

EL PROBLEMA DE CONJUGACIÓN PARA MATRICES ENTERAS

G. A.

El puntapié inicial de las presentes notas es la siguiente pregunta:

¿Dadas dos matrices $A, B \in M_n \mathbb{Z}$, existe $P \in GL_n \mathbb{Z}$ tal que $B = PAP^{-1}$?

Si la respuesta a la pregunta para determinadas matrices A y B es afirmativa, decimos que son **conjugadas**. Una forma de interpretar la pregunta es la siguiente: el grupo general lineal $GL_n \mathbb{Z}$ actúa en $M_n \mathbb{Z}$ por conjugación, esto es, vía $P \cdot A = PAP^{-1}$. Estamos interesados en entender las órbitas de esta acción, i.e. las clases de conjunto cociente $M_n \mathbb{Z} / GL_n \mathbb{Z}$.

Un invariante de la clase de conjugación de una matriz es su polinomio característico: esto se deduce de que

$$\begin{aligned}\chi_{PAP^{-1}} &= \det(X \cdot I - PAP^{-1}) = \det(X \cdot PIP^{-1} - PAP^{-1}) \\ &= \det(P) \det(X \cdot I - A) \det(P)^{-1} \\ &= \det(X \cdot I - A) = \chi_A.\end{aligned}$$

En el caso en el que el polinomio característico es irreducible, Latimer y MacDuffee parametrizan las clases de conjugación de matrices en términos de ideales fraccionarios:

Teorema 1 ([3, Theorem]). Sea α un entero algebraico y $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\alpha]$. Existe una correspondencia biyectiva entre ideales fraccionarios de \mathcal{O} y clases de conjugación de matrices enteras con polinomio característico $m(\alpha, \mathbb{Q})$.

Para probar el teorema introducimos la noción de orden e ideal fraccionario de un orden en la Sección 1. En la Sección 2 probaremos el Teorema 1 y damos algunos ejemplos breves del algoritmo que ofrece la demostración. Por último, en la Sección 3 tratamos el problema de conjugación por matrices de determinante 1 y lo relacionamos con los elementos de norma positiva, los totalmente positivos y el *narrow-class group*.

1. ÓRDENES E IDEALES FRACCIONARIOS

Sea K una extensión finita de \mathbb{Q} y \mathcal{O}_K su anillo de enteros. Un **orden** de K es un subanillo que como \mathbb{Z} -módulo tiene rango $[K : \mathbb{Q}]$. Notar que $\text{Frac}(\mathcal{O}) = K$, ya que el primer cuerpo está contenido en el segundo y ambos tienen la misma \mathbb{Q} -dimensión. Un **\mathcal{O} -ideal fraccionario** es un \mathcal{O} -módulo $I \subset K$; siempre existe $x \in \mathcal{O}$ y un ideal $J \trianglelefteq \mathcal{O}$ tal que $I = \frac{1}{x}J$.

Ejemplo 1.1. Si α es un entero algebraico y $K = \mathbb{Q}(\alpha)$, entonces $\mathbb{Z}[\alpha]$ es un orden de \mathcal{O}_K . En particular $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ es un orden de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ que está contenido propiamente en su anillo de enteros $\mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{-5}}{2}]$.

Dos \mathcal{O} -ideales fraccionarios I y J se dicen **equivalentes** si $I = xJ$ para algún $x \in K \setminus \{0\}$. Esta es una relación de equivalencia; notamos $\text{ICM}(\mathcal{O})$ al conjunto de clases de equivalencia de ideales fraccionarios. La multiplicación de ideales define una estructura de monoide en este conjunto; notamos $\text{Pic}(\mathcal{O})$ al grupo de elementos inversibles de $\text{ICM}(\mathcal{O})$. En general, si $\mathcal{O} \neq \mathcal{O}_K$, no todo ideal fraccionario es inversible.

Precisaremos los siguientes lemas sobre ideales fraccionarios más adelante.

