

# Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 6 y 7

Guido Arnone

---

## Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio (6) de la práctica seis y el ejercicio (6) de la práctica siete.

---

**Ejercicio 6.** Probar que los  $\mathbb{R}$ -espacios vectoriales con producto interno son unicamente geodésicos.

*Demostración.* Sea  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espacio vectorial con producto interno. Como para cada  $q \in V$  la traslación  $x \in V \mapsto (x - q) \in V$  es una isometría, basta ver que para todo  $p \in V$  no nulo existe una única geodésica que une 0 con  $p$ .

Más aún, si  $\gamma$  es una tal geodésica, entonces  $\tilde{\gamma} : t \in I \mapsto \|p\|^{-1} \cdot \gamma(\|p\|t) \in V$  es una geodésica que une a 0 con  $p/\|p\|$ , y además la asignación  $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$  es biyectiva. Por lo tanto, alcanza mostrar que para cada vector unitario  $v \in V$  existe una única geodésica que une 0 con  $v$ .

Fijamos entonces  $v \in V$  unitario. Para la existencia, basta notar que la curva  $\ell : t \in I \mapsto t \cdot v \in V$  es geodésica. Sea ahora  $\delta : I \rightarrow V$  una geodésica que une 0 con  $v$ . Notemos en primer lugar que para todo  $t \in I$  es

$$\|\delta(t)\| = \|\delta(t) - 0\| = \|\delta(t) - \delta(0)\| = |t - 0| = |t| = t.$$

Por un cálculo directo, se tiene que

$$\begin{aligned}\langle \delta(s), \delta(t) \rangle &= -\frac{1}{2} \left( \|\delta(s) - \delta(t)\|^2 - \|\delta(t)\|^2 - \|\delta(s)\|^2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} (|s - t|^2 - t^2 - s^2) \\ &= st = \|\delta(s)\| \cdot \|\delta(t)\|,\end{aligned}$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwarz implica que  $\delta(s)$  y  $\delta(t)$  son linealmente dependientes para todo  $t, s \in I$ . Existe entonces  $\lambda(t) \in \mathbb{R}$  tal que  $\delta(t) = \lambda(t)\delta(1) = \lambda(t)v$ , para todo  $t \in I$ .

Sabemos además que  $\lambda$  es continua pues es

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| = \|\delta(s) - \delta(t)\| = |s - t|,$$

y como su módulo  $|\lambda| \equiv \|\delta\|$  solo se anula en cero, debe mantener su signo. Finalmente, como ya sabemos que  $\lambda(1) = 1$ , necesariamente es  $\lambda \equiv |\lambda| \equiv \text{id}$  y por tanto  $\delta \equiv \ell$ . ▲

**Lema 1.** Sea  $\Gamma$  un grupo finitamente generado y  $X \subset \Gamma$  un conjunto infinito. Dado un conjunto de generadores  $S = \{s_1, \dots, s_k\}$ , existe una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset X$  tal que  $\ell_S(x_n) \rightarrow \infty$ .

*Demostración.* Notemos que para cada  $l \in \mathbb{N}$ , el conjunto  $X_l := \{x \in X : \ell_S(x) = l\}$  es finito. En efecto, si  $x \in \Gamma$  satisface  $\ell_S(x) = l$ , entonces existen  $s_{i_1}, \dots, s_{i_l} \in S$  tal que  $x = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$ , y el conjunto  $\{s_{i_1} \cdots s_{i_l} : s_{i_m} \in S\} \ni x$  es finito dado que  $S$  lo es.

Como  $X$  es infinito y se tiene que

$$X = \bigsqcup_{l \geq 0} X_l,$$

no puede haber finitos conjuntos  $X_l$  no vacíos. Por lo tanto, podemos tomar una sucesión creciente  $(l_n)_{n \geq 1}$  tal que  $X_{l_n}$  sea no vacío para cada  $n \in \mathbb{N}$ . Tomando  $x_n \in X_{l_n}$  en cada caso, obtenemos una sucesión que satisface

$$\ell_S(x_n) = l_n \rightarrow \infty.$$



**Lema 2.** Sean  $G$  y  $H \leq G$  grupos finitamente generados. Si  $H$  tiene índice finito, entonces  $H \overset{qi}{\sim} G$ .

*Demostración.* Por transitividad y en vista del lema de Švarc–Milnor, basta probar que  $H$  actúa geométricamente en  $C_S(G)$ . Consideremos, para algún conjunto finito  $S$  de generadores, la acción  $H \curvearrowright C_S(G)$  dada por la extensión de la translación a izquierda como acción en  $G$ . Concretamente, para cada  $h \in H$  consideramos la biyección  $\phi_h$  en  $C_S(G)$  inducida por los homeomorfismos de los segmentos  $[g, g'] \equiv [0, 1] \equiv [hg, hg']$  para cada  $g, g'$  adyacentes en  $C_S(G)$ .

