Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 3

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elejí resolver los ejercicios (2), (8) y (9).

Ejercicio 2. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $f_{*p} = 0$.

Demostración. content... □

Ejercicio 8. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es *completo* y describa el flujo asociado.

Demostración. content... □

Ejercicio 9.

Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Probar que:

- Si $v \in T_eG$ es un vector tangente a G en e y $X \in \mathfrak{g}$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces γ_v es un homomorfismo de grupos, esto es,

$$\gamma_v(t + t') = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(t'), \qquad \forall t, t' \in \mathbb{R}.$$

- Definimos una función $\exp : T_eG \to G$ poniendo, para cada $v \in T_eG$,

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

  Determine la diferencial $\exp_{*0} : T_eG \to T_eG$ y muestre que exp es localmente un difeomorfismo alrededor de 0.

- Muestre que si $v, w \in T_eG$ son tales que $[v, w] = 0$, entonces

$$\exp(v + w) = \exp(v) \cdot \exp(w).$$

Demostración. content... □