Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre – 2019

Segundo Parcial

Guido Arnone

Sobre la Resolución

Con la intención de hacer más legible el examen, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio. También incluyo (sin demostración) los resultados vistos en clase que utilicé.

Ejercicio 1. Sea M una variedad riemanniana, sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable $\operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ y uno solo con la propiedad de que para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle = df(Y).$$

@A Encuentre una expresión en coordenadas para el campo $\operatorname{grad}(f)$.

(b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f)\rangle.$$

(c) Muestre que si el campo $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle = 0$. Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ son geodésicas.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Notemos en primer lugar que la función f induce una 1-forma df que en cada punto $p \in M$ vale $d_pf : v \in T_pM \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$, el diferencial de f bajo la identificación $T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

Fijemos ahora $p \in M$. Como $d_pf \in (T_pM)^*$ es un elemento del espacio dual de T_pM, y este último es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita equipado con un producto interno (inducido por la métrica de M), el teorema de representación de Riesz nos asegura que existe un único vector tangente $v_p \in T_pM$ tal que

$$\langle v_p, w\rangle = d_pf(w) = w(f) \quad (\forall w \in T_pM). \tag{1}$$

Si definimos $\text{grad}_p(f) := \nu_p$ para cada $p \in M$, reescribiendo la anterior igualdad es

$$\langle \text{grad}(f)_p, w \rangle = d_p f(w) \quad (\forall w \in T_p M).$$

y éste es el único campo con tal propiedad. En particular, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces para cada $p \in M$ es

$$(\langle \text{grad}(f), Y \rangle)_p = \langle \text{grad}(f)_p, Y_p \rangle = d_p f(Y_p) = (df(Y))_p$$

y por lo tanto $\langle \text{grad}(f), Y \rangle \equiv df(Y)$.

Para ver la unicidad, recordemos que para cada $p \in M$ y $\nu \in T_p M$ existe $Y^\nu \in \mathfrak{X}(M)$ con $Y^\nu_p = \nu$. Efectivamente, podemos tomar una carta (U, φ) con $U \ni p$ de forma que existan coeficientes $a_1, \ldots, a_n$ tales que $\nu = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$ y luego tomar el campo

$$Y^\nu = h \cdot \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

con $h \in C^\infty(M)$ una función *bump* (tal que valga 1 en un entorno abierto $V \subset U$ de p y 0 en un abierto $W \supset U^c$).

A partir de esto, podemos concluir que cualquier otro campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ que cumpla $\langle Z, Y \rangle \equiv df(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ deberá satisfacer

$$\langle Z_p, \nu \rangle = \langle Z_p, Y^\nu_p \rangle = d_p f(Y^\nu_p) = \nu(f)$$

para todo $p \in M$ y $\nu \in T_p M$. La unicidad de (1) nos dice entonces que $Z_p = \nu_p = \text{grad}_p(f)$ en todo punto $p \in M$.

Para terminar, veamos una expresión de $\text{grad}_p(f)$ en coordenadas. De aquí se tendrá que el gradiente depende localmente de funciones suaves, y es por lo tanto diferenciable.

Una vez más, fijamos $p \in M$ y consideramos (φ, U) una carta de M tal que $U \ni p$. Como los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^1}|_p, \ldots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}|_p\}$ son una base de $T_p M$, sabemos que existen únicos coeficientes $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$\nu_p = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Si ahora tomamos el producto interno de ν_p con $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$, es

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p(f) = \left\langle \nu_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^n c_j \cdot (g_p)_{ji}$$

para cada $j \in [\![n]\!]$, y notando $c = (c_1, \ldots, c_n)$ esto es equivalente a

$$c \cdot g_p = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\Big|_p, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\Big|_p \right).$$

Por lo tanto debe ser $c = (\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\big|_p, \ldots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\big|_p)(g_p)^{-1}$ y

$$c_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij}.$$

Volviendo a la expresión original, obtenemos finalmente

$$\operatorname{grad}_p(f) = v_p = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij}\right)\cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p = \sum_{i,j} (g_p)^{ij} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Esto prueba que para todo $p \in U$ se tiene (contrayendo indices) que

$$\operatorname{grad}(f) = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Como afirmamos, esto prueba además que $\operatorname{grad}(f)$ es diferenciable, ya que para cada punto tenemos un abierto donde este es un campo suave.

(b) Como ∇ es la conexión de Levi-Civita, sabemos (por construcción) que esta es compactible con la métrica y libre de torsion. Concretamente, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2}$$

y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{3}$$

Sean ahora $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos en M. Por (2) y (3) sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle &= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X Y\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y] + \nabla_Y X\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_Y X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y]\rangle \\
&= X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - (Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle - \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle) - \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \operatorname{grad}(f), X\rangle + X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle - \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y]\rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que $\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f)\rangle$ si y solo si

$$X\langle \operatorname{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \operatorname{grad}(f), [X,Y]\rangle$$

o lo que es lo mismo,

$$X df(Y) - Y df(X) = df([X,Y]).$$

Para terminar, observemos que esto ocurre siempre, pues

$$X df(Y) - Y df(X) = XY(f) - YX(f) = (XY - YX)(f) = [X,Y](f) = df([X,Y]).$$

(c) Supogamos que $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante. Entonces $\|\operatorname{grad}(f)\|^2 = \langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle$ debe valer constantemente c para cierto $c \in \mathbb{R}$. Si ahora tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, para todo $p \in M$ debe ser

$$(X\|\operatorname{grad}(f)\|)_p = X_p(c) = 0,$$

y por lo tanto $X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle \equiv 0$.

Usando la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita, de la anterior igualdad se desprende que

$$\begin{aligned} 0 &= X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle + \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X \operatorname{grad}(f)\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle \end{aligned}$$

y por (b) es

$$\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = 0.$$

Por último, si $\gamma : I \to M$ es una curva integral de $\operatorname{grad}(f)$, entonces es $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0$ pues

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\|^2 &= \langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}, \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}\rangle \\ &= (\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f)\rangle)_{\gamma(t)} = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Vemos así que las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ resultan geodésicas.

