## Topología Algebraica

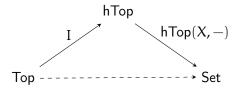
Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

## Guido Arnone

## Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio (4) de la práctica 4 y los ejercicios (1) y (5) de la práctica 5. Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

**Observación**. Si notamos  $I: \mathsf{Top} \to \mathsf{hTop}$  al funtor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico X tenemos un funtor al componer con  $\mathsf{hTop}(X,-)$ ,



Concretamente, éste envía cada espacio Y a [X,Y] y cada función continua  $f:Y\to Z$  a

$$[f]_*:[h]\in [X,Y]\mapsto [fh]\in [X,Z].$$

En particular, si f es una equivalencia homotópica entonces If es un isomorfismo y por lo tanto así lo es  $[f]_*$ .

Por comodidad, en el resultado siguiente notamos  $X^{(-1)}=\emptyset$  para cada CW-complejo X.

 ${\it Demostraci\'on}.$  Tomemos una n-celda e de  $X^{(n)}$  que no sea una celda de A, y sea  $\xi:\mathbb{D}^n\to e$  su correspondiente función de adjunción. Notemos que la función  $f\xi:\mathbb{D}^n\to Z$  siempre representa a una clase de equivalencia de  $\pi_n(Z,Y,f\xi(s))$ , donde  $s\in\partial\mathbb{D}^n$ , pues si  $n\geq 1$  entonces

$$f\xi(\partial\mathbb{D}^n)\subset f(X^{(n-1)})\subset Y.$$

Al ser  $\pi_n(Z,Y,f\xi(s))=0$ , existe una homotopía  $H:\mathbb{D}^n\times I\to Z$  entre  $f\xi$  y g relativa a  $\partial\mathbb{D}^n$  con im  $H_1\subset Y$ . Puesto que la homotopía H es relativa al borde del disco, pasa al cociente por las identificaciones que hace  $\xi$ . Existe entonces  $\tilde{H}:e\times I\to Z$  tal que

$$\mathbb{D}^{n} \times I \xrightarrow{H} Z$$

$$\xi \times 1 \downarrow \qquad \tilde{H}$$

$$e \times I$$

conmuta. En particular esto dice que

im 
$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(e) = \tilde{H}_1\xi(\mathbb{D}^n) = H_1(\mathbb{D}^n) \subset Y$$

y  $f\xi=H_0=\tilde{H}_0\xi$ . Como  $\xi$  es sobreyectiva de aquí vemos que  $\tilde{H}_0=f$ , y como  $\tilde{H}$  es relativa a  $\dot{e}$  (ya que H es relativa a  $\partial \mathbb{D}^n$ ) sabemos que  $\tilde{H}_t|_{\dot{e}}=f|_{\dot{e}}$  para todo  $t\in I$ .

Esto nos dice que para cada n-celda  $e^n_\beta$  de  $X^{(n)}$  que no es una celda de A, existe una homotopía  $H^n_\beta:e^n_\beta\times I\to Z$  relativa a  $e^n_\beta$  que satisface

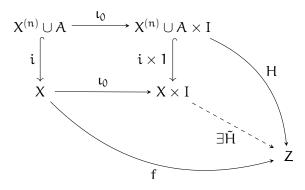
- $\bullet \ (\mathsf{H}^{\mathsf{n}}_{\beta})_{0} = \mathsf{f}|_{e^{\mathsf{n}}_{\beta}},$
- $\operatorname{im}(H_{\beta}^n)_1 \subset Y$ ,
- $(H^n_\beta)_t|_{\dot{e}^n_\beta} = f|_{\dot{e}^n_\beta}$  para todo  $t \in I$ .

En virtud de que dos n-celdas distintas se intersecan a lo sumo en sus bordes y allí cada homotopía  $H^n_\beta$  coincide con f, por el lema de pegado está bien definida la función continua

$$H: X^{(\mathfrak{n})} \cup A \times I \to Z$$

que cumple  $H|_{X^{(n-1)}\cup A\times I}\equiv f|_{X^{(n-1)}\cup A}\ y\ H|_{e^n_\beta}\equiv H^n_\beta$  en cada n-celda  $e^n_\beta$  que no es una celda de A. Además, por construcción es  $H_0=f|_{X^{(n)}\cup A}$  e im  $H_1\subset Y$ .

