Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 2 y 3

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí resolver los ejercicios (8) y (10) de la práctica dos. Sobre los temas de la practica tres, decidí entregar una resolución del ejercicio de poliedros asociados a relaciones en el caso finito, utilizando el lema del nervio. Con la intención de facilitar la legibilidad de las resoluciones, en varias oportunidades algunos argumentos están escritos en forma de lemas.

Lema 1. Sea φ una función de los CW-complejos finitos a los enteros que cumple:

(a) $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si X e Y son homeomorfos.

(b) $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A)$ si A es subcomplejo de X.

(c) $\varphi(\mathbb{S}^0) = n$.

Entonces,

(i) Si D es un CW-complejo finito de dimensión 0, entonces $\varphi(D) = \varphi(\mathbb{S}^0) \cdot (\#D - 1)$.

(ii) Si X es un CW-complejo finito y $A, B \subset X$ son subcomplejos de X tales que $X = A \vee B$, entonces $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

(iii) Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $\varphi(\mathbb{S}^d) = (-1)^d \cdot \varphi(\mathbb{S}^0)$.

(iv) Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{N}$, es $\varphi(\vee_{j=1}^{k} \mathbb{S}^d) = k \cdot (-1)^d \cdot \varphi(\mathbb{S}^0)$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

(i) Hacemos inducción en el tamaño de D. Sea $e_0^1 \sqcup e_0^2$ una estructura celular para $\mathbb{S}^0$. Si $\#D = 1$, luego $D \equiv e_0^1$. Por otro lado, el cociente de un espacio por el subespacio de un punto es siempre homeomorfo al espacio mismo. Tenemos entonces $\varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0/e_0^1) + \varphi(e_0^1) = \varphi(\mathbb{S}^0) + \varphi(D)$. Restando, tenemos que $\varphi(D) = 0$. Si $\#D = 2$, es $D \simeq \mathbb{S}^0$ y $\varphi(D) = \varphi(\mathbb{S}^0)$. Por último, cuando $\#D > 2$, si tomamos $x, y \in D$ dos 0-celdas, el cociente $D' := D/\{x, y\}$ por el subcomplejo $\{x, y\} \equiv \mathbb{S}^0$ corresponde a indentificar x con y, de forma que resulta un espacio discreto de un punto menos. Es decir, es un CW-complejo finito de dimensión cero con una 0-celda menos. Inductivamente, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(D) &= \varphi(D/\{x,y\}) + \varphi(\{x,y\}) = \varphi(D') + \varphi(\mathbb{S}^0)\\ &= \varphi(\mathbb{S}^0)(\#D'-1) + \varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0)\#D'\\ &= \varphi(\mathbb{S}^0)(\#D-1).\end{aligned}$$

(ii) Basta probar que $X/A \equiv B$. En tal caso, tendremos en efecto $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Consideramos la función $f : B \to X/A$ definida como la composición entre la inclusión $B \hookrightarrow X$ y la proyección $q : X \to X/A$. Como B es compacto pues es un CW-complejo finito y X/A es Hausdorff ya que es CW-complejo, resta ver que f es biyectiva. Sea $p \in X$ el punto de pegado entre A y B. Es decir, $A \cap B = \{p\}$. Ahora,

- La función f es inyectiva: sean $x, y \in B$ con $[x] = f(x) = f(y) = [y]$. Por definición de X/A, o bien $x = y$ o bien $x, y \in A$. Esto último implica $x, y \in A \cap B = \{p\}$. En cualquier caso, es $x = y$.
- La función f es sobreyectiva: sea $[x] \in A$ con $x \in X = A \vee B$. Si $x \in B$ es $[x] = f(x)$. De lo contrario, necesariamente es $x \in A \setminus \{p\}$. Pero entonces basta notar que como $p \in B$, es $f(p) = [p] = [x]$ pues $p, x \in A$.