Lema 1.2. Sea K una extensión finita de \mathbb{Q} y \mathcal{O} un orden de K . Dos \mathcal{O} -ideales fraccionarios I y J son equivalentes si y sólo si son isomorfos como \mathcal{O} -módulos. Más aún, isomorfismo \mathcal{O} -lineal $I \rightarrow J$ está dado por la multiplicación por un elemento de $K \setminus \{0\}$.

Demostración. Si $I = xJ$ para cierto $x \in K \setminus \{0\}$, el morfismo $j \in J \mapsto xj \in I$ resulta un isomorfismo \mathcal{O} -lineal. Recíprocamente, supongamos que tenemos un isomorfismo \mathcal{O} -lineal $\varphi: I \rightarrow J$. Por la implicación ya demostrada, podemos suponer que $I, J \subset \mathcal{O}$, es decir que I y J son ideales de \mathcal{O} . Ahora, dado $x \in I$ no nulo, para cada $i \in I$ es

$$\varphi(x)i = \varphi(xi) = x\varphi(i).$$

Esto implica que φ coincide con el morfismo dado por la multiplicación por $\varphi(x)/x$. En particular tomando imágenes es $J = \frac{\varphi(x)}{x}I$. ✖

Lema 1.3. *Sea K una extensión finita de \mathbb{Q} . Si \mathcal{O} es un orden de K , todo \mathcal{O} -ideal fraccionario no nulo tiene rango $[K : \mathbb{Q}]$ como \mathbb{Z} -módulo.*

Demostración. Sea I un \mathcal{O} -ideal fraccionario, que salvo isomorfismo \mathcal{O} -lineal (en particular, \mathbb{Z} -lineal) podemos suponer contenido en \mathcal{O} . Tensorizando por \mathbb{Q} a la sucesión exacta $0 \rightarrow I \hookrightarrow \mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/I \rightarrow 0$ vemos que $\text{rk } I = \text{rk } \mathcal{O}$ si y sólo si $\text{rk } \mathcal{O}/I = 0$. Para ver esto último probaremos que \mathcal{O}/I es finito: dado $x \in I$ no nulo tenemos un epimorfismo $\mathcal{O}/x\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}/I$; podemos asumir entonces que $I = (x)$. Finalmente, el mismo argumento que en el caso $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K$ prueba que el cociente $\mathcal{O}/x\mathcal{O}$ tiene cardinal $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$. ✖

2. EL TEOREMA DE LATIMER-MACDUFFEE

En esta sección probamos el Teorema 1. De aquí en más fijamos α un entero algebraico con polinomio minimal f de grado n y notemos $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[\alpha]$ y $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.

Observemos que para todo \mathcal{O} -ideal fraccionario I la multiplicación por α define un morfismo \mathbb{Z} -lineal,

$$m_I: I \rightarrow I, \quad x \mapsto \alpha x.$$

Por el Lema 1.3, todo tal ideal I es \mathbb{Z} -libre de rango n ; en particular, dada una \mathbb{Z} -base B de I , podemos considerar la matriz $[L_I]_B \in M_n \mathbb{Z}$ de L_I en base B . Si cambiamos la base por otra, digamos B' , entonces $[L_I]_B$ y $[L_I]_{B'}$ son conjugadas con matriz de conjugación la matriz de cambio de base $C_{B, B'}$.

Por otro lado, si J es un \mathcal{O} -ideal fraccionario equivalente a I , por el Lema 1.2 esto equivale a tener un isomorfismo \mathcal{O} -lineal $\phi: I \rightarrow J$ dado por la multiplicación por cierto elemento $\beta \in K \setminus \{0\}$. Se sigue de aquí que $\varphi m_I = m_J \varphi$, pues

$$\varphi(m_I(x)) = \varphi(\alpha x) = \beta \alpha x = \alpha \beta x = m_J(\varphi(x))$$

para todo $x \in I$. En particular, dadas \mathbb{Z} -bases B de I y B' de J , las matrices $[L_I]_B$ y $[L_J]_{B'}$ serán conjugadas con matriz de conjugación $[\varphi]_{B, B'}$. (También se puede observar que si $J = xI$ para cierto $x \in K \setminus \{0\}$, entonces $[L_J]_{xB} = [L_I]_B$.)