□

Teorema 1. Sea M una variedad orientada, conexa y compacta de dimensión n. Entonces es $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$ via el isomorfismo

$$[\omega] \in H^n(M) \longmapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2. Sean M y N variedades orientadas compactas y conexas de dimensión n. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo que preserva (resp. invierte) la orientación y $\omega \in \Omega^n(N)$ es una n-forma, entonces $\int_M f^*(\omega) = \int_N \omega$ (resp. $-\int_N \omega$).

Lema 3. Sean M y N dos variedades y $f : M \to N$ una función suave. Si $q \in N$ es un valor regular y $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$, existe un entorno abierto $W \subset N$ de q y abiertos conexos disjuntos $U_1, \dots, U_k$ tales que:

(i) para cada $i \in [\![k]\!]$ es $U_i \ni p_i$,

(ii) la preimagen de W por f es $f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$, y

(iii) para cada $i \in [\![k]\!]$ la (co)restricción $f|_{U_i} : U_i \to W$ es un difeomorfismo.

Demostración. En primer lugar, como es $\dim M = \dim N$ sabemos que en cada punto p_i el diferencial de f es un isomorfimo. Por el teorema de la función inversa, existen entonces abiertos $\widetilde{V}_i \ni p_i$ para cada i tales que $f(\widetilde{V}_i)$ es abierto y $f|_{\widetilde{V}_i} : \widetilde{V}_i \to f(\widetilde{V}_i)$ un difeomorfismo. Achicando los abiertos si es necesario (usando que M es Hausdorff y localmente conexa) podemos suponer que son conexos y disjuntos dos a dos.

Notando $\widetilde{W} = \bigcap_{i=1}^n f(\widetilde{V}_i)$, definimos $\widetilde{U}_i := \widetilde{V}_i \cap f^{-1}(\widetilde{W})$. Ahora, como M es compacta y N es Hausdorff (pues es una variedad) sabemos que f es cerrada. Por lo tanto $f\left((\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i)^c\right)$ es cerrado y podemos definir $W := \widetilde{W} \setminus f\left((\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i)^c\right)$ y $U_i := \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W)$.

De aquí se ve que $f^{-1}(W) = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_k$ ya que es

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\widetilde{W} \setminus f\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right)\right) = \left(f|^{\widetilde{W}}\right)^{-1}\left(f\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right)^c\right)$$
$$= \left(f|^{\widetilde{W}}\right)^{-1}\left(f|_{\widetilde{W}}\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right)\right)^c \subset \left(\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i\right)^{cc} = \bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i$$

de forma que

$$f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W) \cap \bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i = \bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^n U_i,$$

y la otra contención está dada por la definición de los abiertos $(U_i)_{i \in [\![n]\!]}$.

Por último, para ver que que cada (co)restricción $f|_{U_i}^{W}$ es un difeomorfismo basta ver que $f(U_i) = W$ pues ya sabemos que la (co)restricción es suave e inyectiva al serlo $f|_{\widetilde{V}_i}$. Por como definimos U_i, basta ver que $W \subset f(U_i)$.

En efecto, puesto que es $W \subset \widetilde{W} \subset f(\widetilde{V}_i)$, si $x \in W$ entonces existe $v_i \in \widetilde{V}_i$ con $f(v_i) = x$, y dado que además es $v_i \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(\widetilde{W})$, se obtiene que

$$v_i \in \widetilde{V}_i \cap f^{-1}(\widetilde{W}) = \widetilde{U}_i.$$

En consecuencia debe ser $v_i \in \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W) = U_i$, y así $x \in f(U_i)$.

$\square$

Ejercicio 2. Sean M y N dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Muestre que hay un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para toda forma $\omega \in \Omega^n(N)$ se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos *grado* de f y lo escribimos $\deg(f)$.

(b) Supongamos que $q \in N$ es valor regular de f, de manera que, en particular, el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito. Si $p \in f^{-1}(q)$ la diferencial es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$sgn_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sgn_f(p).$$

Demostración. Observemos en primer lugar una consecuencia del Teorema 1 que usaremos a continuación: este nos dice que en una variedad orientada conexa y compacta, dos n-formas son cohomólogas si y sólo si sus integrales sobre la variedad coinciden.

(a) En vista del Teorema 1, sabemos que existe una n-forma ω de N tal que $\int_N \omega = 1$. De existir, el grado debe cumplir que $\int_M f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_N \omega = \deg(f)$, por lo que definimos

$$\deg(f) := \int_M f^*(\omega).$$

Además $\deg(f)$ está bien definido pues no depende de la forma que elegimos: si η es otra n-forma de N que integra 1, entonces es $[\eta] = [\omega]$ y por tanto $[f^*(\omega)] = [f^*(\eta)]$, de lo que resulta $\int_M f^*(\omega) = \int_M f^*(\eta)$.

Veamos ahora que este número satisface la propiedad deseada. Consideremos una forma n-forma abritraria η de N. Una vez más por el Teorema 1, del isomorfismo $H^n(N) \simeq \mathbb{R}$ sabemos que existe $c \in \mathbb{R}$ de forma que $[\eta] = c[\omega] = [c\omega]$. En consecuencia existe $\kappa \in \Omega^{n-1}(N)$ tal que $\eta - c\omega = d\kappa$ y usando el teorema de Stokes[1] es

$$\int_N \eta = \int_N c \cdot \omega + d\kappa = c \cdot \int_N \omega + \int_N d\kappa = c \cdot \int_N \omega + \int_{\partial N} i^*(\kappa) = c$$

ya que N no tiene borde.

Por otro lado, como

$$f^*(\eta) = f^*(c \cdot \omega + d\kappa) = c \cdot f^*(\omega) + f^*(d\kappa) = c \cdot f^*(\omega) + df^*(\kappa)$$

y M tampoco tiene borde, volvemos a apelar al teorema de Stokes para obtener

$$\begin{aligned}\int_M f^*(\eta) &= c \cdot \int_M f^*(\omega) + \int_M df^*(\kappa) = c \cdot \deg(f) + \int_{\partial M} i^*(f^*(\kappa)) \\ &= c \cdot \deg(f) = \deg(f) \cdot \int_N \eta\end{aligned}$$

como buscábamos.

(b) Será de utilidad la siguiente observación: para cualquier abierto $U \subset N$, existe una n-forma ω de N tal que $1 = \int_N \omega = \int_U \omega$.