(iii) Hacemos inducción en d. El caso base $d = 0$ es trivial. Si $d = 1$, construimos a $\mathbb{S}^1$ como la adjunción de dos 1-celdas e_1^1 y e_1^2 a $\mathbb{S}^0 = e_0^1 \sqcup e_0^2$. Luego $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0 \equiv \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ y $\varphi(\mathbb{S}^1) = \varphi(\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0) + \varphi(\mathbb{S}^0) \overset{\text{(ii)}}{=} 2\varphi(\mathbb{S}^1) + \varphi(\mathbb{S}^0)$. Restando, obtenemos $\varphi(\mathbb{S}^1) = -\varphi(\mathbb{S}^0)$. Cuando $d > 2$, usamos una idea similar: consideramos la estructura celular para $\mathbb{S}^d$ que consiste en adjuntar dos d-discos a $\mathbb{S}^{d-1}$. Es decir, tenemos una cero celda e_0, una $(d-1)$-celda e_{d-1} que corresponde a pegar el borde de un $(d-1)$-disco en e_0, y dos d-celdas e_d^1 y e_d^2 que coresponden a pegar el borde cada d-disco en la $(d-1)$-esfera sin identificar puntos del borde entre sí. Así, $\mathbb{S}^{d-1}$ resulta el "ecuador" de $\mathbb{S}^d$ y entonces, el cociente $\mathbb{S}^d/e_{d-1}$ es homeomorfo al wedge de dos d-esferas. Por lo tanto,

$$\varphi(\mathbb{S}^d) = \varphi(\mathbb{S}^d/e_{d-1}) + \varphi(e_{d-1}) = \varphi(\mathbb{S}^d \vee \mathbb{S}^d) + \varphi(\mathbb{S}^{d-1}) \overset{\text{(ii)}}{=} 2\varphi(\mathbb{S}^d) + \varphi(\mathbb{S}^{d-1}),$$

lo que implica $\varphi(\mathbb{S}^d) = -\varphi(\mathbb{S}^{d-1}) = -(-1)^{d-1}\varphi(\mathbb{S}^0) = (-1)^d\varphi(\mathbb{S}^0)$.

(iv) Hacemos inducción en k. El caso base cuando $k = 1$ se verifica por (iii). Si ahora $k > 1$, fijamos $d \in \mathbb{N}_0$ Ahora, consideramos la siguente estructura celular del wedge: tenemos una cero celda e_0 y k celdas de dimensión d, con funciónes de adjunción $f_i : \mathbb{D}^k \xrightarrow{!} e_0$ para cada $i \in [\![k]\!]$. Luego cada esfera es un subcomplejo y entonces usando (ii), (iii) y la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(\vee_{j=1}^k \mathbb{S}^d) &= \varphi(\mathbb{S} \vee \vee_{j=1}^{k-1}\mathbb{S}^d) = \varphi(\mathbb{S}^d) + \varphi(\vee_{j=1}^{k-1}\mathbb{S}^d)\\ &= (-1)^d\varphi(\mathbb{S}^0) + (k-1)(-1)^d\varphi(\mathbb{S}^0) = k\cdot(-1)^d\cdot\varphi(\mathbb{S}^0).\end{aligned}$$

□

Lema 2. Sea X un CW-complejo finito de dimensión d y sea $i < d$. Si X tiene c_i celdas de dimensión i, entonces $X^i/X^{i-1} \equiv \bigvee_{j\in[\![c_i]\!]} \mathbb{S}^i$.

Demostración. Sea $W := \bigvee_{j\in[\![c_i]\!]} \mathbb{S}^i$. Notemos que X^i/X^{i-1} es Hausdorff al ser un CW-complejo y W es compacto, así que basta con dar una función $W \to X^i/X^{i-1}$ continua y biyectiva. Consideramos primero la función $g : \bigsqcup_{j\in[\![c_i]\!]} \mathbb{D}^i_j \to X^i/X^{i-1}$ dada por la composición entre la función de adjunción de las i-celdas $f := \sqcup_{j\in[\![c_i]\!]} f_j$ y la proyección al cociente $q : X^i \to X^i/X^{i-1}$. Notemos que si x e y son puntos que pertenecen al borde de dos discos $\mathbb{D}^i_k, \mathbb{D}^i_l$, luego sus imagenes via f caen en el borde de dos i-celdas. En particular caen en el $(i-1)$-esqueleto de X^i, así que al proyectar obtenemos que $g(x) = g(y)$. Esto dice que g pasa al cociente por la relación que identifica todos los bordes de los discos. Como $\mathbb{D}^i/\partial\mathbb{D}^i \equiv \mathbb{S}^i$, luego $\bigsqcup_{j\in[\![c_i]\!]} \mathbb{D}^i_j/\bigsqcup_{j\in[\![c_i]\!]} \partial\mathbb{D}^i_j \equiv W$ y por lo tanto g induce una función continua $\hat{g} : W \to X^i/X^{i-1}$. Para terminar, veamos que es biyectiva:

