Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 6 y 7

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio **(6)** de la práctica seis y el ejercicio **(6)** de la práctica siete.

Ejercicio 6. Probar que los $\mathbb{R}$-espacios vectoriales con producto interno son unicamente geodésicos.

Demostración. Sea V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial con producto interno. Como para cada $q \in V$ la traslación $x \in V \mapsto (x-q) \in V$ es una isometría, basta ver que para todo $p \in V$ no nulo existe una única geodésica que une 0 con p.

Más aún, si γ es una tal geodésica, entonces $\tilde{\gamma} : t \in I \mapsto \|p\|^{-1} \cdot \gamma(\|p\|t) \in V$ es una geodésica que une a 0 con $p/\|p\|$, y además la asignación $\gamma \mapsto \tilde{\gamma}$ es biyectiva. Por lo tanto, alcanza mostrar que para cada vector unitario $v \in V$ existe una única geodésica que une 0 con v.

Fijamos entonces $v \in V$ unitario. Para la existencia, basta notar que la curva $\ell : t \in I \mapsto t \cdot v \in V$ es geodésica. Sea ahora $\delta : I \to V$ una geodésica que une 0 con v. Notemos en primer lugar que para todo $t \in I$ es

$$\|\delta(t)\| = \|\delta(t) - 0\| = \|\delta(t) - \delta(0)\| = |t - 0| = |t| = t.$$

Por un cálculo directo, se tiene que

$$\begin{aligned}
\langle \delta(s), \delta(t) \rangle &= -\frac{1}{2}\left(\|\delta(s) - \delta(t)\|^2 - \|\delta(t)\|^2 - \|\delta(s)\|^2\right) \\
&= -\frac{1}{2}(|s-t|^2 - t^2 - s^2) \\
&= st = \|\delta(s)\| \cdot \|\delta(t)\|,
\end{aligned}$$

y la desigualdad de Cauchy-Schwartz implica que $\delta(s)$ y $\delta(t)$ son linealmente dependientes para todo $t, s \in I$. Existe entonces $\lambda(t) \in \mathbb{R}$ tal que $\delta(t) = \lambda(t)\delta(1) = \lambda(t)v$, para todo $t \in I$.

Sabemos además que λ es continua pues es

$$|\lambda(s) - \lambda(t)| = \|\delta(s) - \delta(t)\| = |s - t|,$$

y como su módulo $|\lambda| \equiv \|\delta\|$ solo se anula en cero, debe mantener su signo. Finalmente, como ya sabemos que $\lambda(1) = 1$, necesariamente es $\lambda \equiv |\lambda| \equiv \mathrm{id}$ y por tanto $\delta \equiv \ell$. ▲

Lema 1. Sea Γ un grupo finitamente generado y $X \subset \Gamma$ un conjunto infinito. Dado un conjunto de generadores $S = \{s_1, \ldots, s_k\}$, existe una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1} \subset X$ tal que $\ell_S(x_n) \to \infty$.

Demostración. Notemos que para cada $l \in \mathbb{N}$, el conjunto $X_l := \{x \in X : \ell_S(x) = l\}$ es finito. En efecto, si $x \in \Gamma$ satisface $\ell_S(x) = l$, entonces existen $s_{i_1}, \ldots, s_{i_l} \in S$ tal que $x = s_{i_1} \cdots s_{i_l}$, y el conjunto $\{s_{j_1} \cdots s_{j_l} : s_{j_m} \in S\} \ni x$ es finito dado que S lo es.

Como X es infinito y se tiene que

$$X = \bigsqcup_{l\geq 0} X_l,$$

no puede haber finitos conjuntos X_l no vacíos. Por lo tanto, podemos tomar una sucesión creciente $(l_n)_{n\geq 1}$ tal que X_{l_n} sea no vacío para cada $n \in \mathbb{N}$. Tomando $x_n \in X_{l_n}$ en cada caso, obtenemos una sucesión que satisface

$$\ell_S(x_n) = l_n \to \infty.$$

▲

Lema 2. Sean G y $H \leq G$ grupos finitamente generados. Si H tiene índice finito, entonces $H \overset{qi}{\sim} G$.

