Geometría Diferencial

Ejercicios para Entregar - Práctica 3

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elejí resolver los ejercicios (2), (8) y (9).

Recuerdo primero el siguiente resultado,

Observación. Sea M una variedad y $v \in T_pM$ una derivación en un punto $p \in M$. Entonces, existe una curva suave $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$.

En efecto, consideremos primero una carta (U, ϕ) con $p \in U \subset \mathbb{R}^n$. Componiendo con una traslación (que es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^n$) si es necesario, podemos suponer que $\phi(p) = 0$. Ahora, como los *ganchos* de ϕ en p son una base para T_pM, existen únicos coeficientes $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tales que $v = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}|_p$.

Ahora, tomando $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño como para que $B_\varepsilon(0) \subset \phi(U)$, afirmo que la curva $c : t \in (-\varepsilon, \varepsilon) \mapsto \phi^{-1}(tv) \in M$ cumple lo pedido. En primer lugar tenemos que $c(0) = \phi^{-1}(0) = p$. Observemos también que c es suave, pues es la composición de ϕ^{-1} que es suave (pues ϕ es una carta de M) y la curva $\gamma : t \in \mathbb{R} \mapsto t(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ que también lo es.

Por último si $g \in C^\infty(M)$, entonces

$$
\begin{aligned}
d_0c\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)(g) = \frac{d}{dt}\Big|_0(gc) = \frac{d}{dt}\Big|_0(g\phi^{-1}\gamma) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g\phi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_{c(0)} \cdot \gamma_i'(0) \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{\partial g\phi^{-1}}{\partial x_i}\Big|_p \cdot a_i = \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_p(g) \\
&= \left(\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial}{\partial \phi^i}\Big|_p\right)(g) = v(g).
\end{aligned}
$$

de forma que $c'(0) = v$.

Ejercicio 2. Sean M una variedad y $f \in C^\infty(M)$. Si f tiene un máximo local en $p \in M$, entonces $d_pf = 0$.

Demostración. Como p es un máximo local de f, existe un abierto $U \ni p$ tal que $f(q) \leq f(p)$ para cada $q \in U$. Fijemos $v \in T_pM$. Por la observación anterior, tenemos una curva $c : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$

tal que $c(0) = p$ y $c'(0) = v$. Además por como construimos la curva en la observación anterior, tomando un carta (V, ϕ) con $p \in V \subset U$ podemos más aún suponer que $\operatorname{im} c \subset U$. En consecuencia es $fc(t) \leq f(0) = f(p)$ para cada $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$. Esto es, 0 resulta un máximo local de la curva suave $fc : (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbb{R}$ y entonces $(fc)'(0) = 0$. Esto dice que

$$0 = d_0(f \circ c)\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right) = d_p f\left(d_0 c\left(\frac{d}{dt}\Big|_0\right)\right) = d_p f(c'(0)) = d_p f(v).$$

Como $d_p f(v) = 0$ para cada $v \in T_p M$, en efecto $d_p f = 0$. □

Probamos ahora la sugerencia del ejercicio (8).

Proposición 2. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Si $g, h \in G$ y $\gamma : (a, b) \to G$ es una curva integral de X que arranca en $g = \gamma(0)$ entonces la curva $\eta : t \in (a, b) \to h\gamma(t) \in G$ es una curva integral de X que arranca en hg.

Demostración. Como $\eta(0) = h\gamma(0) = hg$, la curva η comienza en hg. Resta ver que es una curva integral. Fijemos ahora $s \in (a, b)$. Observando que por definición $\eta = L_h \circ \gamma$, es

$$\begin{aligned} d_s\eta\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) &= (d_{\gamma(s)}L_h \circ d_s\gamma)\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) = d_{\gamma(s)}L_h\left(d_s\gamma\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right)\right) \\ &= d_{\gamma(s)}L_h(X_{\gamma(s)}) \overset{(X\in\mathfrak{g})}{=} X_{h\gamma(s)} = X_{\eta(s)}. \end{aligned}$$

Esto es precisamente que η sea integral. □

Ejercicio 8. Sea G un grupo de Lie, $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie y $X \in \mathfrak{g}$ un campo vectorial invariante a izquierda. Pruebe que X es *completo* y describa el flujo asociado.

Demostración. Notemos que por la proposición anterior, alcanza probar que existe una curva integral definida en toda la recta $\gamma : \mathbb{R} \to G$ tal que $\gamma(0) = e$. En tal caso, para cada $h \in G$ la curva $h\gamma : \mathbb{R} \to G$ resultará integral, definida en toda la recta, y comenzará en $h\gamma(0) = he = h$, probando que X es completo. [FALTA VER QUE HAY UNA CURVA INTEGRAL POR LA IDENTIDAD] □

A continuación, pruebo un resultado auxiliar para el ejercicio siguiente.

Lema 3. Si $v \in T_eG$ es un vector tangente a G en e y $X^v \in \mathfrak{g}$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X^v_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces, para cada $t, s \in R$ es $\gamma_{tv}(s) = \gamma_v(ts)$.

