Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 2 y 3

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Lema 1. Sea φ una función de los CW-complejos finitos a los enteros que cumple las hipótesis del ejercicio 8. Entonces,

(i) Si D es un CW-complejo finito de dimensión 0, entonces $\varphi(D) = \varphi(\mathbb{S}^0) \cdot (\#D - 1)$.

(ii) Si X es un CW-complejo finito y $A, B \subset X$ son subcomplejos de X tales que $X = A \vee B$, entonces $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(B)$.

(iii) Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ tenemos que $\varphi(\mathbb{S}^d) = (-1)^d \cdot \varphi(\mathbb{S}^0)$.

(iv) Para cada $d \in \mathbb{N}_0$ y $k \in \mathbb{N}$, es $\varphi(\vee_{j=1}^k \mathbb{S}^d) = k \cdot (-1)^d \cdot \varphi(\mathbb{S}^0)$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado.

(i) Hacemos inducción en el tamaño de D. Sea $e_0^1 \sqcup e_0^2$ una estructura celular para $\mathbb{S}^0$. Si $\#D = 1$, luego $D \equiv e_0^1$. Por otro lado, el cociente de un espacio por el subespacio de un punto es siempre homeomorfo al espacio mismo. Tenemos entonces $\varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0/e_0^1) + \varphi(e_0^1) = \varphi(\mathbb{S}^0) + \varphi(D)$. Restando, tenemos que $\varphi(D) = 0$. Si $\#D = 2$, es $D \simeq \mathbb{S}^0$ y $\varphi(D) = \varphi(\mathbb{S}^0)$. Por último, cuando $\#D > 2$, si tomamos $x, y \in D$ dos 0-celdas, el cociente $D' := D/\{x,y\}$ por el subcomplejo $\{x,y\} \equiv \mathbb{S}^0$ corresponde a indentificar x con y, de forma que resulta un espacio discreto de un punto menos. Es decir, es un CW-complejo finito de dimensión cero con una 0-celda menos. Inductivamente, tenemos

$$\begin{aligned}
\varphi(D) &= \varphi(D/\{x,y\}) + \varphi(\{x,y\}) = \varphi(D') + \varphi(\mathbb{S}^0) \\
&= \varphi(\mathbb{S}^0)(\#D' - 1) + \varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0)\#D' \\
&= \varphi(\mathbb{S}^0)(\#D - 1).
\end{aligned}$$

(ii) Basta probar que $X/A \equiv B$. En tal caso, tendremos en efecto $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A) = \varphi(A) + \varphi(B)$. Consideramos la función $f : B \to X/A$ definida como la composición entre la inclusión $B \hookrightarrow X$ y la proyección $q : X \to X/A$. Como B es compacto pues es un CW-complejo finito y X/A es Hausdorff ya que es CW-complejo, resta ver que f es biyectiva. Sea $p \in X$ el punto de pegado entre A y B. Es decir, $A \cap B = \{p\}$. Ahora,

- La función f es inyectiva: sean $x, y \in B$ con $[x] = f(x) = f(y) = [y]$. Por definición de X/A, o bien $x = y$ o bien $x, y \in A$. Esto último implica $x, y \in A \cap B = \{p\}$. En cualquier caso, es $x = y$.
- La función f es sobreyectiva: sea $[x] \in A$ con $x \in X = A \vee B$. Si $x \in B$ es $[x] = f(x)$. De lo contrario, necesariamente es $x \in A \setminus \{p\}$. Pero entonces basta notar que como $p \in B$, es $f(p) = [p] = [x]$ pues $p, x \in A$.