Si I es un \mathcal{O} -ideal fraccionario, vamos a notar $[L_I]$ a la clase de conjugación de las matrices $[L_I]_B$ donde B es una \mathbb{Z} -base de I . El conjunto de matrices de $M_n \mathbb{Z}$ de polinomio característico f será denotado M_f ; recordemos que $\text{GL}_n(\mathbb{Z})$ actúa allí por conjugación. La discusión anterior prueba la siguiente proposición.

Proposición 2.1. *Se tiene una función bien definida*

$$(2.2) \quad \Lambda: \text{ICM}(\mathcal{O}) \rightarrow M_f / \text{GL}_n(\mathbb{Z}), \quad [I] \mapsto [L_I].$$

✖

El Teorema 1 será una consecuencia de que la función Λ es biyectiva, como veremos a continuación.

Proposición 2.3. *La función (2.2) es sobreyectiva.*

Demostración. Sea $A \in M_f$ y veamos que existe un \mathcal{O} -ideal fraccionario tal que $\Lambda([I]) = A$. Como $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[X]/(f)$, y $f(A) = 0$ por el teorema de Cayley-Hamilton, la multiplicación por A define una estructura de \mathcal{O} -módulo en $N := \mathbb{Z}^n$ donde la multiplicación por α se identifica con la multiplicación por A . Más aún, esta estructura es una restricción de la estructura de K -módulo que A define sobre $M := \mathbb{Q}^n$.

Observemos que

$$n = \dim_{\mathbb{Q}} M = \dim_K M \cdot \dim_{\mathbb{Q}} K = \dim_K M \cdot n,$$

así que $\dim_K M = 1$. En consecuencia, existe un isomorfismo K -lineal $\varphi: M \rightarrow K$, que se restringe entonces a un isomorfismo \mathcal{O} -lineal $\varphi|: N \rightarrow \varphi(N)$. Por definición $I := \varphi(N)$ es un \mathcal{O} -ideal fraccionario y la multiplicación por α en I tiene matriz A en base $\{\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n)\}$. En particular $\Lambda([I]) = [A]$. ✖

Proposición 2.4. *La función (2.2) es inyectiva.*

Demostración. Supongamos que $[L_I] = [L_J]$, de forma que existen una matriz $U \in GL_n \mathbb{Z}$ y \mathbb{Z} -bases B de I y B' de J tal que $U[L_I]_B = [L_J]_{B'} U$. La matriz U define un isomorfismo \mathbb{Z} -lineal $I \rightarrow J$ que, al conmutar con la multiplicación por α , es además \mathcal{O} -lineal. Por el Lema 1.2, se tiene entonces que $[I] = [J]$. ✖

2.1. De matrices a ideales. Si \mathcal{O}_K es monogenerado y $\text{Cl}(\mathcal{O}_K) = 1$, todo par de matrices con polinomio característico f son conjugadas. Hagamos un ejemplo no trivial.

Consideremos $d = -5$ y $K = \mathbb{Q}(\sqrt{-5})$, $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$. Como consecuencia de la cota de Minkowski, el grupo de clases de \mathcal{O} es isomorfo a \mathbb{Z}_2 , generado por $I = (2, 1 + \sqrt{-5})$. Tomemos como \mathbb{Z} -base de (1) a $\{1, \sqrt{-5}\}$. De esta forma, la multiplicación de $\sqrt{-5}$ tiene en esta base matriz $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Para I tomamos la \mathbb{Z} -base $\{2, 1 + \sqrt{-5}\}$; como $2\sqrt{-5} = -2 + 2(1 + \sqrt{-5})$ y $\sqrt{-5}(1 + \sqrt{-5}) = -5 + \sqrt{-5} = -3 \cdot 2 + (1 + \sqrt{-5})$, la multiplicación por $\sqrt{-5}$ en esta base tiene matriz $A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Por el Teorema 1, toda matriz entera A de 2×2 que satisfaga $A^2 = -5I$ es conjugada a A_0 ó A_1 , y estas dos últimas no son conjugadas.