Finalmente como la inclusión del subcomplejo  $X^{(n)} \cup A \hookrightarrow X$  es una cofibración, existe una homotopía  $\tilde{H}: X \times I \to Z$  que coincide con H en  $X^{(n)} \cup A$  y satisface  $\tilde{H}_0 = f$ .



En particular es  $\tilde{H}_1(X^{(\mathfrak{n})} \cup A) = im \, H_1 \subset Y \, y$ 

$$\tilde{H}|_{X^{(\mathfrak{n}-1)}\cup A\times I}\equiv H|_{X^{(\mathfrak{n}-1)}\cup A\times I}\equiv f|_{X^{(\mathfrak{n}-1)}\cup A}\text{,}$$

así que basta tomar  $g := \tilde{H}_1$ .

A partir del resultado anterior probamos a continuación el *lema crucial*, pues será necesario para resolver el ejercicio (4).

Lema 2. Sea (X,A) un CW-par y (Z,Y) un par topológico con  $\pi_n(Z,Y)=0$  para todo  $n\geq 1$  para el cual existen celdas de  $X^{(n)}$  que no pertenecen a A. Si  $f:(X,A)\to (Z,Y)$  es una función continua de pares, entonces existe otra función  $g:X\to Z$  continua y homotópica a f relativa a A que satisface  $g(X)\subset Y$ .

Demostración. Utilizando el Lema 1 inductivamente, tenemos una sucesión de homotopías

$$\{H^k: X \times I \to Z\}_{k>0}$$

tales que

- $H_0^0 = f$ ,
- $H_1^k = H_0^{k+1}$ ,
- $H^k$  es relativa a  $X^{(k-1)} \cup A$ , y
- $H_1^k(X^{(k)} \cup A) \subset Y$ .

En el k-ésimo paso, de haber k-celdas que no pertenezcan a A tomamos la homotopía que nos garantiza el Lema 1 para la función  $H_1^{k-1}$ , y en caso contrario tomamos la homotopía constante.

Como cada homotopía H<sup>i</sup> es relativa a A, inductivamente vemos que

$$H_t^i(\alpha) = H_0^i(\alpha) = H_1^{i-1}(\alpha) = H_t^{i-1}(\alpha) = \dots = H_t^0(\alpha) = H_0^0(\alpha) = f(\alpha)$$

para todo  $a \in A$ ,  $i \ge 0$  y  $t \in I$ .

Del mismo modo, para cada  $x \in X$  existe  $n \ge 1$  tal que  $x \in X^{(n)}$  y como  $H^k$  es relativa a  $X^{(n)}$  si k > n, es

$$H^n_t(x) = H^k_t(x) \in Y$$

para todo k > n y  $t \in I$ .

Esto último nos permite definir  $g: X \to Z$  poniendo  $g|_{X^{(n)}} \equiv H_1^n|_{X^{(n)}}$  para cada  $n \ge 0$ . Por construcción g resulta continua (pues lo es en cada esqueleto de X) y satisface tanto  $g(X) \subset Y$  como  $g|_A = f|_A$ . Veamos ahora que g es homotópica a f relativa a f.

Fijemos una sucesión  $(t_n)_{n\geq 0}\subset \mathbb{R}$  tal que  $t_0=0$  y  $t_n\to 1$  de forma estrictamente creciente, y notemos  $c_i:[t_i,t_{i+1}]\to I$  a la función lineal que vale 0 en  $t_i$  y 1 en  $t_{i+1}$ .

Como  $H_1^i=H_0^{i+1}$  para todo  $i\geq 0$ , por el lema de pegado podemos definir una función continua

$$H: X \times [0,1) \rightarrow Z$$

que satisface  $H|_{X\times[t_i,t_{i+1}]}\equiv H^i\circ c_i$  para cada  $i\geq 0$ . Así, es  $H_0=f$  y  $H_t|_A=f|_A$  para todo  $t\in [0,1)$ . Afirmamos que

$$\tilde{H}: X \times I \longrightarrow Z$$

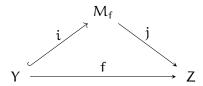
$$(x,t) \mapsto \begin{cases} H(x,t) & \text{si } t \in [0,1) \\ g(x) & \text{si } t = 1 \end{cases}$$

es una homotopía entre f y g relativa a A. Por las observaciones anteriores sólo resta ver que ésta es continua, y es suficiente probarlo en cada cerrado  $X^{(n)} \times I$ .

