

Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 2 y 3

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Lema 1. Sea φ una función de los CW-complejos finitos a los enteros que cumple las hipótesis del ejercicio 8. Entonces,

- (i) Si D es un CW-complejo finito de dimensión 0, entonces $\varphi(D) = \varphi(S^0) \cdot (\#D - 1)$.
- (ii) Si X es un CW-complejo finito y $A, B \subset X$ son subcomplejos de X tales que $X = A \vee B$, entonces $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(B)$.
- (iii) Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $\varphi(S^d) = (-1)^d \cdot \varphi(S^0)$.
- (iv) Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{N}$, es $\varphi(\bigvee_{j=1}^k S^d) = k \cdot (-1)^d \cdot \varphi(S^0)$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

- (i) Hacemos inducción en el tamaño de D . Sea $e_0^1 \sqcup e_0^2$ una estructura celular para S^0 . Si $\#D = 1$, luego $D \equiv e_0^1$. Por otro lado, el cociente de un espacio por el subespacio de un punto es siempre homeomorfo al espacio mismo. Tenemos entonces $\varphi(S^0) = \varphi(S^0/e_0^1) + \varphi(e_0^1) = \varphi(S^0) + \varphi(D)$. Restando, tenemos que $\varphi(D) = 0$. Si $\#D = 2$, es $D \simeq S^0$ y $\varphi(D) = \varphi(S^0)$. Por último, cuando $\#D > 2$, si tomamos $x, y \in D$ dos 0-celdas, el cociente $D' := D/\{x, y\}$ por el subcomplejo $\{x, y\} \equiv S^0$ corresponde a indentificar x con y , de forma que resulta un espacio discreto de un punto menos. Es decir, es un CW-complejo finito de dimensión cero con una 0-celda menos. Inductivamente, tenemos

$$\begin{aligned}\varphi(D) &= \varphi(D/\{x, y\}) + \varphi(\{x, y\}) = \varphi(D') + \varphi(S^0) \\ &= \varphi(S^0)(\#D' - 1) + \varphi(S^0) = \varphi(S^0)\#D' \\ &= \varphi(S^0)(\#D - 1).\end{aligned}$$

(ii) Basta probar que $X/A \equiv B$. En tal caso, tendremos en efecto $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Consideramos la función $f : B \rightarrow X/A$ definida como la composición entre la inclusión $B \hookrightarrow X$ y la proyección $q : X \rightarrow X/A$. Como B es compacto pues es un CW-complejo finito y X/A es Hausdorff ya que es CW-complejo, resta ver que f es biyectiva. Sea $p \in X$ el punto de pegado entre A y B . Es decir, $A \cap B = \{p\}$. Ahora,

- La función f es inyectiva: sean $x, y \in B$ con $[x] = f(x) = f(y) = [y]$. Por definición de X/A , o bien $x = y$ o bien $x, y \in A$. Esto último implica $x, y \in A \cap B = \{p\}$. En cualquier caso, es $x = y$.
- La función f es sobreyectiva: sea $[x] \in A$ con $x \in X = A \vee B$. Si $x \in B$ es $[x] = f(x)$. De lo contrario, necesariamente es $x \in A \setminus \{p\}$. Pero entonces basta notar que como $p \in B$, es $f(p) = [p] = [x]$ pues $p, x \in A$.

(iii) Hacemos inducción en d . El caso base $d = 0$ es trivial. Si $d = 1$, construimos a S^1 como la adjunción de dos 1-celdas e_1^1 y e_1^2 a $S^0 = e_0^1 \sqcup e_0^2$. Luego $S^1/S^0 \equiv S^1 \vee S^1$ y $\varphi(S^1) = \varphi(S^1/S^0) + \varphi(S^0) \stackrel{(ii)}{=} 2\varphi(S^1) + \varphi(S^0)$. Restando, obtenemos $\varphi(S^1) = -\varphi(S^0)$. Cuando $d > 2$, usamos una idea similar: consideramos la estructura celular para S^d que consiste en adjuntar dos d -discos a S^{d-1} . Es decir, tenemos una cero celda e_0 , una $(d-1)$ -celda e_{d-1} que corresponde a pegar el borde de un $(d-1)$ -disco en e_0 , y dos d -celdas e_d^1 y e_d^2 que corresponden a pegar el borde cada d -disco en la $(d-1)$ -esfera sin identificar puntos del borde entre sí. Así, S^{d-1} resulta el "ecuador" de S^d y entonces, el cociente S^d/e_{d-1} es homeomorfo al wedge de dos d -esferas. Por lo tanto,