Para construirla, consideramos primero η una forma de volumen, una carta (V, φ) tal que $V \subset U$ y una función *bump* $h \in C^\infty$ no negativa que satisfaga $\operatorname{sop} h \subset V$. De esta forma, en el abierto V la forma η tiene una escritura en coordenadas $\eta = g \cdot d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$ con g nunca nula.

Definimos ahora $\widetilde{\omega} = h\eta$. Como $\operatorname{sop}(\widetilde{\omega}) \subset \operatorname{sop} h \subset U$, es $\int_N \widetilde{\omega} = \int_U \widetilde{\omega}$. Además, en V la forma $\widetilde{\omega}$ tiene una expresión de la forma $hg \cdot d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$ así que

$$\int_U \widetilde{\omega} = \int_V hg \, d\varphi^i \wedge \cdots \wedge d\varphi^n = \int_{\varphi(V)} (hg) \circ \varphi^{-1} \, dx_1 \dots dx_n = \int_{\operatorname{sop} h} (hg) \circ \varphi^{-1} \, dx_1 \dots dx_n > 0$$

[1] También podríamos apelar de vuelta al Teorema 1. De hecho, una pequeña modificación de la cuenta que sigue justifica que la aplicación del teorema está bien definida.

pues $(hg) \circ \varphi^{-1}$ es continua, nunca nula en sop h y no cambia de signo en $V \supset$ sop h. Basta tomar entonces $\omega := (\int_N \widetilde{\omega})^{-1} \cdot \widetilde{\omega}$.

Ahora sí, analicemos primero qué ocurre cuando $q \notin \operatorname{im} f$. Como M es compacta y N es Hausdorff (pues es una variedad), la función f es cerrada. Por lo tanto la imagen de f es un cerrado, y en consecuencia existe un abierto $U \ni q$ contenido en $f(M)^c$.

Podemos tomar entonces una n-forma ω tal que $\operatorname{sop} \omega \subset U$ y $\int_N \omega = 1$. Como $\operatorname{sop} f^*(\omega) \subset f^{-1}(\operatorname{sop} \omega) = \emptyset$, es

$$\deg(f) = \deg(f) \int_N \omega = \int_M f^*(\omega) = 0$$

lo que nos dice que

$$\deg(f) = 0 = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sgn_f(p).$$

Ahora sí, supongamos que $f^{-1}(q) = \{p_1, \ldots, p_k\} \subset M$ con $n \geq 1$. Usando el Lema 3, tomemos un abierto W de N y abiertos conexos disjuntos $U_i \ni p_i$ tales que $f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$ y cada (co)restricción $f|_{U_i}^W$ es un difeomorfismo.

En particular, como $sgn_f(p)$ varía suavemente con p y tiene codominio discreto, en cada abierto conexo U_i debe ser constante. Es decir, para cada $i \in [\![n]\!]$ la función f preserva o invierte la orientación en *todo* el abierto U_i.

Una vez más, podemos considerar una n-forma ω tal que $\operatorname{sop} \omega \subset W$ y $1 = \int_W \omega = \int_M \omega$. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned} \deg(f) &= \int_M f^*(\omega) = \int_{f^{-1}(\operatorname{sop} \omega)} f^*(\omega) = \int_{f^{-1}(W)} f^*(\omega) \\ &= \int_{\bigsqcup_{i=1}^n U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*(\omega). \end{aligned}$$

Usando el Teorema 2 para cada difeomorfismo $f|_{U_i}^W : U_i \to W$ y recordando que sgn_f es constante en U_i, es

$$\int_{U_i} f^*(\omega) = sgn_f(p_i) \cdot \int_W \omega = sgn_f(p_i).$$

Se obtiene así

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k sgn_f(p_i).$$

$\square$

Lema 4. Sea $\eta \in \mathbb{S}^1$ una 1-forma y $n \in \mathbb{N}$. Si definimos $\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$ con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada, entonces

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n .$$

Demostración. Dadas proyecciones estereográficas $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{S}^1$, tenemos una carta

$$\Psi := \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}^n$$

de $\mathbb{T}^n$ que satisface $\pi_i(\Psi) = \varphi_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$. Más aún[2], para cada $i \in [\![n]\!]$ es

$$d_p\pi_i \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right) = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}.$$

A partir de esto último, afirmamos que $\pi_i^*(d\varphi_i) = d\Psi^i$. Basta probar que en cada punto $p \in U_1 \times \cdots \times U_n$ ambas 1-formas coinciden en una base de $T_p\mathbb{T}^n$. Tomando los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \Psi^i}\big|_p\}$, efectivamente es

$$\begin{aligned}
(\pi_i)_p^*(d\varphi_i) \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right) &= d_{p_i}\varphi_i \left(d_p\pi_i \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right) \right) = d_{p_i}\varphi_i \left(\delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i} \right) \\
&= \delta_{ij} d_{p_i}\varphi_i \left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i} \right) = \delta_{ij} \cdot \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij} = d_p\Psi^i \left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p \right).
\end{aligned}$$

Como η es una 1-forma, para cada $i \in [\![n]\!]$ existe una función suave $g_i \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\eta = g_i \cdot d\varphi_i$, y se tiene[3] entonces que $\pi_i^*(\eta) = g_i \circ \pi_i \cdot \pi_i^*(d\varphi_i) = g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^i$. Reescribiendo, tenemos una expresión para ω en terminos de $d\Psi^1, \ldots, d\Psi^n$,

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta) = g_1 \circ \pi_1 \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge g_n \circ \pi_n \cdot d\Psi^n = \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge d\Psi^n.$$

Tanto Ψ como cada carta ψ_i tienen dominio denso cuyo complemento es de medida cero, así que en vista de las anteriores caracterizaciones de ω y η podemos calcular sus integrales como

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot dx_1 \cdots dx_n \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{S}^1} \eta = \int_{\mathbb{R}} g_i(x) dx$$

para cada $i \in [\![n]\!]$.

Finalmente usando el teorema de Fubini, es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i(x_1, \ldots, x_n) \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i(x_i) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x_1) dx_1 \right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x_n) dx_n \right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n .
\end{aligned}$$

$\square$

[2] Esta es una cuenta muy similar al ejercicio (1) de la práctica 1, que corresponde a la primera entrega.

