y $v, w \in T_h G$, que es suave pues es composición de funciones suaves.

Probamos primero que g es una métrica, es decir, que g_h es un producto interno en $T_h G$ para cada punto h de la variedad. Fijamos entonces $h \in G$. Como el diferencial $d_h L_{h^{-1}}$ es una función lineal, así lo es $d_h L_{h^{-1}} \times d_h L_{h^{-1}} : T_h G \times T_h G \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Al ser g_e un producto interno, se sigue que $g_h = g_e \circ (d_h L_{h^{-1}} \times d_h L_{h^{-1}})$ es bilineal, y más aún es simétrica pues

$$g_h(v, w) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(w), d_h L_{h^{-1}}(v)) = g_h(w, v).$$

Por último, g_h es definida positiva: si $v \in T_hG$, entonces

$$g_h(v,v) = g_e(d_hL_{h^{-1}}(v), d_hL_{h^{-1}}(v)) > 0$$

y como $d_hL_{h^{-1}}$ es un isomorfismo lineal,

$$g_h(v,v) = 0 \iff g_e(d_hL_{h^{-1}}(v), d_hL_{h^{-1}}(v)) = 0 \iff d_hL_{h^{-1}}(v) = 0 \iff v = 0.$$

Esto prueba la existencia de una tal métrica. Si $\widetilde{g}$ es otra métrica invariante a izquierda que vale g_e en la identidad, entonces como

$$d_eL_h \circ d_hL_{h^{-1}} = d_h(L_h \circ L_{h^{-1}}) = d_h(id_G) = id_{T_hG}$$

por invariancia es

$$\begin{aligned}\widetilde{g}_h(v,w) &= \widetilde{g}_{he}(d_eL_h(d_hL_{h^{-1}}(v)), d_eL_h(d_hL_{h^{-1}}(w))) = \widetilde{g}_e(d_hL_{h^{-1}}(v), d_hL_{h^{-1}}(w)) \\ &= g_e(d_hL_{h^{-1}}(v), d_hL_{h^{-1}}(w)) = g_h(v,w),\end{aligned}$$

lo que prueba la unicidad.

(b) Recordemos que por definición es $(X_i)_h = d_eL_h(v_i)$ para cada $i \in [\![n]\!]$ y $h \in G$. Por lo tanto, usando la invariancia a izquierda de la métrica es

$$(g(X_i, X_j))_h = g_h((X_i)_h, (X_j)_h) = g_h(d_eL_h(v_i)), d_eL_h(v_j)) = g_e(v_i, v_j)$$

para todo $h \in G$. Esto muestra que $\langle X_i, X_j\rangle := g(X_i, X_j)$ vale constantemente $g_{i,j} := g_e(v_i, v_j)$.

En particular, sabemos que para todo campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es $Z\langle X_i, X_j\rangle \equiv 0$. Usando esto y la fórmula de Koszul, se obtiene que

$$\begin{aligned}2\langle \nabla_{X_i}X_j, X_s\rangle &= \langle X_s, [X_i, X_j]\rangle - \langle X_j, [X_i, X_s]\rangle - \langle X_i, [X_j, X_s]\rangle \\ &= \sum_l \langle X_s, c^l_{i,j}X_l\rangle - \sum_l \langle X_j, c^l_{i,s}X_l\rangle - \sum_l \langle X_i, c^l_{j,s}X_l\rangle \\ &= \sum_l c^l_{i,j}g_{s,l} - \sum_l c^l_{i,s}g_{j,l} - \sum_l c^l_{j,s}g_{i,l}.\end{aligned}$$

Más compactamente, notando $(\nu_{i,j})_s := \langle \nabla_{X_i}X_j, X_s\rangle$ y contrayendo índices es

$$(\nu_{i,j})_s = \frac{1}{2}\left(c^l_{i,j}g_{s,l} - c^l_{i,s}g_{j,l} - c^l_{j,s}g_{i,l}\right).$$