$$\varphi(S^d) = \varphi(S^d/e_{d-1}) + \varphi(e_{d-1}) = \varphi(S^d \vee S^d) + \varphi(S^{d-1}) \stackrel{(ii)}{=} 2\varphi(S^d) + \varphi(S^{d-1}),$$

lo que implica $\varphi(S^d) = -\varphi(S^{d-1}) = -(-1)^{d-1}\varphi(S^0) = (-1)^d\varphi(S^0)$.

(iv) Hacemos inducción en k . El caso base cuando $k = 1$ se verifica por (iii). Si ahora $k > 1$, fijamos $d \in \mathbb{N}_0$. Ahora, consideramos la siguiente estructura celular del wedge: tenemos una cero celda e_0 y k celdas de dimensión d , con funciones de adjunción $f_i : \mathbb{D}^k \xrightarrow{!} e_0$ para cada $i \in [k]$. Luego cada esfera es un subcomplejo y entonces usando (ii), (iii) y la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(\bigvee_{j=1}^k S^d) &= \varphi(S \vee \bigvee_{j=1}^{k-1} S^d) = \varphi(S^d) + \varphi(\bigvee_{j=1}^{k-1} S^d) \\ &= (-1)^d\varphi(S^0) + (k-1)(-1)^d\varphi(S^0) = k \cdot (-1)^d \cdot \varphi(S^0). \end{aligned}$$

□

Lema 2. Sea X un CW-complejo finito de dimensión d y sea $i < d$. Si X tiene c_i celdas de dimensión i , entonces $X^i/X^{i-1} \equiv \bigvee_{j \in [c_i]} S^i$.

Demostración. Sea $W := \bigvee_{j \in [c_i]} S^i$. Notemos que X^i/X^{i-1} es Hausdorff al ser un CW-complejo y W es compacto, así que basta con dar una función $W \rightarrow X^i/X^{i-1}$ continua y biyectiva. Consideramos primero la función $g : \bigsqcup_{j \in [c_i]} \mathbb{D}_j^i \rightarrow X^i/X^{i-1}$ dada por la composición entre la función de adjunción de las i -celdas $f := \bigsqcup_{j \in [c_i]} f_j$ y la proyección al cociente $q : X^i \rightarrow X^i/X^{i-1}$. Notemos que si x e y son puntos que pertenecen al borde de dos discos $\mathbb{D}_k^i, \mathbb{D}_l^i$, luego sus imágenes via f caen en el borde de dos i -celdas. En particular caen en el $(i-1)$ -esqueleto de X^i , así que al proyectar obtenemos que $g(x) = g(y)$. Esto dice que g pasa al cociente por la relación que identifica todos los bordes de los discos. Como $\mathbb{D}^i/\partial\mathbb{D}^i \equiv S^i$, luego $\bigsqcup_{j \in [c_i]} \mathbb{D}_j^i / \bigsqcup_{j \in [c_i]} \partial\mathbb{D}_j^i \equiv W$ y por lo tanto g induce una función continua $\hat{g} : W \rightarrow X^i/X^{i-1}$. Para terminar, veamos que es biyectiva:

- La función \hat{g} es inyectiva: sean $x' \neq y' \in W$ y $x, y \in \bigsqcup_{j \in \llbracket c_i \rrbracket} \mathbb{D}_j^i$ preimágenes de x' e y' respectivamente por la proyección a W . En particular no solo es $x \neq y$ si no que alguno de los puntos debe estar en el interior de algún disco, ya que todos los bordes se proyectan a un mismo punto de W . Suponemos sin pérdida de generalidad que $x \in \mathbb{D}_j^{i^0}, y \in \mathbb{D}_j^i$, con $j, j' \in \llbracket c_i \rrbracket$. Ahora, para ver que $[f(x)] = g(x) = \hat{g}(x') \neq \hat{g}(y') = g(y) = [f(y)]$ alcanza probar que $f(x)$ y $f(y)$ no están relacionados. Si $f(y) \in X^{i-1}$ luego $f(y) \not\sim f(x)$ pues $f(x) \notin X^{i-1}$. Caso contrario, es $y \in \mathbb{D}_j^{i^0}$ y entonces $f(x)$ y $f(y)$ pertenecen a interiores de celdas disjuntos. En consecuencia, tenemos $f(x) \neq f(y)$ y $f(x), f(y) \notin X^{i-1}$ así que en cualquier caso obtuvimos $f(x) \not\sim f(y)$.
- La función \hat{g} es sobreyectiva: sea $[z] \in X^i/X^{i-1}$. Si $z \in X^{i-1}$, tomamos $p \in W$ el punto de pegado de las esferas. Luego $\hat{g}(p) = g(x)$ para cierto $x \in \mathbb{D}_j^i$ con $j \in \llbracket c_i \rrbracket$. Por lo tanto, $f(x)$ está en el borde de una i -celda y entonces $f(x) \in X^{i-1}$. De esta forma, tenemos que $f(x) \sim z$ y entonces $\hat{g}(p) = g(x) = qf(x) = q(z) = [z]$. Si en cambio $z \in X^i \setminus X^{i-1}$, luego z está en el interior de una i -celda y es imagen de cierto punto $x \in \mathbb{D}_j^{i^0}$ con $j \in \llbracket c_i \rrbracket$. Si proyectamos x a W , su imagen por \hat{g} es $g(x) = qf(x) = q(z) = [z]$. En cualquier caso $[z]$ es imagen por \hat{g} de algún punto de W .

□

Observación 3. Como lo necesitaremos a continuación, recordamos el siguiente resultado visto en clase: sea $0 \rightarrow \cdots \xrightarrow{d_q} C_{q+1} \xrightarrow{d_{q+1}} C_q \xrightarrow{d_q} C_{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$ un complejo de cadenas de \mathbb{Z} -módulos finitamente generado. Entonces,

$$\sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} C_q = \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C$$

En efecto, para cada $q \in \mathbb{N}$ tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \rightarrow \operatorname{im} d_{q+1} \hookrightarrow \ker d_q \rightarrow \ker d_q / \operatorname{im} d_{q+1} = H_q C \rightarrow 0,$$

$$0 \rightarrow \ker d_q \hookrightarrow C_q \xrightarrow{d_q} \operatorname{im} d_q \rightarrow 0.$$

Por lo tanto, $\operatorname{rg} C_q = \operatorname{rg} \ker d_q + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q = (\operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} H_q C) + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q$. Entonces,

$$\begin{aligned} \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} C_q &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q (\operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} H_q C + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q) \\ &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \sum_{q \geq 0} (-1)^q (\operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q) \\ &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} \\ &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \sum_{q \geq 1} (-1)^{q+1} \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q + \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} \\ &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_0 = \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C \end{aligned}$$

como afirmamos.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que existe una única función φ que le asigna a cada CW-complejo finito un entero tal que

- (a) $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si X e Y son homeomorfos.
- (b) $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A)$ si A es subcomplejo de X .
- (c) $\varphi(S^0) = n$.

Probar además que una tal función debe cumplir que $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si $X \simeq Y$

Demostración. Probamos en primera instancia la unicidad, y luego la existencia. Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y supongamos que existe una tal función φ como en el enunciado. Ahora, sea X un CW-complejo finito de dimensión $d \in \mathbb{N}_0$. Por (b), obtenemos

$$\varphi(X) = \varphi(X^d) = \varphi(X^d/X^{d-1}) + \varphi(X^{d-1}) = \cdots = \sum_{i=1}^d \varphi(X^i/X^{i-1}) + \varphi(X^0).$$

