Geometría Diferencial

Guido Arnone

Incluyo la reentrega del ejercicio (11)(d) de la práctica cuatro, sobre la cohomología del producto de esferas, esta vez sin usar la fórmula de Künneth.

Voy a notar $S_{n,m} := \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ y $h^q_{n,m} := \dim H^q(S_{n,m})$. Para describir la cohomología de $\mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m$ como espacio vectorial graduado, basta calcular $h^q_{n,m}$ para cada $q \geq 1$.

Ejercicio 11 (d). Calcule la cohomología de un producto cartesiano de dos esferas.

Demostración. Para calcular $H^q(S_{n,m})$ para cada $n, m \in \mathbb{N}$ y $q \in \mathbb{N}_0$ procederemos por inducción en $n + m \in \mathbb{N}$. Consideramos la sucesión exacta larga de Mayer-Vietoris para los abiertos $U = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \setminus \{e_{m+1}\}$ y $V = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \setminus \{-e_{m+1}\}$,

$$\cdots \to H^q(S_{n,m}) \to H^q(U) \oplus H^q(V) \to H^q(U \cap V) \to H^{q+1}(S_{n,m}) \to \cdots$$

Como $\mathbb{S}^m \setminus \{e_{m+1}\}$ y $\mathbb{S}^m \setminus \{-e_{m+1}\}$ son difeomorfos a $\mathbb{R}^m$ a través de las proyecciones estereográficas (pues estas son cartas de la m-esfera), se tiene que $U \equiv V \equiv \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m$. Además, al $\mathbb{R}^m$ ser contráctil es $\mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \simeq \mathbb{S}^n \times *$ y este último es difeomorfo a $\mathbb{S}^n$.

En conclusión tanto U como V tienen el tipo homotópico de la n-esfera, y dado que la cohomología es invariante homotópico, obtenemos

$$H^q(U) = H^q(V) = \mathbb{R}^{\delta_{qn} + \delta_{q0}}$$

para cada $q \in \mathbb{N}_0$.

Además, dado que la proyección estereográfica es un difeomorfismo entre $\mathbb{S}^m \setminus \{e_{m+1}\}$ y $\mathbb{R}^m$, debe enviar al abierto $\mathbb{S}^m \setminus \{e_{m+1}, -e_{m+1}\}$ a $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ para cierto punto p en que se corresponde con la imagen de $-e_{m+1}$. Como $\mathbb{R}^m \setminus \{p\}$ es homotópico a $\mathbb{S}^{m-1}$, vemos que

$$U \cap V = \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^m \setminus \{e_{m+1}, -e_{m+1}\} \equiv \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \setminus \{p\} \simeq \mathbb{S}^n \times \mathbb{S}^{m-1}$$

y por tanto $H^q(U \cap V) \simeq H^q(S_{n,m-1})$ para todo $q \in \mathbb{N}_0$.

Si ahora $q \notin \{0, n, n-1\}$, entonces $H^q(\mathbb{S}^n) = H^{q+1}(\mathbb{S}^n) = 0$ y de (1) tenemos una sucesión exacta de la forma

$$0 \to H^q(U \cap V) \to H^{q+1}(S_{n,m}) \to 0$$

lo cual nos dice que $H^{q+1}(S_{n,m}) \simeq H^q(U \cap V) \simeq H^q(S_{n,m-1})$.

Como $S_{n,m} \equiv S_{m,n} \times \mathbb{S}^n$ via $(x, y) \in S_{n,m} \mapsto (y, x) \in S_{m,n}$, con el mismo procedimiento obtenemos que para todo $q \notin \{0, m, m-1\}$ es

$$H^{q+1}(S_{n,m}) \simeq H^{q+1}(S_{m,n}) \simeq H^q(S_{m,n-1}) \simeq H^q(S_{n-1,m}).$$

Además, ya sabemos que $H^0(S_{n,m}) = \mathbb{R}$ pues $S_{n,m}$ es una variedad arcoconexa.

Conocemos entonces $H^q(S_{n,m})$ a partir de la hipótesis inductiva para todo $q \notin \{1, n, n+1\} \cap \{1, m, m+1\}$. Una vez más por (1) tenemos una sucesión exacta

$$0 \to H^{n-1}(U \cap V) \to H^n(S_{n,m}) \to H^n(U) \oplus H^n(V) \to H^n(U \cap V) \to H^{n+1}(S_{n,m}) \to 0$$

que vía los isomorfismos anteriores dá la sucesión exacta

$$0 \to H^{n-1}(S_{n,m-1}) \to H^n(S_{n,m}) \to H^n(\mathbb{S}^n)^2 \to H^n(S_{n,m-1}) \to H^{n+1}(S_{n,m}) \to 0.$$

Ahora, dejando de lado el caso $q = 1$, la intersección $\{n, n+1\} \cap \{m, m+1\}$ es no vacía si y sólo si $n \in \{m+1, m, m+1\}$ y en tal caso dá $\{\}$ ó $\{\}$. $\square$