Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 4

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí los ejercicios (6), (8) y el inciso (d) del ejercicio (11).

Ejercicio 6. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable si y sólo si M y N lo son.

Demostración. Veamos ambas implicaciones

($\Rightarrow$) Supongamos que $M \times N$ es orientable, y veamos que M lo es. Un argumento similar prueba lo mismo para N.

Sea (ψ, V) una carta de N. Como $M \times N$ es orientable, así lo es $M \times V$ pues tomando una forma de volumen en $M \times N$ y restringiéndola a $M \times V$ obtenemos nuevamente una forma de volumen. Dado que ψ es una carta de N, ésta es un difeomorfismo de V a $\mathbb{R}^n$ y por lo tanto $\mathrm{id}_M \times \psi : M \times V \to M \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo de $M \times V$ a $M \times \mathbb{R}^n$, con inversa $\mathrm{id}_M \times \psi^{-1}$. En particular de aquí vemos que $M \times \mathbb{R}^n$ es orientable.

En vista de esto, basta probar que si M es una variedad y $M \times \mathbb{R}^n$ es orientable entonces M es orientable. De hecho alcanza probar lo anterior para $n = 1$, pues en tal caso esto nos permitirá probar que de ser $M \times \mathbb{R}^n \simeq (M \times \mathbb{R}^{n-1}) \times \mathbb{R}$ orientable así lo será $M \times \mathbb{R}^{n-1}$. Inductivamente, obtendremos que $M \times \mathbb{R}$ es orientable, y finalmente por el mismo argumento esto dirá que M lo es.

Veamos para terminar que si $M \times \mathbb{R}$ es orientable, entonces M es orientable. En vista de que $T(M \times \mathbb{R}) \simeq TM \times T\mathbb{R}$, para cada carta $(U \times \mathbb{R}, \varphi \times \mathrm{id})$, notaremos a los *ganchos* como

$$\left.\frac{\partial}{\partial(\varphi \times \mathrm{id})^i}\right|_{(p,q)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_{(p,q)} & \text{si } i \leq n \\ \frac{d}{dt}|_{(p,q)} & \text{si } i = n+1 \end{cases}$$

Sabemos que existe una forma de volumen $\omega \in \Omega^{m+1}(M \times \mathbb{R})$, con cierta expresión local

$$\omega|_U = f_U \cdot d\,\varphi^1 \wedge \ldots d\,\varphi^m \wedge d\,t$$

para cada carta $\varphi \times \mathrm{id} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{m+1}$ de $M \times \mathbb{R}$. Ahora, definimos $i : p \in M \mapsto (p, 0) \in M \times \mathbb{R}$ y consideramos $\eta : M \to \mathrm{Alt}^m(M)$ definida en cada carta (U, φ) como

$$\eta_p(v_1, \ldots, v_m) := \omega_{(p,0)} \left(d_p i(v_1), \ldots, d_p i(v_m), \frac{d}{dt}\Big|_{(p,0)} \right).$$

Como η se define a partir de la expresión local de ω, sabemos que está bien definida y es suave. Más aún como $\omega_{(p,0)}$ es $(m+1)$-multilineal alternada y $d_p i$ es lineal, tenemos que η_p es m-lineal alternada: esto dice que η es una m-forma de M.

Para concluir que M es orientable resta notar que η es de volumen: dado $p \in M$ y una carta (U, φ) de M con $U \ni p$, como para cada $i \in [\![n]\!]$ es $d_p i(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p) = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_{(p,0)}$ se tiene que

$$\eta_p \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}\Big|_p \right) = \omega_{(p,0)} \left(\frac{\partial}{\partial \varphi^1}\Big|_{(p,0)}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}\Big|_{(p,0)}, \frac{\partial}{\partial t}\Big|_{(p,0)} \right) \neq 0$$

pues como $\omega_{(p,0)} \not\equiv 0$, evaluando una base de $T_{(p,0)} M \times \mathbb{R}$ debe dar un valor no nulo.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que tanto M como N son variedades orientables de dimensión m y n respectivamente, de forma que existen atlas orientables A y A' de M y N respectivamente. Veamos que el atlas

$$\mathcal{A} = \{(\phi \times \psi, U \times V) : (\phi, U) \in A, (\psi, V) \in A'\}$$

de $M \times N$ resulta orientable.