(iii) Hacemos inducción en d. El caso base $d = 0$ es trivial. Si $d = 1$, construimos a $\mathbb{S}^1$ como la adjunción de dos 1-celdas e_1^1 y e_1^2 a $\mathbb{S}^0 = e_0^1 \sqcup e_0^2$. Luego $\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0 \equiv \mathbb{S}^1 \vee \mathbb{S}^1$ y $\varphi(\mathbb{S}^1) = \varphi(\mathbb{S}^1/\mathbb{S}^0) + \varphi(\mathbb{S}^0) \overset{(ii)}{=} 2\varphi(\mathbb{S}^1) + \varphi(\mathbb{S}^0)$. Restando, obtenemos $\varphi(\mathbb{S}^1) = -\varphi(\mathbb{S}^0)$. Cuando $d > 2$, usamos una idea similar: consideramos la estructura celular para $\mathbb{S}^d$ que consiste en adjuntar dos d-discos a $\mathbb{S}^{d-1}$. Es decir, tenemos una cero celda e_0, una $(d-1)$-celda e_{d-1} que corresponde a pegar el borde de un $(d-1)$-disco en e_0, y dos d-celdas e_d^1 y e_d^2 que coresponden a pegar el borde cada d-disco en la $(d-1)$-esfera sin identificar puntos del borde entre sí. Así, $\mathbb{S}^{d-1}$ resulta el "ecuador" de $\mathbb{S}^d$ y entonces, el cociente $\mathbb{S}^d/e_{d-1}$ es homeomorfo al wedge de dos d-esferas. Por lo tanto,

$$\varphi(\mathbb{S}^d) = \varphi(\mathbb{S}^d/e_{d-1}) + \varphi(e_{d-1}) = \varphi(\mathbb{S}^d \vee \mathbb{S}^d) + \varphi(\mathbb{S}^{d-1}) \overset{(ii)}{=} 2\varphi(\mathbb{S}^d) + \varphi(\mathbb{S}^{d-1}),$$

lo que implica $\varphi(\mathbb{S}^d) = -\varphi(\mathbb{S}^{d-1}) = -(-1)^{d-1}\varphi(\mathbb{S}^0) = (-1)^d\varphi(\mathbb{S}^0)$.

(iv) Hacemos inducción en k. El caso base cuando $k = 1$ se verifica por (iii). Si ahora $k > 1$, fijamos $d \in \mathbb{N}_0$ Ahora, consideramos la siguente estructura celular del wedge: tenemos una cero celda e_0 y k celdas de dimensión d, con funciónes de adjunción $f_i : \mathbb{D}^k \xrightarrow{!} e_0$ para cada $i \in [\![k]\!]$. Luego cada esfera es un subcomplejo y entonces usando (ii), (iii) y la hipótesis inductiva, tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(\vee_{j=1}^k \mathbb{S}^d) &= \varphi(\mathbb{S} \vee \vee_{j=1}^{k-1}\mathbb{S}^d) = \varphi(\mathbb{S}^d) + \varphi(\vee_{j=1}^{k-1}\mathbb{S}^d) \\ &= (-1)^d\varphi(\mathbb{S}^0) + (k-1)(-1)^d\varphi(\mathbb{S}^0) = k \cdot (-1)^d \cdot \varphi(\mathbb{S}^0).\end{aligned}$$

□

Lema 2. Sea X un CW-complejo finito de dimensión d y sea $i < d$. Si X tiene c_i celdas de dimensión i, entonces $X^i/X^{i-1} \equiv \vee_{j \in [\![c_i]\!]}\mathbb{S}^i$.

Demostración. Sea $W := \vee_{j \in [\![c_i]\!]}\mathbb{S}^i$. Notemos que X^i/X^{i-1} es Hausdorff al ser un CW-complejo y W es compacto, así que basta con dar una función $W \to X^i/X^{i-1}$ continua y biyectiva. Consideramos primero la función $g : \bigsqcup_{j \in [\![c_i]\!]} \mathbb{D}_j^i \to X^i/X^{i-1}$ dada por la composición entre la función de adjunción de las i-celdas $f := \sqcup_{j \in [\![c_i]\!]} f_j$ y la proyección al cociente $q : X^i \to X^i/X^{i-1}$. Notemos que si x e y son puntos que pertenecen al borde de dos discos $\mathbb{D}_k^i, \mathbb{D}_l^i$, luego sus imagenes via f caen en el borde de dos i-celdas. En particular caen en el $(i-1)$-esqueleto de X^i, así que al proyectar obtenemos que $g(x) = g(y)$. Esto dice que g pasa al cociente por la relación que identifica todos los bordes de los discos. Como $\mathbb{D}^i/\partial\mathbb{D}^i \equiv \mathbb{S}^i$, luego $\bigsqcup_{j \in [\![c_i]\!]} \mathbb{D}_j^i / \bigsqcup_{j \in [\![c_i]\!]} \partial\mathbb{D}_j^i \equiv W$ y por lo tanto g induce una función continua $\hat{g} : W \to X^i/X^{i-1}$. Para terminar, veamos que es biyectiva:

