Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 2

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Además del ejercicio (9), elejí resolver los ejercicios (4) y (12).

Ejercicio 4. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre variedades de la misma dimensión y supongamos que su dominio es compacto.

(a) Para cada $q \in N$ que es un valor regular de f el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito.

(b) Sea R el conjunto de los valores regulares de f. El conjunto R es un abierto de N y la función

$$q \in R \mapsto \#f^{-1}(q) \in \mathbb{N}_0$$

es localmente constante. Es necesariamente constante?

Demostración. Veamos primero el inciso (a). Fijemos $q \in N$ un valor regular. Como f es diferenciable en particular es continua y entonces el conjunto $E_q := f^{-1}(q)$ es un cerrado de M, al ser la preimagen del cerrado $\{q\} \subset N$. Como E_q es un cerrado y M es compacta, el primero resulta compacto. Por lo tanto, para probar que E_q es finito alcanza con mostrar que es discreto con la topología subespacio de M. Concretamente, basta ver que si $p \in E_q$ entonces existe $U \subset M$ abierto con $U \cap E_q = \{p\}$. Si $p \in E_q$, como q es un valor regular $d_p f : T_pM \to T_qN$ es sobreyectiva. Por otro lado, por hipótesis sabemos que $\dim T_pM = \dim M = \dim N = \dim T_qN$. Como d_pf es una función lineal sobreyectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión, es un isomorfismo. El teorema de la función inversa nos asegura entonces que existen abiertos $U \ni p$ y $V \ni q$ de M y N respectivamente tales que la (co) restricción $f|_U^V : U \to V$ de f es un difeomorfismo. En particular $f|_U^V$ es inyectiva y entonces la preimagen de un punto contiene a lo sumo un elemento. Se tiene entonces que

$$U \cap f^{-1}(q) \overset{(q \in V)}{=} (f|_U^V)^{-1}(q) \overset{(p \in U)}{=} \{p\},$$

lo que concluye la prueba de (a).

Ahora veamos (b). Fijemos $q \in R$. Si $q \notin f(M)$, entonces $\#f^{-1}(q) = 0$. Como M es compacta y N es Hausdorff pues es una variedad, f es cerrada. Entonces $f(M)$ es cerrado y por lo tanto, $f(M)^c$ es un abierto que contiene a q. Allí (vacuamente) todo punto es regular y tiene preimagen de tamao cero: basta probar la afirmación para $q \in R \cap f(M)$. Sea $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Aplicando el argumento que usamos en (a) a cada punto p_i, obtenemos abiertos $(A_i)_{i=1}^k$ de M y $(B_i)_{i=1}^k$ de N tales que las restricciones $f|_{A_i}^{B_i} : A_i \to B_i$ de f son difeomorfismos con $p_i \in A_i$ y $q \in B_i$ para todo $i \in [\![k]\!]$. Más aún podemos garantizar[1] que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Definimos ahora $B = \cap_{i \in [\![k]\!]} B_i$ y $U_i := (f|_{A_i}^{B_i})^{-1}(B)$ para cada $i \in [\![k]\!]$. Las (co)restricciones

$$f|_{U_i}^{B} : U_i \to B$$

con $1 \leq i \leq k$ resultan entonces difeomorfismos.

Definimos[2] ahora $C = (\cap_{i \in [\![k]\!]} U_i)^c$. Como f es cerrada, $f(C)$ es cerrado. Ahora, una vez más: definimos los abiertos $V := B \setminus f(C)$ y $O_i := (f|_{U_i}^{B})^{-1}(V) \overset{(V \subset B)}{=} U_i \cap f^{-1}(V)$, de forma que cada restricción $f|_{O_i}^{V} : O_i \to V$ sigue siendo un difeomorfismo. Afirmamos ahora que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in [\![k]\!]} O_i$. Por definición ya sabemos que $f^{-1}(V) \supseteq \bigcup_{i \in [\![k]\!]} O_i$. Recíprocamente si $x \in f^{-1}(V)$ entonces $f(x) \notin f(C)$ y por lo tanto $x \notin C$. Entonces $x \in C^c = \bigcup_{i \in [\![k]\!]} U_i$. Como partimos de que $x \in f^{-1}(V)$, efectivamente obtenemos que

$$x \in f^{-1}(V) \cap \bigcup_{i \in [\![k]\!]} U_i = \bigcup_{i \in [\![k]\!]} (f^{-1}(V) \cap U_i) = \bigcup_{i \in [\![k]\!]} O_i.$$

