Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 1

Guido Arnone

Ejercicio 4. Probar que:

(a) El conjunto de vectores normales unitarios a una curva regular en $\mathbb{R}^3$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión 2.

(b) Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^n$ y sea $F : \Omega \to \mathbb{R}$ una funcin diferenciable que tiene a 0 como valor regular, de manera que el conjunto $M = F^{-1}(0)$ es una subvariedad de $\mathbb{R}^n$. Muestre que el conjunto SM de vectores unitarios tangentes a M tiene una estructura natural de variedad de dimensión $2n - 3$.

Demostración.

(a) Sea $\alpha : I \to \mathcal{C}$ una parametrización $\mathcal{C}^2$ de una curva regular de curvatura positiva y, sin pérdida de generalidad, la suponemos parametrizada por longitud de arco. Ahora, dado un punto $p = \alpha(t_0)$ en la traza, la recta tangente a la curva allí es $L_p = \{\lambda\alpha'(t_0) + \alpha(t_0)\}$. Ahora, los vectores normales unitarios a $\mathcal{C}$ en p son los vectores normales unitarios a L_p en p, los cuales se pueden describir como

$$\mathcal{N}_p := \{v \in \mathbb{R}^3 : \langle \alpha'(t_0), v\rangle = 0, \langle v, v\rangle = 1\}.$$

Consideramos entonces

$$\mathcal{N} = \{(t, v) : \langle \alpha'(t), v\rangle = 0, \langle v, v\rangle = 1\}$$

Veamos que ésta es una variedad diferenciable de dimensión 2. Notemos que $\mathcal{N}$ es la preimagen del $(0, 1)$ por la siguiente función

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 &\mapsto \mathbb{R}^2 \\ (t, v) &\mapsto (\langle \alpha'(t), v\rangle, \langle v, v\rangle) \end{aligned}$$

que es diferenciable, pues $\alpha \in \mathcal{C}^2(I)$. Por el teorema de valores regulares, bastaría probar que DF_p es sobreyectivo para cada $p \in F^{-1}(0, 1)$. Como

$$DF_{(t,v)} = \begin{pmatrix} \langle \alpha''(t), v\rangle & \alpha'(t) \\ 0 & 2v \end{pmatrix},$$

esto es equivalente a que las filas no sean múltiplos una de la otra. Si fuera así, en particular existiría $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $v = \mu\alpha'(t)$ y entonces sería

$$1 = \langle v, v\rangle = \mu\langle \alpha'(t), v\rangle = 0$$

lo que es absurdo. En conclusión, necesariamente las filas de D_pF son linealmente independientes (i.e. el diferencial es sobreyectivo) cuando $F(p) = (0, 1)$, y consecuentemente el teorema de valores regulares asegura que $\mathcal{N}$ es una variedad de dimensión $\dim \mathcal{N} = \dim \mathbb{R}^4 - \dim \mathbb{R}^2 = 2$.

(b) Buscamos en algún sentido generalizar la idea de (a). Dada $M = F^{-1}(0)$ variedad con 0 valor regular de F, definimos

$$SM := \{(p,v) : p \in M, \langle \nabla_p F, v\rangle = 0, \langle v,v\rangle = 1\} \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$$

de forma que $SM = \Gamma^{-1}(0,0,1)$ con

$$\begin{aligned}\Gamma : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n &\to \mathbb{R}^3\\ (p,v) &\longmapsto (F(p), \langle \nabla_p F, v\rangle, \langle v,v\rangle)\end{aligned}$$

que es diferenciable pues F y el producto interno lo son. Ahora dado $(p,v) \in SM$, como

$$D\Gamma_{(p,v)} = \begin{pmatrix} \nabla_p F & 0 \\ H & \nabla_p F \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

con $\mathbb{R}^n \ni H = \left(\sum_i \frac{\partial F}{\partial x_j x_i}(p) v_i\right)_j$ y $\nabla_p F \neq 0$ pues $F(p) = 0$, existe $i \in [\![n]\!]$ tal que $\frac{\partial F}{\partial X_i} \neq 0$ y el menor que resulta de quitar la fila 1 y columna i es de la forma

