Geometría Diferencial

Guido Arnone

Ejercicio 5. Muestre que los siguientes espacios son variedades diferenciales y determine sus dimensiones.

(i) $SL(n, \mathbb{C})$ el conjunto de las matrices complejas de tamaño $n \times n$ y determinante 1.

Demostración. Hacemos cada caso por separado.

(i) Afirmamos primero que la función $\det : M_n\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable. Eso es porque dada una matriz compleja $A = (X_{ij} + iY_{ij})_{ij}$, luego $\det A$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ en función de cada X_{ij}, Y_{ij},

$$\det((X_{ij} + iY_{ij})_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(X_{1\sigma(1)} + iY_{1\sigma(1)}) \cdots (X_{n\sigma(n)} + iY_{n\sigma(n)}). \tag{1}$$

Tomando partes reales e imaginarias tenemos que $\det A = \mathfrak{R}(\det A) + i\mathfrak{I}(\det A)$ con $\mathfrak{R}(\det), \mathfrak{I}(\det)$ dos polinomios ahora de valores reales. Identificando $M_n\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{2n^2}$ y $C \equiv R^2$ via homeomorfismos $\Phi : (X_{ij} + iY_{ij})_{i,j} \mapsto (X_1, \ldots, X_{n^2}, Y_1, \ldots, Y_{n^2})$ y $\phi : z \mapsto (\mathfrak{R}(z), \mathfrak{I}(z))$ luego (2) nos dice que en el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd} M_n\mathbb{C} \arrow[r, "\det"] \arrow[d, "\Phi"'] & \mathbb{C} \arrow[d, "\phi"] \\ \mathbb{R}^{2n^2} \arrow[r, dashed] & \mathbb{R}^2 \end{tikzcd}$$

la flecha punteada es diferenciable pues es un polinomio para cada coordenada de $\mathbb{R}^2$. A su vez, $\{(M_n\mathbb{C}, \Phi)\}$ y $\{(\mathbb{C}, \phi)\}$ son atlas, lo que prueba que $\det$ es diferenciable. Ahora bien, por definición es $SL(c, \mathbb{C}) = \det^{-1}(\{1\})$ y podemos apelar luego al teorema de valores regulares, viendo que el diferencial de $\det$ sea sobreyectivo en cada matriz $A \in SL(n, \mathbb{C})$.

$\square$

Ejercicio 7. Sean M y N variedades de dimensiones m y n, respectivamente. Probar que:

(a) El espacio producto $M \times N$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $m + n$ y con respecto a esta estructura las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.

(b) Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, entonces existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado:

(a) Dotamos a $M \times N$ de la topología producto. Luego, $M \times N$ es Hausdorff ya que es producto de espacios Hausdorff. Como M y N son variedades, tienen bases numerables $\mathcal{B}_M, \mathcal{B}_N$ respectivamente y entonces el conjunto numerable $\tilde{\mathcal{B}} = \{U \times V : U \in \mathcal{B}_M, V \in \mathcal{B}_N\}$ es base de $M \times N$. En efecto, si $A \subseteq M \times N$ es abierto y $(x, y) \in A$, existe luego un abierto básico $(x, y) \in U \times V \subset A$. Como $\mathcal{B}_N$ y $\mathcal{B}_M$ son bases, tenemos abiertos $x \in U_0 \subseteq U \in \mathcal{B}_M$, $y \in V_0 \subseteq V \in \mathcal{B}_N$. Por lo tanto, $(x, y) \in U_0 \times V_0 \subseteq U \times V \subseteq A$, lo que prueba que $\tilde{\mathcal{B}}$ es base. Ahora veamos que $M \times N$ tiene una estructura diferenciable. Sean $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ y $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ los atlas de M y N respectivamente. Para cada $(i, j) \in I \times J$, notamos $\varphi_i \times \psi_j$ a $(u, v) \in U_i \times V_j \mapsto (\varphi_i(u), \psi_j(v)) \in \varphi_i(U_i) \times \psi(V_j)$ y definimos luego

$$\mathcal{A} := \{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}.$$

Veamos que este es un atlas para $M \times N$. Como la topología en $M \times N$ es la producto cada $U_i \times V_j$ es abierto, y por otro lado, las funciones $\varphi_i \times \psi_j$ son homeomorfismos al ser producto de homeomorfismos. Además, dado que los abiertos $(U_i)_{i \in I}$ y $(V_j)_{j \in J}$ cubren M y N respectivamente, es

$$\bigcup_{(i,j) \in I \times J} U_i \times V_j = \bigcup_{i \in I} U_i \times \bigcup_{j \in J} V_j = M \times N.$$

