# Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 3

Guido Arnone

## Sobre los Ejercicios

Elegí resolver los ejercicios (2), (8) y (9).

---

Recuerdo primero el siguiente resultado,

**Observación.** Si $M$ es una variedad diferenciable y $v \in T_pM$ una derivación en un punto $p \in M$, entonces para cada entorno abierto $U$ de $p$ existe una curva suave $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$, $c'(0) = v$, e $\operatorname{im} c \subset U$.

Consideremos primero una carta $(V, \phi)$ con $p \in V \subset U$. Componiendo con una traslación (que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$) si es necesario, podemos suponer que $\phi(p) = 0$. Ahora, como los *ganchos* de $\phi$ en $p$ son una base para $T_pM$, existen únicos coeficientes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_p$.

Tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $B_\varepsilon(0) \subset \phi(V)$, afirmamos que la curva

$$c : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \phi^{-1}(t(a_1, \ldots, a_n)) \in M$$

cumple lo pedido.

En primer lugar, tenemos que $c(0) = \phi^{-1}(0) = p$ e $\operatorname{im} c \subset V \subset U$. Observemos también que $c$ es suave, pues es la composición de la curva $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ con $\phi^{-1}$ (que es suave ya que $\phi$ es una carta de $M$).

Por último si $g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
d_0c\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)(g) &= \frac{d}{dt}\Big|_0(gc) = \frac{d}{dt}\Big|_0(g\phi^{-1}\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g\phi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{c(0)} \cdot \gamma_i'(0) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g\phi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_p \cdot a_i = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_p(g) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_p\right)(g) = v(g)
\end{aligned}$$

de forma que $c'(0) = v$.

**Ejercicio 2.** Sean $M$ una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si $f$ tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $d_p f = 0$.

*Demostración.* Como $p$ es un máximo local de $f$, existe un abierto $U \ni p$ tal que $f(q) \leq f(p)$ para cada $q \in U$. Fijemos $v \in T_pM$. Por la observación anterior tenemos una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$, $c'(0) = v$, e $\operatorname{im} c \subset U$.

En consecuencia, es $fc(t) \leq fc(0) = f(p)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ y por lo tanto $0$ resulta un máximo local de la curva suave $fc : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$.

Esto último dice que $(fc)'(0) = 0$ y por ende es

$$0 = d_0(f \circ c)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right) = d_p f\left(d_0 c\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_0\right)\right) = d_p f(c'(0)) = d_p f(v).$$

Como la igualdad anterior es cierta para cualquier $p \in M$ y $v \in T_pM$, efectivamente $d_p f = 0$. □

---

Probamos ahora la sugerencia del ejercicio (8).

**Proposición 2.** Sea $G$ un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Si $g, h \in G$ y $\gamma : (a, b) \to G$ es una curva integral de $X$ que arranca en $g = \gamma(0)$ entonces la curva $\eta : t \in (a, b) \to h\gamma(t) \in G$ es una curva integral de $X$ que arranca en $hg$.

*Demostración.* Como $\eta(0) = h\gamma(0) = hg$, la curva $\eta$ comienza en $hg$. Resta ver que es una curva integral. Fijando $s \in (a, b)$ y notando que por definición $\eta = L_h \circ \gamma$, se tiene que

$$\begin{aligned} d_s\eta\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) &= (d_{\gamma(s)}L_h \circ d_s\gamma)\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right) = d_{\gamma(s)}L_h\left(d_s\gamma\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_s\right)\right) \\ &= d_{\gamma(s)}L_h(X_{\gamma(s)}) = X_{h\gamma(s)} = X_{\eta(s)}. \end{aligned}$$

Esto es precisamente que $\eta$ sea integral. □

**Ejercicio 8.** Sea $G$ un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que $X$ es *completo* y describa el flujo asociado.

*Demostración.* Veamos primero que existe una curva integral definida en toda la recta que comienza en la identidad de $G$. Consideremos la curva integral maximal $\gamma : (a, b) \to G$ que satisface $\gamma(0) = e$.

Para concluir que $I := (a, b)$ es en realidad toda la recta, supongamos que $b < +\infty$ y veamos que esto lleva a una contradicción. Veremos así que $I$ no puede estar acotado superiormente. Un argumento similar para $a$ (que omitimos) prueba que $I$ tampoco está acotado inferiormente: en consecuencia, debe ser $I = \mathbb{R}$.

