

Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 2

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Además del ejercicio (9), elegí resolver los ejercicios (4) y (12).

Ejercicio 4. Sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable entre variedades de la misma dimensión y supongamos que su dominio es compacto.

- (a) Para cada $q \in N$ que es un valor regular de f el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito.
- (b) Sea R el conjunto de los valores regulares de f . El conjunto R es un abierto de N y la función

$$q \in R \mapsto \#f^{-1}(q) \in \mathbb{N}_0$$

es localmente constante. Es necesariamente constante?

Demostración. Veamos primero el inciso (a). Fijemos $q \in N$ un valor regular. Como f es diferenciable en particular es continua y entonces el conjunto $E_q := f^{-1}(q)$ es un cerrado de M , al ser la preimagen del cerrado $\{q\} \subset N$. Como E_q es un cerrado y M es compacta, el primero resulta compacto. Por lo tanto, para probar que E_q es finito alcanza con mostrar que es discreto con la topología subespacio de M . Concretamente, basta ver que si $p \in E_q$ entonces existe $U \subset M$ abierto con $U \cap E_q = \{p\}$. Si $p \in E_q$, como q es un valor regular $d_p f : T_p M \rightarrow T_q N$ es sobreyectiva. Por otro lado, por hipótesis sabemos que $\dim T_p M = \dim M = \dim N = \dim T_q N$. Como $d_p f$ es una función lineal sobreyectiva entre espacios vectoriales de la misma dimensión, es un isomorfismo. El teorema de la función inversa nos asegura entonces que existen abiertos $U \ni p$ y $V \ni q$ de M y N respectivamente tales que la (co) restricción $f|_U^V : U \rightarrow V$ de f es un difeomorfismo. En particular $f|_U^V$ es inyectiva y entonces la preimagen de un punto contiene a lo sumo un elemento. Se tiene entonces que

$$U \cap f^{-1}(q) \stackrel{(q \in V)}{=} (f|_U^V)^{-1}(q) \stackrel{(p \in U)}{=} \{p\},$$

lo que concluye la prueba de (a).

Ahora veamos (b). Fijemos $q \in R$. Si $q \notin f(M)$, entonces $\#f^{-1}(q) = 0$. Como M es compacta y N es Hausdorff pues es una variedad, f es cerrada. Entonces $f(M)$ es cerrado y por lo tanto, $f(M)^c$ es un abierto que contiene a q . Allí (vacuamente) todo punto es regular y tiene preimagen de tamaño cero: basta probar la afirmación para $q \in R \cap f(M)$. Sea $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$. Aplicando

el argumento que usamos en (a) a cada punto p_i , obtenemos abiertos $(A_i)_{i=1}^k$ de M y $(B_i)_{i=1}^k$ de N tales que las restricciones $f|_{A_i}^{B_i} : A_i \rightarrow B_i$ de f son difeomorfismos con $p_i \in A_i$ y $q \in B_i$ para todo $i \in \llbracket k \rrbracket$. Más aún podemos garantizar¹ que $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$. Definimos ahora $B = \bigcap_{i \in \llbracket k \rrbracket} B_i$ y $U_i := (f|_{A_i}^{B_i})^{-1}(B)$ para cada $i \in \llbracket k \rrbracket$. Las (co)restricciones

$$f|_{U_i}^B : U_i \rightarrow B$$

con $1 \leq i \leq k$ resultan entonces difeomorfismos.

Definimos² ahora $C = (\bigcap_{i \in \llbracket k \rrbracket} U_i)^c$. Como f es cerrada, $f(C)$ es cerrado. Ahora, una vez más: definimos los abiertos $V := B \setminus f(C)$ y $O_i := (f|_{U_i}^B)^{-1}(V) \stackrel{(V \subset B)}{=} U_i \cap f^{-1}(V)$, de forma que cada restricción $f|_{O_i}^V : O_i \rightarrow V$ sigue siendo un difeomorfismo. Afirmamos ahora que $f^{-1}(V) = \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} O_i$. Por definición ya sabemos que $f^{-1}(V) \supseteq \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} O_i$. Recíprocamente si $x \in f^{-1}(V)$ entonces $f(x) \notin f(C)$ y por lo tanto $x \notin C$. Entonces $x \in C^c = \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} U_i$. Como partimos de que $x \in f^{-1}(V)$, efectivamente obtenemos que

$$x \in f^{-1}(V) \cap \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} U_i = \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} (f^{-1}(V) \cap U_i) = \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} O_i.$$