Cada función  $\phi_h$  es una isometría (co)restringiéndola a cada par de aristas  $[g, g']$  y  $[hg, hg']$ , y a su vez es una isometría entre los vértices del grafo pues  $d_S$  es invariante a izquierda. Vemos así que  $\phi_h$  resulta una isometría para cada  $h \in H$  y por lo tanto  $H$  actúa en  $C_S(G)$  por isometrías.

Por otro lado, dado que  $H$  tiene índice finito<sup>1</sup>, existe un conjunto finito  $R = \{g_1, \dots, g_n\} \subset G$  de representantes de  $H \backslash G$ . Esto implica que la acción es cocompacta: si  $[g, gs]$  es un arista de  $C_S(G)$  con  $g \in G$  y  $s \in S$ , existe  $i \in \llbracket n \rrbracket$  y  $h \in H$  tal que  $g = hg_i$  y entonces es

$$[g, gs] = [hg_i, hg_i s] = \phi_h([g_i, g_i s]).$$

Esto muestra que se tiene  $C_S(G) = H \cdot K$  con  $K := \bigcup_{s \in S, i \in \llbracket n \rrbracket} [g_i, g_i s]$ . Al  $S$  ser finito y cada arista compacta, obtenemos que  $K$  es compacto.

Para terminar, veamos que la acción es propia. Fijemos  $x \in C_S(G)$  y separemos en casos. Si  $x$  es un vértice de  $G$ , entonces podemos tomar  $r > 0$  de forma que

$$B_r(x) \subset \bigcup_{s \in S} [x, xs]$$

y luego es

$$h \cdot B_r(x) \cap B_r(x) \subset \bigcup_{s, t \in S} [x, xs] \cap [hx, hxt].$$

<sup>1</sup>Aquí uso que la cantidad de *coseets* a derecha e izquierda es la misma (pues la aplicación  $gH \in G/H \mapsto Hg^{-1} \in H \backslash G$  es biyectiva).

Para que la intersección sea no vacía, en particular tienen que existir  $t, s \in S$  tales que  $[x, xs] \cap [hx, hxt] \neq \emptyset$ . Esto quiere decir que tiene que haber dos tales aristas que compartan por lo menos un extremo, lo que impone que se satisfaga

$$h \in \{1, xt^{-1}x^{-1}, xsx^{-1}, xst^{-1}x^{-1}\}.$$

Si en cambio es  $x \in [g, gs] \setminus \{g, gs\}$  para cierto  $g \in G$  y  $s \in S$ , entonces tomamos  $r > 0$  tal que  $x \in B_r(x) \subset [g, gs] \setminus \{g, gs\}$ . De forma similar vemos que  $h \cdot B_r(x) \cap B_r(x) \neq \emptyset$  implica  $[g, gs] = [hg, hgs]$ , por lo que debe ser  $h \in \{1, gsg^{-1}, gs^{-1}g^{-1}\}$ . Como  $S$  es finito, en cualquier caso encontramos  $r > 0$  tal que

$$|\{h \in H : h \cdot B_r(x) \cap B_r(x) \neq \emptyset\}| < +\infty,$$

lo que termina de mostrar que la acción es propia. ▲

**Ejercicio 6.** Sea  $\varphi : \Gamma_1 \rightarrow \Gamma_2$  morfismo entre grupos finitamente generados. Probar que:

- a) Si  $\varphi$  es un embedding quasi-isométrico, entonces  $\ker \varphi$  es finito.
- b) El morfismo  $\varphi$  es una quasi-isometría si y sólo si  $\ker \varphi$  y  $\operatorname{coker} \varphi$  son finitos.

*Demostración.* Hacemos cada inciso por separado. De todas formas, fijamos de antemano conjuntos finitos de generadores  $A$  y  $B$  de  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  respectivamente.

- a) Como  $\varphi$  es un embedding quasi-isométrico, existen  $\lambda \geq 1$  y  $\varepsilon \geq 0$  tales que

$$-\varepsilon + \frac{1}{\lambda} d_A(x, y) \leq d_B(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d_A(x, y) + \varepsilon \quad (\forall x, y \in \Gamma_1).$$

Como  $d_A(x, y) = \ell_A(x^{-1}y)$  y  $d_B(\varphi(x), \varphi(y)) = \ell_B(\varphi(x^{-1}y))$ , equivalentemente es

$$-\varepsilon + \frac{1}{\lambda} \ell_A(x) \leq \ell_B(\varphi(x)) \leq \lambda \ell_A(x) + \varepsilon. \quad (1)$$

para cada  $x \in \Gamma_1$ .

