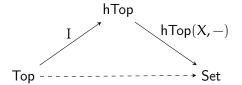
## Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

Guido Arnone

## Sobre los Ejercicios

**Observación 1.** Si notamos I : Top  $\rightarrow$  hTop al funtor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico X tenemos un funtor al componer con hTop(X, -),



Concretamente, éste envía cada espacio Y a [X,Y] y cada función continua  $f:Y\to Z$  a

$$[f]_*:[h]\in[X,Y]\mapsto[fh]\in[X,Z].$$

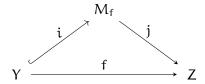
En particular, si f es una equivalencia homotópica entonces If es un isomorfismo y por lo tanto así lo es  $[f]_*$ .

**Lema 2.** Sea (X,A) un CW-par y (Z,Y) un par topológico tal que  $\pi_n(Z,Y)=0$  para todo  $n\geq 1$ . Si  $f:(X,A)\to (Z,Y)$  es una función continua de pares, entonces existe otra función continua  $g:X\to Z$  tal que  $g(X)\subset Y$  y  $f\simeq g$  relativa a Y.

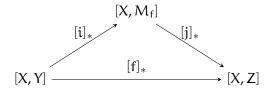
**Ejercicio 4.** Probar que una equivalencia débil  $f: Y \to Z$  induce biyecciones  $[X, Y] \to [X, Z]$  para todo CW-complejo X.

Demostración. En primer lugar, notemos que f se factoriza a través de M<sub>f</sub>,

Guido Arnone Prácticas 4 y 5



donde la inclusión i es una cofibración y j es equivalencia homotópica. Por la Observación 1, esto a su vez da un diagrama en Set,



y como j es equivalencia homotópica, la función  $[j]_*$  es biyectiva. Por lo tanto,  $[f]_*$  es biyectiva sí y solo si  $[i]_*$  lo es. Del mismo modo, f es una equivalencia débil si y sólo si lo es i.

Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el enunciado en el caso de  $i: Y \to Z$  la inclusión de un subespacio Y en un espacio topológico Z.

Ahora, como por hipótesis i induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la suceción exacta larga de pares

$$\cdots \to \pi_n(Y,y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z,y) \to \pi_n(Z,Y,y) \to \ldots$$

vemos que debe ser  $\pi_n(Z, Y, y) = 0$  para todo  $n \in N$  e  $y \in Y$ .

Por lo tanto, si  $g: X \to Z$  es una función continua, es una función de pares de  $(X, \emptyset)$  a (Z, Y). Por el Lema 2, sabemos entonces que existe  $h: X \to Z$  continua tal que  $h \simeq g$  y  $h(X) \subset Y$ . En consecuencia, correstringiendo h a Y vemos que

$$[i]_* ([h|^Y]) = [ih|^Y] = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de i<sub>\*</sub>.

Ahora veamos la inyectividad. Sean  $h_0$ ,  $h_1: X \to Y$  funciones continuas tales que  $ih_0 \simeq ih_1$  y veamos que  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas. Por hipótesis, sabemos que existe una homotopía  $H: ih_0 \simeq ih_1$ , que puede ser vista como una función de pares de  $(X \times I, X \times \partial I)$  a (Z, Y), ya que tanto  $ih_0$  como  $ih_1$  tienen imagen en Y.

Una vez más, por el Lema 2 existe una función continua  $K: (X \times I, X \times \partial I) \to (Z, Y)$  y una homotopía  $\Gamma: K \simeq H$  relativa a  $X \times \partial I$  tal que  $K(X \times I) \subset Y$ . En particular H y K coinciden en  $X \times \partial I$ , así que si  $S \in \{0,1\}$  entonces

$$h_s(x) = H(x,s) = K(x,s)$$

para todo  $x \in X$ . Por lo tanto la correstricción  $K|^Y : X \times I \to Y$  de K es una función continua que satisface  $K_s = h_s$ , y consecuentemente  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas.

**Lema 3.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $f: \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$  una función continua. Si f no tiene puntos fijos, entonces deg f=-1.

