Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 2

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Además del ejercicio (9), elejí resolver los ejercicios () y (12). Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Ejercicio 9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y $\mathcal{A}$ su atlas maximal. Sea $TM = \bigcup_{p\in M} M_p$ y sea $\pi : TM \to M$ la función tal que $\pi(v) = p$ si $v \in M_p$. Para cada $(U, x) \in \mathcal{A}$, sea $TU = \bigcup_{p\in U} M_p \subset TM$ y $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ la función tal que

$$\overline{x}(v) = (x(\pi(v)), v(x^1), \dots, v(x^n))$$

cada vez que $v \in TU$.

(a) La función $\overline{x} : TU \to x(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa tal que

$$\overline{x}^{-1}(a, b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_{x^{-1}(a)}$$

para cada $a \in x(U)$.

(b) Si $(U, x), (V, y) \in \mathcal{A}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\overline{x}(TU \cap TV) = x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de $\mathbb{R}^{2n}$ y la biyección $\overline{x} \circ \overline{y}^{-1} : y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \to x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.

(c) El conjunto TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$, con atlas

$$\overline{\mathcal{A}} = \{(TU, \overline{x}) : (U, x) \in \mathcal{A}\}.$$

(d) Con respecto a esta estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \to M$ es diferenciable.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado,

(a) Sean $(a, b) = (a, b^1, \dots, b^n) \in x(U) \times \mathbb{R}^n$ y $h(a, b) := \sum_{i=1}^{n} b^i \frac{\partial}{\partial x_i}|_{x^{-1}(a)}$. Como esta última expresión es una combinación lineal de derivaciones en $x^{-1}(a)$, luego $h(a, b)$ es una derivación en $x^{-1}(a)$. Por lo tanto, $h(a, b) \in M_{x^{-1}(a)}$ y así $x\pi(h(a, b)) = xx^{-1}(a) = a$. Además, si

$\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la proyección en la j-ésima coordenada, luego para cada $j \in [\![n]\!]$ es $x^j = \pi_j x$ y entonces

$$h(a,b)(x^j) = \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^{-1}(a)}\right)(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^{-1}(a)}(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial(x^j x^{-1})}{\partial x_i}\Big|_a$$
$$= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i}\Big|_a = \sum_{i=1}^n b^i \delta_{ij} = b^j.$$

Concluimos así que $\overline{x}(h(a,b)) = (a,b) \in x(U) \times \mathbb{R}^n$. Recíprocamente si $v \in M_p$ con $p \in U$, luego

$$h(\overline{x}(v)) = h(x\pi(v), v(x^1), \dots, v(x^n)) = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{x^{-1}(x\pi(v))} =$$
$$= \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p.$$

Esto último coincide justamente la expresión de v en la base $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p\right\}_{i=1}^n$, lo que termina de probar que en efecto $h = \overline{x}^{\,-1}$.

(b) Notemos en primer lugar que como $U \cap V$ es abierto y x homeomorfismo, luego $x(U \cap V)$ es abierto, y así $x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es abierto en $\mathbb{R}^{2n}$. Por definición, es $TU \cap TV = T(U \cap V)$ y $\overline{x|_{U\cap V}} = \overline{x}|_{T(U\cap V)}$ así que como $x|_{U\cap V}$ es sobreyectiva (pues $x|_{U\cap V}$ es otra carta de M), por (b) en efecto es $\overline{x}(TU \cap TV) = x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$. Veamos ahora que $\overline{xy}^{-1}$ es un difeomorfismo. Como $\overline{x}$ e $\overline{y}$ son biyectivas, basta ver que las composiciones $\overline{xy}^{-1}$ y $\overline{yx}^{-1}$ son diferenciables. Por simetría (ya que podemos intercambiar los roles de x e y) basta probar una, lo hacemos para $\overline{xy}^{-1}$. Por un cálculo directo, si $(a,b) \in y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ y $\pi_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una vez más es la proyección en la j-ésima coordenada, luego para cada $j \in [\![n]\!]$ es $x^j y^{-1} = \pi_j x y^{-1} = (xy^{-1})^j$, y entonces

$$\overline{y}^{-1}(a,b)(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial y_i}\Big|_{y^{-1}(a)}(x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial x^j y^{-1}}{\partial x_i}\Big|_a$$
$$= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (xy^{-1})^j}{\partial x_i}\Big|_a = [\mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b]_j.$$