$$DF^{(1,i)}_{(p,v)} = \begin{pmatrix} * & \nabla_p F \\ 0 & 2v \end{pmatrix}$$

Por el mismo argumento que en (a) este resulta de rango 2, pues $\nabla_p F \perp v$ y $\nabla_p F, v \neq 0$. Como $D_{(p,v)}F^{(1,i)}$ tiene rango 2 y la primera fila es linealmente independiente de las siguientes, vemos que $D_{(p,v)}F$ tiene rango 3 y como este es el máximo, es sobreyectivo. El teorema de valores regulares nos permite entonces concluir que $SM = \Gamma^{-1}(0,0,1)$ es variedad diferenciable y

$$\dim SM = \dim \mathbb{R}^{2n} - \dim \mathbb{R}^3 = 2n - 3.$$

□

Ejercicio 5. Muestre que los siguientes espacios son variedades diferenciales y determine sus dimensiones.

(i) $SL(n,\mathbb{C})$ el conjunto de las matrices complejas de $n \times n$ y determinante 1.

(ii) $U(n,\mathbb{R}) \subset M_n\mathbb{C}$, el conjunto de las matrices complejas de $n \times n$ que son unitarias, esto es, las matrices A tales que $AA^* = I$.

(iii) $Sp(2n,\mathbb{R})$, el conjunto de las matrices $A \in M_{2n}\mathbb{R}$ tales que $A\Omega A^t = \Omega$, con

$$\Omega = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Demostración. Hacemos cada caso por separado.

(i) Afirmamos primero que la función $\det : M_n\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es diferenciable. Eso es porque dada una matriz compleja $A = (X_{kl} + iY_{kl})_{kl}$, luego $\det A$ es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ en función de cada X_{kl} e Y_{kl},

$$\det((X_{kl} + iY_{kl})_{i,j}) = \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma)(X_{1\sigma(1)} + iY_{1\sigma(1)}) \cdots (X_{n\sigma(n)} + iY_{n\sigma(n)}).$$

Identificando $M_n\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{2n^2}$ y $\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^2$, el determinante en cada coordenada (es decir, tomando partes real e imaginaria) resulta un polinomio, y por lo tanto es diferenciable. Así, podemos utilizar el teorema de valores regulares pensando det como una funcion $\mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{R}^2$ y tomando la preimagen de $(1,0) = 1 + 0i$ pues por definición es $SL(n,\mathbb{C}) = \det^{-1}(\{1\})$. Con la intención de alivianar la notación seguimos escribiendo $X + iY = (X,Y) \in \mathbb{R}^2$ y de igual forma en $\mathbb{R}^{2n^2}$. Para conocer el diferencial $D := D(\det)$, por linealidad podemos calcularlo en cada dirección canónica E_{kl} e iE_{kl}, siendo éstas las $2n^2$-uplas canónicas que tienen un 1 exactamente en el lugar X_{kl} e Y_{kl} respectivamente. Dado $t \in \mathbb{R}$ y usando el desarrollo por cofactores,

$$\begin{aligned}
\det(A + tE_{kl}) &= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s}(A + tE_{kl})_{ks}(A + tE_{kl})^{(k,s)} = \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s}(A + tE_{kl})_{ks}A^{(k,s)} \\
&= \sum_{s=1}^{n} (-1)^{k+s}A_{ks}A^{(k,s)} + t(-1)^{k+l}A^{(k,l)} = \det(A) + t(-1)^{k+l}A^{(k,l)} \\
&= \det(A) + t\,\mathrm{adj}(A)_{kl}
\end{aligned}$$

y del mismo modo, $\det(A + tiE_{kl}) = \det(A) + ti\,\mathrm{adj}(A)_{kl}$. Por lo tanto,