Por otro lado si $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k}$ son las funciones[4] que satisfacen $\nabla_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij}X_k$ en todo punto, haciendo el producto interno contra X_s en ambos lados debe ser

$$(\nu_{ij})_s = \sum_k \Gamma^k_{ij}g_{k,s}$$

[4]En principio, estas funciones existen por el solo hecho de que los campos $X_1, \ldots, X_n$ en cada punto $h \in G$ dan una base de T_hG. Sin embargo, veremos *a posteriori* que son suaves.

o dicho de otra forma,

$$\frac{1}{2}\left(c_{i,j}^{l} g_{s,l} - c_{i,s}^{l} g_{j,l} - c_{j,s}^{l} g_{i,l}\right) = \Gamma_{i,j}^{k} g_{k,s}.$$

En conclusión, los símbolos de Christoffel se describen en términos las coordenadas de los productos internos y corchetes de Lie de los campos como

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2} g^{k,s}\left(c_{i,j}^{l} g_{s,l} - c_{i,s}^{l} g_{j,l} - c_{j,s}^{l} g_{i,l}\right).$$

(c) Como la métrica en $\mathfrak{g}$ extiende el producto interno en la identidad dado por el usual de $\mathbb{R}^2$, es $g_{i,j} = \delta_{ij}$. Por otro lado, si fijamos la base ortonormal de T_eG que corresponde a los *ganchos* $\mathcal{B} = \{\partial_x|_e, \partial_y|_e\}$, veamos como quedan los campos (que notamos X e Y respectivamente) que extienden a estos vectores de forma G-invariante.

Fijado un punto (x, y), la multiplicación por esta a izquierda es

$$L_{(x,y)}(z, w) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

y por lo tanto su diferencial se identifica con la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ que se corresponde con multiplicación por $x \cdot I_2 \in M_2\mathbb{R}$. Esto nos dice que $X \equiv x\partial_x$ e $Y \equiv x\partial_y$.

Para conocer los coeficientes c_{ij}^{k}, calculamos los corchetes de Lie de X e Y. Ya sabemos que $[X, X] = [Y, Y] = 0$ y por antisimetría es $-[Y, X] = [X, Y]$, así que calculamos este último,

$$\begin{aligned}
[x\partial_x, x\partial_y] &= \partial_x(x)\partial_y + x[\partial_x, x\partial_y] \\
&= \partial_x(x)\partial_y - x[x\partial_y, \partial_x] = \partial_x(x)\partial_y - x\left(\partial_y(x)\partial_x + x[\partial_y, \partial_x]\right) \\
&= \partial_x(x)\partial_y - x\partial_y(x)\partial_x = \partial_y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto se tiene[5] $c_{11}^{k} = c_{22}^{k} = 0$ para todo k y

$$c_{12} = (0, 1/x), \quad c_{21} = (0, -1/x).$$

Volviendo a la expresión de los simbolos de Christoffel, como $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ queda

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}(c_{ij}^{k} - c_{ik}^{j} - c_{jk}^{i}).$$

Concretamente,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11} &= (0, 0), \quad \Gamma_{22} = (1/x, 0), \text{ y} \\
\Gamma_{12} &= (0, 0), \quad \Gamma_{21} = (0, -1/x).
\end{aligned}$$

Ahora sí, calculo todas las geodésicas posibles alrededor de $e \in G$. Como en este caso la carta global es la identidad, aplicando la ecuación de las geodésicas

$$(x^k)'' + \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^{k} + \Gamma_{ji}^{k})(x^i)'(x^j)' = 0$$

a una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ resulta

[5] Notar que $1/x$ es suave pues el abierto $G \subset \mathbb{R}^2$ no contiene ningun punto de primera coordenada nula.

