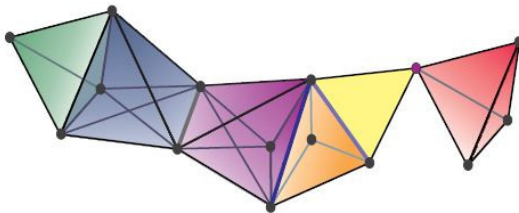


TOPOLOGÍA ALGEBRAICA: EXAMEN FINAL

UNA INTRODUCCIÓN A LOS CONJUNTOS SIMPLICIALES



Guido Arnone

8 de noviembre de 2019

La categoría Δ de ordinales finitos

Definición

La categoría Δ de ordinales finitos tiene por objetos a los conjuntos finitos totalmente ordenados $\llbracket n \rrbracket := \{0 < 1 < \dots < n\}$ y por flechas a los morfismos de orden $f : \llbracket n \rrbracket \rightarrow \llbracket m \rrbracket$.

Definición

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$ los mapas de **cocaras**

$$d^i : \llbracket n-1 \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$$

$$j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

y los mapas de **codegeneraciones**

$$s^i : \llbracket n+1 \rrbracket \rightarrow \llbracket n \rrbracket$$

$$j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

La categoría Δ de ordinales finitos

Proposición

Toda flecha $\llbracket n \rrbracket \xrightarrow{f} \llbracket m \rrbracket$ en Δ se puede escribir como una composición de mapas de cocaras y codegeneraciones.

Proposición

Los mapas de cocaras y codegeneraciones satisfacen las siguientes identidades cosimpliciales,

$$\left\{ \begin{array}{ll} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^j = s^j d^{j+1} = 1 \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & \text{si } i > j + 1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \text{si } i \leq j \end{array} \right.$$

Conjuntos Simpliciales

Definición

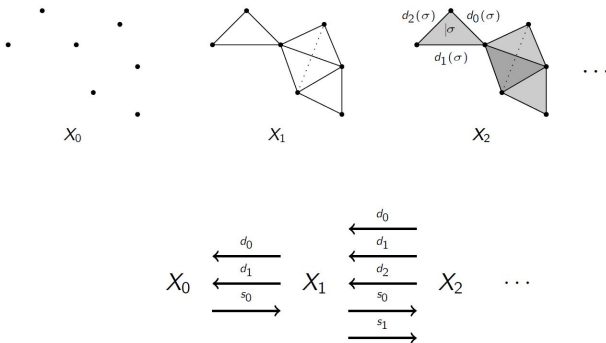
Un *conjunto simplicial* es un funtor $X : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$.

Concretamente, éste consiste de

- (i) una sucesión de conjuntos X_0, X_1, X_2, \dots , y
- (ii) para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $i \in \llbracket n \rrbracket$, funciones $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ y $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ llamadas mapas de caras y degeneraciones respectivamente, que satisfacen las siguientes **identidades simpliciales**:

$$\left\{ \begin{array}{ll} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_j s_j = d_{j+1} s_j = 1 \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \text{si } i > j + 1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \end{array} \right.$$

Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- El nervio $N\mathcal{C}$ de una categoría \mathcal{C}
- Los símplices singulares $\mathcal{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

Dado un conjunto simplicial X , definimos su **complejo de Moore** como el complejo de cadenas

$$\cdots \rightarrow \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y el borde

$$\partial = \sum_{i=0}^n (-1)^i d_i$$

para cada $n \geq 0$. La **homología** $H_\bullet(X)$ de X es la homología de este complejo de cadenas.

- $K \rightsquigarrow H_\bullet(K)$
- $BG \rightsquigarrow H_\bullet(G)$
- $\mathcal{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Símplices Degenerados

Definición

Sea X un conjunto simplicial. Un n -simplex $x \in X_n$ se dice **degenerado** si existe $y \in X_{n-1}$ tal que $s_i(y) = x$ para algún $i \in \llbracket n \rrbracket$. En caso contrario, decimos que x es **no degenerado** y notamos

$$NX_n := \{x \in X_n : x \text{ es no degenerado}\}.$$

Proposición

Sea X un conjunto simplicial. Si $x \in X$ es un símplex degenerado, entonces existe un único símplex no degenerado $y \in X$ y mapas de degeneración s_{i_1}, \dots, s_{i_k} tales que $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k} y$.

