Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre – 2019

Segundo Parcial

Guido Arnone

Ejercicio 1. Sea M una variedad riemanniana, sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable $\operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ y uno solo con la propiedad de que para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle = df(Y).$$

Encuentre una expresión en coordenadas para el campo $\operatorname{grad}(f)$.

(b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y \rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f) \rangle.$$

(c) Muestre que si el campo $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X \rangle = 0$. Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ son geodésicas.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Notemos en primer lugar que la función f induce una 1-forma df que en cada punto $p \in M$ vale $d_p f : v \in T_pM \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$, el diferencial de f bajo la identificación $T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

Fijemos ahora $p \in M$. Como $d_p f \in (T_pM)^*$ es un elemento del espacio dual de T_pM, y este último es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita equipado con un producto interno (inducido por la métrica de M), el teorema de representación de Riesz nos asegura que existe un único vector tangente $v_p \in T_pM$ tal que

$$\langle v_p, w \rangle = d_p f(w) = w(f) \quad (\forall w \in T_pM). \tag{1}$$

Si definimos $\operatorname{grad}_p(f) := v_p$ para cada $p \in M$, reescribiendo la anterior igualdad es

$$\langle \operatorname{grad}(f)_p, w \rangle = d_p f(w) \quad (\forall w \in T_pM).$$

y éste es el único campo con tal propiedad. En particular, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces para cada $p \in M$ es

$$(\langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle)_p = \langle \operatorname{grad}(f)_p, Y_p \rangle = d_p f(Y_p) = (df(Y))_p$$

y por lo tanto $\langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle \equiv df(Y)$.

Para ver la unicidad, recordemos que para cada $p \in M$ y $v \in T_pM$ existe $Y^v \in \mathfrak{X}(M)$ con $Y^v_p = v$. Efectivamente, podemos tomar una carta (U, φ) con $U \ni p$ de forma que existan coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ tales que $v = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$ y luego tomar el campo

$$Y^v = h \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

con $h \in C^\infty(M)$ una función *bump* (tal que valga 1 en un entorno abierto $V \subset U$ de p y 0 en un abierto $W \supset U^c$).

A partir de esto, podemos concluir que cualquier otro campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ que cumpla $\langle Z, Y \rangle \equiv df(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ deberá satisfacer

$$\langle Z_p, v \rangle = \langle Z_p, Y^v_p \rangle = d_p f(Y^v_p) = v(f)$$

para todo $p \in M$ y $v \in T_pM$. La unicidad de (1) nos dice entonces que $Z_p = v_p = \operatorname{grad}_p(f)$ en todo punto $p \in M$.

Para terminar, veamos una expresión de $\operatorname{grad}_p(f)$ en coordenadas. De aquí se tendrá que el gradiente depende localmente de funciones suaves, y es por lo tanto diferenciable.

Una vez más, fijamos $p \in M$ y consideramos (φ, U) una carta de M tal que $U \ni p$. Como los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}|_p\}$ son una base de T_pM, sabemos que existen únicos coeficientes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Si ahora tomamos el producto interno de v_p con $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$, es

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p (f) = \left\langle v_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (g_p)_{ji}$$

para cada $j \in [\![n]\!]$, y notando $c = (c_1, \ldots, c_n)$ esto es equivalente a

$$c \cdot g_p = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\Big|_p \right).$$

Por lo tanto debe ser $c = (\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\big|_p)(g_p)^{-1}$ y

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij}.$$

Volviendo a la expresión original, obtenemos finalmente

$$\operatorname{grad}_p(f) = v_p = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij} \right) \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p = \sum_{i,j} (g_p)^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p .$$

Esto prueba que para todo $p \in U$ se tiene (contrayendo indices) que

$$\operatorname{grad}(f) = g^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Como afirmamos, esto prueba además que $\operatorname{grad}(f)$ es diferenciable, ya que para cada punto tenemos un abierto donde este es un campo suave.

(b) Como ∇ es la conexión de Levi-Civita, sabemos (por construcción) que esta es compactible con la métrica y libre de torsion. Concretamente, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2}$$

y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{3}$$

Sean ahora $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos en M. Por (2) y (3) sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle &= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y] + \nabla_Y X\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_Y X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - (Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle - \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle) - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle + X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que $\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f)\rangle$ si y solo si

$$X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \operatorname{grad}(f), [X, Y]\rangle.$$

o lo que es lo mismo,

$$X df(Y) - Y df(X) = df([X, Y]).$$

Para terminar, observemos que esto ocurre siempre, pues

$$X df(Y) - Y df(X) = XY(f) - YX(f) = (XY - YX)(f) = [X, Y](f) = df([X, Y]).$$

(c) Supogamos que $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante. Entonces $\|\operatorname{grad}(f)\|^2 = \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle$ debe valer constantemente c para cierto $c \in \mathbb{R}$. Si ahora tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, para todo $p \in M$ debe ser

$$(X\|\operatorname{grad}(f)\|)_p = X_p(c) = 0,$$

y por lo tanto $X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle \equiv 0$.