Sean $\phi \times \psi : U \times V \to \mathbb{R}^{m+n}$ y $\phi' \times \psi' : U' \times V' \to \mathbb{R}^{m+n}$ dos cartas de $\mathcal{A}$ y (p, q) un punto de $U \times V \cap U' \times V'$. Notando $\pi_i : \mathbb{R}^{m+n} \to \mathbb{R}$ a la proyección a la i-ésima coordenada, para cada $i, j \in [\![n+m]\!]$ es

$$\begin{aligned}
\frac{\partial (\phi' \times \psi')^i}{\partial (\phi \times \psi)^j}\Big|_{(p,q)} &= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{(\phi(p),\psi(q))} [(\phi' \times \psi')^i \circ (\phi \times \psi)^{-1}] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{(\phi(p),\psi(q))} [\pi_i \circ (\phi' \times \psi') \circ \phi^{-1} \times \psi^{-1}] \\
&= \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{(\phi(p),\psi(q))} [(\phi'\phi^{-1} \times \psi'\psi^{-1})^i]
\end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial (\phi' \times \psi')^i}{\partial (\phi \times \psi)^j}\Big|_{(p,q)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j}|_{\phi(p)} (\phi'\phi^{-1})^i & \text{si } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m \\ 0 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n \\ \frac{\partial}{\partial x_{j-n}}|_{\psi(q)} (\psi'\psi^{-1})^{i-n} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m, n+1 \leq j \leq n+m \end{cases}$$

Como por definición tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{\phi(p)}(\phi'\phi^{-1})^i = \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j}\Big|_p$ y $\frac{\partial}{\partial x_{j-n}}\Big|_{\psi(q)}(\phi'\phi^{-1})^{i-n} = \frac{\partial \psi'^{i-n}}{\partial \psi^{j-n}}\Big|_q$, en definitiva resulta

$$\left(\frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j}\Big|_{(p,q)}\right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j}\Big|_p\right)_{i,j} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j}\Big|_q\right)_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Finalmente como los atlas A y A' son orientados, las matrices de cambio de coordenadas de las cartas ϕ, ϕ' y ψ, ψ' tienen determintante positivo. De aquí vemos que

$$\begin{aligned} \det\left(\frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j}\Big|_{(p,q)}\right)_{i,j} &= \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j}\Big|_p\right)_{i,j} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j}\Big|_q\right)_{i,j} \end{pmatrix} \\ &= \det\left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j}\Big|_p\right)_{i,j} \cdot \det\left(\frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j}\Big|_q\right)_{i,j} > 0, \end{aligned}$$

lo que termina de probar que $\mathcal{A}$ es orientado.

□

Ejercicio 8.

a) Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades, probar que los pull-backs $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ son tales que

(i) $f^*(\omega_1 + \omega_1) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$

(ii) $f^*(h \cdot \omega_1) = h \circ f \cdot f^*(\omega_1)$

(iii) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$

para cada $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\bullet(N)$ y $h \in C^\infty(N)$.

b) Si U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to V$ es diferenciable, entonces

$$f^*(d\,x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, d\,x_k$$

y

$$f^*(g \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n) = g \circ f \cdot \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $g \in C^\infty(V)$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

(a) Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(N)$ y $\eta \in \Omega^l(N)$. Para verificar las igualdades del enunciado basta ver que, en cada punto de la variedad, las formas coinciden en todo vector tangente. Fijamos entonces $p \in N$ y $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l} \in T_pN \subset TN$.

En primer lugar, (i) e (ii) son ciertas pues

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1+\omega_2)_p(v_1,\dots,v_k) &= (\omega_1+\omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\dots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= (\omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\dots,f_{*,p}(v_k)) + (\omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\dots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= f^*(\omega_1)_p(v_1,\dots,v_k) + f^*(\omega_2)_p(v_1,\dots,v_k) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f^*(h\cdot\omega_1)_p(v_1,\dots,v_k) &= (h\cdot\omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\dots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p))\cdot {\omega_1}_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\dots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p))\cdot f^*(\omega_1)_p(v_1,\dots,v_k). \end{aligned}$$

Ahora observemos que si tomamos $\sigma \in \mathbb{S}_{k+l}$ y notamos $\tilde{v}_i := d_pf(v_i)$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma\cdot(\omega\otimes\eta)_{f(p)}(d_pf(v_1),\dots d_pf(v_{k+l})) &= (\omega\otimes\eta)_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(1)},\dots\tilde{v}_{\sigma(k+l)}) \\ &= \omega_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(1)},\dots\tilde{v}_{\sigma(k)})\cdot\eta_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(k+1)}),\dots,\tilde{v}_{\sigma(k+l)}) \\ &= f^*(\omega_p)(v_{\sigma(1)},\dots v_{\sigma(k)})\cdot f^*(\eta)_p(v_{\sigma(k+1)},\dots,v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sigma\cdot(f^*(\omega)\otimes f^*(\eta))_p(v_1,\dots,v_{k+l}). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(\omega\wedge\eta)_p(v_1,\dots,v_{k+l}) &= (\omega\wedge\eta)_{f(p)}(d_pf(v_1),\dots,d_pf(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{k+l}}(-1)^\sigma\sigma\cdot(\omega\otimes\eta)_{f(p)}(d_pf(v_1),\dots d_pf(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_{k+l}}(-1)^\sigma\sigma\cdot(f^*(\omega)\otimes f^*(\eta))_p(v_1,\dots,v_{k+l}) \\ &= (f^*(\omega)\wedge f^*(\eta))_p(v_1,\dots,v_{k+l}), \end{aligned}$$

lo que prueba (iii).

b) Dado $s \in [\![n]\!]$, para cada $p \in U$ y $g \in C^\infty(V)$ es

$$\begin{aligned} d_pf\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_s}\right|_p\right)(g) &= \left.\frac{\partial gf}{\partial x_s}\right|_p = (D_p(gf))_s = (D_{f(p)}gD_pf)_s \\ &= \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial g}{\partial x_j}\right|_{f(p)}\cdot\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{f(p)}(g). \end{aligned}$$

y entonces

$$d_pf\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_s}\right|_p\right) = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{f(p)}.$$

.

