Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 3

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elejí resolver los ejercicios (2), (8) y (9).

Recuerdo primero el siguiente resultado,

Observación. Sea M una variedad y $v \in T_pM$ una derivación en un punto $p \in M$. Entonces, existe una curva suave $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$.

En efecto, consideremos primero una carta (U, ϕ) con $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. Componiendo con una traslación (que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$) si es necesario, podemos suponer que $\phi(p) = 0$. Ahora, como los *ganchos* de ϕ en p son una base para T_pM, existen únicos coeficientes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_p$.

Ahora, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $B_\varepsilon(0) \subset \phi(U)$, afirmo que la curva $c : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \phi^{-1}(tv) \in M$ cumple lo pedido. En primer lugar tenemos que $c(0) = \phi^{-1}(0) = p$. Observemos también que c es suave, pues es la composición de ϕ^{-1} que es suave (pues ϕ es una carta de M) y la curva $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ que también lo es.

Por último si $g \in C^\infty(M)$, entonces

$$\begin{aligned}
d_0c\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)(g) = \frac{d}{dt}\Big|_0(gc) = \frac{d}{dt}\Big|_0(g\phi^{-1}\gamma) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial g\phi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{c(0)} \cdot \gamma_i'(0) \\
= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g\phi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_p \cdot a_i = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_p(g) \\
= \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_p\right)(g) = v(g).
\end{aligned}$$

de forma que $c'(0) = v$.

Ejercicio 2. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $d_pf = 0$.

Demostración. Como p es un máximo local de f, existe un abierto $U \ni p$ tal que $f(q) \leq f(p)$ para cada $q \in U$. Fijemos $v \in T_pM$. Por la observación anterior, tenemos una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$. Además por como construimos la curva en la observación anterior, tomando un carta (V, ϕ) con $p \in V \subset U$ podemos más aún suponer que $\operatorname{im} c \subset U$. En consecuencia es $fc(t) \leq f(0) = f(p)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esto es, 0 resulta un máximo local de la curva suave $fc : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ y entonces $(fc)'(0) = 0$. Esto dice que

$$0 = d_0(f \circ c)\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = d_p f\left(d_0 c\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)\right) = d_p f(c'(0)) = d_p f(v).$$

Como $d_p f(v) = 0$ para cada $v \in T_p M$, en efecto $d_p f = 0$. □

Probamos ahora la sugerencia del ejercicio (8).

Proposición 2. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Si $g, h \in G$ y $\gamma : (a, b) \to G$ es una curva integral de X que arranca en $g = \gamma(0)$ entonces la curva $\eta : t \in (a, b) \to h\gamma(t) \in G$ es una curva integral de X que arranca en hg.

Demostración. Como $\eta(0) = h\gamma(0) = hg$, la curva η comienza en hg. Resta ver que es una curva integral. Fijemos ahora $s \in (a, b)$. Observando que por definición $\eta = L_h \circ \gamma$, es

$$\begin{aligned} d_s\eta\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) &= (d_{\gamma(s)}L_h \circ d_s\gamma)\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) = d_{\gamma(s)}L_h\left(d_s\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right)\right) \\ &= d_{\gamma(s)}L_h(X_{\gamma(s)}) \overset{(X\in\mathfrak{g})}{=} X_{h\gamma(s)} = X_{\eta(s)}. \end{aligned}$$

Esto es precisamente que η sea integral. □

Ejercicio 8. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es *completo* y describa el flujo asociado.

Demostración. Veamos primero que existe una curva integral definida en toda la recta que comienza en la identidad de G. Consideremos la curva integral maximal $\gamma : (a, b) \to G$ que satisface $\gamma(0) = e$. Veamos que supongamos que $b < +\infty$ y sea $\varepsilon \in (0, b)$. Ahora, definimos

$$\begin{aligned} \eta : (a - \varepsilon, b - \varepsilon) &\to G \\ t &\longmapsto \gamma(t + \varepsilon) \end{aligned}$$

que resulta suave pues es la composición de γ con la restricción de la traslación $s_\varepsilon(t) = t + \varepsilon$. Además, □

