Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 4

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí los ejercicios (6), (8) y el inciso (d) del ejercicio (11).

Ejercicio 6. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable si y sólo si M y N lo son.

Demostración. Veamos ambas implicaciones

($\Rightarrow$) Supongamos que $M \times N$ es orientable.

($\Leftarrow$) Ahora supongamos que tanto M como N son orientables.

$\square$

Ejercicio 8.

a) Si $f : M \to N$ es una función diferenciable entre variedades, probar que los pull-backs $f^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ son tales que

(i) $f^*(\omega_1 + \omega_1) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$

(ii) $f^*(h \cdot \omega_1) = h \circ f \cdot f^*(\omega_1)$

(iii) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$

para cada $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\bullet(N)$ y $h \in C^\infty(N)$.

b) Si U y V son abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $f : U \to V$ es diferenciable, entonces

$$f^*(d\,x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}\, d\,x_k$$

y

$$f^*(g \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n) = g \circ f \cdot \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j} \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n$$

para cada $i \in \{1, \ldots, n\}$ y cada $g \in C^\infty(V)$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

(a) Si $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(N)$ y $v_1, \ldots, v_n \in T_pN \subset TN$, entonces

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1+\omega_2)_p(v_1,\ldots,v_k) &= (\omega_1+\omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\ldots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= \omega_{1f(p)}(f_{*,p}(v_1),\ldots,f_{*,p}(v_k)) + \omega_{2f(p)}(f_{*,p}(v_1),\ldots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= f^*(\omega_1)_p(v_1,\ldots,v_k) + f^*(\omega_2)_p(v_1,\ldots,v_k) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f^*(h\cdot\omega_1)_p(v_1,\ldots,v_k) &= (h\cdot\omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1),\ldots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p))\cdot\omega_{1f(p)}(f_{*,p}(v_1),\ldots,f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p))\cdot f^*(\omega_1)_p(v_1,\ldots,v_k), \end{aligned}$$

así que $f^*(\omega_1+\omega_2) = f^*(\omega_1)+f^*(\omega_2)$ y $f^*(h\cdot\omega_1) = h\circ f\cdot f^*(\omega_1)$.

Por último, sean $\omega \in \Omega^k(N)$ y $\eta \in \Omega^l(N)$ dos formas. Ahora dado un punto $p \in N$ y derivaciones $v_1,\ldots,v_k,v_{k+1},\ldots,v_{k+l} \in T_pN \subset TN$, al tensorizar obtenemos

$$\begin{aligned} (\omega\otimes\eta)_{f(p)}(d_pf(v_1),\ldots d_pf(v_{k+l})) &= \omega_{f(p)}(d_pf(v_{\sigma(1)}),\ldots d_pf(v_{\sigma(k)}))\cdot\eta_{f(p)}(d_pf(v_{\sigma(k+1)}),\ldots,d_pf(v_{\sigma(k+l)})) \\ &= f^*(\omega_p)(v_{\sigma(1)},\ldots v_{\sigma(k)})\cdot f^*(\eta)_p(v_{\sigma(k+1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)}) \\ &= (f^*(\omega)\otimes f^*(\eta))_p(v_1,\ldots,v_{k+l}) \end{aligned}$$

así que

$$\begin{aligned} f^*(\omega\wedge\eta)_p(v_1,\ldots,v_{k+l}) &= (\omega\wedge\eta)_{f(p)}(d_pf(v_1),\ldots,d_pf(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^\sigma\sigma\cdot(\omega\otimes\eta)_{f(p)}(d_pf(v_1),\ldots d_pf(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^\sigma(\omega\otimes\eta)_{f(p)}(d_pf(v_{\sigma(1)}),\ldots d_pf(v_{\sigma(k+l)})) \\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^\sigma(f^*(\omega)\otimes f^*(\eta))_p(v_{\sigma(1)},\ldots,v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \frac{1}{k!l!}\sum_{\sigma\in S_{k+l}}(-1)^\sigma\sigma\cdot(f^*(\omega)\otimes f^*(\eta))_p(v_1,\ldots,v_{k+l}) \\ &= (f^*(\omega)\wedge f^*(\eta))_p(v_1,\ldots,v_{k+l}). \end{aligned}$$