Veamos que esto implica ambas afirmaciones de (b). Por un lado, si $p \in f^{-1}(V)$ entonces $p \in O_i$ para algún $i \in \llbracket k \rrbracket$ y como $f|_{O_i}^V$ es un difeomorfismo entonces via los isomorfismos $T_p O_i \simeq T_p M$ y $T_{q'} V \simeq T_{q'} N$, tenemos que $d_p f$ es un isomorfismo:

$$\begin{array}{ccc} T_p M & \xrightarrow{d_p f} & T_{q'} N \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ T_p O_i & \xrightarrow{d_p f|_{O_i}^V} & T_{q'} V \end{array}$$

En particular $d_p f$ resulta sobreyectivo. Como $p \in f^{-1}(q')$ era arbitrario, vemos que para cada punto en la preimagen de q' el diferencial allí es sobreyectivo: esto quiere decir que q' es un punto regular, y como $q' \in V$ era arbitrario, es $V \subset R$. Esto prueba que R es abierto: partimos de un punto $q \in R$ y obtuvimos un entorno abierto $V \ni q$ contenido en R . Además, para cada $q' \in V$ tenemos que $f^{-1}(q') \subset f^{-1}(V) \subset \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} O_i$ así que

$$f^{-1}(q') = f^{-1}(q') \cap \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} O_i = \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} (O_i \cap f^{-1}(q')) = \bigcup_{i \in \llbracket k \rrbracket} f|_{O_i}^V{}^{-1}(q').$$

Como los conjuntos $(O_i)_{i \in \llbracket k \rrbracket}$ son disjuntos dos a dos pues $O_i \subset A_i$ para cada i , así que de la anterior igualdad es $\#f^{-1}(q') = \sum_{i=1}^k \#(f|_{O_i}^V{}^{-1}(q'))$. Cada restricción $f|_{O_i}^V$ es biyectiva (pues es un difeomorfismo), de modo que la preimagen de q' en cada caso tiene exactamente un punto:

¹Como M es Hausdorff, existen entornos abiertos $U_i \ni p_i$ para cada $i \in \llbracket k \rrbracket$ disjuntos dos a dos. Luego las (co)restricciones $f : A_i \cap U_i \rightarrow f(A_i \cap U_i)$ siguen siendo difeomorfismos y los abiertos $(A_i \cap U_i)_{i=1}^k$ son disjuntos dos a dos. Por lo tanto, podemos suponer directamente que los abiertos lo eran.

²Dado $q' \in B$, nos gustaría afirmar que su preimagen cae enteramente en la unión de los abiertos U_i pues esto implicaría que es un valor regular. Esto no es necesariamente cierto, al menos a simple vista. Intuitivamente, forzamos esta situación quitándole a B los puntos de $f(C)$, y luego corestringiendo apropiadamente conseguimos nuevos abiertos en M y N que cumplen con lo que buscamos.

$$f^{-1}(q') = \sum_{i=1}^k \#(f|_{O_i}^V(q')) = \sum_{i=1}^k 1 = k = \#f^{-1}(q).$$

Como esto es cierto para cualquier $q' \in V$, la aplicación $q \in R \mapsto \#f^{-1}(q) \in \mathbb{N}_0$ es localmente constante.

Por último, observemos que en general **no es cierto que la aplicación sea constante**. Veamos el siguiente contraejemplo: tomamos $M = N = S_1 \sqcup S_2$ con $S_1 = S_2 = S^1$ que es una variedad compacta, con las inclusiones $j_i : S^1 = S_i \hookrightarrow S_1 \sqcup S_2$ diferenciables³. Si $f_1, f_2 : S^1 \rightarrow S^1$ son diferenciables, entonces $f_1 \sqcup f_2 : S_1 \sqcup S_2 \rightarrow S_1 \sqcup S_2$ lo es: basta probar diferenciabilidad restringiendo a los abiertos S_1 y S_2 . Esto es como ver que la precomposición por las inclusiones es diferenciable, lo que es cierto pues ésta se factoriza por las aplicaciones j_i y f_i , todas diferenciables:

$$\begin{array}{ccc} S_1 \sqcup S_2 & \xrightarrow{f_1 \sqcup f_2} & S_1 \sqcup S_2 \\ \uparrow j_i & & \uparrow j_i \\ S_i & \xrightarrow{f_i} & S_i \end{array}$$