$$D_A(E_{ij}) = \lim_{t\to 0} \frac{\det(A + tE_{ij}) - \det(A)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\det(A) + t\,\mathrm{adj}(A)_{kl} - \det(A)}{t} = \mathrm{adj}(A)_{kl}$$

y $D_A(iE_{ij}) = i\,\mathrm{adj}(A)_{kl}$. Por lo tanto, si $\mathrm{adj}(A)_{kl} = R_{kl} + iI_{kl}$ para cada $k,l \in [\![n]\!]$ entonces $i\,\mathrm{adj}(A)_{kl} = iR_{kl} - I_{kl}$ y la matriz diferencial de det en A como función $\mathbb{R}^{2n^2} \to \mathbb{R}^2$ es

$$D_A = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} & R_{21} & \dots & R_{nn} & -I_{11} & \dots & -I_{nn} \\ I_{11} & I_{12} & \dots & I_{1n} & I_{21} & \dots & I_{nn} & R_{11} & \dots & R_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si D_A no fuera sobreyectivo, entonces o bien $D_A = 0$ o bien D_A es de rango 1. Veamos que esto último (también) implica $\mathrm{adj}(A) = 0$. En efecto, si $\operatorname{rg} D_A = 1$ entonces las filas del diferencial son linealmente dependientes y en consecuencia, existe $\lambda \neq 0$ tal que

$$\begin{cases} R_{kl} = \lambda I_{kl} \\ -I_{kl} = \lambda R_{kl} \end{cases}$$

para cada $k,l \in [\![n]\!]$. De aquí concluimos que $R_{kl} = -\lambda^2 R_{kl}$ y por lo tanto $R_{kl}(1 + \lambda^2) = 0$ así que $R_{kl} = 0$ e $I_{kl} = -\lambda R_{kl} = 0$. Ahora bien, si $A \in SL(n,\mathbb{C})$ luego es

$$I = 1 \cdot I = \det(A)I = A\,\mathrm{adj}(A),$$

y no puede ser entonces $\mathrm{adj}(A) = 0$. En consecuencia, D_A siempre es sobreyectivo cuando A es un elemento de $SL(n,\mathbb{C})$ y por lo tanto, el teorema de valores regulares nos asegura que esta última es variedad diferenciable de dimensión $2n^2 - 2 = 2(n^2 - 1)$.

(ii) Con la misma idea que antes identificamos $M_n\mathbb{C} \equiv \mathbb{R}^{2n^2}$ para usar el teorema de valores regulares. Notemos que dada cualquier matriz A luego $AA^* - I$ es siempre Hermitiana y podemos considerar entonces la función

$$F : A \in M_n\mathbb{C} \mapsto AA^* - I \in \mathcal{H}_n$$

que verifica $U(n,\mathbb{C}) = F^{-1}(0)$ y es diferenciable pues es un polinomio en cada componente. Como queremos utilizar el teorema de valores regulares, notemos primero que $\mathcal{H}_n$ es una variedad diferenciable pues es un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión finita: si C y D son Hermitianas, $(\lambda C + D)^* = \lambda^* C^* + D^* = \lambda C + D$ pues justamente λ es real. Además, una matriz $A + iB \in M_n\mathbb{C}$ con $A, B \in M_n\mathbb{R}$ es Hermitiana si y sólo si $A + iB = (A + iB)^* = A^t - iB^t$, es decir si y sólo si A es simétrica y B antisimétrica. Por lo tanto,

$$\dim \mathcal{H}_n = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} = n^2.$$

