Geometría Diferencial

Primer Cuatrimestre – 2019

Segundo Parcial

Guido Arnone

Sobre la Resolución

Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio. También incluyo (sin demostración) los resultados vistos en clase que utilicé.

Ejercicio 1. Sea M una variedad riemanniana, sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M y sea $f : M \to \mathbb{R}$ una función diferenciable.

(a) Muestre que existe un campo vectorial diferenciable $\text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$ y uno solo con la propiedad de que para cada campo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \text{grad}(f), Y \rangle = df(Y).$$

Encuentre una expresión en coordenadas para el campo $\text{grad}(f)$.

(b) La función

$$X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto \nabla_X \text{grad}(f) \in \mathfrak{X}(M)$$

es autoadjunta: cada vez que X e Y son elementos de $\mathfrak{X}(M)$ se tiene que

$$\langle \nabla_X \text{grad}(f), Y \rangle = \langle X, \nabla_Y \text{grad}(f) \rangle.$$

(c) Muestre que si el campo $\text{grad}(f)$ tiene norma constante, entonces para todo $X \in \mathfrak{X}(M)$ se tiene que $\langle \nabla_{\text{grad}(f)} \text{grad}(f), X \rangle = 0$. Deduzca de esto que bajo esa condición las curvas integrales de $\text{grad}(f)$ son geodésicas.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Notemos en primer lugar que la función f induce una 1-forma df que en cada punto $p \in M$ vale $d_p f : v \in T_pM \mapsto v(f) \in \mathbb{R}$, el diferencial de f bajo la identificación $T_p\mathbb{R} \simeq \mathbb{R}$.

Fijemos ahora $p \in M$. Como $d_pf \in (T_pM)^*$ es un elemento del espacio dual de T_pM, y este último es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita equipado con un producto interno (inducido por la métrica de M), el teorema de representación de Riesz nos asegura que existe un único vector tangente $v_p \in T_pM$ tal que

$$\langle v_p, w \rangle = d_pf(w) = w(f) \quad (\forall w \in T_pM). \tag{1}$$

Si definimos $\operatorname{grad}_p(f) := v_p$ para cada $p \in M$, reescribiendo la anterior igualdad es

$$\langle \operatorname{grad}(f)_p, w \rangle = d_p f(w) \quad (\forall w \in T_p M).$$

y éste es el único campo con tal propiedad. En particular, si $Y \in \mathfrak{X}(M)$ entonces para cada $p \in M$ es

$$(\langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle)_p = \langle \operatorname{grad}(f)_p, Y_p \rangle = d_p f(Y_p) = (df(Y))_p$$

y por lo tanto $\langle \operatorname{grad}(f), Y \rangle \equiv df(Y)$.

Para ver la unicidad, recordemos que para cada $p \in M$ y $v \in T_p M$ existe $Y^v \in \mathfrak{X}(M)$ con $Y^v_p = v$. Efectivamente, podemos tomar una carta (U, φ) con $U \ni p$ de forma que existan coeficientes $a_1, \dots, a_n$ tales que $v = \sum_{1 \leq i \leq n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$ y luego tomar el campo

$$Y^v = h \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$$

con $h \in C^\infty(M)$ una función *bump* (tal que valga 1 en un entorno abierto $V \subset U$ de p y 0 en un abierto $W \supset U^c$).

A partir de esto, podemos concluir que cualquier otro campo $Z \in \mathfrak{X}(M)$ que cumpla $\langle Z, Y \rangle \equiv df(Y)$ para todo $Y \in \mathfrak{X}(M)$ deberá satisfacer

$$\langle Z_p, v \rangle = \langle Z_p, Y^v_p \rangle = d_p f(Y^v_p) = v(f)$$

para todo $p \in M$ y $v \in T_p M$. La unicidad de (1) nos dice entonces que $Z_p = v_p = \operatorname{grad}_p(f)$ en todo punto $p \in M$.

Para terminar, veamos una expresión de $\operatorname{grad}_p(f)$ en coordenadas. De aquí se tendrá que el gradiente depende localmente de funciones suaves, y es por lo tanto diferenciable.

Una vez más, fijamos $p \in M$ y consideramos (φ, U) una carta de M tal que $U \ni p$. Como los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \varphi^1}|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial \varphi^n}|_p\}$ son una base de $T_p M$, sabemos que existen únicos coeficientes $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$v_p = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Si ahora tomamos el producto interno de v_p con $\frac{\partial}{\partial \varphi^i}|_p$, es

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p = \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p(f) = \left\langle v_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot \left\langle \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p, \frac{\partial}{\partial \varphi^i}\Big|_p \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j \cdot (g_p)_{ji}$$

para cada $j \in [\![n]\!]$, y notando $c = (c_1, \dots, c_n)$ esto es equivalente a

$$c \cdot g_p = \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\Big|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\Big|_p \right).$$

Por lo tanto debe ser $c = (\frac{\partial f}{\partial \varphi^1}\big|_p, \dots, \frac{\partial f}{\partial \varphi^n}\big|_p)(g_p)^{-1}$ y

$$c_j = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij}.$$

Volviendo a la expresión original, obtenemos finalmente

$$\mathrm{grad}_p(f) = v_p = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p (g_p)^{ij}\right)\cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p = \sum_{i,j}(g_p)^{ij}\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\Big|_p \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi^j}\Big|_p.$$

Esto prueba que para todo $p \in U$ se tiene (contrayendo indices) que

$$\mathrm{grad}(f) = g^{ij}\frac{\partial f}{\partial \varphi^i}\frac{\partial}{\partial \varphi^j}.$$

Como afirmamos, esto prueba además que $\mathrm{grad}(f)$ es diferenciable, ya que para cada punto tenemos un abierto donde este es un campo suave.

