

Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio (4) de la práctica 4 y los ejercicios (1) y (5) de la práctica 5.

Observación. Si notamos $I : \text{Top} \rightarrow \text{hTop}$ al functor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico X tenemos un functor al componer con $\text{hTop}(X, -)$,

$$\begin{array}{ccc} & \text{hTop} & \\ I \nearrow & & \searrow \text{hTop}(X, -) \\ \text{Top} & \text{-----} & \text{Set} \end{array}$$

Concretamente, éste envía cada espacio Y a $[X, Y]$ y cada función continua $f : Y \rightarrow Z$ a

$$[f]_* : [h] \in [X, Y] \mapsto [fh] \in [X, Z].$$

En particular, si f es una equivalencia homotópica entonces $I f$ es un isomorfismo y por lo tanto así lo es $[f]_*$.

Lema 1. Sea (X, A) un CW-par, $n \in \mathbb{N}$ y (Z, Y) un par topológico. Si $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$ es una función continua de pares que satisface $f(X^{(n-1)} \cup A) \subset Y$ y $\pi_n(Z, Y) = 0$, entonces existe otra función continua $g : X \rightarrow Z$ tal que $g(X^{(n)} \cup A) \subset Y$ y $f \simeq g$ relativa a A .

Demostración. Tomemos una n -celda e de $X^{(n)}$ que no sea una celda de A , y sea $\xi : \mathbb{D}^n \rightarrow e$ su correspondiente función de adjunción. Como

$$f\xi(\partial\mathbb{D}^n) \subset f(X^{(n-1)}) \subset Y,$$

la función $f\xi : \mathbb{D}^n \rightarrow Z$ representa a una clase de equivalencia de $\pi_n(Z, Y)$.

Al ser $\pi_n(Z, Y) = 0$, existe una homotopía $H : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow Z$ entre $f\xi$ y g relativa a $\partial\mathbb{D}^n$ con $\text{im } H_1 \subset Y$. Puesto que la homotopía H es relativa al borde del disco, pasa al cociente por las identificaciones que hace ξ , y tenemos entonces $\tilde{H} : e \times I \rightarrow Z$ tal que

$$\begin{array}{ccc}
 \mathbb{D}^n \times I & \xrightarrow{H} & Z \\
 \xi \times 1 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\
 e \times I & &
 \end{array}$$

conmuta.

Esto en particular dice que

$$\text{im } \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(e) = \tilde{H}_1 \xi(\mathbb{D}^n) = H_1(\mathbb{D}^n) \subset Y \quad (1)$$

y $f\xi = H_0 = \tilde{H}_0\xi$. De aquí vemos que $\tilde{H}_0 = f$, pues ξ es sobreyectiva, y como \tilde{H} es relativa a \dot{e} (ya que H es relativa a $\partial\mathbb{D}^n$) sabemos que $\tilde{H}_t|_{\dot{e}} = f|_{\dot{e}}$ para todo $t \in I$.

Esto nos dice que para cada n -celda e_β^n de $X^{(n)}$ que no es una celda de A , existe una homotopía $H_\beta^n : e_\beta^n \times I \rightarrow Z$ relativa a \dot{e}_β^n que satisface

- $(H_\beta^n)_0 = f|_{e_\beta^n}$,
- $\text{im}(H_\beta^n)_1 \subset Y$,
- $(H_\beta^n)_t|_{\dot{e}_\beta^n} = f|_{\dot{e}_\beta^n}$ para todo $t \in I$.

En virtud de que dos n -celdas distintas se intersecan a lo sumo en sus bordes y allí cada homotopía H_β^n coincide con f , por el lema de pegado está bien definida la función continua

$$H : X^{(n)} \cup A \times I \rightarrow Z$$

que cumple $H|_A \equiv f|_A$ y $H|_{e_\beta^n} \equiv H_\beta^n$ en cada n -celda e_β^n que no es una celda de A . Además, por construcción es $H_0 = f|_{X^{(n)} \cup A}$ y $\text{im } H_1 \subset Y$.

