

Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio (4) de la práctica 4 y los ejercicios (1) y (5) de la práctica 5.

Observación. Si notamos $I : \text{Top} \rightarrow \text{hTop}$ al functor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico X tenemos un functor al componer con $\text{hTop}(X, -)$,

$$\begin{array}{ccc} & \text{hTop} & \\ I \nearrow & & \searrow \text{hTop}(X, -) \\ \text{Top} & \text{-----} & \text{Set} \end{array}$$

Concretamente, éste envía cada espacio Y a $[X, Y]$ y cada función continua $f : Y \rightarrow Z$ a

$$[f]_* : [h] \in [X, Y] \mapsto [fh] \in [X, Z].$$

En particular, si f es una equivalencia homotópica entonces $I f$ es un isomorfismo y por lo tanto así lo es $[f]_*$.

Por comodidad, en el resultado siguiente notamos $X^{(-1)} = \emptyset$ para cada CW-complejo X .

Lema 1. Sea (X, A) un CW-par, $n \in \mathbb{N}$ y (Z, Y) un par topológico tal que $\pi_n(Z, Y, y) = 0$ para todo $y \in Y$. Si $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$ es una función continua de pares que satisface $f(X^{(n-1)} \cup A) \subset Y$, entonces existe otra función $g : X \rightarrow Z$ continua y homotópica a f relativa a $X^{(n-1)} \cup A$ que satisface $g(X^{(n)} \cup A) \subset Y$.

Demostración. Tomemos una n -celda e de $X^{(n)}$ que no sea una celda de A , y sea $\xi : \mathbb{D}^n \rightarrow e$ su correspondiente función de adjunción. Notemos que la función $f\xi : \mathbb{D}^n \rightarrow Z$ siempre representa a una clase de equivalencia de $\pi_n(Z, Y, f\xi(s))$, donde $s \in \partial\mathbb{D}^n$, pues si $n \geq 1$ entonces

$$f\xi(\partial\mathbb{D}^n) \subset f(X^{(n-1)}) \subset Y.$$

Al ser $\pi_n(Z, Y, f\xi(s)) = 0$, existe una homotopía $H : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow Z$ entre $f\xi$ y g relativa a $\partial\mathbb{D}^n$ con $\text{im } H_1 \subset Y$. Puesto que la homotopía H es relativa al borde del disco, pasa al cociente por las identificaciones que hace ξ . Existe entonces $\tilde{H} : e \times I \rightarrow Z$ tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n \times I & \xrightarrow{H} & Z \\ \xi \times 1 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\ e \times I & & \end{array}$$

conmuta. En particular esto dice que

$$\text{im } \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(e) = \tilde{H}_1\xi(\mathbb{D}^n) = H_1(\mathbb{D}^n) \subset Y$$

y $f\xi = H_0 = \tilde{H}_0\xi$. Como ξ es sobreyectiva de aquí vemos que $\tilde{H}_0 = f$, y como \tilde{H} es relativa a \dot{e} (ya que H es relativa a $\partial\mathbb{D}^n$) sabemos que $\tilde{H}_t|_{\dot{e}} = f|_{\dot{e}}$ para todo $t \in I$.

Esto nos dice que para cada n -celda e_β^n de $X^{(n)}$ que no es una celda de A , existe una homotopía $H_\beta^n : e_\beta^n \times I \rightarrow Z$ relativa a \dot{e}_β^n que satisface

- $(H_\beta^n)_0 = f|_{e_\beta^n}$,
- $\text{im}(H_\beta^n)_1 \subset Y$,
- $(H_\beta^n)_t|_{\dot{e}_\beta^n} = f|_{\dot{e}_\beta^n}$ para todo $t \in I$.

En virtud de que dos n -celdas distintas se intersecan a lo sumo en sus bordes y allí cada homotopía H_β^n coincide con f , por el lema de pegado está bien definida la función continua

$$H : X^{(n)} \cup A \times I \rightarrow Z$$

que cumple $H|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv f|_{X^{(n-1)} \cup A}$ y $H|_{e_\beta^n} \equiv H_\beta^n$ en cada n -celda e_β^n que no es una celda de A . Además, por construcción es $H_0 = f|_{X^{(n)} \cup A}$ e $\text{im } H_1 \subset Y$.

Finalmente como la inclusión del subcomplejo $X^{(n)} \cup A \hookrightarrow X$ es una cofibración, existe una homotopía $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ que coincide con H en $X^{(n)} \cup A$ y satisface $\tilde{H}_0 = f$.

$$\begin{array}{ccccc} X^{(n)} \cup A & \xrightarrow{\iota_0} & X^{(n)} \cup A \times I & & \\ \downarrow i & & \downarrow i \times 1 & \nearrow H & \\ X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I & \searrow \exists \tilde{H} & \\ & & & \nearrow f & \\ & & & & Z \end{array}$$

En particular es $\tilde{H}_1(X^{(n)} \cup A) = \text{im } H_1 \subset Y$ y

$$\tilde{H}|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv H|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv f|_{X^{(n-1)} \cup A},$$

así que basta tomar $g := \tilde{H}_1$.