[3] Estas propiedades son parte del ejercicio (8) de la práctica 4, que elegí resolver para la cuarta entrega.

Ejercicio 3. Muestre que cuando $n \geq 2$ el grado de toda función diferenciable $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{T}^n$ de la n-esfera al n-toro es nulo.

Demostración. Consideremos $\eta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ una forma de volumen. Definimos entonces

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$$

con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada.

Al ser $n \geq 2$ sabemos que $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$, y por lo tanto para todo $i \in [\![n]\!]$ resulta $[f^*\pi_i^*(\eta)] = 0 \in H^1(\mathbb{S}^n)$. Como $f^* : H^\bullet(\mathbb{T}^n) \to H^\bullet(\mathbb{S}^n)$ es un morfismo de álgebras, esto dice que

$$\begin{aligned}
[f^*(\omega)] &= f^*([\omega]) = f^*([\pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta)]) \\
&= f^*([\pi_1^*(\eta)]) \wedge \cdots \wedge f^*([\pi_1^*(\eta)]) \\
&= [0] \wedge \cdots \wedge [0] = [0].
\end{aligned}$$

Vemos así que $f^*(\omega)$ es exacta y por lo tanto, existe $\zeta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ tal que $f^*(\omega) = d\zeta$. Por el teorema de Stokes, esto implica que

$$\int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \int_{\mathbb{S}^n} d\zeta = \int_{\partial \mathbb{S}^n} i^*(\zeta) = 0$$

ya que $\mathbb{S}^n$ no tiene borde.

Del Lema 4 y la definición de grado, obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_{\mathbb{T}^n} \omega = \deg(f) \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n .$$

Al ser η una forma de volumen de $\mathbb{S}^1$, su integral es no nula, y consecuentemente es $\deg(f) = 0$. □

Teorema 5 (dualidad de Poincaré). Sea M una variedad conexa y orientable de dimensión n. Entonces, para cada $k \in [\![n]\!]$ se tiene que $H_c^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$ y el isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned}
p : H_c^k(M) &\longrightarrow H^{n-k}(M)^* \\
[\omega] &\mapsto \left([\eta] \mapsto (-1)^{|\omega|} \int_M \omega \wedge \eta \right)
\end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea M una variedad compacta, orientable, conexa de dimensión n. Sabemos que la cohomología de De Rham de M tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M)$$

al que llamamos la *característica de Euler* de M.

(a) Si la dimensión n de M es impar, entonces $\chi(M) = 0$.

(b) Si la dimensión n de M es par y la de $H^{n/2}(M)$ es par, entonces $\chi(M)$ es un entero par.

Demostración. Notemos que como la variedad M es compacta, su cohomología a soporte compacto coincide con la cohomología de de Rham «a secas». Además, dado que la cohomología de una variedad compacta es finitamente generada, por el Teorema 5 se tiene que

$$H^i(M) = H^i_c(M) \simeq H^{n-i}(M)^* \simeq H^{n-i}(M)$$

para cada $i \in [\![n]\!]_0$. En particular, si notamos $\beta_i := \dim H^i(M)$ a la dimensión del i-ésimo grupo de cohomología, debe ser $\beta_i = \beta_{n-i}$. Ahora,

(a) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned}
2\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i + \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i + \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^{-i} \beta_{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i + (-1)^n \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i \\
&= \chi(M)(1 + (-1)^n) = \chi(M) \cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es $\chi(M) = 0$.

(b) De una forma similar, si n y es par y $\beta_{n/2}$ también, entonces

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \beta_i = \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=n/2+1}^{n} (-1)^i \beta_i \\
&= \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^{n-i} \beta_{n-i} \\
&= 2 \sum_{i=0}^{n/2-1} (-1)^i \beta_i + \beta_{n/2} \equiv \beta_{n/2} \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la característica de Euler de M es par.

□

Teorema 6 (fórmula de Koszul). Si (M, g) es una variedad riemanniana y ∇ su conexión de Levi-Civita, entonces para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ es

$$2\langle \nabla_X Y, Z\rangle = X\langle Y, Z\rangle + Y\langle Z, X\rangle - Z\langle X, Y\rangle - \langle Y, [X, Z]\rangle - \langle X, [Y, Z]\rangle + \langle [X, Y], Z\rangle.$$

Ejercicio 5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_e G$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$.

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y sean $X_1, \ldots, X_n$ los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$.

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares $c_{i,j}^k$ y $g_{i,j}$ los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita de G con respecto a los campos $X_1, \ldots, X_n$, de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

(c) Sea $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada $(a, b), (c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro G es $e = (1, 0)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en $T_e G$ restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas que pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i,j \leq n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Definimos

$$g_h(v, w) := g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) \in \mathbb{R}$$

para cada $h \in G$ y $v, w \in T_h G$, que es suave pues es composición de funciones suaves.

Probamos primero que g es una métrica, es decir, que g_h es un producto interno en $T_h G$ para cada punto h de la variedad. Fijamos entonces $h \in G$. Como el diferencial $d_h L_{h^{-1}}$ es una función lineal, así lo es $d_h L_{h^{-1}} \times d_h L_{h^{-1}} : T_h G \times T_h G \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Al ser g_e un producto interno, se sigue que $g_h = g_e \circ (d_h L_{h^{-1}} \times d_h L_{h^{-1}})$ es bilineal, y más aún es simétrica pues

$$g_h(v, w) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(w), d_h L_{h^{-1}}(v)) = g_h(w, v).$$

Por último, g_h es definida positiva: si $v \in T_h G$, entonces

$$g_h(v, v) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(v)) > 0$$

y como $d_h L_{h^{-1}}$ es un isomorfismo lineal,

$$g_h(v, v) = 0 \iff g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(v)) = 0 \iff d_h L_{h^{-1}}(v) = 0 \iff v = 0.$$

Esto prueba la existencia de una tal métrica. Si $\widetilde{g}$ es otra métrica invariante a izquierda que vale g_e en la identidad, entonces como

$$d_e L_h \circ d_h L_{h^{-1}} = d_h(L_h \circ L_{h^{-1}}) = d_h(id_G) = id_{T_h G}$$

por invariancia es

$$\begin{aligned} \widetilde{g}_h(v, w) &= \widetilde{g}_{he}(d_e L_h(d_h L_{h^{-1}}(v)), d_e L_h(d_h L_{h^{-1}}(w))) = \widetilde{g}_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) \\ &= g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) = g_h(v, w), \end{aligned}$$

lo que prueba la unicidad.