Usando la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita, de la anterior igualdad se desprende que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle + \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X \operatorname{grad}(f)\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle \end{aligned}$$

y por (b) es

$$\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = 0.$$

Por último, si $\gamma : I \to M$ es una curva integral de $\operatorname{grad}(f)$, entonces es $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0$ pues

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\|^2 &= \langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}, \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}\rangle \\ &= (\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f)\rangle)_{\gamma(t)} = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Vemos así que las curvas integral de $\operatorname{grad}(f)$ resultan geodésicas.

□

Ejercicio 2. Sean M y N dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Muestre que hay un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para toda forma $\omega \in \Omega^n(N)$ se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos *grado* de f y lo escribimos $\deg(f)$.

(b) Supongamos que $q \in N$ es valor regular de f, de manera que, en particular, el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito. Si $p \in f^{-1}(q)$ la diferencial es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$\operatorname{sgn}_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \operatorname{sgn}_f(p).$$

Demostración. content... □

Lema 1. Sea $\eta \in \mathbb{S}^1$ una 1-forma y $n \in \mathbb{N}$. Si definimos $\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$ con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada, entonces

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \int_{\mathbb{S}^1 \times \cdots \times \mathbb{S}^1} \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta) = \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n. \tag{4}$$

Demostración. Dadas proyecciones estereográficas $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{S}^1$, tenemos una carta

$$\Psi := \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}^n$$

de $\mathbb{T}^n$ que satisface $\pi_i(\Psi) = \varphi_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$. Más aún[1], para cada $i \in [\![n]\!]$ es

$$d_p\pi_i \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right) = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}.$$

A partir de esto último, afirmamos que $\pi_i^*(d\varphi_i) = d\Psi^i$. Basta probar que en cada punto $p \in U_1 \times \cdots \times U_n$ ambas 1-formas coinciden en una base de $T_p\mathbb{T}^n$. Tomando los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \Psi^i}\big|_p\}$, efectivamente es

$$\begin{aligned}
(\pi_i)_p^*(d\varphi_i) \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right) &= d_{p_i}\varphi_i \left(d_p\pi_i \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right) \right) = d_{p_i}\varphi_i \left(\delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i} \right) \\
&= \delta_{ij} d_{p_i}\varphi_i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i} \right) = \delta_{ij} \cdot \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij} = d_p\Psi^i \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right).
\end{aligned}$$

Como η es una 1-forma, para cada $i \in [\![n]\!]$ existe una función suave $g_i \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\eta = g_i \cdot d\varphi_i$, y se tiene[2] entonces que $\pi_i^*(\eta) = g_i \circ \pi_i \cdot \pi_i^*(d\varphi_i) = g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^i$. Reescribiendo, tenemos una expresión para ω en terminos de $d\Psi^1, \ldots, d\Psi^n$,

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta) = g_1 \circ \pi_1 \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge g_n \circ \pi_n \cdot d\Psi^n = \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge d\Psi^n.$$

Tanto Ψ como cada carta ψ_i tienen dominio denso cuyo complemento es de medida cero, así que en vista de las anteriores caracterizaciones de ω y η podemos calcular sus integrales como

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot dx_1 \cdots dx_n \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{S}^1} \eta = \int_{\mathbb{R}} g_i(x) dx.$$

para cada $i \in [\![n]\!]$.

Finalmente usando el teorema de Fubini, es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i(x_i) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x_1) dx_1 \right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x_n) dx_n \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n.
\end{aligned}$$

□

[1] Esta es una cuenta muy similar al ejercicio (1) de la práctica 1, que corresponde a la primera entrega.
[2] Estas propiedades son parte del ejercicio (8) de la práctica 4, que elegí resolver para la cuarta entrega.

Ejercicio 3. Muestre que cuando $n \geq 2$ el grado de toda función diferenciable $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{T}^n$ de la n-esfera al n-toro es nulo.

Demostración. Consideremos $\eta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ una forma de volumen. Definimos entonces

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$$

con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada.