□

A partir del resultado anterior probamos a continuación el *lema crucial*, pues será necesario para resolver el ejercicio (4).

Lema 2. Sea (X, A) un CW-par y (Z, Y) un par topológico con $\pi_n(Z, Y) = 0$ para todo $n \geq 1$ para el cual existen celdas de $X^{(n)}$ que no pertenecen a A . Si $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$ es una función continua de pares, entonces existe otra función $g : X \rightarrow Z$ continua y homotópica a f relativa a A que satisface $g(X) \subset Y$.

Demostración. Utilizando el **Lema 1** inductivamente, tenemos una sucesión de homotopías

$$\{H^k : X \times I \rightarrow Z\}_{k \geq 0}$$

tales que

- $H_0^0 = f$,
- $H_1^k = H_0^{k+1}$,
- H^k es relativa a $X^{(k-1)} \cup A$, y
- $H_1^k(X^{(k)} \cup A) \subset Y$.

En el k -ésimo paso, de haber k -celdas que no pertenezcan a A tomamos la homotopía que nos garantiza el **Lema 1** para la función H_1^{k-1} , y en caso contrario tomamos la homotopía constante.

Como cada homotopía H^i es relativa a A , inductivamente vemos que

$$H_t^i(a) = H_0^i(a) = H_1^{i-1}(a) = H_t^{i-1}(a) = \cdots = H_t^0(a) = H_0^0(a) = f(a)$$

para todo $a \in A$, $i \geq 0$ y $t \in I$.

Del mismo modo, para cada $x \in X$ existe $n \geq 1$ tal que $x \in X^{(n)}$ y como H^k es relativa a $X^{(n)}$ si $k > n$, es

$$H_t^n(x) = H_t^k(x) \in Y$$

para todo $k > n$ y $t \in I$.

Esto último nos permite definir $g : X \rightarrow Z$ poniendo $g|_{X^{(n)}} \equiv H_1^n|_{X^{(n)}}$ para cada $n \geq 0$. Por construcción g resulta continua (pues lo es en cada esqueleto de X) y satisface tanto $g(X) \subset Y$ como $g|_A = f|_A$. Veamos ahora que g es homotópica a f relativa a A .

Fijemos una sucesión $(t_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_0 = 0$ y $t_n \rightarrow 1$ de forma estrictamente creciente, y notemos $c_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow I$ a la función lineal que vale 0 en t_i y 1 en t_{i+1} .

Como $H_1^i = H_0^{i+1}$ para todo $i \geq 0$, por el lema de pegado podemos definir una función continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$$

que satisface $H|_{X \times [t_i, t_{i+1}]} \equiv H^i \circ c_i$ para cada $i \geq 0$. Así, es $H_0 = f$ y $H_t|_A = f|_A$ para todo $t \in [0, 1]$.

Afirmamos que

$$\begin{aligned} \tilde{H} : X \times I &\longrightarrow Z \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} H(x, t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ g(x) & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es una homotopía entre f y g relativa a A . Por las observaciones anteriores sólo resta ver que ésta es continua, y es suficiente probarlo en cada cerrado $X^{(n)} \times I$.

Efectivamente, en $X^{(n)} \times [0, t_{n+1}]$ la función \tilde{H} es continua pues coincide con H , y en $[t_{n+1}, 1]$ es constante, pues cuando $m > n$ sabemos que $H^m|_{X^{(n)}} \equiv H^n|_{X^{(n)}}$. Por lo tanto \tilde{H} es continua en $X^{(n)} \times I$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, lo que concluye la demostración. \square

Ejercicio 4. Probar que una equivalencia débil $f : Y \rightarrow Z$ induce biyecciones $[X, Y] \rightarrow [X, Z]$ para todo CW-complejo X .

Demostración. En primer lugar, notemos que f se factoriza a través de M_f ,

$$\begin{array}{ccc} & M_f & \\ i \nearrow & & \searrow j \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

donde la inclusión i es una cofibración y j es una equivalencia homotópica. Esto a su vez da un diagrama en Set ,

$$\begin{array}{ccc} & [X, M_f] & \\ [i]_* \nearrow & & \searrow [j]_* \\ [X, Y] & \xrightarrow{[f]_*} & [X, Z] \end{array}$$

con $[j]_*$ biyectiva. Por lo tanto $[f]_*$ es biyectiva si y solo si $[i]_*$ lo es. Usando una vez más que j es equivalencia homotópica vemos también que f es una equivalencia débil si y sólo si lo es i . Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el ejercicio para un subespacio Y de un espacio topológico Z e $i : Y \rightarrow Z$ la inclusión.

Como por hipótesis i induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la sucesión exacta larga de pares

$$\cdots \rightarrow \pi_n(Y, y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z, y) \rightarrow \pi_n(Z, Y, y) \rightarrow \cdots$$

vemos que debe ser $\pi_n(Z, Y, y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in Y$.