Finalmente, si $\varphi_i \times \psi_j$ y $\varphi_k \times \psi_l$ son cartas de $\mathcal{A}$, notando

$$W := (U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_l) = (U_i \cap U_k) \times (V_j \times V_l)$$

tenemos que la composición

$$(\varphi_i \times \psi_j)|_W \circ ((\varphi_k \times \psi_l)|_W)^{-1} : (\varphi_k \times \psi_l)(W) \mapsto (\varphi_i \times \psi_j)(W) \tag{2}$$

verifica

$$\begin{aligned}(\varphi_i \times \psi_j)|_W \circ ((\varphi_k \times \psi_l)|_W)^{-1}(x, y) &= (\varphi_i \times \psi_j) \circ (\varphi_k^{-1} \times \psi_l^{-1})(x, y) \\ &= (\varphi_i \varphi_k^{-1}(x), \psi_j \psi_l^{-1}(y))\end{aligned}$$

para cada $(x, y) \in (\varphi_k \times \psi_l)(W) = \varphi_k(U_i \cap U_k) \times \psi_l(V_j \times V_l)$. Como por hipótesis tanto $\varphi_i \varphi_k^{-1}$ como $\psi_j \psi_l^{-1}$ son funciones diferenciables entre abiertos euclídeos, es entonces $\varphi_i \varphi_k^{-1} \times \psi_j \psi_l^{-1}$ diferenciable y a la vez coincide con (2), lo que termina de probar que $\mathcal{A}$ dota a $M \times N$ de una estructura diferenciable. Los abiertos $U_i \times V_j$ son en particular abiertos de $\mathbb{R}^{n+m}$ lo que dice que $\dim M \times N = \dim M + \dim N = m + n$. Ahora veamos que las proyecciones son diferenciables. Fijamos $(x, y) \in M \times N$ y sea $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)$ una carta en con $x \in U_i, y \in V_j$. Luego por construcción de $\mathcal{A}$ sabemos que φ_i es carta de M con $x = p_1(x, y) \in p_1(U_i \times V_j) = U_i$ y ψ_j es carta de N con $y = p_2(x, y) \in p_2(U_i \times V_j) = V_j$. Basta entonces con probar que $\varphi_i p_1 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}$ y $\psi_j p_2 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}$ son diferenciables. Ésta última es exactamente la proyección en la segunda coordenada $\tilde{p}_2 : \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \to \psi_j(V_j)$, ya que si $(x, y) \in \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$ entonces $\psi_j p_2 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}(x, y) = \varphi_i p_2(\varphi_i^{-1}(x), \psi_j^{-1}(y)) = \psi_j(\psi_j^{-1}(y)) = y$. Similarmente $\varphi_i p_1 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}$ es la proyección de $\varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$ en la primera coordenada, y así vemos que ambas proyecciones son diferenciables.

(b) Veamos en primer lugar que existe una tal función. Consideramos

$$h : p \in P \mapsto (f(p), g(p)) \in M \times N$$

que verifica $p_1 h(p) = p_1(f(p), g(p)) = f(p)$ y $p_2 h(p) = g(p)$. Sea $\mathcal{A}' = \{(\mu_k, W_k)\}_{k \in K}$ un atlas maximal de P y fijemos $p \in P$. Tomamos a continuación $W_k \ni p$ y $U_i \times V_j \ni h(p) = (f(p), g(p))$ abiertos de P y $M \times N$ respectivamente, correspondientes a cartas (μ_k, W_k) y $(\varphi_i \times \psi_j, U_i \times V_j)$. Ahora, veamos que $(\varphi_i \times \psi_j) h \mu_k^{-1}$ es diferenciable. Como punto a punto tenemos que

$$(\varphi_i \times \psi_j) h \mu_k^{-1}(z) = (\varphi_i \times \psi_j)(f(\mu_k^{-1}(z)), g(\mu_k^{-1}(z))) = (\varphi_i f(\mu_k^{-1}(z)), \psi_j g(\mu_k^{-1}(z)))$$

para cada $z \in \mu_k(W_k)$ y tanto $\varphi_i f \mu_k^{-1}$ como $\psi_j g \mu_k^{-1}$ son diferenciables pues f y g son diferencables, consecuentemente $(\varphi_i \times \psi_j) h \mu_k^{-1}$ es diferenciable. Con respecto a la unicidad, está dada a un nivel de conjuntos: si $\tilde{h} : P \to M \times N$ cumple $p_1 \tilde{h} = f$ y $p_2 \tilde{h} = g$, luego notando $\tilde{h}(p) = (\tilde{h}_1(p), \tilde{h}(p)_2)$ tenemos que

$$f(p) = p_1 \tilde{h} = \tilde{h}_1(p)$$

y

$$g(p) = p_2 \tilde{h} = \tilde{h}_2(p)$$

así que $\tilde{h}(p) = (f(p), g(p)) = h(p)$, para todo $p \in P$.

$$\begin{tikzcd}
 & P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists ! h"'] \arrow[dr, "g"] & \\
M & M \times N \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & N
\end{tikzcd}$$

□