Ahora, calculemos $D_A F$: como

$$\begin{aligned} F(A + tE_{kl}) &= (A + tE_{kl})(A + tE_{kl})^* - I = (A + tE_{kl})(A^* + tE_{lk}) - I \\ &= AA^* + tAE_{lk} + tE_{kl}A^* + t^2E_{kl}E_{lk} - I \\ &= F(A) + tAE_{lk} + tE_{kl}A^* + t^2E_{kl}E_{lk} \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} F(A + tiE_{kl}) &= (A + tiE_{kl})(A + tiE_{kl})^* - I = (A + tiE_{kl})(A^* - tiE_{lk}) - I \\ &= AA^* - tiAE_{lk} + tiE_{kl}A^* + t^2E_{kl}E_{lk} - I \\ &= F(A) - tiAE_{lk} + tiE_{kl}A^* + t^2E_{kl}E_{lk}, \end{aligned}$$

luego es

$$D_A F(E_{kl}) = \lim_{t\to 0} \frac{F(A + tE_{kl}) - F(A)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{tAE_{lk} + tE_{kl}A^* + t^2E_{kl}E_{lk}}{t} = AE_{lk} + E_{kl}A^*$$

y de igual forma $D_A F(iE_{kl}) = iE_{kl}A^* - iAE_{lk}$. Por lo tanto, si $z = a + ib$ y $E(z)_{kl} := zE_{kl}$,

$$\begin{aligned} DF_A(E(z)_{kl}) &= D_A F((a + ib)E_{kl}) = a(AE_{lk} + E_{kl}A^*) + b(iE_{kl}A^* - iAE_{lk}) \\ &= (a + ib)E_{kl}A^* + (a - ib)AE_{lk} = zE_{kl}A^* + \bar{z}AE_{lk} \\ &= zE_{kl}A^* + (zE_{kl}A^*)^*. \end{aligned}$$

Finalmente, dada $Z \in M_n\mathbb{C}$ es

$$\begin{aligned} D_A F(Z) &= D_A F\left(\sum_{k,l} E(Z_{kl})_{kl}\right) = \sum_{k,l} D_A F(E(Z_{kl})_{kl}) = \sum_{k,l} Z_{kl}E_{kl}A^* + (Z_{kl}E_{kl}A^*)^* \\ &= \sum_{k,l} Z_{kl}E_{kl}A^* + \left(\sum_{k,l} Z_{kl}E_{kl}A^*\right)^* \end{aligned}$$

y como $\sum_{k,l} Z_{kl}E_{kl}A^* = \left(\sum_{k,l} Z_{kl}E_{kl}\right) A^* = ZA^*$, obtuvimos

$$D_A F(Z) = ZA^* + (ZA^*)^* = ZA^* + AZ^*.$$

Para terminar, veamos que $D_A F$ es sobreyectivo si $A \in U(n,\mathbb{C})$. Si H es Hermitiana, luego

$$\begin{aligned} D_A F\left(\frac{1}{2}HA\right) &= \frac{1}{2}(HA)A^* + \frac{1}{2}A(HA)^* = \frac{1}{2}HAA^* + \frac{1}{2}AA^*H^* \overset{(A\in U(n,\mathbb{C}))}{=} \\ &= \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H^* \overset{(H\in\mathcal{H}_n)}{=} \frac{1}{2}H + \frac{1}{2}H = H. \end{aligned}$$

Concluimos entonces que $U(n,\mathbb{C})$ es una variedad diferenciable y su dimensión es exactametntte $\dim U(n,\mathbb{C}) = \dim M_n\mathbb{C} - \dim \mathcal{H}_n = 2n^2 - n^2 = n^2$.

(iii) Una vez más, buscamos utilizar el teorema de valores regulares. Como para cualquier matriz $A \in M_{2n}\mathbb{R}$ tenemos que

$$(A\Omega A^t - \Omega)^t = A\Omega^t A^t - \Omega^t = -A\Omega A^t + \Omega = -(A\Omega A^t - \Omega)$$

pues $\Omega^t = -\Omega$, podemos definir la siguiente función a las matrices antisimétricas $\mathfrak{A}_{2n}$ via

$$F : A \in M_{2n}\mathbb{R} \mapsto A\Omega A^t - \Omega \in \mathfrak{A}_{2n}.$$