- La función $\hat{g}$ es inyectiva: sean $x' \neq y' \in W$ y $x, y \in \bigsqcup_{j\in[\![c_i]\!]} \mathbb{D}^i_j$ preimganes de x' e y' respectivamente por la proyección a W. En particular no solo es $x \neq y$ si no que alguno de los puntos debe estar en el interior de algún disco, ya que todos los bordes se proyectan a un mismo punto de W. Suponemos sin pérdida de generalidad que $x \in \mathbb{D}^{i\,\circ}_j, y \in \mathbb{D}^i_{j'}$, con $j, j' \in [\![c_i]\!]$. Ahora, para ver que $[f(x)] = g(x) = \hat{g}(x') \neq \hat{g}(y') = g(y) = [f(y)]$ alcanza probar que $f(x)$ y $f(y)$ no están relacionados. Si $f(y) \in X^{i-1}$ luego $f(y) \not\sim f(x)$ pues $f(x) \notin X^{i-1}$. Caso contrario, es $y \in \mathbb{D}^{i,\circ}_{j'}$ y entonces $f(x)$ y $f(y)$ pertenecen a interiores de celdas disjuntos. En consecuencia, tenemos $f(x) \neq f(y)$ y $f(x), f(y) \notin X^{i-1}$ así que en cualquier caso obtuvimos $f(x) \not\sim f(y)$.

- La función $\hat{g}$ es sobreyectiva: sea $[z] \in X^i/X^{i-1}$. Si $z \in X^{i-1}$, tomamos $p \in W$ el punto de pegado de las esferas. Luego $\hat{g}(p) = g(x)$ para cierto $x \in \mathbb{D}^i_j$ con $j \in [\![c_i]\!]$. Por lo tanto, $f(x)$ está en el borde de una i-celda y entonces $f(x) \in X^{i-1}$. De esta forma, tenemos que $f(x) \sim z$ y entonces $\hat{g}(p) = g(x) = qf(x) = q(z) = [z]$. Si en cambio $z \in X^i \setminus X^{i-1}$, luego z está en el interior de una i-celda y es imagen de cierto punto $x \in \mathbb{D}^{i\,\circ}_j$ con $j \in [\![c_i]\!]$. Si proyectamos x a W, su imagen por $\hat{g}$ es $g(x) = qf(x) = q(z) = [z]$. En cualquier caso $[z]$ es imagen por $\hat{g}$ de algún punto de W.

□

Observación 3. Como lo necesitaremos a continuación, recordamos el siguiente resultado visto en clase: sea $0 \to \cdots \xrightarrow{d_q} C_{q+1} \xrightarrow{d_{q+1}} C_q \xrightarrow{d_q} C_{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$ un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generado. Entonces,

$$\sum_{q\geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} C_q = \sum_{q\geq 0} (-1)^q H_q C$$

En efecto, para cada $q \in \mathbb{N}$ tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \to \operatorname{im} d_{q+1} \hookrightarrow \ker d_q \to \ker d_q/\operatorname{im} d_{q+1} = H_q C \to 0,$$

$$0 \to \ker d_q \hookrightarrow C_q \xrightarrow{d_q} \operatorname{im} d_q \to 0.$$