Del diagrama anterior y usando que las inclusiones de abiertos inducen isomorfismos en los tangentes, tenemos para cada $p \in S_i$ que

$$\begin{array}{ccc} T_p S_i & \xrightarrow{d_p f_i} & T_{f_i(p)} S_i \\ \downarrow \wr & & \downarrow \wr \\ T_p(S_1 \sqcup S_2) & \xrightarrow{d_p f_1 \sqcup f_2} & T_{f_i(p)}(S_1 \sqcup S_2) \end{array}$$

conmuta. Como f_1, f_2 y $f_1 \sqcup f_2$ son funciones entre variedades de igual dimensión, sus diferenciales son sobreyectivos si y sólo si son isomorfismos. En particular, si $q \in S_i$ es un valor regular para f_i es también un valor regular para $f_1 \sqcup f_2$.

Ahora, pasemos a una función concreta: tomamos $g : z \in S^1 \mapsto z^2 \in S^1$, pensando a $S^1 \subset \mathbb{C}$, y consideramos $\text{id} \sqcup g$. Por la observación anterior, todo punto p de S_1 es regular, y su preimagen es exactamente $\{p\} \subset S_1$. Por otro lado, si $p \in S_2$ es $\#(\text{id} \sqcup g)^{-1}(p) = \#g^{-1}(p) = 2$. Por lo tanto, resta probar que existe algún valor regular $p \in S^1$ de g para concluir que la función $q \in R \mapsto (\text{id} \sqcup g)^{-1}(p)$ en este caso no es constante. Más aún, como aquí los espacios tangentes son 1-dimensionales, basta ver que existe $p \in S^1$ tal que $d_p g$ es no nulo, pues en tal caso será sobreyectivo⁴. Veamos que $d_{(1,0)} g$ es no nulo. Para esto, consideramos la carta

$$\varphi : (x, y) \in \{(x, y) \in S^1 : x > 0\} \mapsto y \in (-1, 1)$$

³Tomamos la topología coproducto y las siguientes cartas: para cada carta (U, φ) en el atlas maximal de S^1 tenemos dos cartas (U_i, φ_i) con $U_i = U$ visto en S_i y $\varphi_i = \varphi$ bajo la misma identificación. Por lo tanto, si $p \in S^1$, tomamos (U, φ) una carta de S^1 con $U \ni p$ y (U_i, φ_i) en $S_1 \sqcup S_2$. Entonces $\varphi_i j_i \varphi^{-1} = \varphi^{-1} \varphi = \text{id}_{\varphi(U)}$. Esto dice que las inclusiones j_1, j_2 resultan diferenciables.

⁴Como S^1 es conexa y g no es constante, el ejercicio (12) que resolvemos más adelante garantiza que debe existir cierto $p \in S^1$ para el cual es $d_p g \neq 0$. De todas formas, optamos por una resolución elemental.

alrededor de $(0, 1)$. Como $g(1, 0) = (1, 0)$, luego $\frac{d}{dt}\big|_{(1,0)}^\varphi$ es una derivación en $(1, 0)$ y entonces basta con ver que

$$d_{(0,1)}g \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{(1,0)}^\varphi \right) (\varphi) = \frac{d}{dt}\bigg|_{(1,0)}^\varphi (\varphi g) = \frac{d(\varphi g \varphi^{-1})}{dt}\bigg|_0$$

es distinto de cero para concluir que $d_{(1,0)}g \neq 0$. Como $g(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy)$, es

$$\varphi g \varphi^{-1}(y) = \varphi g(\sqrt{1-y^2}, y) = \varphi(1-y^2-y^2, 2\sqrt{1-y^2}y) = 2y\sqrt{1-y^2}$$

y entonces $\frac{d(\varphi g \varphi^{-1})}{dt} = \frac{2-4y^2}{\sqrt{1-y^2}}$. Por lo tanto,

$$d_{(0,1)}g \left(\frac{d}{dt}\bigg|_{(1,0)}^\varphi \right) (\varphi) = \frac{2-4y^2}{\sqrt{1-y^2}}\bigg|_0 = 2 \neq 0.$$

Esto termina de mostrar que si bien la aplicación del ejercicio es localmente constante, no necesariamente resulta constante. □