Veamos que esto implica ambas afirmaciones de (b). Por un lado, si $p \in f^{-1}(V)$ entonces $p \in O_i$ para algún $i \in [\![k]\!]$ y como $f|_{O_i}^{V}$ es un difeomorfismo entonces via los isomorfismos $T_p O_i \simeq T_p M$ y $T_{q'} V \simeq T_{q'} N$, tenemos que $d_p f$ es un isomorfismo:

$$\begin{tikzcd}
T_p M \arrow[r, "d_p f"] \arrow[d, "\wr"] & T_{q'} N \arrow[d, "\wr"] \\
T_p O_i \arrow[r, "d_p f|_{O_i}^{V}"] & T_{q'} V
\end{tikzcd}$$

En particular $d_p f$ resulta sobreyectivo. Como $p \in f^{-1}(q')$ era arbitario, vemos que para cada punto en la preimagen de q' el diferencial allí es sobreyectivo: esto quiere decir que q' es un punto regular, y como $q' \in V$ era arbitrario, es $V \subset R$. Esto prueba que R es abierto: partimos de un punto $q \in R$ y obtuvimos un entorno abierto $V \ni q$ contenido en R. Además, para cada $q' \in V$ tenemos que $f^{-1}(q') \subset f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i \in [\![k]\!]} O_i$ así que

$$f^{-1}(q') = f^{-1}(q') \cap \bigcup_{i \in [\![k]\!]} O_i = \bigcup_{i \in [\![k]\!]} (O_i \cap f^{-1}(q')) = \bigcup_{i \in [\![k]\!]} f|_{O_i}^{V}(q').$$

Como los conjuntos $(O_i)_{i \in [\![k]\!]}$ son disjuntos dos a dos pues $O_i \subset A_i$ para cada i, ási que de la anterior igualdad es $\#f^{-1}(q') = \sum_{i=1}^k \#(f|_{O_i}^{V}{}^{-1}(q'))$. Cada restricción $f|_{O_i}^{V}$ es biyectiva (pues es un difeomorfismo), de modo que la preimagen de q' en cada caso tiene exactamente un punto:

[1] Como M es Hausdorff, existen entornos abiertos $U_i \ni p_i$ para cada $i \in [\![k]\!]$ disjuntos dos a dos. Luego las (co) restricciones $f : A_i \cap U_i \to f(A_i \cap U_i)$ siguen siendo difeomorfismos y los abiertos $(A_i \cap U_i)_{i=1}^k$ son disjuntos dos a dos. Por lo tanto, podemos suponer directamente que los abiertos lo eran.

[2] Dado $q' \in B$, nos gustaría afirmar que su preimagen cae enteramente en la unión de los abiertos U_i pues esto implicaría que es un valor regular. Esto no es necesariamente cierto, al menos a simple vista. Intuitivamente, forzamos esta situación quitandole a B los puntos de $f(C)$, y luego corestringiendo apropiadamente conseguimos nuevos abiertos en M y N que cumplen con lo que buscamos.

$$f^{-1}(q') = \sum_{i=1}^{k} \#(f|_{O_i}^{V}(q')) = \sum_{i=1}^{k} 1 = k = \#f^{-1}(q).$$

Como esto es cierto para cualquier $q' \in V$, la aplicación $q \in R \mapsto \#f^{-1}(q) \in \mathbb{N}_0$ es localmente constante.