Morfismos Simpliciales

Definición

Dados dos complejos simpliciales $X, Y : \Delta^{\text{op}} \rightarrow \text{Set}$, un **morfismo de conjuntos simpliciales** de X a Y es una transformación natural $f : X \rightarrow Y$. Concretamente, esto consiste en dar una familia de funciones $f_n : X_n \rightarrow Y_n$ tales que para cada $0 \leq i \leq n$ los siguientes diagramas conmutan,

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{d_i} & X_{n-1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n-1} \\ Y_n & \xrightarrow{d_i} & Y_{n-1} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X_n & \xrightarrow{s_i} & X_{n+1} \\ f_n \downarrow & & \downarrow f_{n+1} \\ Y_n & \xrightarrow{s_i} & Y_{n+1} \end{array}$$

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f: (K, \leq) \rightarrow (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f: K \rightarrow L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow H$ induce un morfismo simplicial $\varphi: BG \rightarrow BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induce un morfismo simplicial $NF: N\mathcal{C} \rightarrow N\mathcal{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_*: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el funtor singular $\mathcal{S}: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f: (K, \leq) \rightarrow (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f: K \rightarrow L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow H$ induce un morfismo simplicial $\varphi: BG \rightarrow BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induce un morfismo simplicial $NF: N\mathcal{C} \rightarrow N\mathcal{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_*: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el funtor singular $\mathcal{S}: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f: (K, \leq) \rightarrow (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f: K \rightarrow L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi: G \rightarrow H$ induce un morfismo simplicial $\varphi: BG \rightarrow BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F: \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ induce un morfismo simplicial $NF: N\mathcal{C} \rightarrow N\mathcal{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f: X \rightarrow Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_*: \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

Todas estas asignaciones son functoriales. En particular, se tiene el funtor singular $\mathcal{S}: \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$.

Realización Geométrica

Definición

Sea X un conjunto simplicial. Dotando a cada conjunto X_n de la topología discreta, definimos la **realización geométrica** de X como el espacio topológico

$$|X| := \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) / \sim$$

donde identificamos a los puntos

$$(x, |d^i|(p)) \sim (d_i(x), p)$$

y

$$(x, |s^i|(p)) \sim (s_i(x), p)$$

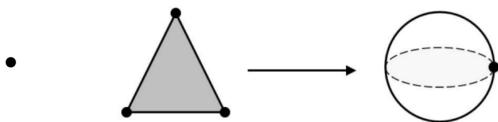
para cada mapa de cara y degeneración.

Realización Geométrica - Ejemplos

- Si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n -esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símlices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n - 1)$ -símplex en un punto».

Realización Geométrica - Ejemplos

- Si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n -esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplexes no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n - 1)$ -símplex en un punto».



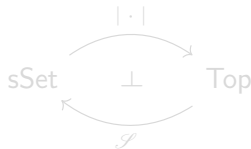
Realización Geométrica - La adjunción $|\cdot| \dashv \mathcal{S}(-)$

Proposición

Se tiene un funtor $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ que asigna a cada conjunto simplicial X su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial $f : X \rightarrow Y$ una flecha $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ inducida por la familia de funciones $\{f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \rightarrow Y_n \times |\Delta^n|\}_{n \geq 0}$.

Teorema

Existe una adjunción



En otras palabras, se tiene una biyección $\mathbf{Top}(|X|, Y) \simeq \mathbf{sSet}(X, \mathcal{S}(Y))$ entre las funciones continuas $|X| \rightarrow Y$ y los morfismos simpliciales $X \rightarrow \mathcal{S}(Y)$. Más aún, esta biyección es natural tanto en X como en Y .

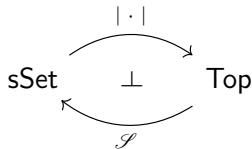
Realización Geométrica - La adjunción $|\cdot| \dashv \mathcal{S}(-)$

Proposición

Se tiene un funtor $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ que asigna a cada conjunto simplicial X su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial $f : X \rightarrow Y$ una flecha $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ inducida por la familia de funciones $\{f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \rightarrow Y_n \times |\Delta^n|\}_{n \geq 0}$.

Teorema

Existe una adjunción



En otras palabras, se tiene una biyección $\mathbf{Top}(|X|, Y) \simeq \mathbf{sSet}(X, \mathcal{S}(Y))$ entre las funciones continuas $|X| \rightarrow Y$ y los morfismos simpliciales $X \rightarrow \mathcal{S}(Y)$. Más aún, esta biyección es natural tanto en X como en Y .

Esqueletos

Definición

Sea X un conjunto simplicial y $n \in \mathbb{N}_0$. Definimos el n -esqueleto $sk_n X$ de X como el menor subcomplejo de X que tiene a los j -símplices de X para cada $j \in \llbracket n \rrbracket_0$. Es decir, es el complejo

$$(sk_n X)_j = \begin{cases} X_j & \text{si } j \leq n \\ \{x \in X_j : x = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-n}} y \text{ con } y \in X_n\} & \text{si } j > n \end{cases}$$

junto con las restricciones de los mapas de caras y degeneraciones de X . Se tienen además las siguientes inclusiones,

$$sk_0 X \subset sk_1 X \subset sk_2 X \subset \cdots \subset sk_n X \subset \cdots$$

Esqueletos

Lema

Si X es un conjunto simplicial, entonces $X \simeq \operatorname{colim}_{n \geq 0} \operatorname{sk}_n X$ donde el colímite se toma sobre el diagrama inducido por las inclusiones entre los n -esqueletos.