con $\mathbb{J}(xy^{-1})_a$ la matriz jacobiana de $xy^{-1} : y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \to x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ en el punto $a \in y(U \cap V)$. Por lo tanto, usando que por (a) es $\pi\overline{y}^{-1}(a,b) = y^{-1}(a)$, luego

$$\begin{aligned} x\overline{y}^{-1}(a,b) &= (x\pi(\overline{y}^{-1}(a,b)), \overline{y}^{-1}(a,b)(x^1), \dots, \overline{y}^{-1}(a,b)(x^n)) \\ &= (xy^{-1}(a), [\mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b]_1, \dots, [\mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b]_n) \\ &= (xy^{-1}(a), \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b). \end{aligned}$$

Como M es variedad diferenciable, luego xy^{-1} es suave y entonces $a \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a$ es suave. De ésto último tenemos que $(a,b) \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b$ es suave[1], por lo que concluimos que $\overline{xy}^{-1}$ es diferenciable.

[1] Esto es porque en cada componente $(a,b) \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b$ coincide con $(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (xy^{-1})^j}{\partial x_i}\Big|_a$ que es una suma de productos de proyectar a $\mathbb{J}(xy^{-1})$ o $(a,b) \mapsto b$ en alguna coordenada, y todas las funciones involucradas son suaves.

(c) En primer lugar, veamos que la colección $\mathcal{T} = \{TU : U \subset M \text{ abierto}\}$ es una topología que hace de TM una variedad topológica. Antes que nada, observemos que si $(U_i)_{i\in I}$ es una familia de abiertos de M, luego por definición es $T(\bigcup_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} TU_i$ y $T(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcap_{i\in I} TU_i$. En particular, como $M = \bigcup_{(x,U)\in\mathcal{A}} U$ luego $TM = \bigcup_{(x,U)\in\mathcal{A}} TU$ y además los conjuntos TU son cerrados por interesecciones finitas y uniones arbitrarias, ya que los abiertos de M lo son. Así,

(d) Sea $v \in TM$ con $p \in M$ tal que $v \in M_p$. Ahora, tomemos una carta (U, x) de M con $\pi(v) = p \in U$. Por (c) sabemos que $(TU, \overline{x})$ es una carta de v, y por definición de TU es también $\pi(TU) = U$. Por lo tanto, resta ver que *bajando* con estas cartas la función que resulta es diferenciable entre abiertos euclídeos. Es decir, basta con probar que la flecha punteada del siguiente diagrama conmutativo es diferenciable:

$$\begin{tikzcd}
TU \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\overline{x}"'] & U \arrow[d, "x"] \\
x(U) \times \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "x\circ\pi\circ\overline{x}^{\,-1}"'] & x(U)
\end{tikzcd}$$

Notemos que para todo $v \in TU$, el vector $x \circ \pi(v)$ coincide exactamente con las primeras n coordenadas de $\overline{x}(v)$ por definición de ésta última. Notando $\pi_1 : (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto p \in \mathbb{R}^n$ es entonces $x \circ \pi \circ \overline{x}^{\,-1} = \pi_1|_{x(U)\times\mathbb{R}^n} \circ \overline{x} \circ \overline{x}^{\,-1} = \pi_1|_{x(U)\times\mathbb{R}^n}$, y esta última es diferenciable ya que es la restricción al abierto $x(U) \times \mathbb{R}^n$ de la función diferenciable π_1.

□

Observación 1. Sea M una variedad diferenciable, $f \in C^\infty(M)$ una función constante y $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ una derivación en $p \in M$. Entonces, $v(f) = 0$. En efecto, si notamos $1 : M \to \mathbb{R}$ a la función constantemente 1, luego

$$v(1) = v(1 \cdot 1) \overset{(\text{Leibniz})}{=} 1(p)v(1) + 1(p)v(1) = 2v(1).$$

Esto implica $v(1) = 0$. Si ahora f vale constantemente $\mu \in \mathbb{R}$, entonces

$$v(f) = v(\mu \cdot 1) = \mu v(1) = 0$$

como afirmamos.

Lema 2. Sea $f : X \to Y$ una función con X un espacio topológico conexo. Si f es localmente constante, entonces es constante.