Por último, observemos que en general **no es cierto que la aplicación sea constante**. Veamos el siguiente contraejemplo: tomamos $M = N = S_1 \sqcup S_2$ con $S_1 = S_2 = \mathbb{S}^1$ que es una variedad compacta, con las inclusiones $j_i : \mathbb{S}^1 = S_i \hookrightarrow S_1 \sqcup S_2$ diferenciables[3]. Si $f_1, f_2 : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ son diferenciables, entonces $f_1 \sqcup f_2 : S_1 \sqcup S_2 \to S_1 \sqcup S_2$ lo es: basta probar diferenciabilidad restringiendo a los abiertos S_1 y S_2. Esto es como ver que la precomposición por las inclusiónes es diferenciable, lo que es cierto pues ésta se factoriza por las aplicaciones j_i y f_i, todas diferenciables:

$$\begin{tikzcd} S_1 \sqcup S_2 \arrow[r, "f_1 \sqcup f_2"] & S_1 \sqcup S_2 \\ S_i \arrow[u, hook, "j_i"] \arrow[r, "f_i"'] & S_i \arrow[u, hook, "j_i"'] \end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior y usando que las inclusiones de abiertos inducen isomorfismos en los tangentes, tenemos para cada $p \in S_i$ que

$$\begin{tikzcd} T_pS_i \arrow[r, "d_pf_i"] \arrow[d, "\wr"] & T_{f_i(p)}S_i \arrow[d, "\wr"] \\ T_p(S_1 \sqcup S_2) \arrow[r, "d_pf_1\sqcup f_2"] & T_{f_i(q)}(S_1 \sqcup S_2) \end{tikzcd}$$

conmuta. Como f_1, f_2 y $f_1 \sqcup f_2$ son funciones entre variedades de igual dimensión, sus diferenciales son sobreyectivos si y sólo si son isomorfismos. En particular, si $q \in S_i$ es un valor regular para f_i es también un valor regular para $f_1 \sqcup f_2$.

Ahora, pasemos a una función concreta: tomamos $g : z \in \mathbb{S}^1 \mapsto z^2 \in \mathbb{S}^1$, pensando a $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}$, y consideramos $\mathrm{id} \sqcup g$. Por la observación anterior, todo punto p de S_1 es regular, y su preimagen es exactamente $\{p\} \subset S_1$. Por otro lado, si $p \in S_2$ es $\#(\mathrm{id} \sqcup g)^{-1}(p) = \#g^{-1}(p) = 2$. Por lo tanto, resta probar que existe algún valor regular $p \in \mathbb{S}^1$ de g para concluir que la función $q \in R \mapsto (\mathrm{id} \sqcup g)^{-1}(p)$ en este caso no es constante. Más aún, como los tangentes en este caso son 1-dimensionales, basta ver que existe $p \in \mathbb{S}^1$ tal que d_pg es no nulo, pues en tal caso será sobreyectivo[4]. Veamos que $d_{(1,0)}g$ es no nulo. Para esto, consideramos la carta

$$\varphi : (x, y) \in \{(x, y) \in \mathbb{S}^1 : x > 0\} \mapsto y \in (-1, 1)$$

[3]Tomamos la topología coproducto y las siguientes cartas: para cada carta (U, φ) en el atlas maximal de $\mathbb{S}^1$ tenemos dos cartas (U_i, φ_i) con $U_i = U$ visto en S_i y $\varphi_i = \varphi$ bajo la misma identificación. Por lo tanto, si $p \in \mathbb{S}^1$, tomamos (U, φ) una carta de $\mathbb{S}^1$ con $U \ni p$ y (U_i, φ_i) en $S_1 \sqcup S_2$. Entonces $\varphi_i j_i \varphi^{-1} = \varphi^{-1}\varphi = \mathrm{id}_{\varphi(U)}$. Esto dice que las inclusiones j_1, j_2 resultan diferenciables.

[4]Como $\mathbb{S}^1$ es conexa y g no es constante, el ejercicio (12) que resolvemos más adelante garantiza que debe existir cierto $p \in \mathbb{S}^1$ para el cual es $d_pg \neq 0$. De todas formas, optamos por una resolución elemental.