Por lo tanto, $\operatorname{rg} C_q = \operatorname{rg}\ker d_q + \operatorname{rg}\operatorname{im} d_q = (\operatorname{rg}\operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} H_q C) + \operatorname{rg}\operatorname{im} d_q$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{q\geq 0}(-1)^q \operatorname{rg} C_q &= \sum_{q\geq 0}(-1)^q(\operatorname{rg}\operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} H_q C + \operatorname{rg}\operatorname{im} d_q) \\
&= \sum_{q\geq 0}(-1)^q H_q C + \sum_{q\geq 0}(-1)^q(\operatorname{rg}\operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg}\operatorname{im} d_q) \\
&= \sum_{q\geq 0}(-1)^q H_q C + \sum_{q\geq 0}(-1)^q \operatorname{rg}\operatorname{im} d_{q+1} + \sum_{q\geq 0}(-1)^q \operatorname{rg}\operatorname{im} d_{q+1} \\
&= \sum_{q\geq 0}(-1)^q H_q C + \sum_{q\geq 1}(-1)^{q+1} \operatorname{rg}\operatorname{im} d_q + \sum_{q\geq 0}(-1)^q \operatorname{rg}\operatorname{im} d_{q+1} \\
&= \sum_{q\geq 0}(-1)^q H_q C + \operatorname{rg}\operatorname{im} d_0 = \sum_{q\geq 0}(-1)^q H_q C
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que existe una única función φ que le asigna a cada CW-complejo finito un entero tal que

(a) $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si X e Y son homeomorfos.

(b) $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A)$ si A es subcomplejo de X.

(c) $\varphi(\mathbb{S}^0) = n$.

Probar además que una tal función debe cumplir que $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si $X \simeq Y$

Demostración. Probamos en primera instancia la unicidad, y luego la existencia. Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y supongamos que existe una tal función φ como en el enunciado. Ahora, sea X un CW-complejo finito de dimensión $d \in \mathbb{N}_0$. Por (b), obtenemos

$$\varphi(X) = \varphi(X^d) = \varphi(X^d/X^{d-1}) + \varphi(X^{d-1}) = \cdots = \sum_{i=1}^{d} \varphi(X^i/X^{i-1}) + \varphi(X^0).$$

Como por el Lema 2 es $X^i/X^{i-1} \equiv \vee_{j\in[\![c_i]\!]}\mathbb{S}^i$ con c_i la cantidad de i-celdas, luego usando (a) y los ítems (i) y (iv) del Lema 1 tenemos que

$$\begin{aligned}
\varphi(X) &= \sum_{i=1}^{d} \varphi(\vee_{j\in[\![c_i]\!]}\mathbb{S}^i) + \varphi(\mathbb{S}^0)\cdot(\#X^0 - 1) = \sum_{i=1}^{d} c_i\varphi(\mathbb{S}^i) + (c_0-1)\varphi(\mathbb{S}^0) \\
&= \sum_{i=0}^{d} c_i\varphi(\mathbb{S}^i) - \varphi(\mathbb{S}^0) = \sum_{i=0}^{d} c_i(-1)^i\varphi(\mathbb{S}^0) - \varphi(\mathbb{S}^0) \\
&= \varphi(\mathbb{S}^0)\sum_{i=0}^{d}(-1)^i c_i - \varphi(\mathbb{S}^0).
\end{aligned}$$

Observando que $c_i = \operatorname{rg}(C_i X)$, es entonces

$$\varphi(X) = \varphi(\mathbb{S}^0)\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \operatorname{rg}(C_i X) - \varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0)\chi(X) - \varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0)(\chi(X)-1).$$