Ejercicio 10. Sea $G = GL(n, \mathbb{R})$. Recordemos que podemos identificar $T_I G$ con $M_n(\mathbb{R})$. Probar que:

a) Para cada $A \in M_n(\mathbb{R})$, describa explicitamente el campo tangente X_A sobre G que es invariante a izquierda y tal que $(X_A)_I = A$.

b) Determine la función $\exp : T_e G \to G$.

c) Muestre que $\exp : T_e G \to G$ no es un homomorfismo de grupos.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

a) Fijemos $A \in M_n\mathbb{R}$. Sabemos que en general, si G es un grupo de Lie, el campo tangente $X_v \in \mathfrak{X}(G)$ invariante a izquierda que vale $v \in T_eG$ en la identidad es

$$(X_v)_g = (L_g)_{*,e}(v). \tag{1}$$

En este caso, la multiplicación está dada por la multiplicación matricial, y tenemos una identifiación $T_B M_n\mathbb{R} \equiv M_n\mathbb{R}$ para toda matriz B al ser $M_n\mathbb{R}$ un $\mathbb{R}$-espacio vectorial. Además, como la multiplicación a izquierda por una matriz fija es $\mathbb{R}$-lineal, bajo estas identificaciones es $L_B(C) = BC$ y $(L_B)_{*,I}(C) = BC$ para todo par de matrices $B, C \in M_n\mathbb{R}$. En este caso (1) nos dice entonces que

$$(X_A)_B = (L_B)_{*,I}(A) = BA$$

para cada $B \in M_n\mathbb{R}$.

b) Determinemos ahora $\exp : T_I M_n\mathbb{R} \to M_n\mathbb{R}$. Dada $A \in M_n\mathbb{R}$, bajo las identifiaciones de (a) la curva integral γ de X_A que comienza en I debe satisfacer la ecuación diferencial con datos iniciales dada por

$$\begin{cases} \gamma'(t) = (X_A)_{\gamma(t)} = A\gamma(t) \\ \gamma(0) = I \end{cases} \tag{2}$$

La solución a ésta última es conocida, y es precisamente la curva

$$e^t A := \sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!}.$$

En efecto, notemos que esta serie es absolutamente covergente para todo $t \in \mathbb{R}$ ya que

$$\sum_{k\geq 0} \left\| \frac{(tA^k)}{k!} \right\| = \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\|A^k\| \leq \sum_{k\geq 0} \frac{t^k}{k!}\|A\|^k = \sum_{k\geq 0} \frac{(\|A\|t)^k}{k!} = e^{t\|A\|} < +\infty.$$

Por lo tanto, podemos derivar término a término,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}e^{tA} &= \sum_{k\geq 0} \frac{d}{dt}\frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{d}{dt}\frac{t^k A^k}{k!} = \sum_{k\geq 1} \frac{kt^{k-1}A^k}{k!} \\ &= A\sum_{k\geq 1} \frac{(tA)^{k-1}}{(k-1)!} = A\sum_{k\geq 0} \frac{(tA)^k}{k!} = Ae^{tA}, \end{aligned}$$

y es claro además que $e^{0\cdot A} = I + \sum_{k\geq 1} \frac{0^k}{k!} = I$. En conclusión, identificando $T_I M_n\mathbb{R}$ con $M_n\mathbb{R}$ obtenemos $\exp(A) = e^A$ para toda $A \in M_n\mathbb{R}$.

c) Consideremos las siguientes matrices nilpotentes de $M_2\mathbb{R}$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Como $A^2 = B^2 = 0$, por un cálculo directo, es

$$\exp(A) = I + A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ \text{y} \ \exp(B) = I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

así que

$$\exp(A)\exp(B) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, como $(A+B)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^2 = I$, es

$$\begin{aligned} \exp(A+B) &= \sum_{k\geq 0} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k\geq 0} \frac{(A+B)^2k}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{(A+B)^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{I}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{A+B}{(2k+1)!} \end{aligned}$$

Usando que las proyecciones a cada coordenada son continuas, vemos que

$$\pi_{21}(\exp(A+B)) = \sum_{k\geq 0} \frac{I}{(2k)!} + \sum_{k\geq 0} \frac{1}{(2k+1)!} = e.$$

Esto nos dice que $\exp(A+B)_{21} \neq (\exp(A)\exp(B))_{21}$ y por lo tanto $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$, lo que muestra que exp no es un morfismo de grupos.

$\square$