Guido Arnone Prácticas 4 y 5

Demostración. Notemos que como la homología de S<sup>2n</sup> es trivial excepto en grado 0 y 2n, es

$$\begin{split} \lambda(f) &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \cdot tr(H_n f) = tr(H_0 f) + (-1)^{2n} \, tr(H_{2n} f) \\ &= 1 + (-1)^{2n} \, deg \, f = 1 + deg \, f. \end{split}$$

Como f no tiene puntos fijos debe ser  $\lambda(f)=0$ , lo que nos dice que deg f=-1.

**Ejercicio 1.** Probar que  $\mathbb{Z}_2$  es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}$  y G un grupo que actúa libremente en  $S^{2n}$ . Esto es equivalente a que para cada  $g \in G$  distinto de la unidad la función

$$m_g:\mathbb{S}^{2n}\to\mathbb{S}^{2n}$$
 
$$x\longmapsto g\cdot x$$

no tenga puntos fijos. Por el Lema 3 sabemos entonces que deg  $\mathfrak{m}_g = -1$  para todo  $g \neq 1$ . Si ahora tomamos  $g, h \in G \setminus \{1\}$  tenemos que

$$deg \, m_{qh} = deg \, m_q \circ m_h = deg \, m_q \cdot deg \, m_h = (-1)^2 = 1,$$

asi que el contrarrecíproco del Lema 3 dice que  $m_{gh}$  tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser gh = 1.

Dado que G no es trivial, existe algún elemento  $g \in G \setminus \{1\}$ . Si ahora  $h \in G \setminus \{1\}$  es arbitrario, de  $gh^{-1} = 1$  obtenemos h = g para cualquier  $h \neq 1$ . Por lo tanto es  $G = \{1, g\}$ . g = g en consecuencia,  $G \simeq \mathbb{Z}_2$ .

**Lema 4.** Sea G un grupo. Si  $x \in \mathbb{Z}[G]$  es no nulo y G-invariante, entonces G es finito y existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = k \cdot \sum_{g \in G} g$ .

*Demostración.* Como  $x \in \mathbb{Z}[G] \setminus \{0\}$ , existen finitos elementos  $g_1, \ldots, g_n \in G$  y enteros  $a_1, \ldots, a_n$  con  $a_1 \neq 0$  tales que

$$x = a_1 q_1 + \cdots + a_n q_n$$
.

Para cada  $g \in G$ , es

$$a_1g_1 + \dots + a_ng_n = x = gg_1^{-1}x = a_1g + a_2gg_1^{-1}g_2 + \dots + a_ngg_1^{-1}g_n$$
 (1)

así que por la unicidad de la escritura en combinaciones formales, necesariamente  $g \in \{g_1, \dots, g_n\}$ . Esto prueba que  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ , y en particular G resulta finito.

Ahora, si para cada  $i \in [n]$  ponemos  $g = g_i$  en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1g_1 + \cdots + a_ng_n = a_1g_1 + \cdots + a_ng_1g_1^{-1}g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe  $k:=\mathfrak{a}_1\in\mathbb{Z}$  tal que  $k=\mathfrak{a}_1=\cdots=\mathfrak{a}_n$  y consecuentemente

$$x = a_1g_1 + \dots a_ng_n = kg_1 + \dots kg_n = k \cdot \sum_{g \in G} g.$$

Guido Arnone Prácticas 4 y 5

**Ejercicio** 5. Probar que cd(G) = 0 si y sólo si G es el grupo trivial.

Demostración. Una implicación es clara: si G=1, un  $\mathbb{Z}[1]$ -módulo es simplemente un  $\mathbb{Z}$  módulo, y entonces la sucesión

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{id} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[1]$ -módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

de  $\mathbb Z$  como  $\mathbb Z[G]$ -módulo trivial. En particular  $\mathbb Z$  resulta un  $\mathbb Z[G]$ -módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r: \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección  $s:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}[G].$  Como la acción de G en  $\mathbb{Z}$  es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada  $g \in G$ , y además  $s(1) \neq 0$  pues al ser sección s es inyectiva. Esto dice que s(1) es no nulo y G-invariante, así que por el Lema 4 existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$ .

Aplicando r se obtiene

$$1 = rs(1) = r\left(k \cdot \sum_{g \in G} g\right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k|G|,$$

lo que implica |G| = k = 1. Por lo tanto, necesariamente G es el grupo trivial.