2.2. De ideales a matrices. Vamos ahora en la dirección opuesta, consideremos la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$ que satisface la ecuación $A^2 + 5I = 0$. La multiplicación por A define una estructura de $\mathbb{Q}(\sqrt{-5})$ -módulo en \mathbb{Q}^2 y de $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ -módulo en \mathbb{Z}^2 . Concretamente

$$(a + b\sqrt{-5}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (aI + bA) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (a + 2b)x + 3by \\ -3bx + (a - 2b)y \end{pmatrix}.$$

Tomando por ejemplo $v_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, tenemos un isomorfismo mandando $\gamma \in K \mapsto \gamma v_0$, i.e.

$$\varphi: a + b\sqrt{-5} \in K \mapsto \begin{pmatrix} a + 2b \\ -3b \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^2.$$

Luego la preimagen de \mathbb{Z}^2 son los elementos $a + b\sqrt{-5}$ tales que $a + 2b, 3b \in \mathbb{Z}$. Si ponemos $b = -k/3$ para cierto $k \in \mathbb{Z}$, y $a = l + 2k/3$ para cierto $l \in \mathbb{Z}$, entonces $a + b\sqrt{-5} = l + k(2/3 - \sqrt{-5}/3)$. Luego

$$I := \varphi^{-1}(\mathbb{Z}^2) = \mathbb{Z} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{-5} \right)$$

Multiplicando por 3 obtenemos la misma clase, así que la matriz A está asociado a la clase del ideal fraccionario $3\mathbb{Z} + (2 - \sqrt{-5})\mathbb{Z} = (3, 2 - \sqrt{-5})$.

Para ver si A es conjugada a A_0 o a A_1 , basta analizar si $(3, 2 - \sqrt{-5})$ es principal. El cociente $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]/(3, 2 - \sqrt{-5})$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$; de ser principal este ideal existiría $x \in \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ de norma 3; i.e. enteros a y b tales que $a^2 + 5b^2 = 3$. Sin embargo, para que suceda esto debe ser $b = 0$ y luego $3 = a^2$, lo cual es absurdo pues 3 no es un cuadrado.

En definitiva, se obtuvo que $(3, 2 - \sqrt{-5}) \sim (2, 1 + \sqrt{-5})$ y entonces A es conjugada a A_1 . Más todavía, podemos explicitar la matriz de conjugación. En pos de la brevedad, referimos a [1, Example 3.5] para el resto de los cálculos.

3. CONJUGACIÓN POR MATRICES DE DETERMINANTE 1

Refinamos ahora nuestra pregunta inicial. Si $UA = BU$ para ciertas matrices $A, B \in M_n \mathbb{Z}$ y $U \in GL_n \mathbb{Z}$, entonces $\det U = \pm 1$.

¿Cuándo son dos matrices enteras conjugadas por una matriz de determinante 1?

La relación de conjugación por $SL_n \mathbb{Z}$ es igual o más fina que la conjugación por $GL_n \mathbb{Z}$. El siguiente lema muestra que para cada clase de conjugación $GL_n \mathbb{Z}$ hay a lo sumo dos clases de conjugación por $SL_n \mathbb{Z}$.

Lema 3.1. Sea $A \in M_n \mathbb{Z}$ y $D \in GL_n \mathbb{Z}$ tal que $\det D = -1$ (por ejemplo $D = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$).

- (i) Si B es conjugada a A por una matriz de $GL_n \mathbb{Z}$, está en la clase de conjugación por $SL_n \mathbb{Z}$ de A ó DAD^{-1} .
- (ii) Existe $U \in SL_n \mathbb{Z}$ tal que $UAU^{-1} = DAD^{-1}$ si y sólo si existe una matriz $C \in GL_n \mathbb{Z}$ que conmuta con A y tiene determinante -1 .