alrededor de $(0,1)$. Como $g(1,0) = (1,0)$, luego $\frac{d}{dt}\Big|_{(1,0)}^{\varphi}$ es una derivación en $(1,0)$ y entonces basta con ver que

$$d_{(0,1)}g\left(\frac{d}{dt}\Big|_{(1,0)}^{\varphi}\right)(\varphi) = \frac{d}{dt}\Big|_{(1,0)}^{\varphi}(\varphi g) = \frac{d(\varphi g \varphi^{-1})}{dt}\Big|_0$$

es distinto de cero para concluir que $d_{(1,0)}g \neq 0$. Como $g(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, es

$$\varphi g \varphi^{-1}(y) = \varphi g(\sqrt{1-y^2}, y) = \varphi(1 - y^2 - y^2, 2\sqrt{1-y^2}y) = 2y\sqrt{1-y^2}$$

y entonces $\frac{d(\varphi g \varphi^{-1})}{dt} = \frac{2-4y^2}{\sqrt{1-y^2}}$. Por lo tanto,

$$d_{(0,1)}g\left(\frac{d}{dt}\Big|_{(1,0)}^{\varphi}\right)(\varphi) = \frac{2-4y^2}{\sqrt{1-y^2}}\Bigg|_0 = 2 \neq 0.$$

Esto termina de mostrar que si bien la aplicación del ejercicio es localmente constante, no necesariamente resulta constante.

□

Ejercicio 9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{A}$ su atlas maximal. Sea $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_pM$ y sea $\pi : TM \to M$ la función tal que $\pi(v) = p$ si $v \in T_pM$. Para cada $(U,x) \in \mathcal{A}$, sea $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_pM \subset TM$ y $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ la función tal que

$$\overline{x}(v) = (x(\pi(v)), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

cada vez que $v \in TU$. Probar que:

(a) La función $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa

$$\overline{x}^{-1}(a, b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^{-1}(a)}$$

para cada $a \in x(U)$.

(b) Si (U,x), $(V,y) \in \mathcal{A}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\overline{x}(TU \cap TV) = x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y la biyección $\overline{x} \circ \overline{y}^{-1} : y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

(c) El conjunto TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$, con atlas

$$\overline{\mathcal{A}} = \{(TU, \overline{x}) : (U,x) \in \mathcal{A}\}.$$

(d) Con respecto a esta estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado,

(a) Sean $(a,b) = (a,b^1,\dots,b^n) \in x(U)\times\mathbb{R}^n$ y $h(a,b) := \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_{x^{-1}(a)}$. Como $h(a,b)$ es una combinación lineal de derivaciones en $x^{-1}(a)$, resulta una derivación en $x^{-1}(a)$. Por lo tanto, $h(a,b)\in T_{x^{-1}(a)}M$ y entonces $x\pi(h(a,b)) = xx^{-1}(a) = a$. Además, si $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección en la j-ésima coordenada, para cada $j\in [\![n]\!]$ es $x^j = \pi_j x$ y entonces

$$\begin{aligned} h(a,b)(x^j) &= \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^{-1}(a)}\right)(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^{-1}(a)}(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial(x^j x^{-1})}{\partial x_i}\Big|_a \\ &= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i}\Big|_a = \sum_{i=1}^n b^i \delta_{ij} = b^j. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\overline{x}(h(a,b)) = (a,b)\in x(U)\times\mathbb{R}^n$. Recíprocamente si $v\in M_p$ con $p\in U$, luego

$$\begin{aligned} h(\overline{x}(v)) = h(x\pi(v), v(x^1),\dots,v(x^n)) &= \sum_{i=1}^n v(x^i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^{-1}(x\pi(v))} = \\ &= \sum_{i=1}^n v(x^i)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p. \end{aligned}$$

Esto último coincide justamente la expresión de v en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}_{i=1}^n$, lo que termina de probar que $h = \overline{x}^{\,-1}$.

(b) En primer lugar, notemos que como $U\cap V$ es abierto y x homeomorfismo, $x(U\cap V)$ es abierto y así $x(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$. Tenemos también que $TU\cap TV = T(U\cap V)$ y usando (a), es $\overline{x|_{U\cap V}} = \overline{x}|_{T(U\cap V)}$ por lo que $\overline{x|_{U\cap V}}$ resulta sobreyectiva (ya que $x|_{U\cap V}$ es otra carta de M). Luego (b) nos dice que en efecto $\overline{x}(TU\cap TV) = x(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que $\overline{xy}^{-1}$ es un difeomorfismo. Como $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son biyectivas, basta ver que las composiciones $\overline{xy}^{-1}$ y $\overline{yx}^{-1}$ son diferenciables. Por simetría (ya que podemos intercambiar los roles de x e y) basta probar un caso: lo hacemos para $\overline{xy}^{-1}$. Por un cálculo directo, si $(a,b)\in y(U\cap V)\times\mathbb{R}^n$ y $\pi_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ es la proyección en la j-ésima coordenada, para cada $j\in[\![n]\!]$ es $x^j y^{-1} = \pi_j x y^{-1} = (xy^{-1})^j$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \overline{y}^{-1}(a,b)(x^j) &= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{y^{-1}(a)}(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial x^j y^{-1}}{\partial x_i}\Big|_a \\ &= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (xy^{-1})^j}{\partial x_i}\Big|_a = [\mathbb{J}(xy^{-1})_a\cdot b]_j \end{aligned}$$