Por lo tanto, si $g : X \rightarrow Z$ es una función continua, es una función de pares de (X, \emptyset) a (Z, Y) . Por el **Lema 2**, sabemos entonces que existe $h : X \rightarrow Z$ continua tal que $h \simeq g$ y $h(X) \subset Y$. En consecuencia, correstringiendo h a Y vemos que

$$[i]_*([h]^Y) = [ih]^Y = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de i_* .

Ahora veamos la inyectividad. Sean $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ funciones continuas tales que $ih_0 \simeq ih_1$, y veamos que h_0 y h_1 son homotópicas. Por hipótesis sabemos que existe una homotopía H entre ih_0 e ih_1 . Más aún, ésta puede ser vista como una función de pares de $(X \times I, X \times \partial I)$ a (Z, Y) , pues tanto ih_0 como ih_1 tienen imagen en Y .

Una vez más, por el **Lema 2** existe una función continua $K : (X \times I, X \times \partial I) \rightarrow (Z, Y)$ y una homotopía $\Gamma : K \simeq H$ relativa a $X \times \partial I$ tal que $K(X \times I) \subset Y$. En particular H y K coinciden en $X \times \partial I$, así que si $s \in \{0, 1\}$ entonces

$$h_s(x) = H(x, s) = K(x, s)$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto la correstricción $K|_Y : X \times I \rightarrow Y$ de K es una función continua que satisface $K_s = h_s$, y consecuentemente h_0 y h_1 son homotópicas. \square

Lema 3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ una función continua. Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg f = -1$.

Demostración. Notemos que como la homología de S^{2n} es trivial excepto en grado 0 y $2n$, es

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \cdot \text{tr}(H_q f) = \text{tr}(H_0 f) + (-1)^{2n} \text{tr}(H_{2n} f) \\ &= 1 + (-1)^{2n} \deg f = 1 + \deg f.\end{aligned}$$

Como f no tiene puntos fijos debe ser $\lambda(f) = 0$, lo que nos dice que $\deg f = -1$. \square

Ejercicio 1. Probar que \mathbb{Z}_2 es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y G un grupo no trivial que actúa libremente en S^{2n} . Esto es equivalente a que, para cada $s \in G$ distinto de la unidad, la función

$$\begin{aligned}m_s : S^{2n} &\rightarrow S^{2n} \\ x &\mapsto s \cdot x\end{aligned}$$

no tenga puntos fijos. Por el **Lema 3** sabemos entonces que $\deg m_s = -1$ para todo $s \neq 1$.

Si ahora tomamos $g, h \in G \setminus \{1\}$ tenemos que

$$\deg m_{gh^{-1}} = \deg m_g \circ m_{h^{-1}} = \deg m_g \cdot \deg m_{h^{-1}} = (-1)^2 = 1,$$

así que el contrarrecíproco del **Lema 3** dice que $m_{gh^{-1}}$ tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser $gh^{-1} = 1$. Es decir, debe ser $g = h$.

Dado que G no es trivial, existe algún elemento $g \in G \setminus \{1\}$. El argumento anterior nos dice que

$$G = \{1, g\}$$

así que necesariamente $G \simeq \mathbb{Z}_2$. \square

Observación. Sabemos además que efectivamente $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 \rangle$ actúa en S^{2n} de forma libre, por ejemplo vía $\sigma \cdot p := -p$.

Lema 4. Sea G un grupo. Si $x \in \mathbb{Z}[G]$ es no nulo y G -invariante, entonces G es finito y existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Demostración. Al $x \in \mathbb{Z}[G]$ ser no nulo, existen finitos elementos $g_1, \dots, g_n \in G$ y enteros a_1, \dots, a_n con $a_1 \neq 0$ tales que

$$x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n.$$

Como para cada $g \in G$ es

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = x = g g_1^{-1} x = a_1 g + a_2 g g_1^{-1} g_2 + \cdots + a_n g g_1^{-1} g_n, \quad (1)$$

por la unicidad de la escritura en combinaciones formales necesariamente $g \in \{g_1, \dots, g_n\}$. Esto prueba que $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ y en particular G resulta finito.

Ahora, si para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$ ponemos $g = g_i$ en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = a_1 g_i + \cdots + a_n g_i g_1^{-1} g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe $k := a_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k = a_1 = \cdots = a_n$ y consecuentemente

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = k g_1 + \cdots + k g_n = k \cdot \sum_{g \in G} g.$$

□

Ejercicio 5. Probar que $\text{cd}(G) = 0$ si y sólo si G es el grupo trivial.

Demostración. Si G es trivial un $\mathbb{Z}[G]$ -módulo es simplemente un \mathbb{Z} módulo, y entonces

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}[G]$ -módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}[G]$ -módulo trivial. En particular \mathbb{Z} resulta un $\mathbb{Z}[G]$ -módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r : \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$. Como la acción de G en \mathbb{Z} es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada $g \in G$, y además $s(1) \neq 0$ pues al ser sección s es inyectiva. Esto dice que $s(1)$ es no nulo y G -invariante, así que por el **Lema 4** existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Aplicando r se obtiene

$$1 = r s(1) = r \left(k \cdot \sum_{g \in G} g \right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k |G|,$$

lo que a su vez implica $|G| = k = 1$, y por lo tanto G es el grupo trivial.

□