Demostración. Si $A = UBU^{-1}$ para cierta U inversible, entonces o bien $\det U = 1$ y entonces B está en la clase de $SL_n \mathbb{Z}$ -conjugación de A o bien $\det U = -1$ y luego $\det(DU) = 1$, $(DU)B(DU)^{-1} = DAD^{-1}$. Esto prueba (i).

Para ver (ii), observemos que $DAD^{-1} = U^{-1}AU$ para cierta matriz de determinante 1 si y sólo si $(U^{-1}D)A = A(U^{-1}D)$. La multiplicación a derecha por D establece una biyección entre $SL_n \mathbb{Z}$ y $-SL_n \mathbb{Z}$, por tanto, la ecuación de arriba se satisface sólo si existe $C \in -SL_n \mathbb{Z}$ tal que $CA = AC$. ✖

Observación 3.2. Como $I_n \in \mathbb{Z}(M_n \mathbb{Z})$ y $\det I_n = -1$ si $2 \nmid n$, para n impar el problema de conjugación para $SL_n \mathbb{Z}$ coincide con el problema para $GL_n \mathbb{Z}$.

Podemos caracterizar precisamente cuándo las clases de conjugación de $SL_n \mathbb{Z}$ y $GL_n \mathbb{Z}$ en M_f coinciden.

Proposición 3.3. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- i) Existe $u \in \mathcal{O}^\times$ tal que $N_{K/\mathbb{Q}}(u) = -1$.
- ii) Para toda $A \in M_f$, se tiene que $GL_n \mathbb{Z} \cdot A = SL_n \mathbb{Z} \cdot A$.
- iii) Existe $A \in M_f$ tal que $GL_n \mathbb{Z} \cdot A = SL_n \mathbb{Z} \cdot A$.

Demostración. Probemos que (i) implica (ii). Salvo conjugación, el Teorema 1 nos permite tomar A como la matriz de multiplicación por α de un \mathcal{O} -ideal fraccionario I en cierta \mathbb{Z} -base B . Si D es la matriz de multiplicación por u como endomorfismo \mathbb{Z} -lineal de I en base B , se tiene que $\det(D) = N(u) = -1$ y D conmuta con A ; resta aplicar el Lema ??.

Para probar que (ii) implica (iii) no hay nada que decir; probemos que (iii) implica (i). Como antes, si (iii) vale para una matriz A arbitraria, vale para cierta matriz de multiplicación por α para determinados \mathcal{O} -ideal fraccionario I en una \mathbb{Z} -base B . Por el lema 3.1, existe D invertible que conmuta con $[L_\alpha]_B$ y tiene determinante -1 . La condición de conmutar con la multiplicación por α hace que la función $\varphi: I \rightarrow I$ asociada a D sea \mathcal{O} -lineal; en consecuencia viene de multiplicar por cierto $u \in K^t$ veces. Como $uI = \varphi(I) = I$, es $u \in \mathcal{O}^\times$ y $N_{K/\mathbb{Q}}(u) = \det D = -1$. ✖

3.1. El narrow-class group. Un elemento $x \in K$ se dice *positivo* si $N_{K/\mathbb{Q}}(x) > 0$ y *totalmente positivo* si $\sigma(x) > 0$ para todo embedding real $\sigma: K \rightarrow \mathbb{R}$. Notamos $K^+ \subset K$ al conjunto de elementos totalmente positivos y $\mathcal{O}^+ = \mathcal{O} \cap K^+$. Se define el *narrow-class group* de \mathcal{O} como el grupo $Cl^+(\mathcal{O})$ de \mathcal{O} -ideales fraccionarios inversibles módulo la relación de equivalencia $I \sim J \iff I = xJ$ para cierto $x \in K$ totalmente positivo. Decimos en tal caso que I y J son *estrechamente equivalentes*.

Observación 3.4. Observemos que $N_{K/\mathbb{Q}}(x)$ se puede ver como el producto de las imágenes de x a través de cada embedding $\sigma: K \rightarrow \mathbb{C}$. Algunos de ellos se pueden restringir a \mathbb{R} . Si σ es un embedding complejo, también lo es $\bar{\sigma}$, y entonces $\sigma(x)\bar{\sigma}(x) = |\sigma(x)|^2 \geq 0$. El signo de la norma depende

entonces únicamente de los embeddings reales; en particular, un elemento totalmente positivo es positivo.