- La función $\hat{g}$ es inyectiva: sean $x' \neq y' \in W$ y $x, y \in \bigsqcup_{j \in [\![c_i]\!]} \mathbb{D}^i_j$ preimganes de x' e y' respectivamente por la proyección a W. En particular no solo es $x \neq y$ si no que alguno de los puntos debe estar en el interior de algún disco, ya que todos los bordes se proyectan a un mismo punto de W. Suponemos sin pérdida de generalidad que $x \in \mathbb{D}^{i^o}_j, y \in \mathbb{D}^i_{j'}$ con $j, j' \in [\![c_i]\!]$. Ahora, para ver que $[f(x)] = g(x) = \hat{g}(x') \neq \hat{g}(y') = g(y) = [f(y)]$ alcanza probar que $f(x)$ y $f(y)$ no están relacionados. Si $f(y) \in X^{i-1}$ luego $f(y) \not\sim f(x)$ pues $f(x) \notin X^{i-1}$. Caso contrario, es $y \in \mathbb{D}^{i,o}_{j'}$ y entonces $f(x)$ y $f(y)$ pertenecen a interiores de celdas disjuntos. En consecuencia, tenemos $f(x) \neq f(y)$ y $f(x), f(y) \notin X^{i-1}$ así que en cualquier caso obtuvimos $f(x) \not\sim f(y)$.
- La función $\hat{g}$ es sobreyectiva: sea $[z] \in X^i/X^{i-1}$. Si $z \in X^{i-1}$, tomamos $p \in W$ el punto de pegado de las esferas. Luego $\hat{g}(p) = g(x)$ para cierto $x \in \mathbb{D}^i_j$ con $j \in [\![c_i]\!]$. Por lo tanto, $f(x)$ está en el borde de una i-celda y entonces $f(x) \in X^{i-1}$. De esta forma, tenemos que $f(x) \sim z$ y entonces $\hat{g}(p) = g(x) = qf(x) = q(z) = [z]$. Si en cambio $z \in X^i \setminus X^{i-1}$, luego z está en el interior de una i-celda y es imagen de cierto punto $x \in \mathbb{D}^{i^o}_j$ con $j \in [\![c_i]\!]$. Si proyectamos x a W, su imagen por $\hat{g}$ es $g(x) = qf(x) = q(z) = [z]$. En cualquier caso $[z]$ es imagen por $\hat{g}$ de algún punto de W.

$\square$

Observación 3. Como lo necesitaremos a continuación, recordamos el siguiente resultado visto en clase: sea $0 \to \cdots \xrightarrow{d_q} C_{q+1} \xrightarrow{d_{q+1}} C_q \xrightarrow{d_q} C_{q-1} \xrightarrow{d_{q-1}} \cdots \xrightarrow{d_1} C_0 \xrightarrow{d_0} 0$ un complejo de cadenas de $\mathbb{Z}$-módulos finitamente generado. Entonces,

$$\sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} C_q = \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C$$

En efecto, para cada $q \in \mathbb{N}$ tenemos las sucesiones exactas cortas

$$0 \to \operatorname{im} d_{q+1} \hookrightarrow \ker d_q \to \ker d_q / \operatorname{im} d_{q+1} = H_q C \to 0,$$
$$0 \to \ker d_q \hookrightarrow C_q \xrightarrow{d_q} \operatorname{im} d_q \to 0.$$

Por lo tanto, $\operatorname{rg} C_q = \operatorname{rg} \ker d_q + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q = (\operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} H_q C) + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q$. Entonces,

$$\begin{aligned}
\sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} C_q &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q (\operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} H_q C + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q) \\
&= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \sum_{q \geq 0} (-1)^q (\operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q) \\
&= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} + \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} \\
&= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \sum_{q \geq 1} (-1)^{q+1} \operatorname{rg} \operatorname{im} d_q + \sum_{q \geq 0} (-1)^q \operatorname{rg} \operatorname{im} d_{q+1} \\
&= \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C + \operatorname{rg} \operatorname{im} d_0 = \sum_{q \geq 0} (-1)^q H_q C
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Ejercicio 8. Sea $n \in \mathbb{Z}$. Probar que existe una única función φ que le asigna a cada CW-complejo finito un entero tal que

(a) $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si X e Y son homeomorfos.