con $\mathbb{J}(xy^{-1})_a$ la matriz jacobiana de $xy^{-1} : y(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n \to x(U\cap V)\subset\mathbb{R}^n$ en el punto $a\in y(U\cap V)$. Por (a) sabemos que $\pi\overline{y}^{-1}(a,b) = y^{-1}(a)$, así que

$$\begin{aligned} x\overline{y}^{-1}(a,b) &= (x\pi(\overline{y}^{-1}(a,b)), \overline{y}^{-1}(a,b)(x^1),\dots,\overline{y}^{-1}(a,b)(x^n)) \\ &= (xy^{-1}(a), [\mathbb{J}(xy^{-1})_a\cdot b]_1,\dots,[\mathbb{J}(xy^{-1})_a\cdot b]_n) \\ &= (xy^{-1}(a), \mathbb{J}(xy^{-1})_a\cdot b). \end{aligned}$$

Como M es variedad diferenciable, xy^{-1} es suave y entonces $a \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a$ es suave. Ésto último dice que $(a,b) \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b$ es suave[5], de lo que concluimos que $\overline{xy}^{-1}$ es diferenciable.

(c) Procedemos por pasos: primero dotaremos al fibrado tangente de una topología que hará del mismo un espacio T_2 localmente euclídeo con base numerable. Es decir, le daremos a TM una estructura de variedad topológica, donde además cada función $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ resultará un homeomorfismo. Por último, concluiremos que con esta estructura $\overline{\mathcal{A}}$ es un altas diferenciable.

En primer lugar, afirmamos que la colección

$$\mathcal{B} = \{\overline{x}^{\,-1}(V) : (U,x) \in \mathcal{A}, V \subset x(U) \times \mathbb{R}^n \text{ abierto}\}$$

es una base para una topología en TM. Dado $v \in T_pM \subset TM$, existe una carta (U,x) con $U \ni p$ y entonces $v \in TU = \overline{x}^{\,-1}(x(U) \times \mathbb{R}^n) \in \mathcal{B}$. Por lo tanto es $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = TM$. Ahora, sean $\overline{x_1}^{\,-1}(W_1), \overline{x_2}^{\,-1}(W_2) \in \mathcal{B}$ con $(U_1,x_1),(U_2,x_2) \in \mathcal{A}$ y $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ abiertos. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
\overline{x_1}^{\,-1}(W_1) \cap \overline{x_2}^{\,-1}(W_2) &= (\overline{x_1}^{\,-1}(W_1) \cap TU_1) \cap (TU_2 \cap \overline{x_2}^{\,-1}(W_2)) \\
&= \overline{x_1}^{\,-1}(W_1) \cap \overline{x_2}^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n) \cap \overline{x_2}^{\,-1}(W_2) \\
&= \overline{x_1}^{\,-1}(W_1) \cap \overline{x_2}^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2) \\
&= \overline{x_1}^{\,-1}(W_1) \cap \overline{x_1}^{-1} \circ \overline{x_1} \circ \overline{x_2}^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2) \\
&= \overline{x_1}^{\,-1}(W_1 \cap \overline{x_1} \circ \overline{x_2}^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2)).
\end{aligned}$$

Como $x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2$ es abierto y $\overline{x_1} \circ \overline{x_2}^{-1}$ es difeomorfismo, $\overline{x}_1\overline{x_2}^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2)$ es abierto. Luego

$$W_1 \cap \overline{x}_1 \circ \overline{x_2}^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2)$$

resutla abierto y por lo tanto, $\overline{x_1}^{\,-1}(W_1) \cap \overline{x_2}^{\,-1}(W_2)$ se puede escribir como la preimagen por $\overline{x_1}$ de un abierto de $x_1(U_1) \times \mathbb{R}^n$. En particular esto termina de probar que $\mathcal{B}$ es una base. Dotamos entonces a TM de la topología generada por $\mathcal{B}$.