(b) Recordemos que por definición es $(X_i)_h = d_e L_h(v_i)$ para cada $i \in [\![n]\!]$ y $h \in G$. Por lo tanto, usando la invariancia a izquierda de la métrica es

$$(g(X_i, X_j))_h = g_h((X_i)_h, (X_j)_h) = g_h(d_e L_h(v_i)), d_e L_h(v_j)) = g_e(v_i, v_j)$$

para todo $h \in G$. Esto muestra que $\langle X_i, X_j \rangle := g(X_i, X_j)$ vale constantemente $g_{i,j} := g_e(v_i, v_j)$.

En particular, sabemos que para todo campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ es $Z\langle X_i, X_j \rangle \equiv 0$. Usando esto y la fórmula de Koszul, se obtiene que

$$\begin{aligned} 2\langle \nabla_{X_i} X_j, X_s \rangle &= \langle X_s, [X_i, X_j] \rangle - \langle X_j, [X_i, X_s] \rangle - \langle X_i, [X_j, X_s] \rangle \\ &= \sum_l \langle X_s, c_{i,j}^l X_l \rangle - \sum_l \langle X_j, c_{i,s}^l X_l \rangle - \sum_l \langle X_i, c_{j,s}^l X_l \rangle \\ &= \sum_l c_{i,j}^l g_{s,l} - \sum_l c_{i,s}^l g_{j,l} - \sum_l c_{j,s}^l g_{i,l}. \end{aligned}$$

Más compactamente, notando $(\nu_{i,j})_s := \langle \nabla_{X_i} X_j, X_s \rangle$ y contrayendo índices es

$$(\nu_{i,j})_s = \frac{1}{2}\left(c^l_{i,j} g_{s,l} - c^l_{i,s} g_{j,l} - c^l_{j,s} g_{i,l}\right).$$

Por otro lado si $\{\Gamma^k_{ij}\}_{i,j,k}$ son las funciones[4] que satisfacen $\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma^k_{ij} X_k$ en todo punto, haciendo el producto interno contra X_s en ambos lados debe ser

$$(\nu_{ij})_s = \sum_k \Gamma^k_{ij} g_{k,s}$$

o dicho de otra forma,

$$\frac{1}{2}\left(c^l_{i,j} g_{s,l} - c^l_{i,s} g_{j,l} - c^l_{j,s} g_{i,l}\right) = \Gamma^k_{i,j} g_{k,s}.$$

En conclusión, los símbolos de Christoffel se describen en términos las coordenadas de los productos internos y corchetes de Lie de los campos como

$$\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{k,s}\left(c^l_{i,j} g_{s,l} - c^l_{i,s} g_{j,l} - c^l_{j,s} g_{i,l}\right).$$

(c) Como la métrica en $\mathfrak{g}$ extiende el producto interno en la identidad dado por el usual de $\mathbb{R}^2$, es $g_{i,j} = \delta_{ij}$. Por otro lado, si fijamos la base ortonormal de $T_e G$ que corresponde a los *ganchos* $\mathcal{B} = \{\partial_x|_e, \partial_y|_e\}$, veamos como quedan los campos (que notamos X e Y respectivamente) que extienden a estos vectores de forma G-invariante.

Fijado un punto (x, y), la multiplicación por esta a izquierda es

$$L_{(x,y)}(z, w) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

y por lo tanto su diferencial se identifica con la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ que se corresponde con multiplicación por $x \cdot I_2 \in M_2\mathbb{R}$. Esto nos dice que $X \equiv x\partial_x$ e $Y \equiv x\partial_y$.

Para conocer los coeficientes c^k_{ij}, calculamos los corchetes de Lie de X e Y. Ya sabemos que $[X, X] = [Y, Y] = 0$ y por antisimetría es $-[Y, X] = [X, Y]$, así que calculamos este último,

$$\begin{aligned}
[x\partial_x, x\partial_y] &= \partial_x(x)\partial_y + x[\partial_x, x\partial_y] \\
&= \partial_x(x)\partial_y - x[x\partial_y, \partial_x] = \partial_x(x)\partial_y - x\left(\partial_y(x)\partial_x + x[\partial_y, \partial_x]\right) \\
&= \partial_x(x)\partial_y - x\partial_y(x)\partial_x = \partial_y.
\end{aligned}$$

[4] En principio, estas funciones existen por el solo hecho de que los campos $X_1, \ldots, X_n$ en cada punto $h \in G$ dan una base de $T_h G$. Sin embargo, veremos *a posteriori* que son suaves.

Por lo tanto se tiene[5] $c_{11}^k = c_{22}^k = 0$ para todo k y

$$c_{12} = (0, 1/x), \quad c_{21} = (0, -1/x).$$

Volviendo a la expresión de los simbolos de Christoffel, como $g_{i,j} = \delta_{i,j}$ queda

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}(c_{ij}^k - c_{ik}^j - c_{jk}^i).$$

Concretamente,

$$\begin{aligned} \Gamma_{11} &= (0,0), \quad \Gamma_{22} = (1/x, 0), \text{ y} \\ \Gamma_{12} &= (0,0), \quad \Gamma_{21} = (0, -1/x). \end{aligned}$$

Ahora sí, calculo todas las geodésicas posibles alrededor de $e \in G$. Como en este caso la carta global es la identidad, aplicando la ecuación de las geodésicas

$$(x^k)'' + \frac{1}{2}(\Gamma_{ij}^k + \Gamma_{ji}^k)(x^i)'(x^j)' = 0$$

a una curva $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ resulta

$$\begin{cases} x \cdot x'' = -(y')^2 \\ x \cdot y'' = x' \cdot y' \end{cases}$$

En particular, las curvas que cumplen $x'' = -a^2 x$ e $y' = ax$ satisfacen la ecuación, por lo que las curvas

$$\gamma(t) = (c\sin(at) + d\cos(at), d\sin(at) - c\cos(at) + b)$$

son soluciones. Además pedimos $(d, b-c) = \gamma(0) = e = (1,0)$ por lo que debe ser $d = 1, c = b$. Por otro lado, es $\gamma'(0) = (ac, a)$. Por unicidad local, tenemos finalmente que la geodésica que pasa por e y tiene velocidad $\lambda_1 \partial_x + \lambda_2 \partial_y$ es

$$\gamma_{\lambda_1,\lambda_2}(t) = (\cos(\lambda_2 t), \sin(\lambda_2 t)) + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}(\sin(\lambda_2 t), -\cos(\lambda_2 t) + 1)$$

si $\lambda_2 \neq 0$ y $\gamma_{\lambda_1}(t) = (\lambda_1 t + 1, 0)$ en caso contrario.