Lema

Si X es un conjunto simplicial y $n \in \mathbb{N}$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \partial \Delta^n & \longrightarrow & \operatorname{sk}_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{n \in \mathbb{N}} X_n \Delta^n & \longrightarrow & \operatorname{sk}_n X \end{array}$$

es un pushout.

Esqueletos

Lema

Si X es un conjunto simplicial, entonces $X \simeq \operatorname{colim}_{n \geq 0} \operatorname{sk}_n X$ donde el colímite se toma sobre el diagrama inducido por las inclusiones entre los n -esqueletos.

Lema

Si X es un conjunto simplicial y $n \in \mathbb{N}$, entonces el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in \mathbb{N}} \partial \Delta^n & \longrightarrow & \operatorname{sk}_{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{n \in \mathbb{N}} \Delta^n & \longrightarrow & \operatorname{sk}_n X \end{array}$$

es un pushout.

Realización Geométrica - CW Aproximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.

Teorema

La realización geométrica de un conjunto simplicial X es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.

Teorema

Si X es un espacio topológico, la counidad de la adjunción $\eta_X : |\mathcal{S}(X)| \rightarrow X$ es una equivalencia débil. Concretamente, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{S}f|} & |\mathcal{S}(Y)| \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta, y tanto η_X como η_Y son equivalencias débiles.

Realización Geométrica - CW Aproximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.

Teorema

La realización geométrica de un conjunto simplicial X es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.

Teorema

Si X es un espacio topológico, la counidad de la adjunción $\eta_X : |\mathcal{S}(X)| \rightarrow X$ es una equivalencia débil. Concretamente, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{S}f|} & |\mathcal{S}(Y)| \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta, y tanto η_X como η_Y son equivalencias débiles.

Realización Geométrica - CW Aproximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.

Teorema

La realización geométrica de un conjunto simplicial X es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.

Teorema

Si X es un espacio topológico, la counidad de la adjunción $\eta_X : |\mathcal{S}(X)| \rightarrow X$ es una equivalencia débil. Concretamente, si $f : X \rightarrow Y$ es una función continua entonces el diagrama

$$\begin{array}{ccc} |\mathcal{S}(X)| & \xrightarrow{|\mathcal{S}f|} & |\mathcal{S}(Y)| \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta, y tanto η_X como η_Y son equivalencias débiles.

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si \mathcal{C} es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}) \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathcal{S}_*} \end{array} \mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$$

que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»

- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si \mathcal{C} es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}) \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathcal{S}_*} \end{array} \mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$$

que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»

- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si \mathcal{C} es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}) \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathcal{S}_*} \end{array} \mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$$

que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»

- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si \mathcal{C} es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathrm{Ho}(\mathcal{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\mathrm{Ho}(\mathbf{sSet}) \begin{array}{c} \xrightarrow{|\cdot|_*} \\ \perp \\ \xleftarrow{\mathcal{S}_*} \end{array} \mathrm{Ho}(\mathbf{Top})$$

que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»

- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Fibraciones de Kan

Definición

Un morfismo simplicial $f : X \rightarrow Y$ se dice una **fibración de Kan** (o simplemente una fibración) si para cada diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\ \Delta^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

existe una flecha $\Delta^n \rightarrow X$ que sigue haciendo conmutar el diagrama.

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X se dice un **complejo de Kan** si el morfismo simplicial $X \xrightarrow{!} \Delta^0$ es una fibración de Kan.

Equivalentemente,

- Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial $\alpha : \Lambda_k^n \rightarrow X$ tenemos una extensión $\bar{\alpha} : \Delta^n \rightarrow X$ al n -símplex,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \bar{\alpha} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

- Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada n -upla de $(n-1)$ -símplices $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$ de X tales que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ si $i < j$, $i, j \neq k$, existe un n -símplex $x \in X_n$ tal que $d_i x = x_i$ para cada i .

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X se dice un **complejo de Kan** si el morfismo simplicial $X \xrightarrow{!} \Delta^0$ es una fibración de Kan.

Equivalentemente,

- Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial $\alpha : \Lambda_k^n \rightarrow X$ tenemos una extensión $\bar{\alpha} : \Delta^n \rightarrow X$ al n -símplex,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \bar{\alpha} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

- Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada n -upla de $(n-1)$ -símplices $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$ de X tales que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ si $i < j$, $i, j \neq k$, existe un n -símplex $x \in X_n$ tal que $d_i x = x_i$ para cada i .