(b) Como ∇ es la conexión de Levi-Civita, sabemos (por construcción) que esta es compactible con la métrica y libre de torsion. Concretamente, si $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ entonces

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \tag{2}$$

y

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]. \tag{3}$$

Sean ahora $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ dos campos en M. Por (2) y (3) sabemos que

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_X \mathrm{grad}(f), Y\rangle &= X\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle - \langle \mathrm{grad}(f), \nabla_X Y\rangle \\
&= X\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle - \langle \mathrm{grad}(f), [X, Y] + \nabla_Y X\rangle \\
&= X\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle - \langle \mathrm{grad}(f), \nabla_Y X\rangle - \langle \mathrm{grad}(f), [X, Y]\rangle \\
&= X\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle - (Y\langle \mathrm{grad}(f), X\rangle - \langle \nabla_Y \mathrm{grad}(f), X\rangle) - \langle \mathrm{grad}(f), [X, Y]\rangle \\
&= \langle \nabla_Y \mathrm{grad}(f), X\rangle + X\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \mathrm{grad}(f), X\rangle - \langle \mathrm{grad}(f), [X, Y]\rangle.
\end{aligned}$$

En consecuencia, se tiene que $\langle \nabla_X \mathrm{grad}(f), Y\rangle = \langle X, \nabla_Y \mathrm{grad}(f)\rangle$ si y solo si

$$X\langle \mathrm{grad}(f), Y\rangle - Y\langle \mathrm{grad}(f), X\rangle = \langle \mathrm{grad}(f), [X, Y]\rangle$$

o lo que es lo mismo,

$$X df(Y) - Y df(X) = df([X, Y]).$$

Para terminar, observemos que esto ocurre siempre, pues

$$X df(Y) - Y df(X) = XY(f) - YX(f) = (XY - YX)(f) = [X, Y](f) = df([X, Y]).$$

(c) Supogamos que $\mathrm{grad}(f)$ tiene norma constante. Entonces $\|\mathrm{grad}(f)\|^2 = \langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f)\rangle$ debe valer constantemente c para cierto $c \in \mathbb{R}$. Si ahora tomamos un campo $X \in \mathfrak{X}(M)$, para todo $p \in M$ debe ser

$$(X\|\mathrm{grad}(f)\|)_p = X_p(c) = 0,$$

y por lo tanto $X\langle \mathrm{grad}(f), \mathrm{grad}(f)\rangle \equiv 0$.

Usando la compatibilidad con la métrica de la conexión de Levi-Civita, de la anterior igualdad se desprende que

$$\begin{aligned} 0 = X\langle \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle &= \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle + \langle \operatorname{grad}(f), \nabla_X \operatorname{grad}(f)\rangle \\ &= 2\langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle \end{aligned}$$

y por (b) es

$$\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), X\rangle = \langle \nabla_X \operatorname{grad}(f), \operatorname{grad}(f)\rangle = 0.$$

Por último, si $\gamma : I \to M$ es una curva integral de $\operatorname{grad}(f)$, entonces es $\nabla_{\dot\gamma}\dot\gamma \equiv 0$ pues

$$\begin{aligned} \|\nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\|^2 &= \langle \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t), \nabla_{\dot\gamma(t)}\dot\gamma(t)\rangle \\ &= \langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}, \nabla_{\operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}} \operatorname{grad}(f)_{\gamma(t)}\rangle \\ &= (\langle \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f), \nabla_{\operatorname{grad}(f)} \operatorname{grad}(f)\rangle)_{\gamma(t)} = 0 \end{aligned}$$

para todo $t \in I$. Vemos así que las curvas integrales de $\operatorname{grad}(f)$ resultan geodésicas.

□

Teorema 1. Sea M una variedad orientada, conexa y compacta de dimensión n. Entonces es $H^n(M) \simeq \mathbb{R}$ via el isomorfismo

$$[\omega] \in H^n(M) \longmapsto \int_M \omega \in \mathbb{R}.$$

Teorema 2. Sean M y N variedades orientadas compactas y conexas de dimensión n. Si $f : M \to N$ es un difeomorfismo que preserva (resp. invierte) la orientación y $\omega \in \Omega^n(N)$ es una n-forma, entonces $\int_M f^*(\omega) = \int_N \omega$ (resp. $-\int_N \omega$).

Lema 3. Sean M y N dos variedades y $f : M \to N$ una función suave. Si $q \in N$ es un valor regular y $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\}$, existe un entorno abierto $W \subset N$ de q y abiertos conexos disjuntos $U_1, \dots, U_k$ tales que:

(i) para cada $i \in [\![k]\!]$ es $U_i \ni p_i$,

(ii) la preimagen de W por f es $f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$, y

(iii) para cada $i \in [\![k]\!]$ la (co)restricción $f|_{U_i} : U_i \to W$ es un difeomorfismo.

