

# Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre – 2019

Segundo Parcial

Guido Arnone

---

**Ejercicio 1.** Sea  $M$  una variedad riemanniana, sea  $\nabla$  la conexión de Levi-Civita de  $M$  y sea  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  una función diferenciable.

- (a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable  $\text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$  y uno solo con la propiedad de que para cada campo  $Y \in \mathfrak{X}(M)$  se tiene que

$$\langle \text{grad}(f), Y \rangle = df(Y).$$

Encuentre una expresión en coordenadas para el campo  $\text{grad}(f)$ .

- (b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que  $X$  e  $Y$  son elementos de  $\mathfrak{X}(M)$  se tiene que

$$\langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle = \langle X, \nabla_Y \text{grad}(f) \rangle.$$

- (c) Muestre que si el campo  $\text{grad}(f)$  tiene norma constante, entonces para todo  $X \in \mathfrak{X}(M)$  se tiene que  $\langle \nabla_{\text{grad}(f)} \text{grad}(f), X \rangle = 0$ . Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de  $\text{grad}(f)$  son geodésicas.

*Demostración.* content...

□

**Ejercicio 2.** Sean  $M$  y  $N$  dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión  $n$  y sea  $f : M \rightarrow N$  una función diferenciable.

- (a) Muestre que hay un número real  $\lambda \in \mathbb{R}$  tal que para toda forma  $\omega \in \Omega^n(N)$  se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos *grado* de  $f$  y lo escribimos  $\deg(f)$ .

- (b) Supongamos que  $q \in N$  es valor regular de  $f$ , de manera que, en particular, el conjunto  $f^{-1}(q)$  es finito. Si  $p \in f^{-1}(q)$  la diferencial es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$\text{sgn}_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} \text{sgn}_f(p).$$

*Demostración.* content... □

**Ejercicio 3.** Muestre que cuando  $n \geq 1$  el grado de toda función diferenciable  $f : S^n \rightarrow T^n$  de la  $n$ -esfera al  $n$ -toro es nulo.

*Demostración.* content... □

**Ejercicio 4.** Sea  $M$  una variedad compacta, orientable, conexa de dimensión  $n$ . Sabemos que la cohomología de De Rham de  $M$  tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \dim H^i(M)$$

al que llamamos la *característica de Euler* de  $M$ .

- (a) Si la dimensión  $n$  de  $M$  es impar, entonces  $\chi(M) = 0$ .  
 (b) Si la dimensión  $n$  de  $M$  es par y la de  $H^{n/2}(M)$  es par, entonces  $\chi(M)$  es un entero par.

*Demostración.* content... □

**Ejercicio 5.** Sea  $G$  un grupo de Lie de dimensión  $n$ , sea  $\mathfrak{g} = T_e G$  su álgebra de Lie y fijemos un producto interno  $g_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathbb{R}$  sobre  $\mathfrak{g}$ .

- (a) Hay una única métrica riemanniana  $g$  sobre  $G$  que es invariante a izquierda y cuyo valor en  $e \in G$  es  $g_e$ .  
 (b) Sea  $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$  una base de  $\mathfrak{g}$  y sean  $X_1, \dots, X_n$  los campos tangentes a  $G$  invariantes a izquierda que extienden a los elementos de  $\mathcal{B}$ . Muestre que para cada  $i, j$ , es *constante* la función  $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$ .

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes  $c_{i,j}^k$  tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares  $c_{i,j}^k$  y  $g_{i,j}$  los símbolos de Christoffel  $\Gamma_{ij}^k$  de la conexión de Levi-Civita de  $G$  con respecto a los campos  $X_1, \dots, X_n$ , de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

(c) Sea  $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$  el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada  $(a, b), (c, d) \in G$ , de manera que  $G$  es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro  $G$  es  $e = (1, 0)$  y su álgebra de Lie  $\mathfrak{g} = T_e G$  se identifica de manera natural (porque  $G$  es un abierto de  $\mathbb{R}^2$ ) con  $\mathbb{R}^2$ . Dotemos a  $G$  de su única métrica invariante a izquierda que en  $T_e G$  restringe al producto interno usual de  $\mathbb{R}^2$ . Encuentre todas las geodésicas que pasan por  $e$  que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura  $R(X, Y)Z$  sobre  $G$  y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i, j \leq n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada  $p \in G$ , con  $\{z_1, \dots, z_n\}$  una base ortonormal de  $T_p G$ .

*Demostración.* content...

□

**Ejercicio 6.** Sea  $M$  una variedad compacta y orientable de dimensión  $4k$ .

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\sigma : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que si  $\omega$  y  $\eta$  son elementos cerrados de  $\Omega^{2k}(M)$  entonces

$$\beta([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos la signatura de la forma bilineal  $\sigma$  la signatura de  $M$ .

(b) Determine la signatura de  $S^4$ , de  $S^2 \times S^2$ , del toro  $T^4$ , del espacio proyectivo  $P_{\mathbb{C}}^2$  y el producto  $P_{\mathbb{C}}^2 \times P_{\mathbb{C}}^2$ .

*Demostración.* content...

□

**Ejercicio 7.** Sea  $M \subseteq \mathbb{R}^3$  una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanniana inducida por la de  $\mathbb{R}^3$  y supongamos que hay un campo vectorial  $Z \in \mathfrak{X}(M)$  sobre  $M$  que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  tales que para cada  $p \in M$  se tiene que  $(X_p, Y_p)$  es una base ortonormal positiva de  $T_p M$  y  $Z_p = \|Z_p\|X_p$ .

(b) Hay 1-formas  $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$  tales que  $\alpha(X) = \beta(Y) = 1$  y  $\alpha(Y) = \beta(X) = 0$ . Más aún, existe una forma  $\eta \in \Omega^1(M)$  tal que

$$d\alpha = \eta \wedge \beta, \quad d\beta = -\eta \wedge \alpha.$$

La forma  $\sigma = \alpha \wedge \beta$  no depende de la elección de  $Z$ , es una forma de volumen sobre  $M$  que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanniano sobre  $M$ .

- (c) Existe una función diferenciable  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$d\eta = -K \cdot \sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo  $Z$ .

- (d) Si  $M$  es compacta, entonces  $\int_M K \cdot \sigma = 0$ .

- (e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre  $S^2$  un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

*Demostración.* content...

□