Como por el Lema 2 es $X^i/X^{i-1} \cong \bigvee_{j \in \llbracket c_i \rrbracket} S^i$ con c_i la cantidad de i -celdas, luego usando (a) y los ítems (i) y (iv) del Lema 1 tenemos que

$$\begin{aligned} \varphi(X) &= \sum_{i=1}^d \varphi(\bigvee_{j \in \llbracket c_i \rrbracket} S^i) + \varphi(S^0) \cdot (\#X^0 - 1) = \sum_{i=1}^d c_i \varphi(S^i) + (c_0 - 1) \varphi(S^0) \\ &= \sum_{i=0}^d c_i \varphi(S^i) - \varphi(S^0) = \sum_{i=0}^d c_i (-1)^i \varphi(S^0) - \varphi(S^0) \\ &= \varphi(S^0) \sum_{i=0}^d (-1)^i c_i - \varphi(S^0). \end{aligned}$$

Observando que $c_i = \text{rg}(C_i X)$, es entonces

$$\varphi(X) = \varphi(S^0) \sum_{i=0}^d (-1)^i \text{rg}(C_i X) - \varphi(S^0) = \varphi(S^0) \chi(X) - \varphi(S^0) = \varphi(S^0) (\chi(X) - 1).$$

Esto prueba la unicidad, pues una tal función queda unívocamente determinada por su valor en la 0-esfera. Además, como la característica de Euler es un invariante homotópico, vemos que si $X \simeq Y$ luego $\varphi(X) = \varphi(S^0) (\chi(X) - 1) = \varphi(S^0) (\chi(Y) - 1) = \varphi(Y)$. Para terminar, veamos la existencia: dado $n \in \mathbb{Z}$, por lo anterior necesariamente debemos definir $\varphi(X) := n(\chi(X) - 1)$ para cada CW-complejo finito X . Observemos también que si una función ψ cumple las condiciones (a) y (b) y $m \in \mathbb{Z}$ es un entero, la función $m \cdot \psi$ sigue verificándolas. Por lo tanto, resta probar la afirmación para $n = 1$. Una vez más como χ es un invariante homotópico, en particular $\chi - 1$ verifica (a), y (c) es cierto pues $\chi(S^0) - 1 = 2 - 1 = 1$. Para terminar basta ver que si X es un CW-complejo finito y A un subcomplejo de X , entonces $\chi(X) - 1 = \chi(A) + \chi(X/A) - 2$. Es decir, debemos ver que $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X/A) - 1$. Siempre tenemos una sucesión exacta corta $0 \rightarrow S_\bullet A \rightarrow S_\bullet X \rightarrow S_\bullet(X, A) \rightarrow 0$ de complejos singulares, es decir tenemos una sucesión exacta

$$0 \rightarrow S_q A \rightarrow S_q X \rightarrow S_q(X, A) \rightarrow 0.$$

para cada $q \geq 0$ con los morfismos de inclusión y proyección canónicos, ya que por definición es $S_q(X, A) = S_q X / S_q A$. En particular sabemos que $\text{rg } S_q X = \text{rg } S_q A + \text{rg } S_q(X, A)$. Ahora usando la

Observación 3 se tiene que

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} S_i X = \sum_{i \geq 0} (-1)^i (\operatorname{rg} S_i A + \operatorname{rg} S_i(X, A)) \\ &= \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} S_i(X, A) = \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} H_i(X, A).\end{aligned}$$

Como (X, A) es un par bueno, como consecuencia de escisión tenemos que $H_i(X, A) = \tilde{H}_i(X/A)$ para todo $i \geq 0$. Observando que para cualquier espacio Y es $\tilde{H}_0(Y) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(Y)$, en particular $\operatorname{rg} H_0(X, A) = \operatorname{rg} \tilde{H}_0(X/A) = \operatorname{rg} H_0(X/A) - 1$ y entonces

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} H_i(X, A) \\ &= \chi(A) + \sum_{i \geq 0} (-1)^i \operatorname{rg} H_i(X/A) - 1 \\ &= \chi(X) + \chi(X/A) - 1,\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. \square

Lema 4. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $f, g : S^n \rightarrow S^n$ dos funciones continuas. Si $f(x) \neq -g(x)$ para todo $x \in S^n$, entonces f y g son homotópicas.

