

Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Práctica 1

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí resolver los ejercicios (3), (), y (). Por completitud, incluyo el ejercicio (4) al comienzo ya que lo utilizaré en la resolución de (3). Con la intención de aumentar la legibilidad de las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Lema 1. Sea K un complejo simplicial y $v \in V_K$. Entonces $\text{st}(v)^0 \cap V_K = \{v\}$

Demostración. Si $v \in V_K$, luego $\{v\} \ni v$ es un símplex y $\{v\}^0 = \{v\}$ así que $v \in \text{st}(v)^0$. Recíprocamente si $w \in \text{st}(v)^0 \cap V_K$, existe $\sigma \ni v$ con $w \in \sigma^0 \subset \sigma$. Por lo tanto, al w ser un vértice $\{w\}$ debe ser una cara de σ . Por otro lado, como $\{w\} \subset \sigma^0$ y éste último es justamente quitar las caras propias de σ , necesariamente $\{w\} = \sigma$. Como $\sigma \ni v$ y el único tal símplex de dimensión 0 es $\sigma = \{v\}$, luego $w = v$. \square

Lema 2. Sea K un complejo simplicial y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ símplexes de K . Si $\bigcap_{i=1}^k \sigma_i^0 \neq \emptyset$, entonces $\sigma_1 = \dots = \sigma_k$.

Demostración. Hacemos inducción en k . Tomamos el caso base $k = 2$, pues de ser $k = 1$ esto es claro. Por el absurdo, sean $\sigma \neq \tau \in K$ tales que $\sigma^0 \cap \tau^0 \neq \emptyset$. Luego $\sigma \cap \tau \supset \sigma^0 \cap \tau^0 \neq \emptyset$ y es así que $\sigma \cap \tau < \sigma, \tau$, pues al ser los símplexes distintos la intersección es una cara propia. Por definición de σ^0 es $\sigma \cap \tau \subset (\sigma^0)^c$, y pasando al complemento la contención $\sigma^0 \cap \tau^0 \subset \sigma^0$ obtenemos $\sigma^0 \cap \tau^0 \subset \sigma \cap \tau \subset (\sigma^0)^c \subset (\sigma^0 \cap \tau^0)^c$, lo que es una contradicción. Ahora, supongamos que el resultado es válido para $2 \leq k-1$. Como $\bigcap_{i=1}^k \sigma_i^0 \neq \emptyset$, en particular sabemos que $\bigcap_{i=1}^{k-1} \sigma_i^0 \neq \emptyset$. Por inducción, $\sigma_1 = \sigma_j$ si $j \in \llbracket k-1 \rrbracket$. Podemos ahora reescribir la intersección inicial como $\sigma_1^0 \cap \sigma_k^0 \neq \emptyset$, y usando el paso inicial vemos por último que $\sigma_1 = \sigma_k$. \square

Ejercicio 4. Sea K un complejo simplicial y $\mathcal{U} = \{\text{st}(v)^0, v \in V_K\}$ el cubrimiento por stars abiertos de los vértices. Probar que $N(\mathcal{U})$ es isomorfo a K .

Demostración. Consideremos la función entre vértices dada por

$$\begin{aligned} \iota : V_K &\rightarrow N(\mathcal{U}) \\ v &\mapsto \text{st}(v)^0 \end{aligned}$$

Observemos que ι es un morfismo simplicial: sea $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ y veamos que $\{\iota(v_0), \dots, \iota(v_n)\} = \{st(v_0)^o, \dots, st(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$. Como $\sigma \ni v_i$ para cada $i \in \llbracket n \rrbracket_0$, en cada caso es $\sigma^o \subset st(v_i)^o$ y por lo tanto,

$$\sigma^o \subset \bigcap_{i=0}^n st(v_i)^o \neq \emptyset.$$

Esto último dice que, en efecto, $\{st(v_0)^o, \dots, st(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$. Afirmamos ahora que ι es biyectiva: la suryectividad se deduce de que los vértices del nervio son precisamente los stars abiertos de algún $v \in K$, así que alcanza con mostrar la inyectividad. En efecto, si $v, w \in K$ son tales que $st(v)^o = st(w)^o$, por el [Lema 1](#) luego $\{v\} = st(v)^o \cap V_K = st(w)^o \cap V_K = \{w\}$. Tenemos entonces la inversa de ι ,