Demostración. Notemos que si $y \in \operatorname{im} f$, el conjunto $E_y := f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ es abierto: si $z \in E_y$, por hipótesis existe un abierto $U \ni z$ donde f es constante, y como $f(z) = y$ luego f es constantemente y en todo U. Por lo tanto, es $z \in U \subset E_y$. Es claro además que estos conjuntos son disjuntos, pues si $z \in E_y \cap E_{y'}$ luego $y = f(z) = y'$. Por último, como

$$X = \bigsqcup_{y\in\operatorname{im} f} E_y$$

es una escritura de X como unión de abiertos disjuntos no vacíos y X es conexo, necesariamente es $\#\operatorname{im} f = 1$. Esto dice que f es una función constante. □

Ejercicio 12. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

- Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.
- Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

Demostración. Notaremos $c_q : M \to N$ a la función que vale constantemente q. Definimos también $m := \dim M$ y $n := \dim N$. Supongamos en primer lugar que $f = c_q$. Sea $p \in M$ y veamos que f_{*p} es nula. Dada una derivación $v : C^\infty(M) \to \mathbb{R}$ en p y $g \in C^\infty(M)$, luego es

$$f_{*p}(v)(g) = v(- \circ f)(g) = v(gf) = v(gc_q) = v(c_{g(q)}) = 0,$$

con esta última igualdad dada por la Observación 1. Como la derivación $f_{*p}(v)$ se anula en toda función, tenemos que $f_{*p}(v) = 0$. Como f_{*p} se anula en toda derivación, luego $f_{*p} = 0$ y esto vale para cualquier punto $p \in M$. Supongamos ahora que M es conexa y veamos para este caso la afirmación recíproca. Sea entonces $p \in M$ y veamos que existe un entorno abierto de p donde f es constante. Consideramos ahora una carta (V, ψ) de N con $f(p) \in V$ y una carta (U, φ) de M con $p \in U \subset f^{-1}(V)$ y U conexo[2]. Luego, los *ganchos* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q^\varphi \right\}_{i=1}^n$ son una base de T_qM para cada $q \in U$. Por hipótesis, si $g \in C^\infty(N)$ y v es una derivación en q, luego $v(gf) = f_{*q}(v)(g) = 0$. En particular, tenemos entonces que

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_q^\varphi (gf) = \frac{\partial g f \varphi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{\varphi^{-1}(q)} = 0$$

para todo $i \in [\![m]\!]$ y $q \in U$. Es decir, la función diferenciable $gf\varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \to \mathbb{R}$ tiene gradiente nulo. Como U es conexo y φ es homeomorfismo, luego $\varphi^{-1}(U)$ es conexo. Como $gf\varphi^{-1}$ tiene gradiente nulo y dominio conexo luego es constante:

$$gf\varphi^{-1}(x) = \mu_g \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \varphi^{-1}(U)).$$

Equivalentemente, es $gf \equiv c_{\varphi(\mu_g)}$ en U para cada $g \in C^\infty(N)$. Ahora, para cada $i \in [\![n]\!]$ consideramos $\overline{\psi}^i \in C^\infty(N)$ tal que $\overline{\psi}^i|_V = \psi^i$. Así, existen constantes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\overline{\psi}^i f \equiv c_i$ en U y como $f(U) \subset V$ es entonces

$$c_i \equiv \overline{\psi}^i|_V \circ f\Big|_U^V = \psi^i \circ f\Big|_U^V$$

en U para cada $i \in [\![n]\!]$. Por lo tanto, es $\psi f\big|_U^V \equiv c$. Como ψ es homeomorfismo, luego $f\big|_U^V \equiv \psi(c)$. Así, vemos que f es constante en el abierto $U \ni p$. Como p era arbitrario, concluimos que f es localmente constante y como M es conexa, el Lema 2 nos dice que f resulta constante. □

[2]Como f es continua luego $f^{-1}(V)$ es abierto y entonces $f^{-1}(V) \cap U$ es un abierto de M que contiene a p. Luego $f^{-1}(V) \cap U$ es un abierto en U, y como éste es homeomorfo a un abierto euclídeo, luego $f^{-1}(V) \cap U$ lo es también. En particular tenemos un entorno conexo $\tilde{U}$ de p contenido en $f^{-1}(V) \cap U$. Luego la restricción de la carta a $\tilde{U}$ es una carta que cumple lo que pedimos. Por lo tanto, podemos sin pérdida de generalidad asumir directamente a U conexo con $U \subset f^{-1}(V)$.