Demostración. En primer lugar, como es $\dim M = \dim N$ sabemos que en cada punto p_i el diferencial de f es un isomorfimo. Por el teorema de la función inversa, existen entonces abiertos $\widetilde{V}_i \ni p_i$ para cada i tales que $f(\widetilde{V}_i)$ es abierto y $f|_{\widetilde{V}_i} : \widetilde{V}_i \to f(\widetilde{V}_i)$ un difeomorfismo. Achicando los abiertos si es necesario (usando que M es Hausdorff y localmente conexa) podemos suponer que son conexos y disjuntos dos a dos.

Notando $\widetilde{W} = \bigcap_{i=1}^n f(\widetilde{V}_i)$, definimos $\widetilde{U}_i := \widetilde{V}_i \cap f^{-1}(\widetilde{W})$. Ahora, como M es compacta y N es Hausdorff (pues es una variedad) sabemos que f es cerrada. Por lo tanto $f\left((\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i)^c\right)$ es cerrado y podemos definir $W := \widetilde{W} \setminus f\left((\bigsqcup_{i=1}^n \widetilde{U}_i)^c\right)$ y $U_i := \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W)$.

De aquí se ve que $f^{-1}(W) = U_1 \sqcup \cdots \sqcup U_k$ ya que es

$$f^{-1}(W) = f^{-1}\left(\widetilde{W} \setminus f\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right)\right) = (f|^{\widetilde{W}})^{-1}\left(f\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^c\right)^c\right)\right)$$
$$= (f|^{\widetilde{W}})^{-1}\left(f|_{\widetilde{W}}\left(\left(\left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^c\right)\right)\right)^c \subset \left(\bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i\right)^{cc} = \bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i$$

de forma que

$$f^{-1}(W) \subset f^{-1}(W) \cap \bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i = \bigsqcup_{i=1}^{n} \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^{n} U_i,$$

y la otra contención está dada por la definición de los abiertos $(U_i)_{i\in[\![n]\!]}$.

Por último, para ver que que cada (co)restricción $f|_{U_i}^{W}$ es un difeomorfismo basta ver que $f(U_i) = W$ pues ya sabemos que la (co)restricción es suave e inyectiva al serlo $f|_{\widetilde{V}_i}$. Por como definimos U_i, basta ver que $W \subset f(U_i)$.

En efecto, puesto que es $W \subset \widetilde{W} \subset f(\widetilde{V}_i)$, si $x \in W$ entonces existe $v_i \in \widetilde{V}_i$ con $f(v_i) = x$, y dado que además es $v_i \in f^{-1}(W) \subset f^{-1}(\widetilde{W})$, se obtiene que

$$v_i \in \widetilde{V}_i \cap f^{-1}(\widetilde{W}) = \widetilde{U}_i.$$

En consecuencia debe ser $v_i \in \widetilde{U}_i \cap f^{-1}(W) = U_i$, y así $x \in f(U_i)$.

$\square$

Ejercicio 2. Sean M y N dos variedades compactas, conexas, orientadas y de la misma dimensión n y sea $f : M \to N$ una función diferenciable.

(a) Muestre que hay un número real $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que para toda forma $\omega \in \Omega^n(N)$ se tiene

$$\int_M f^*(\omega) = \lambda \int_N \omega.$$

Lo llamamos *grado* de f y lo escribimos $\deg(f)$.

(b) Supongamos que $q \in N$ es valor regular de f, de manera que, en particular, el conjunto $f^{-1}(q)$ es finito. Si $p \in f^{-1}(q)$ la diferencial es entonces un isomorfismo de espacios vectoriales y podemos considerar el número

$$sgn_f(p) = \begin{cases} +1 & \text{si } d_p f \text{ preserva la orientación} \\ -1 & \text{si la invierte} \end{cases}$$

ya que esas son las dos únicas posibilidades.

Muestre que

$$\deg(f) = \sum_{p\in f^{-1}(q)} sgn_f(p).$$

Demostración. Observemos en primer lugar una consecuencia del Teorema 1 que usaremos a continuación: este nos dice que en una variedad orientada conexa y compacta, dos n-formas son cohomólogas si y sólo si sus integrales sobre la variedad coinciden.

(a) En vista del Teorema 1, sabemos que existe una n-forma ω de N tal que $\int_N \omega = 1$. De existir, el grado debe cumplir que $\int_M f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_N \omega = \deg(f)$, por lo que definimos

$$\deg(f) := \int_M f^*(\omega).$$

Además $\deg(f)$ está bien definido pues no depende de la forma que elegimos: si η es otra n-forma de N que integra 1, entonces es $[\eta] = [\omega]$ y por tanto $[f^*(\omega)] = [f^*(\eta)]$, de lo que resulta $\int_M f^*(\omega) = \int_M f^*(\eta)$.