$$j : st(v)^o \in N(\mathcal{U}) \mapsto v \in K.$$

Veamos que j también es simplicial: sea $\sigma = \{st(v_0)^o, \dots, st(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$ un simplex. Por definición es $\bigcap_{i=0}^n st(v_i)^o \neq \emptyset$. En particular, tenemos un punto $x \in st(v_i)^o$ para cada $i \in \llbracket n \rrbracket_0$ y entonces existen simplices $\sigma_i \ni v_i$ con $x \in \sigma_i$ de forma que $\bigcap_{i=0}^n \sigma_i^o \ni x$. Luego como esta última intersección es no vacía, el [Lema 2](#) nos asegura que $\sigma := \sigma_0 = \dots = \sigma_n$. Como para cada $i \in \llbracket n \rrbracket_0$ es $v_i \in \sigma_i = \sigma$, luego $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \sigma$. Como K es un complejo simplicial y cada v_i es un vértice, necesariamente éstos forman una cara de σ que en particular es un simplex:

$$\{j(st(v_0)^o), \dots, j(st(v_n)^o)\} = \{v_0, \dots, v_n\} \in K.$$

Habiendo visto que tanto ι como j son simpliciales y tanto $j\iota = 1_K$ como $\iota j = 1_{N(\mathcal{U})}$, concluimos entonces que en efecto K y $N(\mathcal{U})$ son isomorfos. \square

Lema 3. Sea K un complejo simplicial finito, de forma que su realización geométrica resulta un espacio métrico. Sean ahora $v \in K$ y $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in K$. Entonces,

- a) $\text{diam}(|\sigma|) \leq \max_{0 \leq i, j \leq k} d(v_i, v_j)$
- b) $\text{diam}(st(v)^o) \leq 2 \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|)$
- c) Existe $0 < \eta < 1$ que sólo depende de la dimensión de K tal que

$$\max_{\sigma \in K'} \text{diam}(|\sigma|) \leq \eta \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).$$

- d) Si definimos $\Gamma_n := \max_{v \in K(n)} \text{diam}(st(v)^o)$, entonces $\Gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado,

a) Sean $x = \sum_{i=0}^k t_i v_i$, $y = \sum_{j=0}^k s_j v_j \in |\sigma|$ combinaciones convexas de los vértices de σ . Luego,

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \left\| \sum_{i=0}^k t_i v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \left\| \sum_{i=0}^k t_i v_i - \sum_{i=0}^k \overbrace{t_i}^{=1} \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \left\| \sum_{i=0}^k t_i \left(v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=0}^k t_i \left\| v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \sum_{i=0}^k t_i \left\| \sum_{j=0}^k \overbrace{s_j}^{=1} v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \sum_{i=0}^k t_i \left\| \sum_{j=0}^k s_j (v_i - v_j) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=0}^k t_i \sum_{j=0}^k s_j \|v_i - v_j\| \leq \sum_{i=0}^k t_i \sum_{j=0}^k s_j \max_{0 \leq r, s \leq k} d(v_r, v_s) \\
 &= \max_{0 \leq r, s \leq k} d(v_r, v_s) \sum_{i=0}^k t_i \sum_{j=0}^k s_j = \max_{0 \leq r, s \leq k} d(v_r, v_s).
 \end{aligned}$$

b) Sean $x, y \in \text{st}(v)^\circ$. Luego existen $\sigma_1, \sigma_2 \ni v$ tales que $x \in \sigma_1^\circ \subset \sigma_1$ e $y \in \sigma_2^\circ \subset \sigma_2$. Por lo tanto,

$$d(x, y) \leq d(x, v) + d(v, y) \leq \text{diam}(\sigma_1) + \text{diam}(\sigma_2) \leq 2 \max_{\sigma \in K} \text{diam}(\sigma).$$

