

Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 4

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí los ejercicios (6), (8) y el inciso (d) del ejercicio (11).

Ejercicio 6. Si M y N son variedades no vacías, entonces $M \times N$ es orientable si y sólo si M y N lo son.

Demostración. Veamos ambas implicaciones

- (\Rightarrow) Supongamos que $M \times N$ es orientable, y veamos que M lo es. Un argumento similar prueba lo mismo para N .
- (\Leftarrow) Ahora supongamos que tanto M como N son variedades orientables de dimensión m y n respectivamente, de forma que existen atlas orientables A y A' de M y N respectivamente. Veamos ahora que el atlas

$$\mathcal{A} = \{(\phi \times \psi, U \times V) : (\phi, U) \in A, (\psi, V) \in A'\}$$

de $M \times N$ resulta orientable.

Sean $\phi \times \psi : U \times V \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ y $\phi' \times \psi' : U' \times V' \rightarrow \mathbb{R}^{m+n}$ dos cartas de \mathcal{A} y (p, q) un punto de $U \times V \cap U' \times V'$. Ahora, notando $\pi_i : \mathbb{R}^{m+n} \rightarrow \mathbb{R}$ a la proyección a la i -ésima coordenada, para cada $i, j \in \llbracket n+m \rrbracket$ es

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(\phi(p), \psi(q))} [(\phi' \times \psi')^i \circ (\phi \times \psi)^{-1}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(\phi(p), \psi(q))} [\pi_i \circ (\phi' \times \psi') \circ \phi^{-1} \times \psi^{-1}] \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{(\phi(p), \psi(q))} [(\phi' \phi^{-1} \times \psi' \psi^{-1})^i] \end{aligned}$$

y por tanto,

$$\frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\phi(p)} (\phi' \phi^{-1})^i & \text{si } 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n \\ 0 & \text{si } 1 \leq i \leq n, n+1 \leq j \leq n+m \\ 0 & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m, 1 \leq j \leq n \\ \frac{\partial}{\partial x_{j-n}} \Big|_{\psi(q)} (\psi' \psi^{-1})^{i-n} & \text{si } n+1 \leq i \leq n+m, n+1 \leq j \leq n+m \end{cases}$$

Como por definición tenemos que $\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{\phi(p)} (\phi' \phi^{-1})^i = \frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p$ y $\frac{\partial}{\partial x_{j-n}} \Big|_{\psi(q)} (\phi' \phi^{-1})^{i-n} = \frac{\partial \psi'^{i-n}}{\partial \psi^{j-n}} \Big|_q$, en definitiva resulta

$$\left(\frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} \right)_{i,j} = \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right)_{i,j} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j} \Big|_q \right)_{i,j} \end{pmatrix}.$$

Finalmente como los atlas A y A' son orientados, las matrices de cambio de coordenadas de las cartas ϕ, ϕ' y ψ, ψ' tienen determinante positivo. De aquí vemos que

$$\begin{aligned} \det \left(\frac{\partial(\phi' \times \psi')^i}{\partial(\phi \times \psi)^j} \Big|_{(p,q)} \right)_{i,j} &= \det \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right)_{i,j} & 0 \\ 0 & \left(\frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j} \Big|_q \right)_{i,j} \end{pmatrix} \\ &= \det \left(\frac{\partial \phi'^i}{\partial \phi^j} \Big|_p \right)_{i,j} \cdot \det \left(\frac{\partial \psi'^i}{\partial \psi^j} \Big|_q \right)_{i,j} > 0, \end{aligned}$$

lo que termina de probar que \mathcal{A} es orientado.

□

Ejercicio 8.

a) Si $f : M \rightarrow N$ es una función diferenciable entre variedades, probar que los pull-backs $f^* : \Omega^k(N) \rightarrow \Omega^k(M)$ son tales que

- (i) $f^*(\omega_1 + \omega_2) = f^*(\omega_1) + f^*(\omega_2)$
- (ii) $f^*(h \cdot \omega_1) = h \circ f \cdot f^*(\omega_1)$
- (iii) $f^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = f^*(\omega_1) \wedge f^*(\omega_2)$

para cada $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^\bullet(N)$ y $h \in C^\infty(N)$.

b) Si U y V son abiertos de \mathbb{R}^n y $f : U \rightarrow V$ es diferenciable, entonces

$$f^*(dx_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k$$

y

$$f^*(g \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = g \circ f \cdot \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ y cada $g \in C^\infty(V)$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

- (a) Sean $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(N)$ y $\eta \in \Omega^l(N)$. Para verificar las igualdades del enunciado basta ver que, en cada punto de la variedad, las formas coinciden en todo vector tangente. Fijamos entonces $p \in N$ y $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_{k+l} \in T_p N \subset TN$.