Si (U,x) es una carta de M, afirmamos ahora que $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Por construcción de la topología en TM, resulta continua. Resta ver que es abierta: si tomamos un abierto básico $TU \cap \overline{y}^{-1}(W)$ con $(V,y) \in \mathcal{A}$ y $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ abierto, es

$$\begin{aligned}
\overline{x}(TU \cap \overline{y}^{-1}(W)) = \overline{x}(TU \cap TV \cap \overline{y}^{-1}(W)) &= \overline{x}(\overline{y}^{-1}(U \cap V \times \mathbb{R}^n) \cap \overline{y}^{-1}(W)) \\
&= \overline{x} \circ \overline{y}^{-1}(U \cap V \times \mathbb{R}^n \cap W).
\end{aligned}$$

Efectivamente $\overline{x}(TU \cap \overline{y}^{-1}(W))$ es entonces abierto, ya que $U \cap V \times \mathbb{R}^n \cap W$ es abierto y $\overline{x} \circ \overline{y}^{-1}$ un difeomorfismo. Como $\overline{x}$ es además biyectiva, es un homeomorfismo. En particular TM es **localmente euclídeo**: si $v \in T_pM \subset TM$, tomando una carta (U,x) de M con $p \in U$ tenemos un homeomorfismo $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ con $TU \ni v$.

[5] Esto es porque en cada componente $(a,b) \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b$ coincide con $(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (xy^{-1})^j}{\partial x_i}\Big|_a$ que es una suma de productos de proyectar a $\mathbb{J}(xy^{-1})$ o $(a,b) \mapsto b$ en alguna coordenada, y todas las funciones involucradas son suaves.

A continuación, veamos que TM resulta **Hausdorff**. Sean $v \neq w \in TM$ dos derivaciones, de forma que existen $p, q \in M$ con $v \in T_pM$ y $w \in T_qM$. Si $p = q$, tomamos una carta (U, x) de M con $p \in U$. Luego $v, w \in TU$ y $\overline{x}(v) \neq \overline{x}(w)$ así que como $\mathbb{R}^{2n}$ es T_2, existen abiertos disjuntos $U \ni \overline{x}(v)$ y $V \ni \overline{x}(w)$. Por lo tanto $\overline{x}^{-1}(U)$ y $\overline{x}^{-1}(V)$ son dos abiertos disjuntos que separan a v de w. Si en cambio $p \neq q$, consideramos cartas (U, x) y (V, y) con U y V disjuntos. Tenemos entonces que $TU \cap TV = \emptyset$ y $v \in TU, w \in TV$. En cualquier caso, siempre existen abiertos disjuntos que separan a v y w.

Por último, TM tiene una **base numerable**: como M es una variedad, tiene una base numerable. En particular, el cubrimiento $\{U : (U, x) \in \mathcal{A}\}$ de M tiene un subcubrimiento numerable $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ con $(U_n, x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cartas de M. Para cada $n \in N$, el abierto $x_n(U_n) \times \mathbb{R}^n$ tiene una base numerable $\{V_j^n\}_{j\in\mathbb{N}}$. Afirmamos entonces que el conjunto numerable $\mathcal{B}' = \{\overline{x_n}^{-1}(V_j^n)\}_{(n,j)\in\mathbb{N}^2}$ es una base de TM. Sea (U, x) una carta de M, $W \subset x(U) \times \mathbb{R}^n$ abierto y $v \in \overline{x}^{-1}(W)$. Veamos que hay un abierto de $\mathcal{B}'$ que contiene a v y está contenido en $\overline{x}^{-1}(W)$. De que $v \in TU$ sabemos que existe $p \in U$ tal que v es una derivación en p y, como tenemos que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cubre M, existe $k \geq 1$ con $U_k \ni p$. En consecuencia es $v \in TU_k \cap \overline{x}^{-1}(W)$. Entonces podemos escribir