c) Sea $\tilde{\sigma} = \{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_k\} \in K'$. Por definición de la subdivisión baricéntrica, sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para cada $i \in \llbracket k-1 \rrbracket_0$ y si $0 \leq i < j \leq k$, entonces $\sigma_i = \{v_1, \dots, v_r\}$ y $\sigma_j = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$. Ahora, notemos que si $v_k \in \sigma_i$ luego es $0 \leq k \leq r+s$ y entonces

$$\begin{aligned}
 \|v_k - \hat{\sigma}_j\| &= \left\| v_k - \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0}^{r+s} v_l \right\| = \left\| \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0}^{r+s} (v_k - v_l) \right\| \\
 &= \left\| \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0, l \neq k}^{r+s} (v_k - v_l) \right\| \leq \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0, l \neq k}^{r+s} \|v_k - v_l\| \\
 &\leq \frac{r+s}{1+r+s} \text{diam}(\sigma_j) \leq \frac{r+s}{1+r+s} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|),
 \end{aligned}$$

ya que el k -ésimo término de la sumatoria resulta $0 = v_k - v_k$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 d(\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_i) &= \left\| \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r v_i - \hat{\sigma}_j \right\| = \left\| \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r (v_i - \hat{\sigma}_j) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r \|v_i - \hat{\sigma}_j\| \leq \frac{r+s}{1+r+s} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).
 \end{aligned}$$

Ahora, como K tiene dimensión n , necesariamente es $r+s \leq n$, y luego $\frac{r+s}{1+r+s} \leq \frac{n}{1+n} < 1$. Por lo tanto, dado cualquier símplex $\tilde{\sigma}$ es

$$\text{diam}(\tilde{\sigma}) \leq \max_{0 \leq i, j \leq k} d(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j) \leq \frac{n}{1+n} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).$$

Tomando máximo en $\tilde{\sigma}$, vemos que alcanza con tomar $\eta = \frac{n}{1+n} \in (0, 1)$ y que este último depende únicamente de $\dim K$.

- d) Como para todo $n > 1$ sabemos que $\dim K^{(n)} = \dim K^{(n-1)}$, luego existe $0 < \eta < 1$ por el ítem (c) tal que

$$0 \leq \max_{\sigma \in K^{(n)}} \text{diam}(|\sigma|) \leq \eta \max_{\sigma \in K^{(n-1)}} \text{diam}(|\sigma|) \leq \dots \leq \eta^n \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).$$

Finalmente usando (b), obtenemos:

$$0 \leq \Gamma_n \leq 2 \max_{\sigma \in K^{(n)}} \text{diam}(|\sigma|) \leq 2\eta^n \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|) \rightarrow 0.$$

□

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X . El nervio de \mathcal{U} es el complejo simplicial $N(\mathcal{U})$ cuyos vértices son los abiertos del cubrimiento y los símlices son los subconjuntos finitos no vacíos de \mathcal{U} , $s = \{U_{i_0}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$. Notar que efectivamente $N(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial. Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \not\leq n-1$. Probar que:

- Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.
- Los espacios discretos tienen dimensión 0.
- El intervalo I tiene dimensión 1.
- Si K complejo simplicial finito y $\dim K = n$ entonces $\dim |K| \leq n$. (En realidad vale la igualdad, se verá más adelante).

Demostración. Probamos cada inciso por separado.

- a) Sea $A \subseteq X$ cerrado, $n := \dim X$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A . Existe entonces para cada $i \in I$ un abierto V_i de X tal que $U_i = V_i \cap A$, y es entonces que la colección $\mathcal{O} = \{V_i\}_{i \in I} \cup \{A^c\}$ cubre X por abiertos, ya que A es cerrado. Por hipótesis, tenemos entonces un refinamiento $\tilde{\mathcal{O}} = \{O_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{O} tal que $N(\tilde{\mathcal{O}})$ es un complejo simplicial de dimensión menor o igual que n . Afirmamos ahora que $\tilde{\mathcal{U}} = \{O_j \cap A\}_{j \in J}$ es refinamiento de \mathcal{U} : tenemos que