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X se dice un **complejo de Kan** si el morfismo simplicial $X \xrightarrow{!} \Delta^0$ es una fibración de Kan.

Equivalentemente,

- Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial $\alpha : \Lambda_k^n \rightarrow X$ tenemos una extensión $\bar{\alpha} : \Delta^n \rightarrow X$ al n -símplex,

$$\begin{array}{ccc} \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow & \nearrow \exists \bar{\alpha} & \\ \Delta^n & & \end{array}$$

- Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada n -upla de $(n-1)$ -símplices $(x_0, \dots, \hat{x}_k, \dots, x_n)$ de X tales que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ si $i < j$, $i, j \neq k$, existe un n -símplex $x \in X_n$ tal que $d_i x = x_i$ para cada i .

Complejos de Kan

Proposición

Una función continua $f : X \rightarrow Y$ es una fibración de Serre si y sólo si el morfismo simplicial $\mathcal{S}(f) : \mathcal{S}(X) \rightarrow \mathcal{S}(Y)$ es una fibración de Kan.

$$\begin{array}{ccc}
 |\Lambda_k^n| & \rightarrow & X \\
 \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow f \\
 |\Delta^n| & \rightarrow & Y
 \end{array}
 \quad \Longleftrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \rightarrow & \mathcal{S}(X) \\
 \downarrow & \nearrow \exists & \downarrow \mathcal{S}(f) \\
 \Delta^n & \rightarrow & \mathcal{S}(Y)
 \end{array}$$

Proposición

Si X es un espacio topológico, entonces $\mathcal{S}(X)$ es un complejo de Kan.

$$\begin{array}{ccc}
 |\Lambda_k^n| & \xrightarrow{\alpha} & X \\
 \downarrow & \nearrow \exists \bar{\alpha} & \\
 |\Delta^n| & &
 \end{array}
 \quad \Longleftrightarrow \quad
 \begin{array}{ccc}
 \Lambda_k^n & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{S}(X) \\
 \downarrow & \nearrow \exists \bar{\alpha} & \\
 \Delta^n & &
 \end{array}$$

Homotopía Simplicial

Una **homotopía** entre dos morfismos simpliciales $f, g : X \rightarrow Y$ es un morfismo simplicial $H : X \times \Delta^1 \rightarrow Y$ que vale f al restringir el 1-símplex en una cara y g al restringir a la otra.

Esta se dice **relativa** a un subcomplejo K de X si además es «constante en K ».

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^0 & \xrightarrow{\simeq} & X \\ 1 \times d_1 \downarrow & & \downarrow f \\ X \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & Y \\ 1 \times d_0 \uparrow & & \uparrow g \\ X \times \Delta^0 & \xrightarrow{\simeq} & X \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & Y \\ i \times 1 \uparrow & & \uparrow \alpha \\ K \times \Delta^1 & \xrightarrow{\pi_1} & K \end{array}$$

Homotopía Simplicial

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces las homotopías simpliciales de vértices definen una relación de equivalencia en X_0 .

Observación

*En particular esto nos dice que Δ^1 **no** es un complejo de Kan.*

Proposición

Sea X un conjunto simplicial e Y un complejo de Kan. Si K es un subcomplejo de Y , las homotopías simpliciales relativas a K definen una relación de equivalencia en $\text{hom}_{\text{Set}}(X, Y)$.

Grupos de Homotopía

Definición

Sea X un complejo de Kan y $n \in \mathbb{N}$. Se define el n -ésimo grupo de homotopía con punto base $v \in X_0$ como el conjunto $\pi_n(X, v)$ de clases de homotopía relativas a $\partial\Delta^n$ de morfismos simpliciales $\alpha : \Delta^n \rightarrow X$ que valen constantemente v en el borde del símplex,

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \uparrow & & \uparrow v \\ \partial\Delta^n & \xrightarrow{\exists!} & \Delta^0 \end{array}$$

Teorema

Si X es un complejo de Kan y $v \in X_0$ un vértice, entonces $\pi_n(X, v)$ es un grupo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n -símplices $x, y: \Delta^n \rightarrow M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i: M \hookrightarrow X$ y una retracción $r: X \rightarrow M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f: M \rightarrow M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n -símplices $x, y: \Delta^n \rightarrow M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i: M \hookrightarrow X$ y una retracción $r: X \rightarrow M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f: M \rightarrow M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n -símplices $x, y: \Delta^n \rightarrow M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i: M \hookrightarrow X$ y una retracción $r: X \rightarrow M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f: M \rightarrow M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n -símplices $x, y: \Delta^n \rightarrow M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i: M \hookrightarrow X$ y una retracción $r: X \rightarrow M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f: M \rightarrow M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

¡FIN!