Así, es $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R}) = F^{-1}(0)$ y F es diferenciable, al ser un polinomio en cada coordenda, de forma que podemos hacer el mismo procedimiento de antes: dado que

$$\begin{aligned} F(A + tE_{ij}) &= (A + tE_{ij})\Omega(A + tE_{ij})^t - \Omega = (A + tE_{ij})\Omega(A^t + tE_{ji}) - \Omega \\ &= A\Omega A^t + tA\Omega E_{ji} + tE_{ij}\Omega A^t + t^2 E_{ij}\Omega E_{ji} - \Omega \\ &= F(A) + t(A\Omega E_{ji} + E_{ij}\Omega A^t) + t^2 E_{ji}\Omega E_{ji} \end{aligned}$$

luego $D_A F(E_{ij}) = \lim_{t\to 0} \frac{F(A+tE_{ij})-F(A)}{t} = A\Omega E_{ji} + E_{ij}\Omega A^t$ y

$$\begin{aligned} D_A F(B) = D_A F\left(\sum_{i,j} B_{ij}E_{ij}\right) &= \sum_{i,j} B_{ij} D_A F(E_{ij}) = \sum_{i,j} B_{ij}(A\Omega E_{ji} + E_{ij}\Omega A^t) \\ &= \sum_{i,j} B_{ij}A\Omega E_{ji} + \sum_{i,j} B_{ij}E_{ij}\Omega A^t = A\Omega\left(\sum_{i,j} B_{ij}E_{ji}\right) + \left(\sum_{i,j} B_{ij}E_{ji}\right)\Omega A^t \\ &= A\Omega B^t + B\Omega A^t. \end{aligned}$$

Si ahora $A \in \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})$ y $X \in \mathfrak{A}_{2n}$, entonces tomando $Z = \frac{1}{2}X$ tenemos que

$$\begin{aligned} D_A F(Z\Omega A) &= A\Omega(Z\Omega A)^t + (Z\Omega A)\Omega A^t = (A\Omega A^t)\Omega^t Z^t + Z\Omega(A\Omega A^t) \\ &= \Omega\Omega^t Z^t + Z\Omega\Omega = -Z^t + Z = -\frac{1}{2}X^t + \frac{1}{2}X = \frac{1}{2}X + \frac{1}{2}X = X, \end{aligned}$$

así que $D_A F$ es sobreyectivo. Esto prueba que, en efecto, $\mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R})$ es una variedad diferenciable y

$$\begin{aligned} \dim \mathsf{Sp}(2n, \mathbb{R}) &= \dim M_{2n}\mathbb{R} - \dim \mathfrak{A}_{2n} \\ &= 4n^2 - \frac{(2n)(2n-1)}{2} = 4n^2 - 2n^2 - n \\ &= 2n^2 - n = n(2n-1). \end{aligned}$$

□

Ejercicio 7. Sean M y N variedades de dimensiones m y n, respectivamente. Probar que:

(a) El espacio producto $M \times N$ tiene una estructura natural de variedad diferenciable de dimensión $m + n$ y con respecto a esta estructura las proyecciones $p_1 : M \times N \to M$ y $p_2 : M \times N \to N$ son funciones diferenciables.

(b) Si P es una variedad y $f : P \to M$ y $g : P \to N$ son funciones diferenciables, entonces existe exactamente una función diferenciable $h : P \to M \times N$ tal que $p_1 \circ h = f$ y $p_2 \circ h = g$.