Proposición 3.5. *Se tiene una sucesión exacta corta*

$$1 \rightarrow \mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^+ \rightarrow K^\times/K^+ \rightarrow \text{Cl}^+(\mathcal{O}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{O}) \rightarrow 1.$$

Demostración. Toda clase $[I]$ de ideal fraccionario en $\text{Cl}(\mathcal{O})$ es imagen de la clase de igual representante en $\text{Cl}^+(\mathcal{O})$; esto define un epimorfismo $\pi: \text{Cl}^+(\mathcal{O}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{O})$. El núcleo consiste de las clases $[x\mathcal{O}]$ donde $x \in K^\times$. En particular se tiene un morfismo $x \in K^\times/K^+ \mapsto [x\mathcal{O}] \in \text{Cl}^+(\mathcal{O})$. Su núcleo son las clases $[x] \in K^\times/K^+$ que satisfacen $[x\mathcal{O}] = [\mathcal{O}]$, esto es, que existe $y \in K_+$ tal que $x\mathcal{O} = y\mathcal{O}$; en particular $x/y \in \mathcal{O}$ y de forma simétrica $y/x \in \mathcal{O}$. Por lo tanto $x = y \cdot z$ con $z \in \mathcal{O}^\times$ y la clase de x en K^\times/K^+ pertenece a \mathcal{O}^\times . Finalmente el núcleo del morfismo $\mathcal{O}^\times \rightarrow K^\times/K^+$ inducido por la inclusión $\mathcal{O}^\times \subset K^\times$ es $\mathcal{O}^\times \cap K^+ = \mathcal{O}^+$. ✖

Observación 3.6. *Observemos que si $x \in K^\times$, entonces $x^2 \in K^+$. En particular K^\times/K^+ y $\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^+$ son 2-grupos.*

3.2. El grupo de clases módulo ideales principales de norma positiva. Sea $\text{NP}(K) \subset K^\times$ el subconjunto de elementos de norma positiva, y $\text{NP}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} \cap \text{NP}(K)$. Consideramos $\text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O})$ al grupo de ideales fraccionarios invertibles módulo los generados por elementos de norma positiva. Un argumento similar al de la Proposición 3.5 prueba que existe una sucesión exacta corta

$$1 \rightarrow \mathcal{O}^\times/\text{NP}(\mathcal{O}) \rightarrow K^\times/\text{NP}(K) \rightarrow \text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{O}) \rightarrow 1$$

y $\text{NP}(K) = \ker(K^\times \xrightarrow{N} \mathbb{Q}^\times \xrightarrow{\text{sgn}} \{-1, 1\})$, $\text{NP}(\mathcal{O}) = \ker(\mathcal{O}^\times \xrightarrow{N} \mathbb{Z}^\times \xrightarrow{\text{sgn}} \{-1, 1\})$. Se tiene por lo tanto el siguiente resultado:

Proposición 3.7. *Se tiene que $|\text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O})|/|\text{Cl}(\mathcal{O})| \leq 2$. Además, son equivalentes:*

- i) *La sobrección canónica $\text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O}) \rightarrow \text{Cl}(\mathcal{O})$ es un isomorfismo.*
 - ii) *Se tiene que $\text{NP}(K) = K^\times$ ó $\text{NP}(\mathcal{O}) \neq \mathcal{O}^\times$.*
- ✖

3.3. Ejemplos en el caso cuadrático. De aquí en más fijamos la siguiente notación: sea d un entero positivo libre de cuadrados y $d \not\equiv 1 \pmod{4}$. Tomando $K = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$, es $\mathcal{O} = \mathcal{O}_K = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$. Los embeddings reales $\sigma_1, \sigma_2: K \rightarrow \mathbb{R}$ son

$$\sigma_1(a + b\sqrt{d}) = a + b\sqrt{d}, \quad \sigma_2(a + b\sqrt{d}) = a - b\sqrt{d}.$$