Me faltó calcular las coordenadas del tensor de curvatura y la curvatura escalar.

$\square$

---

[5] Notar que $(x,y) \mapsto 1/x$ es suave pues el abierto $G \subset \mathbb{R}^2$ no contiene ningún punto de primera coordenada nula.

Lema 7. Sea M una variedad de dimensión n y $\omega, \eta \in \Omega^\bullet(M)$. Si ω y η son cerradas y ω es exacta, entonces $\omega \wedge \eta$ es exacta. Más aún, si $\omega = d\kappa$ entonces es $\omega \wedge \eta = d((-1)^{|\omega|}\omega \wedge \kappa)$.

Demostración. Por un cálculo directo, es

$$\begin{aligned} d((-1)^{|\omega|}\omega \wedge \kappa) &= (-1)^{|\omega|} d\omega \wedge \kappa + (-1)^{|\omega|}(-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\kappa \\ &= 0 \wedge \kappa + (-1)^{2|\omega|}\omega \wedge \eta = \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

□

Teorema 8 (fórmula de Künneth). Sean N y M dos variedades compactas, conexas y orientables. Entonces, para cada $n \in N$ tenemos un isomorfismo

$$H^n(M \times N) \simeq \bigoplus_{r+s=n} H^r(M) \otimes H^s(N)$$

inducido por las funciones bilineales

$$([\omega], [\eta]) \in H^r(M) \times H^s(N) \mapsto [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\eta)] \in H^n(M \times N)$$

para cada $r, s \in \mathbb{N}_0$ tales que $r + s = n$.

Ejercicio 6. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión $4k$.

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\beta : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$

tal que si ω y η son elementos cerrados de $\Omega^{2k}(M)$ entonces

$$\beta([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos la signatura de la forma bilineal β la signatura de M.

(b) Determine la signatura de $\mathbb{S}^4$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, del toro T^4, del espacio proyectivo $P^2_{\mathbb{C}}$ y el producto $P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}$.

Demostración. Resuelvo cada inciso por separado.

(a) Como la aplicación $(\omega, \eta) \in \Omega(M)^{2k} \times \Omega(M)^{2k} \mapsto \omega \wedge \eta \in \Omega(M)^{4k}$ es bilineal, y la integral (que es existe y es finita para toda forma pues M es compacta y orientable) es lineal, tenemos definida una aplicación

$$b : (\omega, \eta) \in \Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta.$$

Si ω y η son dos $2k$-formas cerradas y α, β son dos $(2k-1)$-formas cualesquiera, se tiene que

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge d\beta + d\alpha \wedge \eta + d\alpha \wedge d\beta.$$

Como todos los términos del lado derecho excepto el primero son el wedge de dos formas cerradas con una de ellas exacta, por el Lema 7 en definitiva existe $\kappa \in \Omega^{4k-1}(M)$ tal que

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + d\kappa.$$

Ahora, aplicando b y usando el teorema de Stokes es

$$b(\omega + d\alpha, \eta + d\beta) = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d\kappa = \int_M \omega \wedge \eta + \overbrace{\int_{\partial M} i^*(\kappa)}^{=0} = b(\omega, \eta)$$

ya que M no tiene borde.

Esto termina de mostrar que la restricción de b a las formas cerradas en ambas coordenadas pasa al cociente por la identificacion de formas cohomólogas, induciendo así una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\beta : ([\omega], [\eta]) \in H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta \in \mathbb{R}.$$

Veamos ahora que tanto b como β son simétricas pues la operación wedge lo es en $\Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M)$. Si $\sigma \in \mathbb{S}_{4k}$, entonces $\widetilde{\sigma} = \sigma(1\ 4k)(2\ (4k-1)) \cdots (2k\ (2k+1))$ tiene el mismo signo que σ ya que ambas permutaciones difieren en $2k$ transposiciones. Además la aplicación $\sigma \mapsto \widetilde{\sigma}$ es inversible pues corresponde a multiplicar a derecha por un elemento de $\mathbb{S}_{4k}$.

Por el mismo motivo que antes, de la multilinealidad de las formas es $\sigma \cdot \eta \otimes \omega = (-1)^{2k} \cdot \widetilde{\sigma} \cdot \omega \otimes \eta = \widetilde{\sigma} \cdot \omega \otimes \eta$ para toda $\omega, \eta \in \Omega^{2k}(M)$ y $\sigma \in \mathbb{S}_{4k}$. En consecuencia resulta

$$\begin{aligned} \eta \wedge \omega &= \frac{1}{2k!2k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{4k}} (-1)^{\sigma} \sigma \cdot \eta \otimes \omega = \frac{1}{2k!2k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{4k}} (-1)^{\widetilde{\sigma}} \widetilde{\sigma} \cdot \omega \otimes \eta \\ &= \frac{1}{2k!2k!} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{4k}} (-1)^{\sigma} \sigma \cdot \omega \otimes \eta = \omega \wedge \eta. \end{aligned}$$

Para terminar, fijemos $[\omega] \in H^{2k}(M)$. Como $(-1)^{|\omega|} = (-1)^{2k} = 1$, el Teorema 5 nos dice en particular que si $\beta([\omega], -)$ es la función nula, entonces $[\omega] = 0$. En otras palabras, la función bilineal β es no degenerada.