Veamos ahora que este número satisface la propiedad deseada. Consideremos una forma n-forma abritraria η de N. Una vez más por el Teorema 1, del isomorfismo $H^n(N) \simeq \mathbb{R}$ sabemos que existe $c \in \mathbb{R}$ de forma que $[\eta] = c[\omega] = [c\omega]$. En consecuencia existe $\kappa \in \Omega^{n-1}(N)$ tal que $\eta - c\omega = d\kappa$ y usando el teorema de Stokes[1] es

$$\int_N \eta = \int_N c \cdot \omega + d\kappa = c \cdot \int_N \omega + \int_N d\kappa = c \cdot \int_N \omega + \int_{\partial N} i^*(\kappa) = c$$

ya que N no tiene borde.

Por otro lado, como

$$f^*(\eta) = f^*(c \cdot \omega + d\kappa) = c \cdot f^*(\omega) + f^*(d\kappa) = c \cdot f^*(\omega) + df^*(\kappa)$$

y M tampoco tiene borde, volvemos a apelar al teorema de Stokes para obtener

$$\begin{aligned}\int_M f^*(\eta) &= c \cdot \int_M f^*(\omega) + \int_M df^*(\kappa) = c \cdot \deg(f) + \int_{\partial M} i^*(f^*(\kappa)) \\ &= c \cdot \deg(f) = \deg(f) \cdot \int_N \eta\end{aligned}$$

como buscábamos.

(b) Será de utilidad la siguiente observación: para cualquier abierto $U \subset N$, existe una n-forma ω de N tal que $1 = \int_N \omega = \int_U \omega$.

Para construirla, consideramos primero η una forma de volumen, una carta (V, φ) tal que $V \subset U$ y una función *bump* $h \in C^\infty$ no negativa que satisfaga $\operatorname{sop} h \subset V$. De esta forma, en el abierto V la forma η tiene una escritura en coordenadas $\eta = g \cdot d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$ con g nunca nula.

Definimos ahora $\widetilde{\omega} = h\eta$. Como $\operatorname{sop}(\widetilde{\omega}) \subset \operatorname{sop} h \subset U$, es $\int_N \widetilde{\omega} = \int_U \widetilde{\omega}$. Además, en V la forma $\widetilde{\omega}$ tiene una expresión de la forma $hg \cdot d\varphi^1 \wedge \cdots \wedge d\varphi^n$ así que

$$\int_U \widetilde{\omega} = \int_V hg \, d\varphi^i \wedge \cdots \wedge d\varphi^n = \int_{\varphi(V)} (hg) \circ \varphi^{-1} \, dx_1 \ldots dx_n = \int_{\operatorname{sop} h} (hg) \circ \varphi^{-1} \, dx_1 \ldots dx_n > 0$$

pues $(hg) \circ \varphi^{-1}$ es continua, nunca nula en $\operatorname{sop} h$ y no cambia de signo en $V \supset \operatorname{sop} h$. Basta tomar entonces $\omega := (\int_N \widetilde{\omega})^{-1} \cdot \widetilde{\omega}$.

Ahora sí, analicemos primero qué ocurre cuando $q \notin \operatorname{im} f$. Como M es compacta y N es Hausdorff (pues es una variedad), la función f es cerrada. Por lo tanto la imagen de f es un cerrado, y en consecuencia existe un abierto $U \ni q$ contenido en $f(M)^c$.

[1] También podríamos apelar de vuelta al Teorema 1. De hecho, la cuenta que sigue justifica que la aplicación del teorema está bien definida.

Podemos tomar entonces una n-forma ω tal que $\operatorname{sop}\omega \subset U$ y $\int_N \omega = 1$. Como $\operatorname{sop} f^*(\omega) \subset f^{-1}(\operatorname{sop}\omega) = \emptyset$, es

$$\deg(f) = \deg(f)\int_N \omega = \int_M f^*(\omega) = 0$$

lo que nos dice que

$$\deg(f) = 0 = \sum_{p \in f^{-1}(q)} sgn_f(p).$$

Ahora sí, supongamos que $f^{-1}(q) = \{p_1, \dots, p_k\} \subset M$ con $n \geq 1$. Usando el Lema 3, tomemos un abierto W de N y abiertos conexos disjuntos $U_i \ni p_i$ tales que $f^{-1}(W) = \bigsqcup_{i=1}^k U_i$ y cada (co)restricción $f|_{U_i}^W$ es un difeomorfismo.

En particular, como $sgn_f(p)$ varía suavemente con p y tiene codominio discreto, en cada abierto conexo U_i debe ser constante. Es decir, para cada $i \in [\![n]\!]$ la función f preserva o invierte la orientación en *todo* el abierto U_i.