Demostración. Consideremos primero dos puntos $x, y \in S^n$ y $t \in [0, 1]$ tal que $tx + (1-t)y = 0$. Como

$$t = \|x\| = \|(t-1)y\| = |t-1| = 1-t,$$

necesariamente es $t = 1/2$. Reemplazando en la ecuación original obtenemos $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0$, y por un cálculo directo es $x = -y$.

Como para cada $x \in S^n$ tenemos que $f(x) \neq -g(x)$, el contrarrecíproco del argumento anterior asegura que $tf(x) + (1-t)g(x) \neq 0$ para cualquier $t \in [0, 1]$. En consecuencia, la función

$$\begin{aligned}H : S^n \times [0, 1] &\longrightarrow S^n \\ (x, t) &\mapsto \frac{tf(x) + (1-t)g(x)}{\|tf(x) + (1-t)g(x)\|}\end{aligned}$$

está bien definida y es continua. Como $H(x, 0) = f(x)$ y $H(x, 1) = g(x)$ para cada $x \in S^n$, concluimos que f y g son homotópicas. \square

Ejercicio 10. Probar que toda función continua $f : S^n \rightarrow S^n$ es homotópica a una que tiene algún punto fijo.

Demostración. Si f tiene algún punto fijo, no hay nada que decir. En caso contrario, es

$$f(x) \neq x = -(-x) = -A(x) \quad (\forall x \in S^n)$$

con $A : S^n \rightarrow S^n$ la antípoda de S^n . Por el **Lema 3**, debe ser $f \simeq A$. Por lo tanto, basta probar el resultado para $f = A$.

Para cada $t \in [0, 1]$, definimos

$$R_t := \begin{pmatrix} \cos(\pi t) & \sin(\pi t) & 0_{1,n} \\ -\sin(\pi t) & \cos(\pi t) & 0_{1,n} \\ 0_{n,1} & 0_{n,1} & -I_{n-2} \end{pmatrix}$$

con $I_{n-2} \in M_{n-2}(\mathbb{R})$ la matriz identidad y $0_{k,l} \in \mathbb{R}^{k \times l}$ la matriz cero. Ahora, la función definida por

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^{n+1} \times [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ (x, t) &\mapsto R_t \cdot x \end{aligned}$$

resulta continua, pues en cada coordenada es suma de productos de funciones continuas. Concretamente¹,

$$h(x_0, \dots, x_n, t) = (\cos(\pi t)x_0 + \sin(\pi t)x_1, \cos(\pi t)x_0 - \sin(\pi t)x_1, -x_2, \dots, -x_n). \quad (1)$$

Dado $t \in [0, 1]$, la matriz R_t es diagonal por bloques con cada bloque ortogonal: esto dice que R_t es ortogonal. En particular, si $x \in \mathbb{R}^{n+1}$ es unitario entonces $R_t \cdot x$ resulta unitario. Podemos considerar entonces la (co)restricción

$$\begin{aligned} H : S^n \times I &\rightarrow S^n \\ (x, t) &\mapsto h(t, x) \end{aligned}$$

que sigue siendo continua. Por (1) sabemos que

$$H(x, 0) = (x_0, x_1, -x_2, \dots, -x_n)$$

y

$$H(x, 1) = (-x_0, -x_1, -x_2, \dots, -x_n) = A(x),$$

así que $g := H(-, 0)$ y A son homotópicas. Para terminar, observemos que como

$$g(1, 0, 0, \dots, 0) = (1, 0, -0, \dots, -0) = (1, 0, 0, \dots, 0),$$

la función g tiene puntos fijos. □

¹En esta expresión y las siguientes asumimos que $n \geq 2$. Para el caso donde $n = 1$, las expresiones son análogas ignorando las coordenadas siguientes. Por ejemplo, $h(x_0, x_1, t) = (\cos(\pi t)x_0 + \sin(\pi t)x_1, \cos(\pi t)x_0 - \sin(\pi t)x_1)$