Demostración. Por transitividad y en vista del lema de Švarc–Milnor, basta probar que H actúa geométricamente en $C_S(G)$. Consideremos, para algún conjunto finito S de generadores, la acción $H \curvearrowright C_S(G)$ dada por la extensión de la translación a izquierda como acción en G. Concretamente, para cada $h \in H$ consideramos la biyección ϕ_h en $C_S(G)$ inducida por los homeomorfismos de los segmentos $[g, g'] \equiv [0, 1] \equiv [hg, hg']$ para cada g, g' adyacentes en $C_S(G)$.

Cada función ϕ_h es una isometría (co)restringiéndola a cada par de aristas $[g, g']$ y $[hg, hg']$, y a su vez es una isometría entre los vértices del grafo pues d_S es invariante a izquierda. Vemos así que ϕ_h resulta una isometría para cada $h \in H$ y por lo tanto H actúa en $C_S(G)$ por isometrías.

Por otro lado, dado que H tiene indice finito[1], existe un conjunto finito $R = \{g_1, \ldots, g_n\} \subset G$ de representantes de $H\backslash G$. Esto implica que la acción es cocompacta: si $[g, gs]$ es un arista de $C_S(G)$ con $g \in G$ y $s \in S$, existe $i \in [\![n]\!]$ y $h \in H$ tal que $g = hg_i$ y entonces es

$$[g, gs] = [hg_i, hg_is] = \phi_h([g_i, g_is]).$$

Esto muestra que se tiene $C_S(G) = H \cdot K$ con $K := \bigcup_{s\in S, i\in[\![n]\!]} [g_i, g_is]$. Al S ser finito y cada arista compacta, obtenemos que K es compacto.

Para terminar, veamos que la acción es propia. Fijemos $x \in C_S(G)$ y separemos en casos. Si x es un vértice de G, entonces podemos tomar $r > 0$ de forma que

$$B_r(x) \subset \bigcup_{s\in S} [x, xs]$$

y luego es

$$h \cdot B_r(x) \cap B_r(x) \subset \bigcup_{s,t\in S} [x, xs] \cap [hx, hxt].$$

[1] Aquí uso que la cantidad de *cosets* a derecha e izquierda es la misma (pues la aplicación $gH \in G/H \mapsto Hg^{-1} \in H\backslash G$ es biyectiva).

Para que la intersección sea no vacía, en particular tienen que existir $t, s \in S$ tales que $[x, xs] \cap [hx, hxt] \neq \emptyset$. Esto quiere decir que tiene que haber dos tales aristas que compartan por lo menos un extremo, lo que impone que se satisfaga

$$h \in \{1, xt^{-1}x^{-1}, xsx^{-1}, xst^{-1}x^{-1}\}.$$

Si en cambio es $x \in [g, gs] \setminus \{g, gs\}$ para cierto $g \in G$ y $s \in S$, entonces tomamos $r > 0$ tal que $x \in B_r(x) \subset [g, gs] \setminus \{g, gs\}$. De forma similar vemos que $h \cdot B_r(x) \cap B_r(x) \neq \emptyset$ implica $[g, gs] = [hg, hgs]$, por lo que debe ser $h \in \{1, gsg^{-1}, gs^{-1}g^{-1}\}$. Como S es finito, en cualquier caso encontramos $r > 0$ tal que

$$|\{h \in H : h \cdot B_r(x) \cap B_r(x) \neq \emptyset\}| < +\infty,$$

lo que termina de mostrar que la acción es propia. ▲

Ejercicio 6. Sea $\varphi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$ morfismo entre grupos finitamente generados. Probar que:

a) Si φ es un embedding quasi-isométrico, entonces $\ker \varphi$ es finito.

b) El morfismo φ es una quasi-isometría si y sólo si $\ker \varphi$ y $\operatorname{coker} \varphi$ son finitos.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado. De todas formas, fijamos de antemano conjuntos finitos de generadores A y B de Γ_1 y Γ_2 respectivamente.

a) Como φ es un embedding quasi-isométrico, existen $\lambda \geq 1$ y $\varepsilon \geq 0$ tales que

$$-\varepsilon + \frac{1}{\lambda} d_A(x, y) \leq d_B(\varphi(x), \varphi(y)) \leq \lambda d_A(x, y) + \varepsilon \quad (\forall x, y \in \Gamma_1).$$

Como $d_A(x, y) = \ell_A(x^{-1}y)$ y $d_B(\varphi(x), \varphi(y)) = \ell_B(\varphi(x^{-1}y))$, equivalentemente es

$$-\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\ell_A(x) \leq \ell_B(\varphi(x)) \leq \lambda \ell_A(x) + \varepsilon. \tag{1}$$

para cada $x \in \Gamma_1$.