$$TU_k \cap \overline{x}^{-1}(W) = \overline{x}_k^{-1}\overline{x}_k(TU_k \cap \overline{x}^{-1}(W))$$

y como $\overline{x}_k(v) \in \overline{x}_k(TU_k \cap \overline{x}^{-1}(W)) \subset x_n(U_n) \cap \mathbb{R}^n$, existe $l \geq 1$ tal que $\overline{x}_k(v) \in V_l^k \subset \overline{x}_k(TU_k \cap \overline{x}^{-1}(W))$. Esto dice que

$$v \in \overline{x}_k^{-1}(V_l^k) \subset \overline{x}_k^{-1}\overline{x}_k(TU_k \cap \overline{x}^{-1}(W)) \subset \overline{x}^{-1}(W),$$

así que existe un tal entorno de $\mathcal{B}'$, como afirmamos.

En conclusión, TM es una variedad topológica. Como $\bigcup_{(U,x)\in\mathcal{A}} TU = T(\bigcup_{(U,x)\in\mathcal{A}} U) = TM$ y las funciones $\{\overline{x} : (U, x) \in \mathcal{A}\}$ resultan homeomorfismos, para concluir que $\overline{\mathcal{A}}$ es un atlas diferenciable resta ver que los cambios de coordenadas son difeomorfismos. Esto es precisamente el inciso (b). Concluimos entonces que TM con la estructura que le provee $\overline{\mathcal{A}}$ resulta una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

(d) Sea $v \in TM$. Existen entonces $p \in M$ tal que $v \in T_pM$ y una carta (U, x) de M con $\pi(v) = p \in U$. Por (c) sabemos que $(TU, \overline{x})$ es una carta de v, y por definición de TU es también $\pi(TU) = U$. Por lo tanto, resta ver que *bajando* con estas cartas la función que resulta es diferenciable entre abiertos euclídeos. Es decir, basta probar que $x \circ \pi \circ \overline{x}^{-1}$ es diferenciable.

$$\begin{tikzcd} TU \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{x}"'] & U \arrow[d, "x"] \\ x(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "x \circ \pi \circ \overline{x}^{-1}"'] & x(U) \end{tikzcd}$$

Como para todo $v \in TU$ el vector $x \circ \pi(v)$ coincide con las primeras n coordenadas de $\overline{x}(v)$, notando $\pi_1 : (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto p \in \mathbb{R}^n$ es entonces $x \circ \pi \circ \overline{x}^{-1} = \pi_1|_{x(U)\times\mathbb{R}^n} \circ \overline{x} \circ \overline{x}^{-1} = \pi_1|_{x(U)\times\mathbb{R}^n}$. Esta última es diferenciable ya que es la restricción al abierto $x(U) \times \mathbb{R}^n$ de la función diferenciable π_1. Consecuentemente, $\pi : TM \to M$ resulta diferenciable.

$\square$

Observación. Sean M una variedad diferenciable y $f \in C^\infty(M)$ una función que vale constantemente $\mu \in \mathbb{R}$. Si $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ es una derivación en $p \in M$, entonces $v(f) = 0$. En efecto, notando $1 : M \to \mathbb{R}$ a la función que vale constantemente 1 es

$$v(1) = v(1 \cdot 1) \stackrel{\text{(Leibniz)}}{=} 1(p)v(1) + 1(p)v(1) = 2v(1),$$

lo que implica $v(1) = 0$. En consecuencia, $v(f) = v(\mu \cdot 1) = \mu v(1) = 0$.

Recuerdo ahora el siguiente resultado que utilizaré a continuación,

Proposición. Sea X un espacio topológico conexo y $f : X \to Y$ una función. Si f es localmente constante, entonces es constante.