Si ahora tomamos $i \in [\![n]\!]$, se tiene que

$$f^*(d\,x_i)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\Big|_p\right) = dx_{i f(p)}\left(d_p f\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\Big|_p\right)\right) = dx_{i f(p)}\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_s}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{f(p)}\right)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_s}\Big|_p \cdot dx_{i f(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_{f(p)}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}.$$

Como a su vez se satisface

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(d\,x_k)_p\left(\frac{\partial}{\partial x_s}\Big|_p\right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\delta_{ks} = \frac{\partial f_i}{\partial x_s},$$

deber ser

$$f^*(d\,x_i)_p = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(d\,x_k)_p$$

pues ambos lados de la igualdad coinciden en la base de los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial x_s}|_p\}_{1\leq s\leq n}$. Dado que esto es cierto para cualquier punto $p \in U$, se tiene

$$f^*(d\,x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, d\,x_k. \tag{1}$$

Finalmente, usando (a) vemos que

$$f^*(g \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n) = g \circ f \cdot f^*(d\,x_1) \wedge \cdots \wedge f^*(d\,x_n)$$

así que para terminar debemos probar que

$$f^*(d\,x_1) \wedge \cdots \wedge f^*(d\,x_n) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij} \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n.$$

En efecto, de (1) es

$$\begin{aligned}
f^*(dx_1)\wedge\cdots\wedge f^*(dx_n) &= \sum_{i_1=1}^{n}\frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}}\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge\sum_{i_n=1}^{n}\frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}}\,dx_{i_n}\\
&= \sum_{i_1,\dots,i_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}}\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n}\\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}}\,dx_{i_1}\wedge\cdots\wedge dx_{i_n}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}}\,dx_{\sigma(1)}\wedge\cdots\wedge dx_{\sigma(n)}\\
&= \sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}(-1)^{\sigma}\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}}\,dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\
&= \left(\sum_{\sigma\in\mathbb{S}_n}(-1)^{\sigma}\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}}\right)dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n\\
&= \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij}\cdot dx_1\wedge\cdots\wedge dx_n.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 11 (d). Calcule la cohomología de un producto cartesiano de dos esferas.

Demostración. Sean $n, m \in \mathbb{N}$. Como $\mathbb{S}^n$ es una variedad compacta, podemos usar la fórmula de Künneth: para todo $q \geq 0$ es

$$H^q(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m) = \bigoplus_{r+s=q} H^r(\mathbb{S}^n)\otimes H^s(\mathbb{S}^m). \tag{2}$$

Sabemos además que la cohomología de la k-esfera es $\mathbb{R}$ en los grados 0 y k, y nula en los demás.

Por lo tanto, para que $H^r(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n)$ sea no nulo es condición necesaria que $r\in\{0,n\}$ y $s\in\{0,m\}$. En particular debe ser $r+s\in\{0,n,m,n+m\}$. Al $\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m$ ser arcoconexo, ya sabemos que $H^0(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m)\simeq\mathbb{R}$.

En los otros casos, usando (2) tenemos que

$$H^n(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m) = H^n(\mathbb{S}^n)\otimes H^0(\mathbb{S}^m)\oplus H^0(\mathbb{S}^n)\otimes H^n(\mathbb{S}^m) = \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\oplus\mathbb{R}\otimes\mathbb{R}^{\delta_{nm}} = \mathbb{R}\oplus\mathbb{R}^{\delta_{nm}}$$

y similarmente $H^m(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m) = \mathbb{R}^{\delta_{nm}}\oplus\mathbb{R}$.

Por último, del mismo modo es

$$H^{n+m}(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^m) = H^n(\mathbb{S}^n)\otimes H^m(\mathbb{S}^m) = \mathbb{R}\otimes\mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, si $n = m$ entonces

$$H^q(\mathbb{S}^n\times\mathbb{S}^n) = \begin{cases}\mathbb{R} & \text{si } q = 0 \text{ o } q = 2n\\ \mathbb{R}^2 & \text{si } q = n\\ 0 & \text{en caso contrario}\end{cases}$$

y en los demás casos, es

$$H^q(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q \in \{0, n, m, n+m\} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$\square$