Si $\ker \varphi$ fuera infinito, entonces por el Lema 1 existiría una sucesión $\{x_n\}_{n \geq 1} \subset \ker \varphi$ tal que $\ell_A(x_n) \to \infty$. Sin embargo esto supone una contradicción, pues como $\varphi(x_n) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de (1) tenemos que

$$\ell_A(x_n) \leq \lambda\varepsilon. \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

Por lo tanto, necesariamente $\ker \varphi$ debe ser finito.

b) Veamos ambas implicaciones.

($\Rightarrow$) En vista del punto (a), resta probar que $\operatorname{coker} \varphi$ es finito. Como φ es quasi-densa, existe $K \in \mathbb{R}$ tal que $d(y, \operatorname{im} \varphi) \leq K$ para todo $y \in \Gamma_2$.

Por lo tanto, dado $y \in \Gamma_2$ sabemos que hay cierto $x \in \Gamma_1$ que satisface

$$d_B(y, \varphi(x)) = \ell_B(y^{-1}\varphi(x)) \leq K,$$

y existe entonces $s \in \Gamma_2$ tal que $y^{-1}s^{-1} = \varphi(x) \in \operatorname{im} \varphi$ y $\ell_B(s^{-1}) = \ell_B(s) \leq K$. Como esto dice que $[s^{-1}] = [y]$ en $\operatorname{coker} \varphi$, el argumento anterior muestra que

$$L := \{s \in \Gamma_2 : \ell(s) \leq K\}$$

contiene un sistema de representantes para $\operatorname{coker} \varphi$.

Dado que los elementos de L están acotados en longitud, por el Lema 1 este no puede ser infinito, y por tanto $\operatorname{coker} \varphi$ es finito.

($\Leftarrow$) En vista del **Lema 2**, podemos suponer que φ es un epimorfismo (ya que coker φ es finito). En particular, tomamos $B = \varphi(A)$ como conjunto de generadores de Γ_2.

Sea ahora $\{y_1, \ldots, y_n\}$ un sistema de representantes de coker φ. Dado $y \in \Gamma_2$, sabemos entonces que existe $i \in [\![k]\!]$ tal que $yy_i^{-1} \in \operatorname{im} \varphi$. En consecuencia, es

$$d_B(y, \varphi(\Gamma_1)) \leq d_B(y, yy_i^{-1}) = \ell_B(y_i) \leq K$$

lo que muestra que φ es quasi-densa.

Para terminar, veamos que φ es un embedding quasi-isométrico: alcanza ver que se satisface la desigualdad **(1)**. Dado $x \in \Gamma_1$ con $\ell_B(\varphi(x)) = L$, existen generadores $s_1, \ldots, s_L \in B$ tales que $\varphi(x) = s_1 \cdots s_L$. Tenemos entonces elementos $a_1, \ldots, a_L$ en A tales que $\varphi(a_i) = s_i$ para cada $i \in [\![L]\!]$ y de esta forma es

$$\varphi(x \cdot a_L^{-1} \cdots a_1^{-1}) = 1.$$

Notando $k := x \cdot a_L^{-1} \cdots a_1^{-1} \in \ker \varphi$, se tiene que

$$\begin{aligned} \ell_A(x) = \ell_A(k \cdot x_1 \cdots x_L) &\leq \max_{k \in \ker \varphi} \ell_A(k) + L \cdot \max_{a \in A} \ell_A(a) \\ &= \max_{k \in \ker \varphi} \ell_A(k) + \ell_B(\varphi(x)) \cdot \max_{a \in A} \ell_A(a). \end{aligned}$$

Observemos además que tanto $\kappa := \max_{k \in \ker \varphi} \ell_A(k)$ como $\xi := \max_{a \in A} \ell_A(a)$ son finitos pues $\ker \varphi$ y X lo son.

Reescribiendo, la anterior desigualdad nos dice entonces que para todo $x \in \Gamma_1$ obtenemos

$$-\xi \cdot \kappa^{-1} + \kappa^{-1} \ell_A(x) \leq \ell_B(x),$$

y (como $B = \varphi(A)$) por otro lado es

$$\ell_B(\varphi(x)) \leq \ell_A(x) \leq \kappa \ell_A(x) + \xi \cdot \kappa^{-1}.$$

▲