Ejercicio 9. Sea M una variedad diferenciable de dimensión n y \mathcal{A} su atlas maximal. Sea $TM = \bigsqcup_{p \in M} T_p M$ y sea $\pi : TM \rightarrow M$ la función tal que $\pi(v) = p$ si $v \in T_p M$. Para cada $(U, \chi) \in \mathcal{A}$, sea $TU = \bigsqcup_{p \in U} T_p M \subset TM$ y $\bar{\chi} : TU \rightarrow \chi(U) \times \mathbb{R}^n$ la función tal que

$$\bar{\chi}(v) = (\chi(\pi(v)), v(\chi^1), \dots, v(\chi^n))$$

cada vez que $v \in TU$. Probar que:

- (a) La función $\bar{\chi} : TU \rightarrow \chi(U) \times \mathbb{R}^n$ es una biyección con inversa

$$\bar{\chi}^{-1}(a, b^1, \dots, b^n) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x^i} \bigg|_{x^{-1}(a)}$$

para cada $a \in \chi(U)$.

- (b) Si $(U, \chi), (V, \psi) \in \mathcal{A}$ y $U \cap V \neq \emptyset$, entonces $\bar{\chi}(TU \cap TV) = \chi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un abierto de \mathbb{R}^{2n} y la biyección $\bar{\chi} \circ \bar{\psi}^{-1} : \psi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \chi(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ es un difeomorfismo.
- (c) El conjunto TM admite una estructura diferenciable que lo transforma en una variedad diferenciable de dimensión $2n$, con atlas

$$\overline{\mathcal{A}} = \{(TU, \bar{\chi}) : (U, \chi) \in \mathcal{A}\}.$$

- (d) Con respecto a esta estructura diferenciable, la proyección $\pi : TM \rightarrow M$ es diferenciable.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado,

- (a) Sean $(a, b) = (a, b^1, \dots, b^n) \in x(U) \times \mathbb{R}^n$ y $h(a, b) := \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^{-1}(a)}$. Como $h(a, b)$ es una combinación lineal de derivaciones en $x^{-1}(a)$, resulta una derivación en $x^{-1}(a)$. Por lo tanto, $h(a, b) \in T_{x^{-1}(a)}M$ y entonces $x\pi(h(a, b)) = xx^{-1}(a) = a$. Además, si $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la j -ésima coordenada, para cada $j \in \llbracket n \rrbracket$ es $x^j = \pi_j x$ y entonces

$$\begin{aligned} h(a, b)(x^j) &= \left(\sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^{-1}(a)} \right) (x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^{-1}(a)} (x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (x^j x^{-1})}{\partial x_i} \Big|_a \\ &= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} \Big|_a = \sum_{i=1}^n b^i \delta_{ij} = b^j. \end{aligned}$$

Concluimos así que $\bar{x}(h(a, b)) = (a, b) \in x(U) \times \mathbb{R}^n$. Recíprocamente si $v \in M_p$ con $p \in U$, luego

$$\begin{aligned} h(\bar{x}(v)) &= h(x\pi(v), v(x^1), \dots, v(x^n)) = \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{x^{-1}(x\pi(v))} = \\ &= \sum_{i=1}^n v(x^i) \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p. \end{aligned}$$

Esto último coincide justamente la expresión de v en la base $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_p \right\}_{i=1}^n$, lo que termina de probar que $h = \bar{x}^{-1}$.

- (b) En primer lugar, notemos que como $U \cap V$ es abierto y x homeomorfismo, $x(U \cap V)$ es abierto y así $x(\underline{U \cap V}) \times \mathbb{R}^n$ es abierto en \mathbb{R}^{2n} . Tenemos también que $TU \cap TV = T(U \cap V)$ y usando (a), es $x|_{U \cap V} = \bar{x}|_{T(U \cap V)}$ por lo que $x|_{U \cap V}$ resulta sobreyectiva (ya que $x|_{U \cap V}$ es otra carta de M). Luego (b) nos dice que en efecto $\bar{x}(TU \cap TV) = x(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$.