Por el teorema de unidades de Dirichlet, sabemos que $\mathcal{O}^\times = \langle \pm 1 \rangle \times \langle u \rangle$ con u una unidad fundamental. Podemos suponer, cambiando u por $-u$, que $\sigma_1(u) > 0$; de aquí se seguirá también que $\sigma_1(u)^n > 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Observemos que en este caso dos \mathcal{O} -ideales fraccionarios I y J son estrechamente equivalentes si y sólo si $I = xJ$ para un elemento positivo x , ya que si x es positivo entonces x ó $-x$ son totalmente positivos.

Proposición 3.8. *El cociente $\mathcal{O}^\times/\mathcal{O}^+$ es isomorfo a $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ si $N(u) = 1$ e isomorfo a $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ si $N(u) = -1$.*

Demostración. Notar que $N(u) = 1$ si y sólo si u es totalmente positiva - es decir, si $\sigma_2(u) > 0$. Observemos que

$$\sigma_i(\pm u^n) = \pm \sigma_i(u)^n.$$

Si $i = 1$, esta expresión es positiva sólo si $\pm = 1$. Para que además la expresión sea positiva si $i = 2$, debe ser o bien $\sigma_2(u) > 0$ o bien n par. Si $N(u) = 1$, entonces $\sigma_2(u) > 0$ y $\mathcal{O}^+ = \langle 1 \rangle \times \langle u \rangle$, en cambio si $N(u) = -1$ entonces $\mathcal{O}^+ = \langle 1 \rangle \times \langle u^2 \rangle$. ✖

Proposición 3.9. *El morfismo*

$$K^\times \xrightarrow{(\sigma_1, \sigma_2)} \mathbb{Q}^\times \times \mathbb{Q}^\times \xrightarrow{\text{sgn} \times \text{sgn}} \{\pm 1\}^2$$

es sobreyectivo y su núcleo es K^+ . En particular $K^\times/K^+ \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$.

Demostración. Basta notar que las imágenes de \sqrt{d} y $\sqrt{-d}$ son $(1, -1)$ y $(1, -1)$ respectivamente. ✖

Observación 3.10. En general para todo cuerpo de números el cociente K^\times/K^+ es isomorfo a un producto de tantas copias de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ como embeddings $K \rightarrow \mathbb{R}$, ver [2, II.2.14].

Recordemos que se definen $h_K = |\text{Cl}(\mathcal{O}_K)|$ y $h_K^+ = |\text{Cl}^+(\mathcal{O}_K)|$.

Corolario 3.11. Si $N(u) = -1$, entonces $\text{Cl}(\mathcal{O}) = \text{Cl}^+(\mathcal{O})$. En caso contrario el subgrupo de $\text{Cl}^+(\mathcal{O})$ generado por los ideales fraccionario principales tiene orden 2, y $|\text{Cl}^+(\mathcal{O})| = 2|\text{Cl}(\mathcal{O})|$. ✖

n	unidad fundamental u de $K = \mathbb{Q}(\sqrt{n})$	$N_{K/\mathbb{Q}}(u)$	h_K	h_K^+
2	$1 + \sqrt{2}$	-1	1	1
3	$2 + \sqrt{3}$	-1	1	1
6	$5 + 2\sqrt{6}$	1	1	2
7	$8 + 3\sqrt{7}$	1	1	2
10	$3 + \sqrt{10}$	-1	2	2

3.4. Un refinamiento del teorema de Latimer-MacDuffee. Fijemos un conjunto de representantes $\{I_1, \dots, I_k\}$ de elementos de $\text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O})$ por ideales de \mathcal{O} . Todo \mathcal{O} -ideal fraccionario es de la forma rI_j para cierto $r \in K$ $j \in \{1, \dots, k\}$.