En primer lugar, (i) e (ii) son ciertas pues

$$\begin{aligned} f^*(\omega_1 + \omega_2)_p(v_1, \dots, v_k) &= (\omega_1 + \omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= (\omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) + (\omega_2)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= f^*(\omega_1)_p(v_1, \dots, v_k) + f^*(\omega_2)_p(v_1, \dots, v_k) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} f^*(h \cdot \omega_1)_p(v_1, \dots, v_k) &= (h \cdot \omega_1)_{f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p)) \cdot \omega_{1f(p)}(f_{*,p}(v_1), \dots, f_{*,p}(v_k)) \\ &= h(f(p)) \cdot f^*(\omega_1)_p(v_1, \dots, v_k). \end{aligned}$$

Ahora observemos que si tomamos $\sigma \in S_{k+l}$ y notamos $\tilde{v}_i := d_p f(v_i)$, entonces

$$\begin{aligned} \sigma \cdot (\omega \otimes \eta)_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{k+l})) &= (\omega \otimes \eta)_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(1)}, \dots, \tilde{v}_{\sigma(k+l)}) \\ &= \omega_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(1)}, \dots, \tilde{v}_{\sigma(k)}) \cdot \eta_{f(p)}(\tilde{v}_{\sigma(k+1)}, \dots, \tilde{v}_{\sigma(k+l)}) \\ &= f^*(\omega_p)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(k)}) \cdot f^*(\eta)_p(v_{\sigma(k+1)}, \dots, v_{\sigma(k+l)}) \\ &= \sigma \cdot (f^*(\omega) \otimes f^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}). \end{aligned}$$

En consecuencia se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(\omega \wedge \eta)_p(v_1, \dots, v_{k+l}) &= (\omega \wedge \eta)_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \sigma \cdot (\omega \otimes \eta)_{f(p)}(d_p f(v_1), \dots, d_p f(v_{k+l})) \\ &= \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (-1)^\sigma \sigma \cdot (f^*(\omega) \otimes f^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}) \\ &= (f^*(\omega) \wedge f^*(\eta))_p(v_1, \dots, v_{k+l}), \end{aligned}$$

lo que prueba (iii).

- b) Dado $s \in \llbracket n \rrbracket$, para cada $p \in U$ y $g \in C^\infty(V)$ es

$$\begin{aligned} d_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) (g) &= \frac{\partial g f}{\partial x_s} \Big|_p = (D_p(gf))_s = (D_{f(p)} g D_p f)_s \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial g}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \cdot \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} (g). \end{aligned}$$

y entonces

$$d_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)}.$$

.

Si ahora tomamos $i \in \llbracket n \rrbracket$, se tiene que

$$\begin{aligned} f^*(dx_i)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) &= dx_{if(p)} \left(d_p f \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) \right) = dx_{if(p)} \left(\sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \right) \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_s} \Big|_p \cdot dx_{if(p)} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \Big|_{f(p)} \right) = \frac{\partial f_i}{\partial x_s}. \end{aligned}$$

Como a su vez se satisface

$$\sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (dx_k)_p \left(\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \delta_{ks} = \frac{\partial f_i}{\partial x_s},$$

deber ser

$$f^*(dx_i)_p = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} (dx_k)_p$$

pues ambos lados de la igualdad coinciden en la base de los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial x_s} \Big|_p\}_{1 \leq s \leq n}$. Dado que esto es cierto para cualquier punto $p \in U$, se tiene

$$f^*(dx_i) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial f_i}{\partial x_k} dx_k. \quad (1)$$

Finalmente, usando (a) vemos que

$$f^*(g \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) = g \circ f \cdot f^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n)$$

así que para terminar el inciso basta probar que

$$f^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{ij} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

En efecto, de (1) es

$$\begin{aligned}
 f^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge f^*(dx_n) &= \sum_{i_1=1}^n \frac{\partial f_1}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge \sum_{i_n=1}^n \frac{\partial f_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_n} \\
 &= \sum_{i_1, \dots, i_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \\
 &= \sum_{i_1 < \cdots < i_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{i_j}} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} dx_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge dx_{\sigma(n)} \\
 &= \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= \left(\sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma \prod_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_{\sigma(j)}} \right) dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
 &= \det \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{ij} \cdot dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.
 \end{aligned}$$

□

Ejercicio 11 (d). Calcule la cohomología de un producto cartesiano de dos esferas.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$. Como S^n es una variedad compacta, podemos usar la fórmula de Künneth: para todo $q \geq 0$ es

$$H^q(S^n \times S^n) = \bigoplus_{r+s=q} H^r(S^n) \otimes H^s(S^n). \quad (2)$$

Sabemos además que la cohomología de la n -esfera es \mathbb{R} en los grados 0 y n , y nula en los demás.

Por lo tanto, para que $H^r(S^n \times S^n)$ sea no nulo es condición necesaria que $r, s \in \{0, n\}$. En particular debe ser $r + s \in \{0, n, 2n\}$.

Como $S^n \times S^n$ es arcoconexo, ya sabemos que $H^0(S^n \times S^n) \simeq \mathbb{R}$. En los otros casos, de (2) tenemos que

$$H^n(S^n \times S^n) = H^n(S^n) \otimes H^0(S^n) \oplus H^0(S^n) \otimes H^n(S^n) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \oplus \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$$

y

$$H^{2n}(S^n \times S^n) = H^n(S^n) \otimes H^n(S^n) = \mathbb{R} \otimes \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Por lo tanto,

$$H^q(S^n \times S^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = 0 \text{ o } q = 2n \\ \mathbb{R}^2 & \text{si } q = n \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

□