(c) Si M es una variedad, las funciones $\mathrm{id} : M \to M$ y $\Delta : x \in M \mapsto (x,x) \in M \times M$ son diferenciables.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado:

(a) Dotamos a $M \times N$ de la topología producto. Luego, $M \times N$ es Hausdorff ya que es producto de espacios Hausdorff. Como M y N son variedades, tienen bases numerables $\mathcal{B}_M, \mathcal{B}_N$ respectivamente y entonces el conjunto numerable $\tilde{\mathcal{B}} = \{U \times V : U \in \mathcal{B}_M, V \in \mathcal{B}_N\}$ es base de $M \times N$. En efecto, si $A \subseteq M \times N$ es abierto y $(x,y) \in A$, existe luego un abierto básico $(x,y) \in U \times V \subset A$. Como $\mathcal{B}_N$ y $\mathcal{B}_M$ son bases, tenemos abiertos $x \in U_0 \subseteq U \in \mathcal{B}_M$, $y \in V_0 \subseteq V \in \mathcal{B}_N$. Por lo tanto, $(x,y) \in U_0 \times V_0 \subseteq U \times V \subseteq A$, lo que prueba que $\tilde{\mathcal{B}}$ es base. Ahora veamos que $M \times N$ tiene una estructura diferenciable. Sean $\mathcal{A}_1 = \{(U_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ y $\mathcal{A}_2 = \{(V_j, \psi_j)\}_{j \in J}$ los atlas de M y N respectivamente. Para cada $(i,j) \in I \times J$, notamos $\varphi_i \times \psi_j$ a $(u,v) \in U_i \times V_j \mapsto (\varphi_i(u), \psi_j(v)) \in \varphi_i(U_i) \times \psi(V_j)$ y definimos luego

$$\mathcal{A} := \{(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)\}_{(i,j) \in I \times J}.$$

Veamos que este es un atlas para $M \times N$. Como la topología en $M \times N$ es la producto cada $U_i \times V_j$ es abierto, y por otro lado, las funciones $\varphi_i \times \psi_j$ son homeomorfismos al ser producto de homeomorfismos. Además, dado que los abiertos $(U_i)_{i \in I}$ y $(V_j)_{j \in J}$ cubren M y N respectivamente, es

$$\bigcup_{(i,j) \in I \times J} U_i \times V_j = \bigcup_{i \in I} U_i \times \bigcup_{j \in J} V_j = M \times N.$$

Finalmente, si $\varphi_i \times \psi_j$ y $\varphi_k \times \psi_l$ son cartas de $\mathcal{A}$, notando

$$W := (U_i \times V_j) \cap (U_k \times V_l) = (U_i \cap U_k) \times (V_j \times V_l)$$

tenemos que la composición

$$(\varphi_i \times \psi_j)|_W \circ ((\varphi_k \times \psi_l)|_W)^{-1} : (\varphi_k \times \psi_l)(W) \mapsto (\varphi_i \times \psi_j)(W) \tag{1}$$

verifica

$$\begin{aligned}(\varphi_i \times \psi_j)|_W \circ ((\varphi_k \times \psi_l)|_W)^{-1}(x,y) &= (\varphi_i \times \psi_j) \circ (\varphi_k^{-1} \times \psi_l^{-1})(x,y) \\ &= (\varphi_i \varphi_k^{-1}(x), \psi_j \psi_l^{-1}(y))\end{aligned}$$

para cada $(x,y) \in (\varphi_k \times \psi_l)(W) = \varphi_k(U_i \cap U_k) \times \psi_l(V_j \times V_l)$. Como por hipótesis tanto $\varphi_i \varphi_k^{-1}$ como $\psi_j \psi_l^{-1}$ son funciones diferenciables entre abiertos euclídeos, es entonces $\varphi_i \varphi_k^{-1} \times \psi_j \psi_l^{-1}$ diferenciable y a la vez coincide con (1), lo que termina de probar que $\mathcal{A}$ dota a $M \times N$ de una estructura diferenciable. Los abiertos $U_i \times V_j$ son en particular abiertos de $\mathbb{R}^{n+m}$ lo que dice que $\dim M \times N = \dim M + \dim N = m + n$. Ahora veamos que las proyecciones son diferenciables. Fijamos $(x,y) \in M \times N$ y sea $(U_i \times V_j, \varphi_i \times \psi_j)$ una carta en con $x \in U_i, y \in V_j$. Luego por construcción de $\mathcal{A}$ sabemos que φ_i es carta de M con $x = p_1(x,y) \in p_1(U_i \times V_j) = U_i$ y ψ_j es carta de N con $y = p_2(x,y) \in p_2(U_i \times V_j) = V_j$. Basta entonces con probar que $\varphi_i p_1 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}$ y $\psi_j p_2 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}$ son diferenciables. Ésta última es exactamente la proyección en la segunda coordenada $\tilde{p}_2 : \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j) \to \psi_j(V_j)$, ya que si $(x,y) \in \varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$ entonces $\psi_j p_2 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}(x,y) = \varphi_i p_2(\varphi_i^{-1}(x), \psi_j^{-1}(y)) = \psi_j(\psi_j^{-1}(y)) = y$. Similarmente $\varphi_i p_1 (\varphi_i \times \psi_j)^{-1}$ es la proyección de $\varphi_i(U_i) \times \psi_j(V_j)$ en la primera coordenada, y así vemos que ambas proyecciones son diferenciables.