$$\begin{cases} x \cdot x'' = -(y')^2 \\ x \cdot y'' = x' \cdot y' \end{cases}$$

En particual, las curvas que cumplen $x'' = -a^2 x$ y $y' = ax$ satisfacen la ecuación, por lo que las curvas

$$\gamma(t) = (c\sin(at) + d\cos(at), d\sin(at) - c\cos(at) + b)$$

son soluciones. Además pedimos $(d, b-c) = \gamma(0) = e = (1,0)$ por lo que debe ser $d = 1, c = b$. Por otro lado, es $\gamma'(0) = (ac, a)$. Por lo tanto, la geodésica que pasa por e y tiene velocidad $\lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y$ es

$$\gamma_{\lambda_1,\lambda_2}(t) = (\cos(\lambda_2 t), \sin(\lambda_2 t)) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\sin(\lambda_2 t), -\cos(\lambda_2 t) + 1)$$

si $\lambda_2 \neq 0$ y $\gamma_{\lambda_1}(t) = (\lambda_1 t + 1, 0)$ en caso contrario. □

Lema 7. Sea M una variedad de dimensión n y $\omega, \eta \in \Omega^\bullet(M)$. Si ω y η son cerradas y ω es exacta, entonces $\omega \wedge \eta$ es exacta. Más aún, si $\omega = d\kappa$ entonces es $\omega \wedge \eta = d((-1)^{|\omega|}\omega \wedge \kappa)$.

Demostración. Por un cálculo directo, es

$$\begin{aligned} d((-1)^{|\omega|}\omega \wedge \kappa) &= (-1)^{|\omega|} d\omega \wedge \kappa + (-1)^{|\omega|}(-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\kappa \\ &= 0 \wedge \kappa + (-1)^{2|\omega|}\omega \wedge \eta = \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

□

Teorema 8 (fórmula de Künneth). Sean N y M dos variedades compactas, conexas y orientables. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$ tenemos un isomorfismo

$$H^n(M \times N) \simeq \bigoplus_{r+s=n} H^r(M) \otimes H^s(N)$$

inducido por las funciones bilineales

$$([\omega], [\eta]) \in H^r(M) \times H^s(N) \mapsto [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\eta)] \in H^n(M \times N)$$

para cada $r, s \in \mathbb{N}_0$ tales que $r + s = n$.

Ejercicio 6. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión $4k$.

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\beta : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$

tal que si ω y η son elementos cerrados de $\Omega^{2k}(M)$ entonces

$$\beta([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos la signatura de la forma bilineal β la signatura de M.

(b) Determine la signatura de $\mathbb{S}^4$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, del toro $\mathbb{T}^4$, del espacio proyectivo $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ y el producto $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \times \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$.

Demostración. Resuelvo cada inciso por separado.

(a) Como la aplicación $(\omega, \eta) \in \Omega(M)^{2k} \times \Omega(M)^{2k} \mapsto \omega \wedge \eta \in \Omega(M)^{4k}$ es bilineal, y la integral (que es existe y es finita para toda forma pues M es compacta y orientable) es lineal, tenemos definida una aplicación

$$b : (\omega, \eta) \in \Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta.$$

Si ω y η son dos $2k$-formas cerradas y α, β son dos $(2k-1)$-formas cualesquiera, se tiene que

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge d\beta + d\alpha \wedge \eta + d\alpha \wedge d\beta.$$

Como todos los términos del lado derecho excepto el primero son el wedge de dos formas cerradas con una de ellas exacta, por el Lema 7 en definitiva existe $\kappa \in \Omega^{4k-1}(M)$ tal que

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + d\kappa.$$

Ahora, aplicando b y usando el teorema de Stokes es

$$b(\omega + d\alpha, \eta + d\beta) = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d\kappa = \int_M \omega \wedge \eta + \overbrace{\int_{\partial M} i^*(\kappa)}^{=0} = b(\omega, \eta)$$

ya que M no tiene borde.