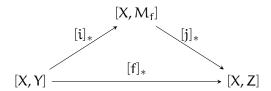
Efectivamente, en  $X^{(n)} \times [0,t_{n+1}]$  la función  $\tilde{\mathbb{H}}$  es continua pues coincide con  $\mathbb{H}$ , y en  $[t_{n+1},1]$  es constante, pues cuando m>n sabemos que  $\mathbb{H}^m|_{X^{(n)}}\equiv \mathbb{H}^n|_{X^{(n)}}$ . Por lo tanto  $\tilde{\mathbb{H}}$  es continua en  $X^{(n)}\times I$  para cada  $n\in\mathbb{N}_0$ , lo que concluye la demostración.

**Ejercicio 4.** Probar que una equivalencia débil  $f: Y \to Z$  induce biyecciones  $[X, Y] \to [X, Z]$  para todo CW-complejo X.

Demostración. En primer lugar, notemos que f se factoriza a través de M<sub>f</sub>,



donde la inclusión i es una cofibración y j es una equivalencia homotópica. Esto a su vez da un diagrama en Set,



con  $[j]_*$  biyectiva. Por lo tanto  $[f]_*$  es biyectiva sí y solo si  $[i]_*$  lo es. Usando una vez más que j es equivalencia homotópica vemos también que f es una equivalencia débil si y sólo si lo es i. Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el ejercicio para un subespacio Y de un espacio topológico Z e  $i: Y \to Z$  la inclusión.

Como por hipótesis i induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la suceción exacta larga de pares

$$\cdots \to \pi_n(Y,y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z,y) \to \pi_n(Z,Y,y) \to \ldots$$

vemos que debe ser  $\pi_n(Z, Y, y) = 0$  para todo  $n \in N$  e  $y \in Y$ .

Por lo tanto, si  $g: X \to Z$  es una función continua, es una función de pares de  $(X, \emptyset)$  a (Z, Y). Por el Lema 2, sabemos entonces que existe  $h: X \to Z$  continua tal que  $h \simeq g$  y  $h(X) \subset Y$ . En consecuencia, correstringiendo h a Y vemos que

$$[i]_* ([h|^Y]) = [ih|^Y] = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de i<sub>\*</sub>.

Ahora veamos la inyectividad. Sean  $h_0$ ,  $h_1: X \to Y$  funciones continuas tales que  $ih_0 \simeq ih_1$ , y veamos que  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas. Por hipótesis sabemos que existe una homotopía H entre  $ih_0$  e  $ih_1$ . Más aún, ésta puede ser vista como una función de pares de  $(X \times I, X \times \partial I)$  a (Z, Y), pues tanto  $ih_0$  como  $ih_1$  tienen imagen en Y.

Una vez más, por el Lema 2 existe una función continua  $K:(X\times I,X\times \partial I)\to (Z,Y)$  y una homotopía  $\Gamma:K\simeq H$  relativa a  $X\times \partial I$  tal que  $K(X\times I)\subset Y$ . En particular H y K coinciden en  $X\times \partial I$ , así que si  $S\in \{0,1\}$  entonces

$$h_s(x) = H(x,s) = K(x,s)$$

para todo  $x \in X$ . Por lo tanto la correstricción  $K|^Y : X \times I \to Y$  de K es una función continua que satisface  $K_s = h_s$ , y consecuentemente  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas.

**Lema 3.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$  una función continua. Si f no tiene puntos fijos, entonces deg f = -1.

Demostración. Notemos que como la homología de S<sup>2n</sup> es trivial excepto en grado 0 y 2n, es

$$\begin{split} \lambda(f) &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \cdot tr(H_n f) = tr(H_0 f) + (-1)^{2n} \, tr(H_{2n} f) \\ &= 1 + (-1)^{2n} \, deg \, f = 1 + deg \, f. \end{split}$$

Como f no tiene puntos fijos debe ser  $\lambda(f) = 0$ , lo que nos dice que deg f = -1.