Veamos ahora que \bar{xy}^{-1} es un difeomorfismo. Como \bar{x} e \bar{y} son biyectivas, basta ver que las composiciones \bar{xy}^{-1} y $\bar{y}\bar{x}^{-1}$ son diferenciables. Por simetría (ya que podemos intercambiar los roles de x e y) basta probar un caso: lo hacemos para \bar{xy}^{-1} . Por un cálculo directo, si $(a, b) \in y(U \cap V) \times \mathbb{R}^n$ y $\pi_j : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es la proyección en la j -ésima coordenada, para cada $j \in \llbracket n \rrbracket$ es $x^j y^{-1} = \pi_j x y^{-1} = (x y^{-1})^j$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \bar{y}^{-1}(a, b)(x^j) &= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial}{\partial y_i} \Big|_{y^{-1}(a)} (x^j) = \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (x^j y^{-1})}{\partial x_i} \Big|_a \\ &= \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (x y^{-1})^j}{\partial x_i} \Big|_a = \mathbb{J}(x y^{-1})_a \cdot b)_j \end{aligned}$$

con $\mathbb{J}(x y^{-1})_a$ la matriz jacobiana de $x y^{-1} : y(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow x(U \cap V) \subset \mathbb{R}^n$ en el punto $a \in y(U \cap V)$. Por (a) sabemos que $\pi_j \bar{y}^{-1}(a, b) = y^{-1}(a)$, así que

$$\begin{aligned} x \bar{y}^{-1}(a, b) &= (x\pi(\bar{y}^{-1}(a, b)), \bar{y}^{-1}(a, b)(x^1), \dots, \bar{y}^{-1}(a, b)(x^n)) \\ &= (x y^{-1}(a), \mathbb{J}(x y^{-1})_a \cdot b)_1, \dots, \mathbb{J}(x y^{-1})_a \cdot b)_n) \\ &= (x y^{-1}(a), \mathbb{J}(x y^{-1})_a \cdot b). \end{aligned}$$

Como M es variedad diferenciable, xy^{-1} es suave y entonces $a \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a$ es suave. Ésto último dice que $(a, b) \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b$ es suave⁵, de lo que concluimos que $\bar{x}\bar{y}^{-1}$ es diferenciable.

- (c) Procedemos por pasos: primero dotaremos al fibrado tangente de una topología que hará del mismo un espacio T_2 localmente euclídeo con base numerable. Es decir, le daremos a TM una estructura de variedad topológica, donde además cada función $\bar{x} : \tau U \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ resultará un homeomorfismo. Por último, concluiremos que con esta estructura $\bar{\mathcal{A}}$ es un atlas diferenciable.

En primer lugar, afirmamos que la colección

$$\mathcal{B} = \{\bar{x}^{-1}(V) : (U, x) \in \mathcal{A}, V \subset x(U) \times \mathbb{R}^n \text{ abierto}\}$$

es una base para una topología en TM . Dado $v \in T_p M \subset TM$, existe una carta (U, x) con $U \ni p$ y entonces $v \in \tau U = \bar{x}^{-1}(x(U) \times \mathbb{R}^n) \in \mathcal{B}$. Por lo tanto es $\bigcup_{U \in \mathcal{B}} U = TM$. Ahora, sean $\bar{x}_1^{-1}(W_1), \bar{x}_2^{-1}(W_2) \in \mathcal{B}$ con $(U_1, x_1), (U_2, x_2) \in \mathcal{A}$ y $W_1, W_2 \subset \mathbb{R}^{2n}$ abiertos. Entonces, se tiene que

$$\begin{aligned} \bar{x}_1^{-1}(W_1) \cap \bar{x}_2^{-1}(W_2) &= (\bar{x}_1^{-1}(W_1) \cap \tau U_1) \cap (\tau U_2 \cap \bar{x}_2^{-1}(W_2)) \\ &= \bar{x}_1^{-1}(W_1) \cap \bar{x}_2^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n) \cap \bar{x}_2^{-1}(W_2) \\ &= \bar{x}_1^{-1}(W_1) \cap \bar{x}_2^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2) \\ &= \bar{x}_1^{-1}(W_1) \cap \bar{x}_1^{-1} \circ \bar{x}_1 \circ \bar{x}_2^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2) \\ &= \bar{x}_1^{-1}(W_1 \cap \bar{x}_1 \circ \bar{x}_2^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2)). \end{aligned}$$

Como $x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2$ es abierto y $\bar{x}_1 \circ \bar{x}_2^{-1}$ es difeomorfismo, $\bar{x}_1 \bar{x}_2^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2)$ es abierto. Luego

$$W_1 \cap \bar{x}_1 \circ \bar{x}_2^{-1}(x_2(U_1 \cap U_2) \times \mathbb{R}^n \cap W_2)$$

resulta abierto y por lo tanto, $\bar{x}_1^{-1}(W_1) \cap \bar{x}_2^{-1}(W_2)$ se puede escribir como la preimagen por \bar{x}_1 de un abierto de $x_1(U_1) \times \mathbb{R}^n$. En particular esto termina de probar que \mathcal{B} es una base. Dotamos entonces a TM de la topología generada por \mathcal{B} .