Para cada j , fijamos dos \mathbb{Z} -bases B_j^+, B_j^- tales que la matriz de cambio de base entre estas tenga determinante -1 . Dado J un \mathcal{O} -ideal fraccionario equivalente a I_j , fijamos $r_j \in K^\times$ tal que $I_j = r_j J$ y $N(r_j) > 0$ si I_j y J son estrechamente equivalentes. Vamos a asociarle a J una \mathbb{Z} -base B_J ; si $N(r) > 0$ tomamos $B_J = rB_j^+$, en caso contrario $B_J = rB_j^-$.

De esta manera, tenemos una aplicación bien definida

$$(3.12) \quad \Xi: \text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O}) \rightarrow M_f/\text{SL}_n\mathbb{Z}, \quad [J] \mapsto [L_J]_{B_J}.$$

Proposición 3.13. La función (3.12) es inyectiva.

Demostración. Basta ver que si existen r de norma negativa e I_j que no sea estrechamente equivalente a rI_j , entonces $\Xi([I_j]) \neq \Xi([rI_j])$. Por el contrarrecíproco, si Ξ envía ambas clases a la misma clase de conjugación, existe $U \in \text{SL}_n\mathbb{Z}$ y un isomorfismo \mathcal{O} -lineal $\phi: I_j \rightarrow rI_j$ que es bases B_j^+ y rB_j^- se representa por U . Recordemos además que ϕ está dado por la multiplicación por cierto $x \in K^\times$. Se tiene luego el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} I_j & \xrightarrow{\cdot x} & rI_j & \xrightarrow{\cdot r^{-1}} & I_j \\ B_j^+ \uparrow & & rB_j^- \uparrow & & B_j^+ \uparrow \\ \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{U} & \mathbb{Z}^n & \xrightarrow{C_{B_j^+, B_j^-}} & \mathbb{Z}^n \end{array}$$

La composición de la fila superior define el morfismo de multiplicación por x/r de I_j en sí mismo. Como se representa en base B_j^+ , debe ser $N(x/r) = \det \phi = \det U \det C_{B_j^+, B_j^-} = -1$ y por lo tanto $N(x) = -N(r) > 0$. Esto muestra que I_j y rI_j son estrechamente equivalentes, concluyendo la prueba. ✖

En general (3.12) no es sobreyectiva. Por ejemplo, si $K = \mathbb{Q}(i)$ y $\mathcal{O} = \mathbb{Z}[i]$, como $N_{K/\mathbb{Q}} \geq 0$ se tiene que $\text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O}) = \text{Cl}(\mathcal{O}) = 0$. Sin embargo, al no haber enteros de norma -1 , no todo par de matrices enteras con polinomio característico es conjugada por una matriz de $\text{SL}_n\mathbb{Z}$. Explícitamente: si tomamos $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, una matriz inversible $D = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ que satisfaga $AD = DB$ debe cumplir $b = c$, $d = -a$ y entonces $\det(D) = -(a^2 + b^2) \leq 0$.

Proposición 3.14. Si existe $x \in K$ de norma negativa, la función (3.12) es biyectiva.

Demostración. Por el Lema 3.1 y las Proposiciones 3.3 y 3.7, separando en casos según si $\mathcal{O}^\times = \text{PN}(\mathcal{O})$, se obtiene que si $K \neq \text{NP}(K)$ entonces $M_f/\text{SL}_n\mathbb{Z}$ y $\text{Cl}_{\text{NP}}(\mathcal{O})$ siempre tienen el mismo cardinal. Esto junto con la inyectividad de Ξ prueban lo pedido. ✖

REFERENCIAS

- [1] K. Conrad, *Ideal classes and matrix conjugation over \mathbb{Z}* , available at <https://kconrad.math.uconn.edu/blurbs/gradnumthy/matrixconj.pdf>. ↑³
- [2] A. Fröhlich and M. J. Taylor, *Algebraic number theory*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 27, Cambridge University Press, Cambridge, 1993. ↑⁶
- [3] Claiborne G. Latimer and C. C. MacDuffee, *A correspondence between classes of ideals and classes of matrices*, Ann. of Math. (2) 34 (1933), no. 2, 313–316, DOI 10.2307/1968204. ↑¹