(b) Calculo cada caso por separado,

- $\underline{\mathbb{S}^4}$: en este caso sabemos que $H^2(\mathbb{S}^4) = 0$, y por lo tanto β es nula. En consecuencia, la signatura de $\mathbb{S}^4$ es 0.
- $\underline{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2}$: en vista de la fórmula de Künneth sabemos que

$$H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2) \simeq H^2(\mathbb{S}^2) \otimes H^0(\mathbb{S}^2) \oplus H^0(\mathbb{S}^2) \otimes H^2(\mathbb{S}^2) \simeq H^2(\mathbb{S}^2) \oplus H^2(\mathbb{S}^2),$$

  y más aún una base de $H^2(\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2)$ es $\mathcal{B} = \{[\pi_1^*(\omega)], [\pi_2^*(\omega)]\}$ con $\omega \in H^2(\mathbb{S}^2)$ una forma de volumen. Más aún, el mapa de la fórmula de Künneth para grado $2k$ nos dice que $[\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)]$ es no nula (y usando el Teorema 1, su integral es por tanto no nula).

Ahora como $H^4(\mathbb{S}^2) = 0$ es

$$
\begin{aligned}
[\pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega)] &= [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] = 0,\\
[\pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega)] &= [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)],\\
[\pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega)] &= [\pi_2^*(\omega) \wedge \pi_1^*(\omega)] = [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)], \text{ y}\\
[\pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega)] &= [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] = 0,
\end{aligned}
$$

notando $a := \int_{\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2} \pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)$ la matriz de β en la base $\mathcal{B}$ es

$$
[\beta]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Por un cálculo directo, sabemos que $[\pi_1^*(\omega)] + [\pi_2^*(\omega)]$ y $[\pi_1^*(\omega)] - [\pi_2^*(\omega)]$ son autovectores de $[\beta]_{\mathcal{B}}$ de autovalores a y $-a$ respectivamente, por lo que la signatura de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ es 0.

- $\underline{\mathbb{T}^4}$: una vez más, usamos la fórmula de Künneth. Vemos de esta forma que

$$
\begin{aligned}
H^2(\mathbb{T}^4) &\simeq H^0(\mathbb{T}^2) \otimes H^2(\mathbb{T}^2) \oplus H^2(\mathbb{T}^2) \otimes H^0(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2)\\
&\simeq H^2(\mathbb{T}^2) \oplus H^2(\mathbb{T}^2) \oplus (H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2)).
\end{aligned}
$$

Con un argumento similar se tiene que

$$
H^2(\mathbb{T}^2) \simeq H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1) \text{ y } H^1(\mathbb{T}^2) \simeq H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1),
$$

por lo que en definitiva es

$$
\begin{aligned}
H^2(\mathbb{T}^4) &\simeq H^2(\mathbb{T}^2) \oplus H^2(\mathbb{T}^2) \oplus (H^1(\mathbb{T}^2) \otimes H^1(\mathbb{T}^2))\\
&\simeq (H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) \oplus (H^1(\mathbb{S}^1) \otimes H^1(\mathbb{S}^1)) \oplus [(H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1)) \otimes (H^1(\mathbb{S}^1) \oplus H^1(\mathbb{S}^1))].
\end{aligned}
$$

Persiguiendo los isomorfismos del Teorema 7 y usando que proyectar de $\mathbb{T}^4$ a una copia de $\mathbb{T}^2$ y luego a la 1-esfera es como considerar directamente una proyección $\pi_i : \mathbb{T}^4 \to \mathbb{S}^1$, obtenemos una base de $H^2(\mathbb{T}^4)$ dada por

$$
\mathcal{B} = \{ [\pi_i^*(\eta) \wedge \pi_j^*(\eta)] \}_{1 \leq i < j \leq 4}
$$

con η una forma de volumen de $\mathbb{S}^1$, ordenada según el orden lexicográfico de ij.

Como en el caso de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, sabemos que el wedge de dos elementos que «comparten un índice» de $\mathcal{B}$ es nulo pues $H^2(\mathbb{S}^1) = 0$. Para los otros casos, reordenando obtenemos $\pm[\pi_1^*(\eta) \wedge \pi_2^*(\eta) \wedge \pi_3^*(\eta) \wedge \pi_4^*(\eta)]$. Usando la fórmula de Künneth otra vez o apelando al Lema 4, sabemos que $a := \int_{\mathbb{T}^4} \pi_1^*(\eta) \wedge \pi_2^*(\eta) \wedge \pi_3^*(\eta) \wedge \pi_4^*(\eta) \neq 0$ y entonces por un cálculo directo es

$$
[\beta]_{\mathcal{B}} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.
$$

Notando $\omega_{ij} = [\pi_i^*(\eta) \wedge \pi_j^*(\eta)]$ obtenemos que las clases de cohomología $[\omega_{14} + \omega_{23}]$, $[-\omega_{13} + \omega_{24}]$ y $[\omega_{12} + \omega_{34}]$ son autovectores de de $[\beta]_{\mathcal{B}}$ autovalor a; y las clases de cohomología $[-\omega_{14} + \omega_{23}]$, $[\omega_{13} + \omega_{24}]$ y $[-\omega_{12} + \omega_{34}]$ son autovectores de $[\beta]_{\mathcal{B}}$ de autovalor $-a$. Consecuentemente, la signatura de $\mathbb{T}^4$ es cero.

- $\underline{P^2_{\mathbb{C}}}$: voy a usar algunos hechos sobre la chomología del espacio proyectivo complejo. En primer lugar, sabemos que es

$$H^k(P^2_{\mathbb{C}}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } 2|k \text{ y } k \leq 4 \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

y más aún, tenemos una 2-forma $\omega \in H^2(P^2_{\mathbb{C}})$ tal que $\omega \wedge \omega$ es una forma de volumen y $a := \int_{P^2_{\mathbb{C}}} \omega \wedge \omega > 0$. En consecuencia, en la base de $H^2(P^2_{\mathbb{C}})$ dada por $\{\omega\}$ la matriz de β es simplemente (a). Concluimos entonces que la signatura de $P^2_{\mathbb{C}}$ es 1.