Esto prueba la unicidad, pues una tal función queda unívocamente determinada por su valor en la 0-esfera. Además, como la característica de Euler es un invariante homotópico, vemos que si $X \simeq Y$ luego $\varphi(X) = \varphi(\mathbb{S}^0)(\chi(X) - 1) = \varphi(\mathbb{S}^0)(\chi(Y) - 1) = Y$. Para terminar, veamos la existencia: dado $n \in \mathbb{Z}$, por lo anterior necesariamente debemos definir $\varphi(X) := n(\chi(X) - 1)$ para cada CW-complejo finito X. Observemos también que si una función ψ cumple las condiciones (a) y (b) y $m \in \mathbb{Z}$ es un entero, la función $m \cdot \psi$ sigue verificándolas. Por lo tanto, resta probar la afirmación para $n = 1$. Una vez más como χ es un invariante homotópico, en particular $\chi - 1$ verifica (a), y (c) es cierto pues $\chi(\mathbb{S}^0) - 1 = 2 - 1 = 1$. Para terminar basta ver que si X es un CW-complejo finito y A un subcomplejo de X, entonces $\chi(X) - 1 = \chi(A) + \chi(X/A) - 2$. Es decir, debemos ver que $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X/A) - 1$. Siempre tenemos una sucesión exacta corta $0 \to S_\bullet A \to S_\bullet X \to S_\bullet(X, A) \to 0$ de complejos singulares, es decir tenemos una sucesión exacta

$$0 \to S_q A \to S_q X \to S_q(X, A) \to 0.$$

para cada $q \geq 0$ con los morfismos de inclusión y proyección canónicos, ya que por definicion es $S_q(X, A) = S_q X / S_q A$. En particular sabemos que $\operatorname{rg} S_q X = \operatorname{rg} S_q A + \operatorname{rg} S_q(X, A)$. Ahora usando la Observación 3 se tiene que

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} S_i X = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\operatorname{rg} S_i A + \operatorname{rg} S_i(X, A)) \\
&= \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} S_i(X, A) = \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} H_i(X, A).
\end{aligned}$$

Como (X, A) es un par bueno, como consecuencia de escisión tenemos que $H_i(X, A) = \tilde{H}_i(X/A)$ para todo $i \geq 0$. Observando que para cualquier espacio Y es $\tilde{H}_0(Y) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(Y)$, en particular $\operatorname{rg} H_0(X, A) = \operatorname{rg} \tilde{H}_0(X/A) = \operatorname{rg} H_0(X/A) - 1$ y entonces

$$\begin{aligned}
\chi(X) &= \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} H_i(X, A) \\
&= \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} H_i(X/A) - 1 \\
&= \chi(X) + \chi(X/A) - 1,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □

Lema 4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f, g : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ dos funciones continuas. Si $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in \mathbb{S}^n$, entonces f y g son homotópicas.

Demostración. Consideremos primero dos puntos $x, y \in \mathbb{S}^n$ y $t \in [0, 1]$ tal que $tx + (1 - t)y = 0$. Como

$$t = \|x\| = \|(t-1)y\| = |t - 1| = 1 - t,$$

necesariamente es $t = 1/2$. Reemplazando en la ecuación original obtenemos $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$, y por un cálculo directo es $x = -y$.

Como para cada $x \in \mathbb{S}^n$ tenemos que $f(x) \neq -g(x)$, el contrarrecíproco del argumento anterior asegura que $tf(x) + (1 - t)g(x) \neq 0$ para cualquier $t \in [0, 1]$. En consecuencia, la función

$$\begin{aligned}
H : \mathbb{S}^n \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{S}^n \\
(x, t) &\mapsto \frac{tf(x) + (1 - t)g(x)}{\|tf(x) + (1 - t)g(x)\|}
\end{aligned}$$

está bien definida y es continua. Como $H(x,0) = f(x)$ y $H(x,1) = g(x)$ para cada $x \in \mathbb{S}^n$, concluimos que f y g son homotópicas. □

Ejercicio 10. Probar que toda función continua $f : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ es homotópica a una que tiene algún punto fijo.

Demostración. Si f tiene algún punto fijo, no hay nada que decir. En caso contrario, es

$$f(x) \neq x = -(-x) = -A(x) \quad (\forall x \in \mathbb{S}^n)$$

con $A : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$ la antípoda de $\mathbb{S}^n$. Por el Lema 3, debe ser $f \simeq A$. Por lo tanto, basta probar el resultado para $f = A$.