Si  $\ker \varphi$  fuera infinito, entonces por el **Lema 1** existiría una sucesión  $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \ker \varphi$  tal que  $\ell_A(x_n) \rightarrow \infty$ . Sin embargo esto supone una contradicción, pues como  $\varphi(x_n) = 1$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , de (1) tenemos que

$$\ell_A(x_n) \leq \lambda \varepsilon. \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Por lo tanto, necesariamente  $\ker \varphi$  debe ser finito.

- b) Veamos ambas implicaciones.

( $\Rightarrow$ ) En vista del punto (a), resta probar que  $\operatorname{coker} \varphi$  es finito. Como  $\varphi$  es quasi-densa, existe  $K \in \mathbb{R}$  tal que  $d(y, \operatorname{im} \varphi) \leq K$  para todo  $y \in \Gamma_2$ .

Por lo tanto, dado  $y \in \Gamma_2$  sabemos que hay cierto  $x \in \Gamma_1$  que satisface

$$d_B(y, \varphi(x)) = \ell_B(y^{-1}\varphi(x)) \leq K,$$

y existe entonces  $s \in \Gamma_2$  tal que  $y^{-1}s^{-1} = \varphi(x) \in \operatorname{im} \varphi$  y  $\ell_B(s^{-1}) = \ell_B(s) \leq K$ . Como esto dice que  $[s^{-1}] = [y]$  en  $\operatorname{coker} \varphi$ , el argumento anterior muestra que

$$L := \{s \in \Gamma_2 : \ell(s) \leq K\}$$

contiene un sistema de representantes para  $\operatorname{coker} \varphi$ .

Dado que los elementos de  $L$  están acotados en longitud, por el **Lema 1** este no puede ser infinito, y por tanto  $\operatorname{coker} \varphi$  es finito.

( $\Leftarrow$ ) En vista del **Lema 2**, podemos suponer que  $\varphi$  es un epimorfismo (ya que  $\text{coker } \varphi$  es finito). En particular, tomamos  $B = \varphi(A)$  como conjunto de generadores de  $\Gamma_2$ .

Sea ahora  $\{y_1, \dots, y_n\}$  un sistema de representantes de  $\text{coker } \varphi$ . Dado  $y \in \Gamma_2$ , sabemos entonces que existe  $i \in \llbracket k \rrbracket$  tal que  $yy_i^{-1} \in \text{im } \varphi$ . En consecuencia, es

$$d_B(y, \varphi(\Gamma_1)) \leq d_B(y, yy_i^{-1}) = \ell_B(y_i) \leq K$$

lo que muestra que  $\varphi$  es quasi-densa.

Para terminar, veamos que  $\varphi$  es un embedding quasi-isométrico: alcanza ver que se satisface la desigualdad **(1)**. Dado  $x \in \Gamma_1$  con  $\ell_B(\varphi(x)) = L$ , existen generadores  $s_1, \dots, s_L \in B$  tales que  $\varphi(x) = s_1 \cdots s_L$ . Tenemos entonces elementos  $a_1, \dots, a_L$  en  $A$  tales que  $\varphi(a_i) = s_i$  para cada  $i \in \llbracket L \rrbracket$  y de esta forma es

$$\varphi(x \cdot a_L^{-1} \cdots a_1^{-1}) = 1.$$

Notando  $k := x \cdot a_L^{-1} \cdots a_1^{-1} \in \ker \varphi$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \ell_A(x) &= \ell_A(k \cdot x_1 \cdots x_L) \leq \max_{k \in \ker \varphi} \ell_A(k) + L \cdot \max_{a \in A} \ell_A(a) \\ &= \max_{k \in \ker \varphi} \ell_A(k) + \ell_B(\varphi(x)) \cdot \max_{a \in A} \ell_A(a). \end{aligned}$$

Observemos además que tanto  $\kappa := \max_{k \in \ker \varphi} \ell_A(k)$  como  $\xi := \max_{a \in A} \ell_A(a)$  son finitos pues  $\ker \varphi$  y  $X$  lo son.

Reescribiendo, la anterior desigualdad nos dice entonces que para todo  $x \in \Gamma_1$  obtenemos

$$-\xi \cdot \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \ell_A(x) \leq \ell_B(x),$$

y (como  $B = \varphi(A)$ ) por otro lado es

$$\ell_B(\varphi(x)) \leq \ell_A(x) \leq \kappa \ell_A(x) + \xi \cdot \kappa^{-1}.$$