**Ejercicio 1.** Probar que  $\mathbb{Z}_2$  es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}$  y G un grupo no trivial que actúa libremente en  $\mathbb{S}^{2n}$ . Esto es equivalente a que, para cada  $s \in G$  distinto de la unidad, la función

$$m_s:\mathbb{S}^{2n}\to\mathbb{S}^{2n}$$
 
$$x\longmapsto s\cdot x$$

no tenga puntos fijos. Por el Lema 3 sabemos entonces que deg  $m_s=-1$  para todo  $s\neq 1$ . Si ahora tomamos  $g,h\in G\setminus\{1\}$  tenemos que

$$\deg \mathfrak{m}_{gh^{-1}} = \deg \mathfrak{m}_g \circ \mathfrak{m}_{h^{-1}} = \deg \mathfrak{m}_g \cdot \deg \mathfrak{m}_{h^{-1}} = (-1)^2 = 1,$$

asi que el contrarrecíproco del Lema 3 dice que  $\mathfrak{m}_{gh^{-1}}$  tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser  $\mathfrak{gh}^{-1}=1$ . Es decir, debe ser  $\mathfrak{g}=h$ .

Dado que G no es trivial, existe algún elemento  $g \in G \setminus \{1\}$ . El argumento anterior nos dice que

$$G = \{1, g\}$$

así que necesariamente  $G \simeq \mathbb{Z}_2$ .

**Observación**. Sabemos además que efectivamente  $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 \rangle$  actúa en  $\mathbb{S}^{2n}$  de forma libre, por ejemplo vía  $\sigma \cdot \mathfrak{p} := -\mathfrak{p}$ .

**Lema 4.** Sea G un grupo. Si  $x \in \mathbb{Z}[G]$  es no nulo y G-invariante, entonces G es finito y existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = k \cdot \sum_{g \in G} g$ .

*Demostración.* Al  $x \in \mathbb{Z}[G]$  ser no nulo, existen finitos elementos  $g_1, \ldots, g_n \in G$  y enteros  $a_1, \ldots, a_n$  con  $a_1 \neq 0$  tales que

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n$$
.

Como para cada  $g \in G$  es

$$a_1g_1 + \dots + a_ng_n = x = gg_1^{-1}x = a_1g + a_2gg_1^{-1}g_2 + \dots + a_ngg_1^{-1}g_n,$$
 (1)

por la unicidad de la escritura en combinaciones formales necesariamente  $g \in \{g_1, \dots, g_n\}$ . Esto prueba que  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  y en particular G resulta finito.

Ahora, si para cada  $i \in [n]$  ponemos  $g = g_i$  en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1g_1+\cdots+a_ng_n=a_1g_1+\cdots+a_ng_1g_1^{-1}g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe  $k:=\mathfrak{a}_1\in\mathbb{Z}$  tal que  $k=\mathfrak{a}_1=\cdots=\mathfrak{a}_n$  y consecuentemente

$$x = \alpha_1 g_1 + \dots \alpha_n g_n = k g_1 + \dots k g_n = k \cdot \sum_{g \in G} g.$$

**Ejercicio** 5. Probar que cd(G) = 0 si y sólo si G es el grupo trivial.

Demostración. Si G es trivial un  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo es simplemente un  $\mathbb{Z}$  módulo, y entonces

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

de  $\mathbb Z$  como  $\mathbb Z[G]$ -módulo trivial. En particular  $\mathbb Z$  resulta un  $\mathbb Z[G]$ -módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r: \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección  $s: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]$ . Como la acción de G en  $\mathbb{Z}$  es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada  $g \in G$ , y además  $s(1) \neq 0$  pues al ser sección s es inyectiva. Esto dice que s(1) es no nulo y G-invariante, así que por el Lema 4 existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$ .

Aplicando r se obtiene

$$1 = rs(1) = r\left(k \cdot \sum_{g \in G} g\right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k|G|,$$

lo que a su vez implica |G| = k = 1, y por lo tanto G es el grupo trivial.