Para cada $t \in [0,1]$, definimos

$$R_t := \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) & 0_{1,n} \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & 0_{n,1} & -I_{n-2} \end{pmatrix}$$

con $I_{n-2} \in M_{n-2}(\mathbb{R})$ la matriz identidad y $0_{k,l} \in \mathbb{R}^{k\times l}$ la matriz cero. Ahora, la función definida por

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{n+1} \times [0,1] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ (x,t) &\longmapsto R_t \cdot x \end{aligned}$$

resulta continua, pues en cada coordenada es suma de productos de funciones continuas. Concretamente[1],

$$h(x_0,\ldots,x_n,t) = (\cos(\pi t)x_0 + \sin(\pi t)x_1, \cos(\pi t)x_0 - \sin(\pi t)x_1, -x_2,\ldots,-x_n). \tag{1}$$

Dado $t \in [0,1]$, la matriz R_t es diagonal por bloques con cada bloque ortogonal: esto dice que R_t es ortogonal. En particular, si $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ es unitario entonces $R_t \cdot x$ resulta unitario. Podemos considerar entonces la (co)restricción

$$\begin{aligned} H : \mathbb{S}^n \times I &\to \mathbb{S}^n \\ (x,t) &\longmapsto h(t,x) \end{aligned}$$

que sigue siendo continua. Por (1) sabemos que

$$H(x,0) = (x_0, x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

y

$$H(x,1) = (-x_0, -x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = A(x),$$

así que $g := H(-,0)$ y A son homotópicas. Para terminar, observemos que como

$$g(1,0,0,\ldots,0) = (1,0,-0,\ldots,-0) = (1,0,0,\ldots,0),$$

la función g tiene puntos fijos. □

[1] En esta expresión y las siguientes asumimos que $n \geq 2$. Para el caso donde $n = 1$, las expresiones son análogas ignorando las coordenas siguientes. Por ejemplo, $h(x_0,x_1,t) = (\cos(\pi t)x_0 + \sin(\pi t)x_1, \cos(\pi t)x_0 + -\sin(\pi t)x_1)$.

Para el ejercicio siguiente, recuerdo algunas definiciones. Dada $R \subset X \times Y$ una relación entre dos conjuntos X e Y cualesquiera, definimos dos complejos simpliciales K_R y L_R.

El complejo K_R tiene como n-símplices a los subconjuntos $\{x_0, \ldots, x_n\} \subset X$ tales que existe $y \in Y$ con $x_j R y$ para todo $j \in [\![n]\!]_0$. De forma similar, en L_R los n-símplices son los subconjuntos $\{y_0, \ldots, y_n\} \subset Y$ tales que existe $x \in X$ con $x R y_j$ para todo $j \in [\![n]\!]_0$.

Defino también $R_y := \{x \in X : xRy\}$ para cada $y \in Y$ y $R_Y = \{R_y\}_{y \in Y}$.

Lema 5. Sean X e Y conjuntos finitos y $R \subset X \times Y$ una relación. Entonces, para cada $y \in Y$ el conjunto R_y es o bien vacío o bien un símplex.

Demostración. Sea $y \in Y$. Si R_y es vacío, no hay nada que decir. En caso contrario, es de la forma $R_y = \{x_0, \ldots, x_n\}$. Como por construcción es $x_j R y$ para cada $j \in [\![n]\!]_0$, éste es un símplex. □

Lema 6. Sean X e Y conjuntos finitos y $R \subset X \times Y$ una relación. Ahora, sean $\tilde{X}$ los elementos de X que están relacionados con alguno de Y, e $\tilde{Y}$ los elementos de Y que están relacionados con alguno de X. Si notamos R' a la restricción de R a los conjuntos $\tilde{X}$ e $\tilde{Y}$, entonces $K_R = K_{R'}$ y $L_R = L_{R'}$.

Demostración. Por construccón, es $K_{\tilde{R}} \subset K_R$ y $L_{\tilde{R}} \subset L_R$. Veamos la otra contención. Ambos casos son similares, lo hacemos para K_R. Si $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \in K_R$, entonces existe $y \in Y$ con $x_j R y$ para cada $j \in [\![n]\!]_0$. En particular y pertenece a $\tilde{Y}$, y cada x_j pertence a $\tilde{X}$, así que $\sigma \in K_{\tilde{R}}$. □

Lema 7. Sean X e Y conjuntos finitos, $R \subset X \times Y$ una relación con $R_z \neq \emptyset$ para todo $z \in Y$, e $y, y' \in Y$ tales que $R_y = R_{y'}$. Si notamos $R' = R \setminus X \times \{y'\}$ a la restricción a $X \times Y \setminus \{y'\}$, entonces $L_{R'}$ es un retracto por deformación fuerte de L_R, y $K_{R'} = K_R$.