Fijemos $t_0 \in (0, b)$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned} \eta : (a - t_0, b - t_0) &\to G \\ t &\longmapsto \gamma(t + t_0) \end{aligned}$$

que resulta suave pues es la composición de $\gamma$ con la restricción de la traslación $T_{t_0}(t) = t + t_0$. Ésta curva es integral, pues

$$\eta'(s) = d_s\eta\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) = d_s(\gamma \circ T_{t_0})\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) = d_{s+t_0}\gamma \circ d_s T_{t_0}\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right)$$
$$= d_{s+t_0}\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_{s+t_0}\right) = \gamma'(s+t_0) = X_{\gamma(s+t_0)} = X_{\eta(s)}.$$

Ahora, tanto $\eta$ como $t \in (a,b) \mapsto \gamma(t_0)\gamma(t) \in G$ son curvas integrales que comienzan en $\gamma(t_0)$, así que deben coincidir donde ambas están definidas:

$$\gamma(s+t_0) = \eta(s) = \gamma(t_0)\gamma(s) \quad \forall s \in (a, b-t_0).$$

En particular, si $x \in (t_0, b)$ es $\gamma(x) = \gamma(t_0)\gamma(x-t_0)$. Esto implica que la curva

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma} : (a, b{+}t_0) &\to G \\ s &\longmapsto \begin{cases} \gamma(s) & \text{si } a < s < b \\ \gamma(t_0)\gamma(s-t_0) & \text{si } t_0 < s < b + t_0 \end{cases} \end{aligned}$$

que comienza en $e \in G$ está bien definida. Más aún, ésta resulta suave e integral pues lo es al restringirla a los abiertos $(a, b)$ y $(t_0, b+t_0)$. Sin embargo $\gamma$ era maximal, así que esto supone una contradicción. Por lo observado anteriormente, la curva $\gamma$ está definida en toda la recta.

Consecuentemente $X$ es completo: para cada $g \in G$, la Proposición 2 nos dice que la curva $g \cdot \gamma$ comienza en $g$, es integral, y está definida en toda la recta. □

---

**Ejercicio 10.** Sea $G = GL(n, \mathbb{R})$. Recordemos que podemos identificar $T_I G$ con $M_n(\mathbb{R})$.

a) Para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, describa explícitamente el campo tangente $X_A$ sobre $G$ que es invariante a izquierda y tal que $(X_A)_I = A$.

b) Determine la función $\exp : T_e G \to G$.

c) Muestre que $\exp : T_e G \to G$ no es un homomorfismo de grupos.

*Demostración.* Hacemos cada inciso por separado.

a) Fijemos $A \in M_n\mathbb{R}$. Sabemos en general que si $G$ es un grupo de Lie, el campo tangente $X_v \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a izquierda que vale $v \in T_e G$ en la identidad es

$$(X_v)_g = (L_g)_{*,e}(v). \tag{1}$$

En este caso la multiplicación está dada por la multiplicación matricial, y tenemos una identifiación $T_B M_n\mathbb{R} \equiv M_n\mathbb{R}$ para toda matriz $B$ al ser $M_n\mathbb{R}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial.

Como la multiplicación a izquierda por una matriz fija es $\mathbb{R}$-lineal, bajo estas identificaciones es $(L_B)_{*,I}(C) = L_B(C) = BC$ para todo par de matrices $B, C \in M_n\mathbb{R}$.

Consecuentemente (1) nos dice que

$$(X_A)_B = (L_B)_{*,I}(A) = BA$$

para cada $B \in M_n\mathbb{R}$.

b) Determinemos ahora $\exp : T_I M_n\mathbb{R} \to M_n\mathbb{R}$. Dada $A \in M_n\mathbb{R}$, bajo las identifiaciones de (a) la curva integral $\gamma$ de $X_A$ que comienza en $I$ debe satisfacer la ecuación diferencial con datos iniciales dada por

$$\begin{cases} \gamma'(t) = (X_A)_{\gamma(t)} = \gamma(t)A \\ \gamma(0) = I \end{cases} \tag{2}$$

La solución a ésta última es conocida, y es precisamente la curva

$$e^{tA} := \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

En efecto, notemos que esta serie es absolutamente covergente para todo $t \in \mathbb{R}$ ya que

$$\sum_{k\geq 0} \left\| \frac{(tA^k)}{k!} \right\| = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} \|A^k\| \leq \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!} \|A\|^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(\|A\|t)^k}{k!} = e^{t\|A\|} < +\infty.$$

Por lo tanto podemos derivar término a término,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} e^{tA} &= \sum_{k\geq 0} \frac{d}{dt} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{d}{dt} \frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{k t^{k-1} A^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 1} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} \cdot A = \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} \cdot A = e^{tA} \cdot A. \end{aligned}$$

Es claro además que $e^{0\cdot A} = I + \sum_{k\geq 1} \frac{0^k}{k!} = I$. En conclusión, identificando $T_I M_n\mathbb{R}$ con $M_n\mathbb{R}$ obtenemos $\exp(A) = e^A$ para toda $A \in M_n\mathbb{R}$.

c) Consideremos las siguientes matrices nilpotentes de $M_2\mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como $A^2 = B^2 = 0$, por un cálculo directo, es

$$\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } \exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

así que

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, como $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I$, es

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(A+B)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(A+B)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{I}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{A+B}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

y usando que las proyecciones a cada coordenada son continuas, vemos que

$$\pi_{21}(\exp(A+B)) = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} = e.$$

Esto nos dice que $\exp(A+B)_{21} \neq (\exp(A)\exp(B))_{21}$ y por lo tanto $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$, lo que muestra que exp no es un morfismo de grupos.

$\square$