Si (U, x) es una carta de M , afirmamos ahora que $\bar{x} : \tau U \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ es un homeomorfismo. Por construcción de la topología en TM , resulta continua. Resta ver que es abierta: si tomamos un abierto básico $\tau U \cap \bar{y}^{-1}(W)$ con $(V, y) \in \mathcal{A}$ y $W \subset \mathbb{R}^{2n}$ abierto, es

$$\begin{aligned} \bar{x}(\tau U \cap \bar{y}^{-1}(W)) &= \bar{x}(\tau U \cap \tau V \cap \bar{y}^{-1}(W)) = \bar{x}(\bar{y}^{-1}(U \cap V \times \mathbb{R}^n) \cap \bar{y}^{-1}(W)) \\ &= \bar{x} \circ \bar{y}^{-1}(U \cap V \times \mathbb{R}^n \cap W). \end{aligned}$$

Efectivamente $\bar{x}(\tau U \cap \bar{y}^{-1}(W))$ es entonces abierto, ya que $U \cap V \times \mathbb{R}^n \cap W$ es abierto y $\bar{x} \circ \bar{y}^{-1}$ un difeomorfismo. Como \bar{x} es además biyectiva, es un homeomorfismo. En particular TM es **localmente euclídeo**: si $v \in T_p M \subset TM$, tomando una carta (U, x) de M con $p \in U$ tenemos un homeomorfismo $\bar{x} : \tau U \rightarrow x(U) \times \mathbb{R}^n$ con $\tau U \ni v$.

⁵Esto es porque en cada componente $(a, b) \mapsto \mathbb{J}(xy^{-1})_a \cdot b$ coincide con $(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n b^i \frac{\partial (xy^{-1})^j}{\partial x_i} \Big|_a$ que es una suma de productos de proyectar a $\mathbb{J}(xy^{-1})$ o $(a, b) \mapsto b$ en alguna coordenada, y todas las funciones involucradas son suaves.

A continuación, veamos que TM resulta **Hausdorff**. Sean $v \neq w \in TM$ dos derivaciones, de forma que existen $p, q \in M$ con $v \in T_p M$ y $w \in T_q M$. Si $p = q$, tomamos una carta (U, x) de M con $p \in U$. Luego $v, w \in TU$ y $\bar{x}(v) \neq \bar{x}(w)$ así que como \mathbb{R}^{2n} es T_2 , existen abiertos disjuntos $U \ni \bar{x}(v)$ y $V \ni \bar{x}(w)$. Por lo tanto $\bar{x}^{-1}(U)$ y $\bar{x}^{-1}(V)$ son dos abiertos disjuntos que separan a v de w . Si en cambio $p \neq q$, consideramos cartas (U, x) y (V, y) con U y V disjuntos. Tenemos entonces que $TU \cap TV = \emptyset$ y $v \in TU, w \in TV$. En cualquier caso, siempre existen abiertos disjuntos que separan a v y w .

Por último, TM tiene una **base numerable**: como M es una variedad, tiene una base numerable. En particular, el cubrimiento $\{U : (U, x) \in \mathcal{A}\}$ de M tiene un subcubrimiento numerable $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ con $(U_n, x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cartas de M . Para cada $n \in \mathbb{N}$, el abierto $x_n(U_n) \times \mathbb{R}^n$ tiene una base numerable $\{V_j^n\}_{j \in \mathbb{N}}$. Afirmamos entonces que el conjunto numerable $\mathcal{B}' = \{\bar{x}_n^{-1}(V_j^n)\}_{(n,j) \in \mathbb{N}^2}$ es una base de TM . Sea (U, x) una carta de M , $W \subset x(U) \times \mathbb{R}^n$ abierto y $v \in \bar{x}^{-1}(W)$. Veamos que hay un abierto de \mathcal{B}' que contiene a v y está contenido en $\bar{x}^{-1}(W)$. De que $v \in TU$ sabemos que existe $p \in U$ tal que v es una derivación en p y, como tenemos que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cubre M , existe $k \geq 1$ con $U_k \ni p$. En consecuencia es $v \in TU_k \cap \bar{x}^{-1}(W)$. Entonces podemos escribir