Demostración. Como $R' \subset R$, es $K_{R'} \subset K_R$. Si ahora $\sigma = \{x_0, \ldots, x_n\} \in K_R$ entonces existe $z \in Y \setminus \{y'\}$ tal que $x_j R z$ para todo $j \in [\![n]\!]_0$. De ser $z \neq y'$, entonces ya sabemos que $\sigma \in K_{R'}$. En caso contrario debe ser $z = y'$ y como $R_y = R_{y'}$, entonces $x_j R y$ para todo j. Esto dice que en cualquier caso $\sigma \in K_{R'}$, lo que prueba la igualdad.

Ahora veamos que $L_{R'}$ es un retracto por deformación fuerte de L_R. Consideremos el morfismo simlpicial dado por la siguiente función entre vértices,

$$\begin{aligned} r : Y &\to Y \setminus \{y'\} \\ z &\mapsto \begin{cases} z \text{ si } z \neq y' \\ y \text{ si } z = y' \end{cases} \end{aligned}$$

Observemos que si $i : Y \setminus \{y'\} \hookrightarrow Y$ es la inclusión, entonces $ri = 1_{Y \setminus \{y'\}}$ y por lo tanto

$$|ri| = |r| \circ |i| = |1_{Y \setminus \{y'\}}| = 1_{L_{R'}}.$$

Para terminar, veamos que $|ir| \simeq 1_{L_R}$. Dado $v = \sum_{z \in Y} a_z \cdot z$ en L_R, notamos $v_z = a_z$. Afirmamos ahora que

$$\begin{aligned} H : |L_R| \times I &\longrightarrow |L_R| \\ (v, t) &\mapsto (v - v_{y'} \cdot y') + v_{y'}(t \cdot y + (1-t) \cdot y') \end{aligned}$$

es una homotopía. En primer lugar, veamos que H está bien definida. Sea $t \in \mathbb{R}$ y $v \in L_R$ con $\operatorname{sop} v \subset \sigma$ para cierto $\sigma = \{y_0, \dots, y_n\} \in L_R$. Si $y' \notin \sigma$, entonces $v_y = 0$ y $H(v,t) = v$. Si $y' \in \sigma$, por hipótesis también es $y \in \sigma$. Sin pérdida de generalidad suponemos que $y' = y_0$ e $y = y_1$. Ahora,

$$H(v,t) = \sum_{i=0}^{n} a_i y_i - a_0 y + a_0(ty + (1-t)y') =$$

$$= a_0 ty + [a_1 + a_0(1-t)]y' + \sum_{i=2}^{n} a_i y_i$$

sigue estando soportado en σ, y

$$a_0 t + a_1 + a_0(1-t) + \sum_{i=2}^{n} a_i = a_0 + a_1 + \sum_{i=2}^{n} a_i = \sum_{i=0}^{n} a_i = 1,$$

lo que dice que efectivamente $H(v,t)$ es un punto de $|L_R|$, lo que prueba la buena definición. Como L_R es finito, la función H resulta además continua (pues lo es para la distancia métrica). Para terminar de ver que H es homotopía, notemos que

$$H(v,0) = (v - v_{y'} \cdot y') + v_{y'}(0 \cdot y + 1 \cdot y') = v - v_{y'} \cdot y' + v_{y'} \cdot y' = v$$

y

$$H(v,1) = (v - v_{y'} \cdot y') + v_{y'}(1 \cdot y + 0 \cdot y') = v - v_{y'} \cdot y' + v_{y'} \cdot y$$

lo que dice que $H(-,0) = 1_{L_R}$ y $H(-,1) = |ir|$, pues justamente $H(-,1)$ reemplaza a y' por y en la suma formal de v, lo que coincide con $|ir|(v)$. Esto termina de probar que L_R y $L_{R'}$ son homotópicos. Por último, al ver la buena definición de H notamos en particular que $H(v,t) = v$ si $\operatorname{sop} v \not\ni y'$, lo que prueba que la homotopía es relativa a $L_{R'}$. □