$$\bigcup_{j \in J} O_j \cap A = A \cap \bigcup_{j \in J} O_j = A \cap X = A,$$

y dado $j \in J$ luego $O_j \cap A$ es abierto en A pues O_j es abierto en X . Por último, si $O_j \cap A \neq \emptyset$ luego $O_j \not\subseteq A^c$ y existe $i_j \in I$ con $O_j \subset V_{i_j}$ y entonces $O_j \cap A \subset V_{i_j} \cap A = U_{i_j} \in \mathcal{U}$. En cualquier caso, $O_j \cap A$ es subconjunto de algún elemento de \mathcal{U} . Para terminar, veamos que $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$. Sea $\sigma = \{O_{j_0} \cap A, \dots, O_{j_k} \cap A\}$ un símplex del nervio de $\tilde{\mathcal{U}}$. Luego,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^k A \cap O_{j_i} \subset \bigcap_{i=0}^k O_{j_i}$$

y entonces $\{O_{j_0}, \dots, O_{j_k}\}$ es un simplex de $N(\tilde{\mathcal{O}})$. Como este último tiene dimensión a lo sumo n , es

$$\dim \sigma = k \leq \dim N(\tilde{\mathcal{O}}) \leq n$$

y en consecuencia, $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$.

- b) Sea $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ discreto y \mathcal{U} un cubrimiento de X por abiertos. Afirmamos que el conjunto $\mathcal{O} := \{\{x\} : x \in X\}$ es un refinamiento de \mathcal{U} . Los elementos de \mathcal{O} son abiertos pues X es discreto. Por otro lado si $\{x\} \in \mathcal{O}$, entonces como \mathcal{U} es cubrimiento de X existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Equivalentemente es $\{x\} \subset U$, y así probamos que el primero es subconjunto de algún abierto de \mathcal{U} . Basta entonces probar que el nervio de \mathcal{O} es de dimensión 0. Como los simplices de $N(\mathcal{O})$ consisten de abiertos de \mathcal{O} cuya intersección sea no vacía, alcanza con ver que cualesquiera dos abiertos de \mathcal{O} son disjuntos. Esto es claro: si $\{x\} \neq \{y\} \in \mathcal{O}$, entonces $x \neq y$ y $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.
- c) Veamos en primer lugar que $\dim I \not\leq 0$. Sea $\mathcal{U} = \{[0, \frac{2}{3}], (\frac{1}{3}, 0]\}$ cubrimiento de I . Cualquier refinamiento de \mathcal{U} tiene entonces al menos 2 elementos. Si I tuviese dimensión cero, existiría un refinamiento \mathcal{O} de \mathcal{U} cuyo nervio es de dimensión cero. Esto diría que los abiertos de \mathcal{O} son disjuntos y por conexión concluiríamos entonces que $1 = \#\mathcal{O} \geq 2$, lo que es absurdo.

Probemos ahora que $\dim I \leq 1$. Notemos que esto es una conclusión inmediata del siguiente ítem pues I es la realización geométrica de un complejo simplicial de dimensión 1. Además, el ítem (d) no utiliza este ítem y por lo tanto no hay peligro de un argumento circular. De todas maneras, a continuación proponemos otro argumento que sólo utiliza la caracterización de los abiertos de \mathbb{R} .