Una vez más, podemos considerar una n-forma ω tal que $\operatorname{sop}\omega \subset W$ y $1 = \int_W \omega = \int_M \omega$. Por lo tanto, es

$$\begin{aligned}\deg(f) &= \int_M f^*(\omega) = \int_{f^{-1}(\operatorname{sop}\omega)} f^*(\omega) = \int_{f^{-1}(W)} f^*(\omega)\\ &= \int_{\bigsqcup_{i=1}^n U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*(\omega).\end{aligned}$$

Usando el Teorema 2 para cada difeomorfismo $f|_{U_i}^W : U_i \to W$ y recordando que sgn_f es constante en U_i, es

$$\int_{U_i} f^*(\omega) = sgn_f(p_i) \cdot \int_W \omega = sgn_f(p_i).$$

Se obtiene así

$$\deg(f) = \sum_{i=1}^k \int_{U_i} f^*(\omega) = \sum_{i=1}^k sgn_f(p_i).$$

$\square$

Lema 4. Sea $\eta \in \mathbb{S}^1$ una 1-forma y $n \in \mathbb{N}$. Si definimos $\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$ con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada, entonces

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta\right)^n.$$

Demostración. Dadas proyecciones estereográficas $\{\varphi_i : U_i \to \mathbb{R}\}_{i=1}^n$ de $\mathbb{S}^1$, tenemos una carta

$$\Psi := \varphi_1 \times \cdots \times \varphi_n : U_1 \times \cdots \times U_n \to \mathbb{R}^n$$

de $\mathbb{T}^n$ que satisface $\pi_i(\Psi) = \varphi_i$ para cada $i \in [\![n]\!]$. Más aún[2], para cada $i \in [\![n]\!]$ es

$$d_p\pi_i\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right) = \delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}.$$

A partir de esto último, afirmamos que $\pi_i^*(d\varphi_i) = d\Psi^i$. Basta probar que en cada punto $p \in U_1 \times \cdots \times U_n$ ambas 1-formas coinciden en una base de $T_p\mathbb{T}^n$. Tomando los *ganchos* $\{\frac{\partial}{\partial \Psi^i}\big|_p\}$, efectivamente es

$$\begin{aligned}
(\pi_i)_p^*(d\varphi_i)\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right) &= d_{p_i}\varphi_i\left(d_p\pi_i\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right)\right) = d_{p_i}\varphi_i\left(\delta_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}\right) \\
&= \delta_{ij} d_{p_i}\varphi_i\left(\frac{\partial}{\partial \varphi_i}\Big|_{p_i}\right) = \delta_{ij} \cdot \delta_{ij} \\
&= \delta_{ij} = d_p\Psi^i\left(\frac{\partial}{\partial \Psi^j}\Big|_p\right).
\end{aligned}$$

Como η es una 1-forma, para cada $i \in [\![n]\!]$ existe una función suave $g_i \in C^\infty(\mathbb{S}^1)$ tal que $\eta = g_i \cdot d\varphi_i$, y se tiene[3] entonces que $\pi_i^*(\eta) = g_i \circ \pi_i \cdot \pi_i^*(d\varphi_i) = g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^i$. Reescribiendo, tenemos una expresión para ω en terminos de $d\Psi^1, \dots, d\Psi^n$,

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta) = g_1 \circ \pi_1 \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge g_n \circ \pi_n \cdot d\Psi^n = \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot d\Psi^1 \wedge \cdots \wedge d\Psi^n.$$

Tanto Ψ como cada carta ψ_i tienen dominio denso cuyo complemento es de medida cero, así que en vista de las anteriores caracterizaciones de ω y η podemos calcular sus integrales como

$$\int_{\mathbb{T}^n} \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i \cdot dx_1 \cdots dx_n \quad \text{y} \quad \int_{\mathbb{S}^1} \eta = \int_{\mathbb{R}} g_i(x)dx$$

para cada $i \in [\![n]\!]$.

Finalmente usando el teorema de Fubini, es

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{T}^n} \omega &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i \circ \pi_i(x_1, \dots, x_n) \cdot dx_1 \cdots dx_n = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^n g_i(x_i) \cdot dx_1 \cdots dx_n \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} g_1(x_1)dx_1\right) \cdots \left(\int_{\mathbb{R}} g_n(x_n)dx_n\right) \\
&= \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta\right)^n.
\end{aligned}$$

□

Ejercicio 3. Muestre que cuando $n \geq 2$ el grado de toda función diferenciable $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{T}^n$ de la n-esfera al n-toro es nulo.

[2] Esta es una cuenta muy similar al ejercicio (1) de la práctica 1, que corresponde a la primera entrega.
[3] Estas propiedades son parte del ejercicio (8) de la práctica 4, que elegí resolver para la cuarta entrega.

Demostración. Consideremos $\eta \in \Omega^1(\mathbb{S}^1)$ una forma de volumen. Definimos entonces

$$\omega = \pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_n^*(\eta) \in \Omega^n(\mathbb{T}^n)$$

con $\pi_i : \mathbb{T}^n \to \mathbb{S}^1$ la proyección a la i-ésima coordenada.

Al ser $n \geq 2$ sabemos que $H^1(\mathbb{S}^n) = 0$, y por lo tanto para todo $i \in [\![n]\!]$ resulta $[f^*\pi_i^*(\eta)] = 0 \in H^1(\mathbb{S}^n)$. Como $f^* : H^\bullet(\mathbb{T}^n) \to H^\bullet(\mathbb{S}^n)$ es un morfismo de álgebras, esto dice que

$$\begin{aligned} [f^*(\omega)] &= f^*([\omega]) = f^*([\pi_1^*(\eta) \wedge \cdots \wedge \pi_1^*(\eta)]) \\ &= f^*([\pi_1^*(\eta)]) \wedge \cdots \wedge f^*([\pi_1^*(\eta)]) \\ &= [0] \wedge \cdots \wedge [0] = [0]. \end{aligned}$$

Vemos así que $f^*(\omega)$ es exacta y por lo tanto, existe $\zeta \in \Omega^{n-1}(\mathbb{T}^n)$ tal que $f^*(\omega) = d\zeta$. Por el teorema de Stokes, esto implica que

$$\int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \int_{\mathbb{S}^n} d\zeta = \int_{\partial \mathbb{S}^n} i^*(\zeta) = 0$$

ya que $\mathbb{S}^n$ no tiene borde.