Esto termina de mostrar que la restricción de b a las formas cerradas en ambas coordenadas pasa al cociente por la identificacion de formas cohomólogas, induciendo así una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\beta : ([\omega], [\eta]) \in H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora que tanto b como β son simétricas pues la operación wedge lo es en $\Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M)$. Si $\sigma \in \mathbb{S}_{4k}$, entonces $\widetilde{\sigma} = \sigma(1\ 4k)(2\ (4k-1)) \cdots (2k\ (2k+1))$ tiene el mismo signo que σ ya que ambas permutaciones difieren en $2k$ transposiciones. Además la aplicación $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ es inversible pues corresponde a multiplicar a derecha por un elemento de $\mathbb{S}_{4k}$.

Por el mismo motivo que antes, de la multilinealidad de las formas es $\sigma \cdot \eta \otimes \omega = (-1)^{2k} \cdot \widetilde{\sigma} \cdot \omega \otimes \eta = \widetilde{\sigma} \cdot \omega \otimes \eta$ para toda $\omega, \eta \in \Omega^{2k}(M)$ y $\sigma \in \mathbb{S}_{4k}$. En consecuencia resulta

$$\begin{aligned} \eta \wedge \omega &= \frac{1}{2k!2k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{4k}} (-1)^{\sigma} \sigma \cdot \eta \otimes \omega = \frac{1}{2k!2k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{4k}} (-1)^{\widetilde{\sigma}} \widetilde{\sigma} \cdot \omega \otimes \eta \\ &= \frac{1}{2k!2k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{4k}} (-1)^{\sigma} \sigma \cdot \omega \otimes \eta = \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

Para terminar, fijemos $[\omega] \in H^{2k}(M)$. Como $(-1)^{|\omega|} = (-1)^{2k} = 1$, el Teorema 5 nos dice en particular que si $\beta([\omega], -)$ es la función nula, entonces $[\omega] = 0$. En otras palabras, la función bilineal β es no degenerada.

(b) Calculo cada caso por separado,

- $\underline{\mathbb{S}^4}$: en este caso sabemos que $H^2(\mathbb{S}^4) = 0$, y por lo tanto β es nula. En consecuencia, la signatura de $\mathbb{S}^4$ es 0.
- $\underline{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2}$: en vista de la fórmula de Künneth sabemos que

$$H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \simeq H^2(\mathbb{S}^2) \otimes H^0(\mathbb{S}^2) \oplus H^0(\mathbb{S}^2) \otimes H^2(\mathbb{S}^2) \simeq H^2(\mathbb{S}^2) \oplus H^2(\mathbb{S}^2),$$

y más aún una base de $H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ es $\mathcal{B} = \{[\pi_1^*(\omega)], [\pi_2^*(\omega)]\}$ con $\omega \in H^2(\mathbb{S}^2)$ una forma de volumen. Más aún, el mapa de la fórmula de Künneth para grado $2k$ nos dice que $[\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)]$ es no nula (y usando el Teorema 1, su integral es por tanto no nula).

Ahora como $H^4(\mathbb{S}^2) = 0$ es

$$\begin{aligned}
&[\pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega)] = [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] = 0, \\
&[\pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega)] = [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)], \\
&[\pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega)] = [\pi_2^*(\omega) \wedge \pi_1^*(\omega)] = [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)], \text{ y} \\
&[\pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega)] = [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] = 0,
\end{aligned}$$

notando $a := \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)$ la matriz de β en la base $\mathcal{B}$ es

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por un cálculo directo, sabemos que $[\pi_1^*(\omega)] + [\pi_2^*(\omega)]$ y $[\pi_1^*(\omega)] - [\pi_2^*(\omega)]$ son autovectores de $[\beta]_{\mathcal{B}}$ de autovalores a y $-a$ respectivamente, por lo que la signatura de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ es 0.
- $\underline{\mathbb{T}^4}$: una vez más, usamos la fórmula de Künneth. Vemos de esta forma que

$$\begin{aligned}
H^2(\mathbb{T}^4) &\simeq H^0(\mathbb{T}^2) \otimes H^2(\mathbb{T}^2) \oplus H^2(\mathbb{T}^2) \otimes H^0(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2) \\
&\simeq H^2(\mathbb{T}^2) \oplus H^2(\mathbb{T}^2) \oplus (H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2)).
\end{aligned}$$