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de I . Como los abiertos de \mathbb{R} son unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos, luego para cada $i \in I$ existen conjuntos $J_i \subset \mathbb{N}$ e intervalos $\{I_j^i\}_{j \in J_i}$ abiertos (en I) y disjuntos tales que $U_i = \bigsqcup_{j \in J_i} I_j^i$. Por compacidad tenemos luego intervalos $I_1, \dots, I_n \in \{I_j^i\}_{i \in I, j \in J_i}$ tales que $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$ y, por construcción, cada intervalo es subconjunto de algún abierto U_i . Obtuvimos así un refinamiento $\mathcal{O}_0 = \{I_1, \dots, I_n\}$ de \mathcal{U} . Construimos a continuación un refinamiento \mathcal{O} de \mathcal{U} de la siguiente forma: tomamos primero los intervalos de \mathcal{O}_0 . A los que no sean abiertos (como intervalos) les quitamos los extremos: estos seguirán siendo abiertos en I , pues sólo pueden provenir de alguno de la forma $[0, 1]$, $(a, 1]$ o $[0, b)$. Luego, dados $J_0, J_1 \in \mathcal{O}_0$ con $s \in J_s$ para $s \in \{0, 1\}$, agregamos entornos $E_0 := [0, \varepsilon)$, $E_1 := (1 - \varepsilon, 1]$ a \mathcal{O} con $0 < \varepsilon \ll 1$ tal que estos sean disjuntos y estén contenidos en J_0 y J_1 respectivamente. Esto garantiza que \mathcal{O} cubre a I ya que volvemos a cubrir sus extremos. Finalmente, de existir algún intervalo que esté contenido en la unión de otros, seleccionamos alguno de ellos y lo quitamos. Repetimos el proceso hasta que no haya más intervalos de este tipo, lo cual es posible pues hay finitos intervalos en total. Como removemos intervalos de uno, \mathcal{O} sigue siendo refinamiento pues sigue cubriendo a I .

Afirmamos ahora que $N(\mathcal{O})$ es de dimensión a lo sumo 1, o equivalentemente, que no hay tres intervalos de \mathcal{O} cuya intersección sea no vacía. Supongamos que sí y sean $\{J_i\}_{1 \leq i \leq 3} \subset \mathcal{O}$ de intersección no vacía y tales que el interior de J_i en \mathbb{R} es $(a_i, b_i)^1$. Como los intervalos no se contienen entre sí, existen dos de ellos distintos con el menor extremo izquierdo y mayor extremo derecho, que suponemos son J_1 y J_3 respectivamente. Así, $J_1 \cap J_3 = (a_3, b_1)$. Como

¹Esto evita tratar por separado la posible elección de E_0 o E_1 , ya que al ser los únicos dos intervalos semiabiertos, el argumento que sigue funciona aún si $a_1 \in J_1$ o $b_3 \in J_3$. Siempre tenemos que tanto J_2 como $J_1 \cap J_3$ son intervalos abiertos, y no hace falta que las desigualdades entre a_1 y a_2 o b_2 y b_3 sean estrictas.

$J_2 \not\subseteq J_1$ debe ser $b_2 > b_1$, y similarmente como $J_2 \not\subseteq J_3$ tenemos que $a_2 < a_3$. Si ahora $s \in J_2$, entonces $a_1 \leq a_2 < s < b_2 \leq b_3$. Si $s \notin J_1$, luego $s > b_1 > a_3$ y consecuentemente $s \in J_3$. En cualquier caso, $s \in J_1 \cup J_3$. Esto implica que $J_2 \subset J_1 \cap J_3$, lo que es absurdo: no hay entonces tres intervalos cuya intersección sea no vacía. Dado un cubrimiento arbitrario encontramos un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo 1, lo que completa la demostración.

- d) Sea K un complejo simplicial de dimensión n y \mathcal{U} un cubrimiento por abiertos de K . Como K es finito, es compacto, y por lo tanto existe un número de Lebesgue $\mu > 0$ para el cubrimiento. Por el [Lema 3](#), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que la m -ésima subdivisión baricéntrica $K^{(m)}$ de K verifica $\text{diam}(\text{st}(v)^o) < \mu$ para cada $v \in K^{(m)}$. Como éstos cubren a $|K^{(m)}| = |K|$ por abiertos y tienen diámetro menor a μ , cada star abierto está contenido en algún abierto de \mathcal{U} . Es decir, $\mathcal{S} = \{\text{st}(v)^o\}_{v \in K^{(m)}}$ refina a \mathcal{U} . Por otro lado, el ejercicio [\(4\)](#) asegura que $N(\mathcal{S}) \simeq K^{(m)}$ como complejos simpliciales y en particular, $\dim N(\mathcal{S}) = \dim K^{(m)} = \dim K = n$. Esto prueba que todo cubrimiento de K tiene un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo n , lo que completa la demostración.

□