Del Lema 4 y la definición de grado, obtenemos

$$0 = \int_{\mathbb{S}^n} f^*(\omega) = \deg(f) \cdot \int_{\mathbb{T}^n} \omega = \deg(f) \cdot \left(\int_{\mathbb{S}^1} \eta \right)^n .$$

Al ser η una forma de volumen de $\mathbb{S}^1$, su integral es no nula, y consecuentemente es $\deg(f) = 0$. $\square$

Teorema 5 (dualidad de Poincaré). Sea M una variedad conexa y orientable de dimensión n. Entonces, para cada $k \in [\![n]\!]$ se tiene que $H_c^k(M) \simeq H^{n-k}(M)^*$ y el isomorfismo está dado por

$$\begin{aligned} p : H_c^k(M) &\longrightarrow H^{n-k}(M)^* \\ [\omega] &\mapsto \left([\eta] \mapsto (-1)^{|\omega|} \int_M \omega \wedge \eta \right) \end{aligned}$$

Ejercicio 4. Sea M una variedad compacta, orientable, conexa de dimensión n. Sabemos que la cohomología de De Rham de M tiene entonces dimensión total finita, y podemos en consecuencia considerar el entero

$$\chi(M) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(M)$$

al que llamamos la *característica de Euler* de M.

(a) Si la dimensión n de M es impar, entonces $\chi(M) = 0$.

(b) Si la dimensión n de M es par y la de $H^{n/2}(M)$ es par, entonces $\chi(M)$ es un entero par.

Demostración. Notemos que como la variedad M es compacta, su cohomología a soporte compacto coincide con la cohomología de de Rham «a secas». Además, dado que la cohomología de una variedad compacta es finitamente generada, por el Teorema 5 se tiene que

$$H^i(M) = H^i_c(M) \simeq H^{n-i}(M)^* \simeq H^{n-i}(M)$$

para cada $i \in [\![n]\!]_0$. En particular, si notamos $\beta_i := \dim H^i(M)$ a la dimensión del i-ésimo grupo de cohomología, debe ser $\beta_i = \beta_{n-i}$. Ahora,

(a) Si n es impar, entonces

$$\begin{aligned} 2\chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + \sum_{i=0}^{n}(-1)^{n-i}\beta_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{-i}\beta_{n-i} \\ &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i + (-1)^n\sum_{i=0}^{n}(-1)^{i}\beta_{i} \\ &= \chi(M)(1+(-1)^n) = \chi(M)\cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, es $\chi(M) = 0$.

(b) De una forma similar, si n y es par y $\beta_{n/2}$ también, entonces

$$\begin{aligned} \chi(M) &= \sum_{i=0}^{n}(-1)^i\beta_i = \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=n/2+1}^{n}(-1)^i\beta_i \\ &= \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} + \sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^{n-i}\beta_{n-i} \\ &= 2\sum_{i=0}^{n/2-1}(-1)^i\beta_i + \beta_{n/2} \equiv \beta_{n/2} \equiv 0 \pmod 2. \end{aligned}$$

En consecuencia, la característica de Euler de M es par.

□

Ejercicio 5. Sea G un grupo de Lie de dimensión n, sea $\mathfrak{g} = T_eG$ su álgebra de Lie y fijemos un producto interno $g_e : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ sobre $\mathfrak{g}$.

(a) Hay una única métrica riemanniana g sobre G que es invariante a izquierda y cuyo valor en $e \in G$ es g_e.

(b) Sea $\mathcal{B} = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de $\mathfrak{g}$ y sean $X_1, \dots, X_n$ los campos tangentes a G invariantes a izquierda que extienden a los elementos de $\mathcal{B}$. Muestre que para cada i, j, es *constante* la función $g_{i,j} = g(X_i, X_j)$.

Sabemos (porque el corchete de Lie de campos invariantes a izquierda es él mismo invariante a izquierda) que existen constantes $c_{i,j}^k$ tales que

$$[X_i, X_j] = \sum_k c_{i,j}^k X_k.$$

Calcule en términos de los escalares $c_{i,j}^k$ y $g_{i,j}$ los símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k de la conexión de Levi-Civita de G con respecto a los campos $X_1, \ldots, X_n$, de manera que se tenga

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k X_k.$$

(c) Sea $G = \mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}$ el grupo de Lie con producto dado por

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, ad + b)$$

para cada $(a, b), (c, d) \in G$, de manera que G es isomorfo de la forma evidente al grupo de matrices

$$\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : a > 0, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

El elemento neutro G es $e = (1, 0)$ y su álgebra de Lie $\mathfrak{g} = T_e G$ se identifica de manera natural (porque G es un abierto de $\mathbb{R}^2$) con $\mathbb{R}^2$. Dotemos a G de su única métrica invariante a izquierda que en $T_e G$ restringe al producto interno usual de $\mathbb{R}^2$. Encuentre todas las geodésicas que pasan por e que pueda.