$$TU_k \cap \bar{x}^{-1}(W) = \bar{x}_k^{-1} \bar{x}_k(TU_k \cap \bar{x}^{-1}(W))$$

y como $\bar{x}_k(v) \in \bar{x}_k(TU_k \cap \bar{x}^{-1}(W)) \subset x_k(U_k) \cap \mathbb{R}^n$, existe $l \geq 1$ tal que $\bar{x}_k(v) \in V_l^k \subset \bar{x}_k(TU_k \cap \bar{x}^{-1}(W))$. Esto dice que

$$v \in \bar{x}_k^{-1}(V_l^k) \subset \bar{x}_k^{-1} \bar{x}_k(TU_k \cap \bar{x}^{-1}(W)) \subset \bar{x}^{-1}(W),$$

así que existe un tal entorno de \mathcal{B}' , como afirmamos.

En conclusión, TM es una variedad topológica. Como $\bigcup_{(U,x) \in \mathcal{A}} TU = T(\bigcup_{(U,x) \in \mathcal{A}} U) = TM$ y las funciones $\{\bar{x} : (U, x) \in \mathcal{A}\}$ resultan homeomorfismos, para concluir que $\bar{\mathcal{A}}$ es un atlas diferenciable resta ver que los cambios de coordenadas son difeomorfismos. Esto es precisamente el inciso (b). Concluimos entonces que TM con la estructura que le provee $\bar{\mathcal{A}}$ resulta una variedad diferenciable de dimensión $2n$.

- (d) Sea $v \in TM$. Existen entonces $p \in M$ tal que $v \in T_p M$ y una carta (U, x) de M con $\pi(v) = p \in U$. Por (c) sabemos que (TU, \bar{x}) es una carta de v , y por definición de TU es también $\pi(TU) = U$. Por lo tanto, resta ver que *bajando* con estas cartas la función que resulta es diferenciable entre abiertos euclídeos. Es decir, basta probar que $x \circ \pi \circ \bar{x}^{-1}$ es diferenciable.

$$\begin{array}{ccc} TU & \xrightarrow{\pi} & U \\ \bar{x} \downarrow & & \downarrow x \\ x(U) \times \mathbb{R}^n & \xrightarrow{x \circ \pi \circ \bar{x}^{-1}} & x(U) \end{array}$$

Como para todo $v \in TU$ el vector $x \circ \pi(v)$ coincide con las primeras n coordenadas de $\bar{x}(v)$, notando $\pi_1 : (p, q) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \mapsto p \in \mathbb{R}^n$ es entonces $x \circ \pi \circ \bar{x}^{-1} = \pi_1|_{x(U) \times \mathbb{R}^n} \circ \bar{x} \circ \bar{x}^{-1} = \pi_1|_{x(U) \times \mathbb{R}^n}$. Esta última es diferenciable ya que es la restricción al abierto $x(U) \times \mathbb{R}^n$ de la función diferenciable π_1 . Consecuentemente, $\pi : TM \rightarrow M$ resulta diferenciable.

□

Observación. Sean M una variedad diferenciable y $f \in C^\infty(M)$ una función que vale constantemente $\mu \in \mathbb{R}$. Si $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ es una derivación en $p \in M$, entonces $v(f) = 0$. En efecto, notando $1 : M \rightarrow \mathbb{R}$ a la función que vale constantemente 1 es

$$v(1) = v(1 \cdot 1) \stackrel{(\text{Leibniz})}{=} 1(p)v(1) + 1(p)v(1) = 2v(1),$$

lo que implica $v(1) = 0$. En consecuencia, $v(f) = v(\mu \cdot 1) = \mu v(1) = 0$.

Recuerdo ahora el siguiente resultado que utilizaré a continuación,

Proposición. Sea X un espacio topológico conexo y $f : X \rightarrow Y$ una función. Si f es localmente constante, entonces es constante.

