Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre – 2019

Segundo Parcial

Guido Arnone

Ejercicio 1. Sea M una variedad riemanniana, sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable $\operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ y uno solo con la propiedad de que para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle = df(Y).$$

Encuentre una expresión en coordenadas para el campo $\operatorname{grad}(f)$.

(b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \operatorname{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), Y \rangle = \langle X, \nabla_Y \operatorname{grad}(f) \rangle.$$

(c) Muestre que si el campo $\operatorname{grad}(f)$ tiene norma constante, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X \rangle = 0$. Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ son geodésicas.

Demostración. content... □

Ejercicio 2. Sean M y N dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Muestre que hay un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para toda forma $\omega \in \Omega^n(N)$ se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos *grado* de f y lo escribimos $\deg(f)$.

(b) Supongamos que $q \in N$ es valor regular de f, de manera que, en particular, el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito. Si $p \in f^{-1}(q)$ la diferencial es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$sgn_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sgn_f(p).$$

Demostración. content... □

Ejercicio 3. Muestre que cuando $n \geq 2$ el grado de toda función diferenciable $f : \mathbb{S}^n \to T^n$ de la n-esfera al n-toro es nulo.

Demostración. content... □

Teorema 1 (dualidad de Poincaré). Sea M una variedad conexa y orientable de dimensión n. Entonces, para cada $k \in [\![n]\!]$ se tiene que $H^k(M) \simeq H_c^{n-k}(M)^*$.

Ejercicio 4. Sea M una variedad compacta, orientable, conexa de dimensión n. Sabemos que la cohomología de De Rham de M tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M)$$

al que llamamos la *característica de Euler* de M.

(a) Si la dimensión n de M es impar, entonces $\chi(M) = 0$.

(b) Si la dimensión n de M es par y la de $H^{n/2}(M)$ es par, entonces $\chi(M)$ es un entero par.

Demostración. Notemos que como la variedad M es compacta, su cohomología a soporte compacto coincide con la cohomología de de Rham «a secas». Además, dado que la cohomología de una variedad compacta es finitamente generada, se tiene que

$$H_c^{n-i}(M)^* \simeq H_c^{n-i}(M) = H^{n-i}(M)$$

para cada $i \in [\![n]\!]$.

Por el Teorema 1, tenemos entonces que $H^i(M) \simeq H^{n-i}(M)$ para todo $i \in [\![n]\!]$. En particular, si notamos $\beta_i := \dim H^i(M)$ a la dimensión del i-ésimo grupo de cohomología, debe ser $\beta_i = \beta_{n-i}$. Ahora,

(a) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned}
2\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\beta_{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-i}\beta_{n-i}\\
&= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\beta_{i}\\
&= \chi(M)(1+(-1)^n) = \chi(M)\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, es $\chi(M) = 0$.

(b) De una forma similar, si n y es par y $\beta_{n/2}$ también, entonces

$$\begin{aligned}
\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=n/2+1}^{n}(-1)^i\beta_i\\
&= \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^{n-i}\beta_{n-i}\\
&= 2\sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} \equiv \beta_{n/2} \equiv 0 \pmod 2.
\end{aligned}$$

En consecuencia, la característica de Euler de M es par.

□

Ejercicio 5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_eG$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g}\times\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$.

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y sean $X_1, \ldots, X_n$ los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$.

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares $c_{i,j}^k$ y $g_{i,j}$ los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita de G con respecto a los campos $X_1, \ldots, X_n$, de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i}X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

(c) Sea $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada $(a, b), (c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro G es $e = (1, 0)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en $T_e G$ restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas que pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i,j \leq n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$.

Demostración. content... □

Ejercicio 6. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión $4k$.

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\sigma : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$

tal que si ω y η son elementos cerrados de $\Omega^{2k}(M)$ entonces

$$\beta([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos la signatura de la forma bilineal σ la signatura de M.

(b) Determine la signatura de $\mathbb{S}^4$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, del toro T^4, del espacio proyectivo $P^2_{\mathbb{C}}$ y el producto $P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}$.

Demostración. content... □

Ejercicio 7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanniana inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que hay un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p \in M$ se tiene que (X_p, Y_p) es una base ortonormal positiva de $T_p M$ y $Z_p = \|Z_p\| X_p$.

(b) Hay 1-formas $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ tales que $\alpha(X) = \beta(Y) = 1$ y $\alpha(Y) = \beta(X) = 0$. Más aún, existe una forma $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que

$$d\alpha = \eta \wedge \beta, \quad d\beta = -\eta \wedge \alpha.$$

La forma $\sigma = \alpha \wedge \beta$ no depende de la elección de Z, es una forma de volumen sobre M que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanniano sobre M.

(c) Existe una función diferenciable $K : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\eta = -K \cdot \sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo Z.

(d) Si M es compacta, entonces $\int_M K \cdot \sigma = 0$.

(e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre S^2 un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

Demostración. content... □