Calcule (las componentes en una carta del) tensor de curvatura $R(X, Y)Z$ sobre G y la *curvatura escalar*

$$K(p) = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{1 \leq i,j \leq n} g(R(z_i, z_j)z_i, z_j)$$

para cada $p \in G$, con $\{z_1, \ldots, z_n\}$ una base ortonormal de $T_p G$.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Definimos

$$g_h(v, w) := g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) \in \mathbb{R}$$

para cada $h \in G$ y $v, w \in T_h G$, que es suave pues es composición de funciones suaves.

Probamos primero que g es una métrica, es decir, que g_h es un producto interno en $T_h G$ para cada punto h de la variedad. Fijamos entonces $h \in G$. Como el diferencial $d_h L_{h^{-1}}$ es una función lineal, así lo es $d_h L_{h^{-1}} \times d_h L_{h^{-1}} : T_h G \times T_h G \to \mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$. Al ser g_e un producto interno, se sigue que $g_h = g_e \circ (d_h L_{h^{-1}} \times d_h L_{h^{-1}})$ es bilineal, y más aún es simétrica pues

$$g_h(v, w) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(w), d_h L_{h^{-1}}(v)) = g_h(w, v).$$

Por último, g_h es definida positiva: si $v \in T_h G$, entonces

$$g_h(v, v) = g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(v)) > 0$$

y como $d_h L_{h^{-1}}$ es un isomorfismo lineal,

$$g_h(v,v) = 0 \iff g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(v)) = 0 \iff d_h L_{h^{-1}}(v) = 0 \iff v = 0.$$

Esto prueba la existencia de una tal métrica. Si $\tilde{g}$ es otra métrica invariante a izquierda que vale g_e en la identidad, entonces como

$$d_e L_h \circ d_h L_{h^{-1}} = d_h(L_h \circ L_{h^{-1}}) = d_h(id_G) = id_{T_h G}$$

por invariancia es

$$\begin{aligned}\tilde{g}_h(v,w) &= \tilde{g}_{he}(d_e L_h(d_h L_{h^{-1}}(v)), d_e L_h(d_h L_{h^{-1}}(w))) = \tilde{g}_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) \\ &= g_e(d_h L_{h^{-1}}(v), d_h L_{h^{-1}}(w)) = g_h(v,w),\end{aligned}$$

lo que prueba la unicidad.

(b) Recordemos que por definición es $(X_i)_h = d_e L_h(v_i)$ para cada $i \in [\![n]\!]$ y $h \in G$. Por lo tanto, usando la invariancia a izquierda de la métrica es

$$(g(X_i, X_j))_h = g_h((X_i)_h, (X_j)_h) = g_h(d_e L_h(v_i)), d_e L_h(v_j)) = g_e(v_i, v_j)$$

para todo $h \in G$. Esto muestra que $g(X_i, X_j)$ vale constantemente $g_{i,j} := g_e(v_i, v_j)$.

(c)

□

Lema 6. Sea M una variedad de dimensión n y $\omega, \eta \in \Omega^\bullet(M)$. Si ω y η son cerradas y ω es exacta, entonces $\omega \wedge \eta$ es exacta. Más aún, si $\omega = d\kappa$ entonces es $\omega \wedge \eta = d((-1)^{|\omega|}\omega \wedge \kappa)$.

Demostración. Por un cálculo directo, es

$$\begin{aligned}d((-1)^{|\omega|}\omega \wedge \kappa) &= (-1)^{|\omega|} d\omega \wedge \kappa + (-1)^{|\omega|}(-1)^{|\omega|}\omega \wedge d\kappa \\ &= 0 \wedge \kappa + (-1)^{2|\omega|}\omega \wedge \eta = \omega \wedge \eta.\end{aligned}$$

□

Ejercicio 6. Sea M una variedad compacta y orientable de dimensión $4k$.

(a) Muestre que hay una función bilineal no degenerada y simétrica

$$\beta : H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \to \mathbb{R}$$

tal que si ω y η son elementos cerrados de $\Omega^{2k}(M)$ entonces

$$\beta([\omega], [\eta]) = \int_M \omega \wedge \eta.$$

Llamamos la signatura de la forma bilineal β la signatura de M.

(b) Determine la signatura de $\mathbb{S}^4$, de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, del toro T^4, del espacio proyectivo $P^2_{\mathbb{C}}$ y el producto $P^2_{\mathbb{C}} \times P^2_{\mathbb{C}}$.

Demostración. Resuelvo cada inciso por separado.