b) Fijemos $i \in [\![n]\!]$. Si $s \in [\![n]\!]$, entonces para cada $p \in U$ y $g \in C^\infty(V)$ es

$$d_pf\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_s}\right|_p\right)(g) = \left.\frac{\partial gf}{\partial x_s}\right|_p = (D_p(gf))_s = (D_{f(p)}gD_pf)_s = \sum_{j=1}^n \left.\frac{\partial g}{\partial x_j}\right|_{f(p)}\cdot\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p = \sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{f(p)}(g)$$

de forma que $d_pf(\frac{\partial}{\partial x_s}|_p) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s}|_p\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}|_{f(p)}$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} f^*(d\,x_i)_p\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_s}\right|_p\right) &= dx_{if(p)}\left(d_pf\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_s}\right|_p\right)\right) = dx_{if(p)}\left(\sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p\cdot\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{f(p)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^n\left.\frac{\partial f_j}{\partial x_s}\right|_p\cdot dx_{if(p)}\left(\left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_{f(p)}\right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

Como a su vez

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (d\,x_k)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_s}\Big|_p \right) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta_{ks} = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}$$

obtenemos que

$$f^*(d\,x_i)_p \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (d\,x_k)_p$$

pues ambos lados de la igualdad coinciden en la base de los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial x_s}|_p\}_{1 \leq s \leq n}$. Como esto es cierto para todo punto p, se tiene que $f^*(d\,x_i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_k} d\,x_k$.

Finalmente, usando (a) vemos que

$$f^*(g \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n) = g \circ f \cdot f^*(d\,x_1) \wedge \cdots \wedge f^*(d\,x_n)$$

así que para terminar el inciso basta ver que

$$f^*(d\,x_1) \wedge \cdots \wedge f^*(d\,x_n) = \det(\frac{\partial f_i}{\partial x_j})_{ij} \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}
f^*(d\,x_1) \wedge \cdots \wedge f^*(d\,x_n) &= \sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} d\,x_{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n=1}^{n} \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} d\,x_{i_n} \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}} d\,x_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\,x_{i_n} \\
&= \sum_{i_1<\cdots<i_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}} d\,x_{i_1} \wedge \cdots \wedge d\,x_{i_n} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} d\,x_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge d\,x_{\sigma(n)} \\
&= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n \\
&= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\sigma} \prod_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} \right) d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n \\
&= \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \cdot d\,x_1 \wedge \cdots \wedge d\,x_n.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 11 (d). Calcule la cohomología de un producto cartesiano de dos esferas.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Por la fórmula de Künneth, sabemos que

$$H^q(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = \bigoplus_{r+s=q} H^r(\mathbb{S}^n) \otimes H^s(\mathbb{S}^n) \tag{1}$$

para todo $q \geq 0$. Sabemos además que la cohomología de la n-esfera es $\mathbb{R}$ en grados 0 y n, y nula en los demás. Por lo tanto, para que $H^r(\mathbb{S}^n) \otimes H^s(\mathbb{S}^n)$ sea no nulo es condición necesaria que r y s pertenezcan a $\{0, n\}$. En particular debe ser $r + s \in \{0, n, 2n\}$.

Como $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n$ es arcoconexo, ya sabemos que $H^0(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) \simeq \mathbb{R}$. En los otros casos, de (1) tenemos que

$$H^n(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^0(\mathbb{S}^n) \oplus H^0(\mathbb{S}^n) \otimes H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

y

$$H^{2n}(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = H^n(\mathbb{S}^n) \otimes H^n(\mathbb{S}^n) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, es

$$H^q(\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0 \text{ o } q = 2n \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } q = n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□