Con un argumento similar se tiene que

$$H^2(\mathbb{T}^2) \simeq H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1) \text{ y } H^1(\mathbb{T}^2) \simeq H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1),$$

por lo que en definitiva es

$$\begin{aligned}
H^2(\mathbb{T}^4) &\simeq H^2(\mathbb{T}^2) \oplus H^2(\mathbb{T}^2) \oplus (H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2)) \\
&\simeq (H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) \oplus (H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) \oplus [(H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1)) \otimes (H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1))].
\end{aligned}$$

Persiguiendo los isomorfismos del Teorema 7 y usando que proyectar de $\mathbb{T}^4$ a una copia de $\mathbb{T}^2$ y luego a la 1-esfera es como considerar directamente una proyección $\pi_i : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{S}^1$, obtenemos una base de $H^2(\mathbb{T}^4)$ dada por

$$\mathcal{B} = \{\, [\pi_i^*(\eta) \wedge \pi_j^*(\eta)] \,\}_{1 \leq i < j \leq 4}$$

con η una forma de volumen de $\mathbb{S}^1$, ordenada según el orden lexicográfico de ij.

Como en el caso de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, sabemos que el wedge de dos elementos que «comparten un índice» de $\mathcal{B}$ es nulo pues $H^2(\mathbb{S}^1) = 0$. Para los otros casos, reordenando obtenemos

$\pm[\pi_1^*(\eta) \wedge \pi_2^*(\eta) \wedge \pi_3^*(\eta) \wedge \pi_4^*(\eta)]$. Usando la fórmula de Künneth otra vez o apelando al Lema 4, sabemos que $a := \int_{\mathbb{T}^4} \pi_1^*(\eta) \wedge \pi_2^*(\eta) \wedge \pi_3^*(\eta) \wedge \pi_4^*(\eta) \neq 0$ y entonces por un cálculo directo es

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Notando $\omega_{ij} = [\pi_i^*(\eta) \wedge \pi_j^*(\eta)]$ obtenemos que las clases de cohomología $[\omega_{14} + \omega_{23}]$, $[-\omega_{13} + \omega_{24}]$ y $[\omega_{12} + \omega_{34}]$ son autovectores de de $[\beta]_{\mathcal{B}}$ autovalor a; y las clases de cohomología $[-\omega_{14} + \omega_{23}]$, $[\omega_{13} + \omega_{24}]$ y $[-\omega_{12} + \omega_{34}]$ son autovectores de $[\beta]_{\mathcal{B}}$ de autovalor $-a$. Consecuentemente, la signatura de $\mathbb{T}^4$ es cero.

- $\underline{P^2_{\mathbb{C}}}$: voy a usar algunos hechos sobre la chomología del espacio proyectivo complejo. En primer lugar, sabemos que es

$$H^k(P^2_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 2|k \text{ y } k \leq 4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y más aún, tenemos una 2-forma $\omega \in H^2(P^2_{\mathbb{C}})$ tal que $\omega \wedge \omega$ es una forma de volumen y $a := \int_{P^2_{\mathbb{C}}} \omega \wedge \omega > 0$. En consecuencia, en la base de $H^2(P^2_{\mathbb{C}})$ dada por $\{\omega\}$ la matriz de β es simplemente (a). Concluimos entonces que la signatura de $P^2_{\mathbb{C}}$ es 1.

- $\underline{P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}}$: en vista de lo anterior y usando que

$$H^4(P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}) \simeq H^4(P^2_{\mathbb{C}}) \oplus (H^2(P^2_{\mathbb{C}}) \otimes H^2(P^2_{\mathbb{C}})) \oplus H^4(P^2_{\mathbb{C}}),$$

por el mismo argumento que antes vemos que una base de $H^4(P^2_{\mathbb{C}})$ proviene del pullback 4-formas y 2-formas de $P^2_{\mathbb{C}}$ por cada proyección. Concretamente, si $H^2(P^2_{\mathbb{C}}) = \langle [\omega] \rangle$ es la forma del inciso anterior, entonces

$$\mathcal{B} = \{\ [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)], [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)], [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)]\ \}$$

es una base de $H^4(P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}})$. Como $[\omega \wedge \omega \wedge \omega] \in H^6(P^2_{\mathbb{C}}) = 0$, es

$$[\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] = 0 \ \text{ y } \ [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] = 0.$$