Demostración. Si $y \in \operatorname{im} f$, el conjunto $E_y := f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ es abierto: para cada $z \in E_y$ existe por hipótesis un abierto $U \ni z$ donde f es constante, y como $f(z) = y$ luego f vale constantemente y en todo U. Por lo tanto, $z \in U \subset E_y$. Además los conjuntos $(E_y)_{y \in \operatorname{im} f}$ son disjuntos, pues si $z \in E_y \cap E_{y'}$ entonces $y = f(z) = y'$. Como X es conexo y

$$X = \bigsqcup_{y \in \operatorname{im} f} E_y$$

es una unión de abiertos disjuntos no vacíos, necesariamente $\# \operatorname{im} f = 1$. Esto es precisamente que f sea una función constante. □

Ejercicio 12. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \to N$ una función diferenciable. Probar que

- Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.
- Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

Demostración. Notaremos $c_q : M \to N$ a la función que vale constantemente q y definimos $m := \dim M, n := \dim N$. Supongamos en primer lugar que $f = c_q$ para cierto $q \in N$. Sea $p \in M$ y veamos que f_{*p} es nula. Dada una derivación $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ en p y $g \in C^\infty(M)$, luego es

$$f_{*p}(v)(g) = v(- \circ f)(g) = v(gf) = v(gc_q) = v(c_{g(q)}) = 0,$$

pues notamos anteriormente que las funciones constantes tienen imagen nula por una derivación. Como $f_{*p}(v)$ se anula en toda función, es $f_{*p}(v) = 0$. Por lo tanto, f_{*p} se anula en toda derivación: esto dice que $f_{*p} = 0$. Como p era arbitario, f_{*p} resulta nula para cualquier $p \in M$.

Supongamos ahora que M es conexa y veamos para este caso la afirmación recíproca. Alcanza con probar que f es localmente constante: fijemos entonces $p \in M$ y veamos que existe un entorno abierto de p donde f es constante. Consideramos ahora una carta (V, ψ) de N con $f(p) \in V$ y una carta (U, φ) de M con $p \in U \subset f^{-1}(V)$ y U conexo[6]. Luego, los *ganchos* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q^\varphi \right\}_{i=1}^n$ son

[6]Como f es continua $f^{-1}(V)$ es abierto, y entonces $f^{-1}(V) \cap U$ es un abierto de M que contiene a p. Por lo tanto $f^{-1}(V) \cap U$ es un abierto en U, y como éste es homeomorfo a un abierto euclídeo, también lo es $f^{-1}(V) \cap U$. En particular tenemos un entorno conexo $\tilde{U}$ de p contenido en $f^{-1}(V) \cap U$. La restricción de la carta a $\tilde{U}$ es una carta que cumple lo que pedimos, por lo que podemos sin pérdida de generalidad asumir directamente a U conexo con $U \subset f^{-1}(V)$.

una base de T_qM para cada $q \in U$. Por hipótesis, si $g \in C^\infty(N)$ y v es una derivación en q, es $v(gf) = f_{*q}(v)(g) = 0$. En particular,

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q^\varphi (gf) = \frac{\partial g f \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi^{-1}(q)} = 0$$

para todo $i \in [\![m]\!]$ y $q \in U$. Es decir, la función diferenciable $gf\varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ tiene gradiente nulo. Como U es conexo y φ es homeomorfismo, luego $\varphi^{-1}(U)$ es conexo. Como $gf\varphi^{-1}$ tiene gradiente nulo y dominio conexo, es constante:

$$gf\varphi^{-1}(x) = \mu_g \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \varphi^{-1}(U)).$$

Equivalentemente, se tiene que $gf \equiv c_{\varphi(\mu_g)}$ en U para cada $g \in C^\infty(N)$. Ahora, dado $i \in [\![n]\!]$ siempre existe $\overline{\psi}^i \in C^\infty(N)$ tal que $\overline{\psi}^i|_V = \psi^i$ y existen entonces constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\overline{\psi}^i f \equiv c_i$ en U. Como $f(U) \subset V$, es

$$c_i \equiv \overline{\psi}^i|_V \circ f\Big|_U^V = \psi^i \circ f\Big|_U^V$$

en U para cada $i \in [\![n]\!]$, de forma que $\psi f\big|_U^V \equiv (c_1, \ldots, c_n) =: c$. Como ψ es homeomorfismo, luego $f\big|_U^V \equiv \psi^{-1}(c)$. Vemos así que f es constante en el abierto $U \ni p$, lo que completa la demostración. $\square$