Lema del Nervio. Sea K un complejo simplicial y $\mathcal{U} = \{U_j\}_{j\in J}$ un cubrimiento localmente finito de K por subcomplejos. Si $\bigcap_{j\in J'} U_j$ es vacío o contráctil para cada $J' \subset J$, entonces $|K| \simeq |N(\mathcal{U})|$.

Ejercicio (sobre poliedros y relaciones, en el caso finito). Sean X e Y dos conjuntos finitos y $R \subset X \times Y$ una relación. Entonces, los poliedros K_R y L_R son homotópicamente equivalentes.

Demostración. Por el Lema 6, podemos suponer que todo punto de X está relacionado con alguno de Y y viceversa. Esto dice que los vértices de L_R son todos los elementos de Y y cada conjunto R_y resulta no vacío.

Por otro lado, si existen $y, y' \in Y$ distintos tales que $R_y = R_{y'}$, el Lema 7 nos asegura que los complejos inducidos por la relación $R \setminus X \times \{y'\}$ son homotópicos a los originales. Repitiendo el proceso las veces que sea necesario[2], podemos conseguir un subconjunto $Y' \subset Y$ y una relación $R' \subset R$ tales que $K_{R'} \simeq K_R$, $L_{R'} \simeq L_R$ y $R'_y \neq R'_z$ si $y \neq z$. En consecuencia, K_R y L_R serán homotópicos si y sólo si $K_{R'}$ y $L_{R'}$ lo son, lo que nos dice que sin pérdida de generalidad podemos asumir que $R_y \neq R_{y'}$ cuando $y \neq y'$.

Veamos ahora que la función entre vértices

$$\begin{aligned} f : Y &\to \{R_y\}_{y\in Y} \\ y &\mapsto R_y \end{aligned}$$

[2] Aquí usamos que Y es finito, y por lo tanto, el proceso termina.

induce un isomorfismo simplicial entre L_R y $N(\{R_y\}_{y\in Y})$. Por definición, sabemos que f es suryectiva, pero la simplificación anterior nos garantiza además la inyectividad. Resta ver que $\sigma \in L_R$ si y sólo si $f(\sigma) \in N(\{R_y\}_{y\in Y})$. Notemos que $\{y_0, \ldots, y_n\}$ es un símplex de L_R si y sólo si existe $x \in X$ tal que xRy_j para cada $j \in [\![n]\!]_0$, y esto ocurre exactamente cuando $x \in R_{y_j}$ para todo j. En consecuencia, tenemos que

$$\{y_0, \ldots, y_n\} \in L_Y \iff \cap_{i=1}^n R_{y_i} \neq \emptyset \iff \{R_{y_0}, \ldots, R_{y_n}\} = f(\{y_0, \ldots, y_n\}) \in N(\{R_y\})_{y\in Y}$$

y así f es un isomorfismo simplicial. En particular, la realización geométrica de $N(\{R_y\}_{y\in Y})$ es homeomorfa a la de L_R.

Para terminar el ejercicio, basta ver entonces que $K_R \simeq N(\{R_y\}_{y\in Y})$. Por construcción, cada vértice de K_R se encuentra el algún conjunto R_y. Es decir, se tiene que la familia $\{R_y\}_{y\in Y}$ es un cubrimiento por subcomplejos (finito, en particular localmente finito) de K_R. Más aún, por el Lema 5 cada uno de éstos es un símplex, asi que las interesecciones de elementos de $\{R_y\}_{y\in Y}$ son o bien un simplex, que es contráctil, o bien vacías. El lema del nervio nos asegura entonces que $N(\{R_y\}_{y\in Y})$ y K_R son homotópicos, lo que concluye la demostración. $\square$