Del mismo modo tenemos que

$$[\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] = [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] = 0$$

pues $H^8(P^2_{\mathbb{C}}) = 0$. Por último, usando queda

$$\begin{aligned} [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] &= [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \\ &= [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] \end{aligned}$$

Notando $a = \int_{P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}} \pi_1^*(\omega \wedge \omega) \wedge \pi_2^*(\omega \wedge \omega) > 0$ es

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene a $[\pi_1^*(\omega\wedge\omega)]+[\pi_2^*(\omega\wedge\omega)]$ y $[\pi_1^*(\omega\wedge\omega)]+[\pi_2^*(\omega\wedge\omega)]+[\pi_1^*(\omega)\wedge\pi_2^*(\omega)]$ como autovectores de autovalor a y a $[\pi_1^*(\omega\wedge\omega)]-[\pi_2^*(\omega\wedge\omega)]$ como autovector de autovalor $-a$. Por lo tanto, la signatura de $P^2_{\mathbb{C}}\times P^2_{\mathbb{C}}$ es 1.

□

Ejercicio 7. Sea $M\subseteq\mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanniana inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que hay un campo vectorial $Z\in\mathfrak{X}(M)$ sobre M que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p\in M$ se tiene que (X_p,Y_p) es una base ortonormal positiva de T_pM y $Z_p=\|Z_p\|X_p$.

(b) Hay 1-formas $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$ tales que $\alpha(X)=\beta(Y)=1$ y $\alpha(Y)=\beta(X)=0$. Más aún, existe una forma $\eta\in\Omega^1(M)$ tal que

$$d\alpha=\eta\wedge\beta,\quad d\beta=-\eta\wedge\alpha.$$

La forma $\sigma=\alpha\wedge\beta$ no depende de la elección de Z, es una forma de volumen sobre M que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanniano sobre M.

(c) Existe una función diferenciable $K:M\to\mathbb{R}$ tal que

$$d\eta=-K\cdot\sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo Z.

(d) Si M es compacta, entonces $\int_M K\cdot\sigma=0$.

(e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre S^2 un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Antes que nada, recordemos que para cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión 2 con producto interno y vector unitario $v\in\mathbb{V}$, existe un único vector unitario $w\in\mathbb{V}$ tal que $\{v,w\}$ es una base ortonormal orientada positivamente.

En efecto, al $\langle v\rangle^\perp$ tener dimensión 1, está generado por cierto vector $w_0\in\mathbb{V}$. Luego, de existir w debe ser de la forma $\lambda\cdot w_0$ para cierto $\lambda\in\mathbb{R}$. Como $\{v,w\}$ será orientada positivamente si y sólo si es $1=\det(v,\lambda w_0)=\lambda\det(v,w_0)$ y $\{v,w_0\}$ es base, podemos tomar $w:=\det(v,w_0)^{-1}w_0$. Más aún, el anterior argumento garantiza que esta es la única elección posible.

Volviendo al ejercicio, como el campo Z es nunca nulo, la función $\frac{1}{\|Z\|}$ está bien definida y es suave, y lo mismo ocurre para el campo $X\in\mathfrak{X}(M)$ dado por

$$X_p:=\frac{Z_p}{\|Z_p\|}$$

para cada $p \in M$. Notemos además que este es el único campo posible que satisface $Z \equiv \|Z\|X$.

Por la observación inicial, X induce entonces un único campo $Y : M \to TM$ tal que $\{X_p, Y_p\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de T_pM para cada $p \in M$. Veamos que Y es suave:

(b)

(c)

(d)

(e)

$\square$