- $\underline{P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}}$: en vista de lo anterior y usando que

$$H^4(P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}) \simeq H^4(P^2_{\mathbb{C}}) \oplus (H^2(P^2_{\mathbb{C}}) \otimes H^2(P^2_{\mathbb{C}})) \oplus H^4(P^2_{\mathbb{C}}),$$

por el mismo argumento que antes vemos que una base de $H^4(P^2_{\mathbb{C}})$ proviene del pullback 4-formas y 2-formas de $P^2_{\mathbb{C}}$ por cada proyección. Concretamente, si $H^2(P^2_{\mathbb{C}}) = \langle[\omega]\rangle$ es la forma del inciso anterior, entonces

$$\mathcal{B} = \{\ [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)], [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)], [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)]\ \}$$

es una base de $H^4(P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}})$. Como $[\omega \wedge \omega \wedge \omega] \in H^6(P^2_{\mathbb{C}}) = 0$, es

$$[\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] = 0 \ \text{ y } \ [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] = 0.$$

Del mismo modo tenemos que

$$[\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] = [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] = 0$$

pues $H^8(P^2_{\mathbb{C}}) = 0$. Por último, usando queda

$$\begin{aligned}[\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \wedge [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] &= [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_1^*(\omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)] \\ &= [\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] \wedge [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)]\end{aligned}$$

Notando $a = \int_{P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}} \pi_1^*(\omega \wedge \omega) \wedge \pi_2^*(\omega \wedge \omega) > 0$ es

$$[\beta]_{\mathcal{B}} = a \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

que tiene a $[\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] + [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)]$ y $[\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] + [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)] + [\pi_1^*(\omega) \wedge \pi_2^*(\omega)]$ como autovectores de autovalor a y a $[\pi_1^*(\omega \wedge \omega)] - [\pi_2^*(\omega \wedge \omega)]$ como autovector de autovalor $-a$. Por lo tanto, la signatura de $P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}$ es 1.

$\square$

Ejercicio 7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanniana inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que hay un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p \in M$ se tiene que (X_p, Y_p) es una base ortonormal positiva de T_pM y $Z_p = \|Z_p\| X_p$.

(b) Hay 1-formas $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ tales que $\alpha(X) = \beta(Y) = 1$ y $\alpha(Y) = \beta(X) = 0$. Más aún, existe una forma $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que

$$d\alpha = \eta \wedge \beta, \quad d\beta = -\eta \wedge \alpha.$$

La forma $\sigma = \alpha \wedge \beta$ no depende de la elección de Z, es una forma de volumen sobre M que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanniano sobre M.

(c) Existe una función diferenciable $K : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\eta = -K \cdot \sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo Z.

(d) Si M es compacta, entonces $\int_M K \cdot \sigma = 0$.

(e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre S^2 un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Antes que nada, recordemos que para cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión 2 con producto interno y vector unitario $v \in \mathbb{V}$, existe un único vector unitario $w \in \mathbb{V}$ tal que $\{v, w\}$ es una base ortonormal orientada positivamente.

En efecto, al $\langle v \rangle^{\perp}$ tener dimensión 1, está generado por cierto vector $w_0 \in \mathbb{V}$. Luego, de existir w debe ser de la forma $\lambda \cdot w_0$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\{v, w\}$ será orientada positivamente si y sólo si es $1 = \det(v, \lambda w_0) = \lambda \det(v, w_0)$ y $\{v, w_0\}$ es base, podemos tomar $w := \det(v, w_0)^{-1} w_0$. Más aún, el anterior argumento garantiza que esta es la única elección posible.

Volviendo al ejercicio, como el campo Z es nunca nulo, la función $\frac{1}{\|Z\|}$ está bien definida y es suave, y lo mismo ocurre para el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$X_p := \frac{Z_p}{\|Z_p\|}$$

para cada $p \in M$. Notemos además que este es el único campo posible que satisface $Z \equiv \|Z\| X$.

Por la observación inicial, X induce entonces un único campo $Y : M \to TM$ tal que $\{X_p, Y_p\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de T_pM para cada $p \in M$.

Me faltó ver que Y es un campo suave.

(b) Definimos $\alpha := \langle X, -\rangle$ y $\beta := \langle Y, -\rangle$. Estas son 1-formas pues en cada punto $p \in M$ dan una función lineal $v \mapsto \langle X_p, v\rangle$ ó $v \mapsto \langle Y_p, v\rangle$ de T_pM, y dependen suavemente de los campos y la métrica. Como $\{X, Y\}$ dá una base ortonormal en cada punto, se sigue que $\alpha(X) = \|X\| = 1 = \|Y\| = \beta(Y)$ y $\alpha(Y) = \beta(X) = \langle X, Y\rangle = 0$.

Por otro lado, su wedge $\sigma = \alpha \wedge \beta$ satisface

$$\sigma_p(X_p, Y_p) = \alpha(X_p)\beta(Y_p) - \alpha(Y_p)\beta(X_p) = 1$$

para cada $p \in M$. Como $\{X_p, Y_p\}$ es una base ortonormal de T_pM, la forma σ es necesariamente la forma de volumen riemanniano de M. En particular, está determinada por la métrica y no depende del campo Z.

Me faltó ver que η existe y no depende de Z.

(c) Como para cada punto $p \in M$ las funciones $(d\eta)_p$ y σ_p son funciones multilineales alternadas, y $\mathrm{Alt}^2(T_pM)$ tiene dimension 1, sabemos que existe $K_p \in \mathbb{R}$ tal que $-K_p\sigma_p = (d\eta)_p$ para cada $p \in M$. Tenemos bien definida así una función $K : M \to R$. Para terminar, veamos que es suave.

Fijando un punto $p \in U$ y una carta (U, φ) con $U \ni p$, sabemos que en este abierto $d\eta$ y σ se expresan como

$$\sigma = S \cdot d\,\varphi_1 \wedge \varphi_2 \text{ y } \eta = E \cdot d\varphi_1 \wedge d\varphi_2$$

para ciertas $S, E \in C^\infty(M)$. Más aún, como $\sigma_p \not\equiv 0$ para todo $p \in M$, sabemos que S es nunca nula. Evaluando en cada punto de U, por como definimos K debe ser $K = -E/S$, y esta última es una función suave.

(d) Si M es compacta, la forma σ tiene soporte compacto. Por lo tanto, tiene integral finita en M y más aún usando el teorema de Stokes es

$$\int_M K \cdot \sigma = -\int_M (-K \cdot \sigma) = -\int_M d\eta = -\int_{\partial M} i^*(\eta) = 0$$

pues M no tiene borde.

Me faltó resolver el ítem (e).

□