Finalmente, como la inclusión del subcomplejo $X^{(n)} \cup A \hookrightarrow X$ es una cofibración, existe una homotopía $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$ que coincide con H en $X^{(n)} \cup A$ y satisface $\tilde{H}_0 = f$. En particular, es $\tilde{H}_1(X^{(n)} \cup A) = \text{im } H_1 \subset Y$, así que basta tomar $g := \tilde{H}_1$. \square

Probamos ahora un caso particular del *lema crucial*,

Lema 2. Sea (X, A) un CW-par y (Z, Y) un par topológico tal que $\pi_n(Z, Y) = 0$ para todo $n \geq 1$. Si $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$ es una función continua de pares, entonces existe otra función continua $g : X \rightarrow Z$ tal que $g(X) \subset Y$ y $f \simeq g$ relativa a A .

Demostración. asd \square

Ejercicio 4. Probar que una equivalencia débil $f : Y \rightarrow Z$ induce biyecciones $[X, Y] \rightarrow [X, Z]$ para todo CW-complejo X .

Demostración. En primer lugar, notemos que f se factoriza a través de M_f ,

$$\begin{array}{ccc}
 & M_f & \\
 i \nearrow & & \searrow j \\
 Y & \xrightarrow{f} & Z
 \end{array}$$

donde la inclusión i es una cofibración y j es equivalencia homotópica. Esto a su vez da un diagrama en Set ,

$$\begin{array}{ccc} & [X, M_f] & \\ [i]_* \nearrow & & \searrow [j]_* \\ [X, Y] & \xrightarrow{[f]_*} & [X, Z] \end{array}$$

y como j es equivalencia homotópica, la función $[j]_*$ es biyectiva. Por lo tanto, $[f]_*$ es biyectiva si y solo si $[i]_*$ lo es. Del mismo modo, f es una equivalencia débil si y sólo si lo es i .

Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el enunciado en el caso de $i : Y \rightarrow Z$ la inclusión de un subespacio Y en un espacio topológico Z .

Ahora, como por hipótesis i induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la sucesión exacta larga de pares

$$\cdots \rightarrow \pi_n(Y, y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z, y) \rightarrow \pi_n(Z, Y, y) \rightarrow \cdots$$

vemos que debe ser $\pi_n(Z, Y, y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in Y$.

Por lo tanto, si $g : X \rightarrow Z$ es una función continua, es una función de pares de (X, \emptyset) a (Z, Y) . Por el **Lema 2**, sabemos entonces que existe $h : X \rightarrow Z$ continua tal que $h \simeq g$ y $h(X) \subset Y$. En consecuencia, correstrigiendo h a Y vemos que

$$[i]_* \left([h|_Y] \right) = [ih|_Y] = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de i_* .

Ahora veamos la inyectividad. Sean $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$ funciones continuas tales que $ih_0 \simeq ih_1$ y veamos que h_0 y h_1 son homotópicas. Por hipótesis, sabemos que existe una homotopía $H : ih_0 \simeq ih_1$, que puede ser vista como una función de pares de $(X \times I, X \times \partial I)$ a (Z, Y) , ya que tanto ih_0 como ih_1 tienen imagen en Y .

Una vez más, por el **Lema 2** existe una función continua $K : (X \times I, X \times \partial I) \rightarrow (Z, Y)$ y una homotopía $\Gamma : K \simeq H$ relativa a $X \times \partial I$ tal que $K(X \times I) \subset Y$. En particular H y K coinciden en $X \times \partial I$, así que si $s \in \{0, 1\}$ entonces

$$h_s(x) = H(x, s) = K(x, s)$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto la correstricción $K|_Y : X \times I \rightarrow Y$ de K es una función continua que satisface $K_s = h_s$, y consecuentemente h_0 y h_1 son homotópicas. \square

Lema 3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$ una función continua. Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg f = -1$.