(b) Veamos en primer lugar que existe una tal función. Consideramos

$$h : p \in P \mapsto (f(p), g(p)) \in M \times N$$

que verifica $p_1 h(p) = p_1(f(p), g(p)) = f(p)$ y $p_2 h(p) = g(p)$. Sea $\mathcal{A}' = \{(\mu_k, W_k)\}_{k \in K}$ un atlas maximal de P y fijemos $p \in P$. Tomamos a continuación $W_k \ni p$ y $U_i \times V_j \ni h(p) = (f(p), g(p))$ abiertos de P y $M \times N$ respectivamente, correspondientes a cartas (μ_k, W_k) y $(\varphi_i \times \psi_j, U_i \times V_j)$. Ahora, veamos que $(\varphi_i \times \psi_j) h \mu_k^{-1}$ es diferenciable. Como punto a punto tenemos que

$$(\varphi_i \times \psi_j) h \mu_k^{-1}(z) = (\varphi_i \times \psi_j)(f(\mu_k^{-1}(z)), g(\mu_k^{-1}(z))) = (\varphi_i f(\mu_k^{-1}(z)), \psi_j g(\mu_k^{-1}(z)))$$

para cada $z \in \mu_k(W_k)$ y tanto $\varphi_i f \mu_k^{-1}$ como $\psi_j g \mu_k^{-1}$ son diferenciables pues f y g son diferencables, consecuentemente $(\varphi_i \times \psi_j) h \mu_k^{-1}$ es diferenciable. Con respecto a la unicidad, está dada a un nivel de conjuntos: si $\tilde{h} : P \to M \times N$ cumple $p_1 \tilde{h} = f$ y $p_2 \tilde{h} = g$, luego notando $\tilde{h}(p) = (\tilde{h}_1(p), \tilde{h}(p)_2)$ tenemos que

$$f(p) = p_1 \tilde{h} = \tilde{h}_1(p)$$

y

$$g(p) = p_2 \tilde{h} = \tilde{h}_2(p)$$

así que $\tilde{h}(p) = (f(p), g(p)) = h(p)$, para todo $p \in P$.

$$\begin{tikzcd}
& P \arrow[dl, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists! h"'] \arrow[dr, "g"] & \\
M & M \times N \arrow[l, "p_1"] \arrow[r, "p_2"'] & N
\end{tikzcd}$$

(c) Si $p \in M$ y (U, φ) es una carta de M con $p \in U$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
\varphi(U) \arrow[r, "\mathrm{id}_{\varphi(U)}"'] & \varphi(U)
\end{tikzcd}$$

conmuta e $\mathrm{id}_{\varphi(U)} = \varphi\varphi^{-1}$ es siempre diferenciable. Por lo tanto, id es diferenciable y entonces por (b) existe una única función $f : M \to M \times M$ tal que $p_1 f = \mathrm{id} = p_2 f$, que resulta diferenciable. Como Δ cumple lo primero, debe ser $\Delta = f$ y por lo tanto, Δ es diferenciable.

□