Al ser $n \geq 2$ sabemos que $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$, y por lo tanto para todo $i \in [\![n]\!]$ resulta $[f^*\pi_i^*(\eta)] = 0 \in H^1(\mathbb{S}^n)$. Como $f^* : H^\bullet(\mathbb{T}^n) \to H^\bullet(\mathbb{S}^n)$ es un morfismo de álgebras, esto dice que

$$\begin{aligned}
[f^*(\omega)] &= f^*([\omega]) = f^*([\pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta)]) \\
&= f^*([\pi_1^*(\eta)]) \wedge \cdots \wedge f^*([\pi_1^*(\eta)]) \\
&= [0] \wedge \cdots \wedge [0] = [0].
\end{aligned}$$

Vemos así que $f^*(\omega)$ es exacta y por lo tanto, existe $\zeta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ tal que $f^*(\omega) = d\zeta$. Por el teorema de Stokes, esto implica que

$$\int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \int_{\mathbb{S}^n} d\zeta = \int_{\partial \mathbb{S}^n} i^*(\zeta) = 0$$

ya que $\mathbb{S}^n$ no tiene borde.

Del Lema 1 y la definición de grado, obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_{\mathbb{T}^n} \omega = \deg(f) \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n.$$

Al ser η una forma de volumen de $\mathbb{S}^1$, su integral es no nula, y consecuentemente es $\deg(f) = 0$. □

Teorema 2 (dualidad de Poincaré). Sea M una variedad conexa y orientable de dimensión n. Entonces, para cada $k \in [\![n]\!]$ se tiene que $H^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*$.

Ejercicio 4. Sea M una variedad compacta, orientable, conexa de dimensión n. Sabemos que la cohomología de De Rham de M tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M)$$

al que llamamos la *característica de Euler* de M.

(a) Si la dimensión n de M es impar, entonces $\chi(M) = 0$.

(b) Si la dimensión n de M es par y la de $H^{n/2}(M)$ es par, entonces $\chi(M)$ es un entero par.

Demostración. Notemos que como la variedad M es compacta, su cohomología a soporte compacto coincide con la cohomología de de Rham «a secas». Además, dado que la cohomología de una variedad compacta es finitamente generada, se tiene que

$$H^{n-i}(M) \simeq H^{n-i}(M)^* = H_c^{n-i}(M)^*$$

para cada $i \in [\![n]\!]_0$.

Por el Teorema 2, tenemos entonces que $H^i(M) \simeq H^{n-i}(M)$ para todo $i \in [\![n]\!]_0$. En particular, si notamos $\beta_i := \dim H^i(M)$ a la dimensión del i-ésimo grupo de cohomología, debe ser $\beta_i = \beta_{n-i}$. Ahora,

(a) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned}
2\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-i}\beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\beta_{i} \\
&= \chi(M)(1+(-1)^n) = \chi(M)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es $\chi(M) = 0$.

(b) De una forma similar, si n y es par y $\beta_{n/2}$ también, entonces

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=n/2+1}^{n}(-1)^i\beta_i \\
&= \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^{n-i}\beta_{n-i} \\
&= 2\sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} \equiv \beta_{n/2} \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la característica de Euler de M es par.

□

Ejercicio 5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_eG$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$.

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y sean $X_1, \dots, X_n$ los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$.

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares $c^k_{i,j}$ y $g_{i,j}$ los símbolos de Christoffel Γ^k_{ij} de la conexión de Levi-Civita de G con respecto a los campos $X_1, \ldots, X_n$, de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k.$$

(c) Sea $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada $(a, b), (c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro G es $e = (1, 0)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en $T_e G$ restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas que pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \le i,j \le n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$.

Demostración. content... □

Ejercicio 6. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión 4k.

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\beta : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$

tal que si ω y η son elementos cerrados de $\Omega^{2k}(M)$ entonces

$$\beta([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos la signatura de la forma bilineal σ la signatura de M.

(b) Determine la signatura de $\mathbb{S}^4$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, del toro T^4, del espacio proyectivo $P^2_{\mathbb{C}}$ y el producto $P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}$.

Demostración. content... □

Ejercicio 7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanniana inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que hay un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p \in M$ se tiene que (X_p, Y_p) es una base ortonormal positiva de T_pM y $Z_p = \|Z_p\| X_p$.

(b) Hay 1-formas $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ tales que $\alpha(X) = \beta(Y) = 1$ y $\alpha(Y) = \beta(X) = 0$. Más aún, existe una forma $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que

$$d\alpha = \eta \wedge \beta, \quad d\beta = -\eta \wedge \alpha.$$

La forma $\sigma = \alpha \wedge \beta$ no depende de la elección de Z, es una forma de volumen sobre M que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanniano sobre M.

(c) Existe una función diferenciable $K : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\eta = -K \cdot \sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo Z.

(d) Si M es compacta, entonces $\int_M K \cdot \sigma = 0$.

(e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre S^2 un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

Demostración. content... □