Demostración. Fijemos $t \in \mathbb{R}$. Notemos que tX resulta un campo invariante a izquierda pues para cada $g, h \in G$ tenemos $d_hL_g(tX_h) = td_hL_g(X_h) = tX_h$. Como además es $tX_e = tv$, concluimos así que $X^{tv} = tX^v$.

Ahora, por unicidad de las curvas integrales maximales, para ver que $\eta(s) := \gamma_v(t \cdot s) = \gamma_{tv}(s)$ alcanza probar que η es una curva integral de X^{tv} que comienza en e. Esto último es claro pues $\gamma_v(t \cdot 0) = \gamma_v(0) = e$. Para terminar, veamos que η es integral. Si notamos $l_t : s \in \mathbb{R} \mapsto ts \in \mathbb{R}$ entonces $\eta = \gamma_v \circ l_t$. Finalmente,

$$d_s\eta\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) = (d_{l_t(s)}\gamma_v \circ d_s l_t)\left(\frac{d}{dt}\Big|_s\right) = d_{ts}\gamma_v \circ l_t'(s) \mathrm{ARREGLARCUENTA}$$

□

Ejercicio 9. Sea G un grupo de Lie, e su elemento neutro y $\mathfrak{g}$ su álgebra de Lie. Probar que:

a) Si $v \in T_eG$ es un vector tangente a G en e y $X \in \mathfrak{g}$ es el único campo vectorial invariante a izquierda tal que $X_e = v$, sea $\gamma_v : \mathbb{R} \to G$ la única curva integral de X tal que $\gamma_v(0) = e$. Entonces γ_v es un homomorfismo de grupos, esto es,

$$\gamma_v(t+s) = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(s), \qquad \forall t, s \in \mathbb{R}.$$

b) Definimos una función $\exp : T_eG \to G$ poniendo, para cada $v \in T_eG$,

$$\exp(v) = \gamma_v(1).$$

Determine la diferencial $\exp_{*0} : T_eG \to T_eG$ y muestre que $\exp$ es localmente un difeomorfismo alrededor de 0.

c) Muestre que si $v, w \in T_eG$ son tales que $[v, w] = 0$, entonces

$$\exp(v+w) = \exp(v) \cdot \exp(w).$$

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

a) Fijemos $t \in \mathbb{R}$ y sea $g = \gamma_v(t)$. Por la Proposición 2, sabemos que

$$\eta(s) := g\gamma_v(s) = \gamma_v(t) \cdot \gamma_v(s)$$

es la curva integral maximal que comienza en $g \cdot e = g$. Por lo tanto, para probar la igualdad del enunciado, alcanza con mostrar que la curva $\xi : s \in \mathbb{R} \mapsto \gamma_v(t+s) \in G$ comienza en g y es integral. En tal caso, como ésta también es una curva definida en todo $\mathbb{R}$, por unicidad de las curvas integrales maximales deberá coincidir con η.

En primer lugar, notemos que ξ comienza efectivamente en g ya que

$$\xi(0) = \gamma_v(t+0) = \gamma_v(t) = g.$$

Si notamos ahora $T_t : s \in \mathbb{R} \mapsto t+s \in \mathbb{R}$ y tomamos $h \in C^\infty(\mathbb{R})$, para cada $s_0 \in \mathbb{R}$ es

$$d_{s_0}T_t\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s_0}\right)(h) = \frac{dT_th}{ds}\Big|_{s_0} = h'(t+s_0) = \frac{d}{ds}\Big|_{t+s_0}(h).$$

Como $\xi = \gamma_v \circ T_t$, obtenemos finalmente que

$$\begin{aligned} d_{s_0}\xi\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s_0}\right) &= (d_{s_0+t}\gamma_v \circ d_{s_0}T_t)\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s_0}\right) = d_{s_0+t}\gamma_v\left(\frac{d}{ds}\Big|_{s_0+t}\right) \\ &= \gamma_v'(s_0+t) = X_{\gamma_v(s_0+t)} = X_{\xi(s_0)}. \end{aligned}$$

Esto termina de probar que ξ es integral, y por tanto la igualdad.

b) Veamos primero que $\exp$ es diferenciable. FALTA VER DIFERENCIABILIDAD, EN CERO AL MENOS.

Ahora, sea $v \in T_eG$ y calculemos $\exp_{*0}(v)$. Consideremos la curva $c : t \in \mathbb{R} \mapsto tv \in T_eG$ que satisface $c(0) = 0$ y $c'(0) = v$. Por el Lema 3, es

$$\exp(c(t)) = \exp(tv) = \gamma_{tv}(1) = \gamma_v(t \cdot 1)$$

para cada $t \in \mathbb{R}$, de forma que

$$\exp_{*0}(v) = d_0 \exp \circ c = d_0\gamma = v$$

y entonces $\exp_{*0} \equiv id_{T_eG}$.

Por último, como el diferencial de la exponencial en 0 resulta inversible, por el teorema de la función inversa exp es un difeomorfismo local alrededor de 0.

$\square$