(a) Como la aplicación $(\omega, \eta) \in \Omega(M)^{2k} \times \Omega(M)^{2k} \mapsto \omega \wedge \eta \in \Omega(M)^{4k}$ es bilineal, y la integral (que es existe y es finita para toda forma pues M es compacta y orientable) es lineal, tenemos definida una aplicación

$$b : (\omega, \eta) \in \Omega^{2k}(M) \times \Omega^{2k}(M) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta.$$

Si ω y η son dos $2k$-formas cerradas y α, β son dos $(2k-1)$-formas cualesquiera, se tiene que

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + \omega \wedge d\beta + d\alpha \wedge \eta + d\alpha \wedge d\beta.$$

Como todos los términos del lado derecho excepto el primero son el wedge de dos formas cerradas con una de ellas exacta, por el Lema 6 en definitiva existe $\kappa \in \Omega^{4k-1}(M)$ tal que

$$(\omega + d\alpha) \wedge (\eta + d\beta) = \omega \wedge \eta + d\kappa.$$

Ahora, aplicando b y usando el teorema de Stokes es

$$b(\omega + d\alpha, \eta + d\beta) = \int_M \omega \wedge \eta + \int_M d\kappa = \int_M \omega \wedge \eta + \overbrace{\int_{\partial M} i^*(\kappa)}^{=0} = b(\omega, \eta)$$

ya que M no tiene borde.

Esto termina de mostrar que la restricción de b a las formas cerradas en ambas coordenadas pasa al cociente por la identificacion de formas cohomólogas, induciendo así una aplicación $\mathbb{R}$-bilineal

$$\beta : ([\omega], [\eta]) \in H^{2k}(M) \times H^{2k}(M) \mapsto \int_M \omega \wedge \eta \in \mathbb{R}.$$

Notemos además que tanto b como β son simétricas pues la operación wedge lo es.

Para terminar, fijemos $[\omega] \in H^{2k}(M)$. Como $(-1)^{|\omega|} = (-1)^{2k} = 1$, el Teorema 5 nos dice en particular que si $\beta([\omega], -)$ es la función nula, entonces $[\omega] = 0$. En otras palabras, la función bilineal β es no degenerada.

(b) Calculo cada caso por separado,

- $\underline{\mathbb{S}^4}$: en este caso sabemos que $H^2(\mathbb{S}^4) = 0$, y por lo tanto β es nula. En consecuencia, la signatura de $\mathbb{S}^4$ es 0.

□

Ejercicio 7. Sea $M \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientada y sin borde dotada de su métrica riemanniana inducida por la de $\mathbb{R}^3$ y supongamos que hay un campo vectorial $Z \in \mathfrak{X}(M)$ sobre M que no se anula en ningún punto.

(a) Muestre que existe una única forma de elegir campos $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ tales que para cada $p \in M$ se tiene que (X_p, Y_p) es una base ortonormal positiva de T_pM y $Z_p = \|Z_p\| X_p$.

(b) Hay 1-formas $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ tales que $\alpha(X) = \beta(Y) = 1$ y $\alpha(Y) = \beta(X) = 0$. Más aún, existe una forma $\eta \in \Omega^1(M)$ tal que

$$d\alpha = \eta \wedge \beta, \quad d\beta = -\eta \wedge \alpha.$$

La forma $\sigma = \alpha \wedge \beta$ no depende de la elección de Z, es una forma de volumen sobre M que determina su orientación y es, de hecho, la forma de volumen riemanniano sobre M.

(c) Existe una función diferenciable $K : M \to \mathbb{R}$ tal que

$$d\eta = -K \cdot \sigma$$

y esta función no depende de la elección del campo Z.

(d) Si M es compacta, entonces $\int_M K \cdot \sigma = 0$.

(e) Usando los resultados anteriores, muestre que no hay sobre S^2 un campo vectorial tangente que no se anula en ningún punto.

Demostración. Hago cada inciso por separado.

(a) Antes que nada, recordemos que para cualquier $\mathbb{R}$-espacio vectorial $\mathbb{V}$ de dimensión 2 con producto interno y vector unitario $v \in \mathbb{V}$, existe un único vector unitario $w \in \mathbb{V}$ tal que $\{v, w\}$ es una base ortonormal orientada positivamente.

En efecto, al $\langle v \rangle^{\perp}$ tener dimensión 1, está generado por cierto vector $w_0 \in \mathbb{V}$. Luego, de existir w debe ser de la forma $\lambda \cdot w_0$ para cierto $\lambda \in \mathbb{R}$. Como $\{v, w\}$ será orientada positivamente si y sólo si es $1 = \det(v, \lambda w_0) = \lambda \det(v, w_0)$ y $\{v, w_0\}$ es base, podemos tomar $w := \det(v, w_0)^{-1} w_0$. Más aún, el anterior argumento garantiza que esta es la única elección posible.

Volviendo al ejercicio, como el campo Z es nunca nulo, la función $\frac{1}{\|Z\|}$ está bien definida y es suave, y lo mismo ocurre para el campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ dado por

$$X_p := \frac{Z_p}{\|Z_p\|}$$

para cada $p \in M$. Notemos además que este es el único campo posible que satisface $Z \equiv \|Z\| X$.

Por la observación inicial, X induce entonces un único campo $Y : M \to TM$ tal que $\{X_p, Y_p\}$ es una base ortonormal orientada positivamente de T_pM para cada $p \in M$. Veamos que Y es suave:

(b)

(c)

(d)

(e)

□