Demostración. Si $y \in \text{im } f$, el conjunto $E_y := f^{-1}(y) = \{x \in X : f(x) = y\}$ es abierto: para cada $z \in E_y$ existe por hipótesis un abierto $U \ni z$ donde f es constante, y como $f(z) = y$ luego f vale constantemente y en todo U . Por lo tanto, $z \in U \subset E_y$. Además los conjuntos $(E_y)_{y \in \text{im } f}$ son disjuntos, pues si $z \in E_y \cap E_{y'}$, entonces $y = f(z) = y'$. Como X es conexo y

$$X = \bigsqcup_{y \in \text{im } f} E_y$$

es una unión de abiertos disjuntos no vacíos, necesariamente $\# \text{im } f = 1$. Esto es precisamente que f sea una función constante. \square

Ejercicio 12. Sean M y N variedades diferenciables y sea $f : M \rightarrow N$ una función diferenciable. Probar que

- Si f es constante, entonces $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$.
- Si M es conexa y $f_{*p} = 0$ para todo $p \in M$, entonces f es constante.

Demostración. Notaremos $c_q : M \rightarrow N$ a la función que vale constantemente q y definimos $m := \dim M, n := \dim N$. Supongamos en primer lugar que $f = c_q$ para cierto $q \in N$. Sea $p \in M$ y veamos que f_{*p} es nula. Dada una derivación $v : C^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ en p y $g \in C^\infty(M)$, luego es

$$f_{*p}(v)(g) = v(- \circ f)(g) = v(gf) = v(gc_q) = v(c_{g(q)}) = 0,$$

pues notamos anteriormente que las funciones constantes tienen imagen nula por una derivación. Como $f_{*p}(v)$ se anula en toda función, es $f_{*p}(v) = 0$. Por lo tanto, f_{*p} se anula en toda derivación: esto dice que $f_{*p} = 0$. Como p era arbitrario, f_{*p} resulta nula para cualquier $p \in M$.

Supongamos ahora que M es conexa y veamos para este caso la afirmación recíproca. Alcanza con probar que f es localmente constante: fijemos entonces $p \in M$ y veamos que existe un entorno abierto de p donde f es constante. Consideramos ahora una carta (V, ψ) de N con $f(p) \in V$ y una carta (U, φ) de M con $p \in U \subset f^{-1}(V)$ y U conexo⁶. Luego, los *ganchos* $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q^\varphi \right\}_{i=1}^n$ son

⁶Como f es continua $f^{-1}(V)$ es abierto, y entonces $f^{-1}(V) \cap U$ es un abierto de M que contiene a p . Por lo tanto $f^{-1}(V) \cap U$ es un abierto en U , y como éste es homeomorfo a un abierto euclídeo, también lo es $f^{-1}(V) \cap U$. En particular tenemos un entorno conexo \tilde{U} de p contenido en $f^{-1}(V) \cap U$. La restricción de la carta a \tilde{U} es una carta que cumple lo que pedimos, por lo que podemos sin pérdida de generalidad asumir directamente a U conexo con $U \subset f^{-1}(V)$.

una base de $T_q M$ para cada $q \in U$. Por hipótesis, si $g \in C^\infty(N)$ y v es una derivación en q , es $v(gf) = f_{*q}(v)(g) = 0$. En particular,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_q^\varphi (gf) = \frac{\partial gf \varphi^{-1}}{\partial x_i} \Big|_{\varphi^{-1}(q)} = 0$$

para todo $i \in \llbracket m \rrbracket$ y $q \in U$. Es decir, la función diferenciable $gf\varphi^{-1} : \varphi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{R}$ tiene gradiente nulo. Como U es conexo y φ es homeomorfismo, luego $\varphi^{-1}(U)$ es conexo. Como $gf\varphi^{-1}$ tiene gradiente nulo y dominio conexo, es constante:

$$gf\varphi^{-1}(x) = \mu_g \in \mathbb{R} \quad (\forall x \in \varphi^{-1}(U)).$$

Equivalentemente, se tiene que $gf \equiv c_{\varphi(\mu_g)}$ en U para cada $g \in C^\infty(N)$. Ahora, dado $i \in \llbracket n \rrbracket$ siempre existe $\bar{\psi}^i \in C^\infty(N)$ tal que $\bar{\psi}^i|_V = \psi^i$ y existen entonces constantes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que $\bar{\psi}^i f \equiv c_i$ en U . Como $f(U) \subset V$, es

$$c_i \equiv \bar{\psi}^i|_V \circ f \Big|_U^V = \psi^i \circ f \Big|_U^V$$

en U para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$, de forma que $\psi f|_U^V \equiv (c_1, \dots, c_n) =: c$. Como ψ es homeomorfismo, luego $f|_U^V \equiv \psi^{-1}(c)$. Vemos así que f es constante en el abierto $U \ni p$, lo que completa la demostración. \square