Demostración. Notemos que como la homología de S^{2n} es trivial excepto en grado 0 y $2n$, es

$$\begin{aligned} \lambda(f) &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \cdot \text{tr}(H_q f) = \text{tr}(H_0 f) + (-1)^{2n} \text{tr}(H_{2n} f) \\ &= 1 + (-1)^{2n} \deg f = 1 + \deg f. \end{aligned}$$

Como f no tiene puntos fijos debe ser $\lambda(f) = 0$, lo que nos dice que $\deg f = -1$. \square

Ejercicio 1. Probar que \mathbb{Z}_2 es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y G un grupo que actúa libremente en S^{2n} . Esto es equivalente a que para cada $g \in G$ distinto de la unidad la función

$$\begin{aligned} m_g : S^{2n} &\rightarrow S^{2n} \\ x &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

no tenga puntos fijos. Por el **Lema 3** sabemos entonces que $\deg m_g = -1$ para todo $g \neq 1$.

Si ahora tomamos $g, h \in G \setminus \{1\}$ tenemos que

$$\deg m_{gh} = \deg m_g \circ m_h = \deg m_g \cdot \deg m_h = (-1)^2 = 1,$$

así que el contrarrecíproco del **Lema 3** dice que m_{gh} tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser $gh = 1$.

Dado que G no es trivial, existe algún elemento $g \in G \setminus \{1\}$. Si ahora $h \in G \setminus \{1\}$ es arbitrario, de $gh^{-1} = 1$ obtenemos $h = g$ para cualquier $h \neq 1$. Por lo tanto es $G = \{1, g\}$. y en consecuencia, $G \simeq \mathbb{Z}_2$. \square

Lema 4. Sea G un grupo. Si $x \in \mathbb{Z}[G]$ es no nulo y G -invariante, entonces G es finito y existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Demostración. Como $x \in \mathbb{Z}[G] \setminus \{0\}$, existen finitos elementos $g_1, \dots, g_n \in G$ y enteros a_1, \dots, a_n con $a_1 \neq 0$ tales que

$$x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n.$$

Para cada $g \in G$, es

$$a_1 g_1 + \dots + a_n g_n = x = g g_1^{-1} x = a_1 g + a_2 g g_1^{-1} g_2 + \dots + a_n g g_1^{-1} g_n \quad (2)$$

así que por la unicidad de la escritura en combinaciones formales, necesariamente $g \in \{g_1, \dots, g_n\}$. Esto prueba que $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, y en particular G resulta finito.

Ahora, si para cada $i \in \llbracket n \rrbracket$ ponemos $g = g_i$ en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1 g_1 + \dots + a_n g_n = a_1 g_i + \dots + a_n g_i g_1^{-1} g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe $k := a_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k = a_1 = \dots = a_n$ y consecuentemente

$$x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n = k g_1 + \dots + k g_n = k \cdot \sum_{g \in G} g.$$

\square

Ejercicio 5. Probar que $\text{cd}(G) = 0$ si y sólo si G es el grupo trivial.

Demostración. Una implicación es clara: si $G = 1$, un $\mathbb{Z}[1]$ -módulo es simplemente un \mathbb{Z} módulo, y entonces la sucesión

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}[1]$ -módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de \mathbb{Z} como $\mathbb{Z}[G]$ -módulo trivial. En particular \mathbb{Z} resulta un $\mathbb{Z}[G]$ -módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r : \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$. Como la acción de G en \mathbb{Z} es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada $g \in G$, y además $s(1) \neq 0$ pues al ser sección s es inyectiva. Esto dice que $s(1)$ es no nulo y G -invariante, así que por el **Lema 4** existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Aplicando r se obtiene

$$1 = rs(1) = r \left(k \cdot \sum_{g \in G} g \right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k|G|,$$

lo que implica $|G| = k = 1$. Por lo tanto, necesariamente G es el grupo trivial. □