(b) $\varphi(X) = \varphi(A) + \varphi(X/A)$ si A es subcomplejo de X.

(c) $\varphi(\mathbb{S}^0) = n$.

Probar además que una tal función debe cumplir que $\varphi(X) = \varphi(Y)$ si $X \simeq Y$

Demostración. Probamos en primera instancia la unicidad, y luego la existencia. Fijemos $n \in \mathbb{Z}$ y supongamos que existe una tal función φ como en el enunciado. Ahora, sea X un CW-complejo finito de dimensión $d \in \mathbb{N}_0$. Por (b), obtenemos

$$\varphi(X) = \varphi(X^d) = \varphi(X^d/X^{d-1}) + \varphi(X^{d-1}) = \cdots = \sum_{i=1}^{d} \varphi(X^i/X^{i-1}) + \varphi(X^0).$$

Como por el Lema 2 es $X^i/X^{i-1} \equiv \vee_{j\in[\![c_i]\!]}\mathbb{S}^i$ con c_i la cantidad de i-celdas, luego usando (a) y los ítems (i) y (iv) del Lema 1 tenemos que

$$\begin{aligned}\varphi(X) &= \sum_{i=1}^{d} \varphi(\vee_{j\in[\![c_i]\!]}\mathbb{S}^i) + \varphi(\mathbb{S}^0)\cdot(\#X^0 - 1) = \sum_{i=1}^{d} c_i\varphi(\mathbb{S}^i) + (c_0 - 1)\varphi(\mathbb{S}^0)\\ &= \sum_{i=0}^{d} c_i\varphi(\mathbb{S}^i) - \varphi(\mathbb{S}^0) = \sum_{i=0}^{d} c_i(-1)^i\varphi(\mathbb{S}^0) - \varphi(\mathbb{S}^0)\\ &= \varphi(\mathbb{S}^0)\sum_{i=0}^{d}(-1)^i c_i - \varphi(\mathbb{S}^0).\end{aligned}$$

Observando que $c_i = \operatorname{rg}(C_iX)$, es entonces

$$\varphi(X) = \varphi(\mathbb{S}^0)\sum_{i=0}^{d}(-1)^i \operatorname{rg}(C_iX) - \varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0)\chi(X) - \varphi(\mathbb{S}^0) = \varphi(\mathbb{S}^0)(\chi(X) - 1).$$

Esto prueba la unicidad, pues una tal función queda unívocamente determinada por su valor en la 0-esfera. Además, como la característica de Euler es un invariante homotópico, vemos que si $X \simeq Y$ luego $\varphi(X) = \varphi(\mathbb{S}^0)(\chi(X) - 1) = \varphi(\mathbb{S}^0)(\chi(Y) - 1) = Y$. Para terminar, veamos la existencia: dado $n \in \mathbb{Z}$, por lo anterior necesariamente debemos definir $\varphi(X) := n(\chi(X) - 1)$ para cada CW-complejo finito X. Observemos también que si una función ψ cumple las condiciones (a) y (b) y $m \in \mathbb{Z}$ es un entero, la función $m \cdot \psi$ sigue verificándolas. Por lo tanto, resta probar la afirmación para $n = 1$. Una vez más como χ es un invariante homotópico, en particular $\chi - 1$ verifica (a), y (c) es cierto pues $\chi(\mathbb{S}^0) - 1 = 2 - 1 = 1$. Para terminar basta ver que si X es un CW-complejo finito y A un subcomplejo de X, entonces $\chi(X) - 1 = \chi(A) + \chi(X/A) - 2$. Es decir, debemos ver que $\chi(X) = \chi(A) + \chi(X/A) - 1$. Siempre tenemos una sucesión exacta corta $0 \to S_\bullet A \to S_\bullet X \to S_\bullet(X, A) \to 0$ de complejos singulares, es decir tenemos una sucesión exacta

$$0 \to S_qA \to S_qX \to S_q(X, A) \to 0.$$

para cada $q \geq 0$ con los morfismos de inclusión y proyección canónicos, ya que por definicion es $S_q(X, A) = S_qX/S_qA$. En particular sabemos que $\operatorname{rg} S_qX = \operatorname{rg} S_qA + \operatorname{rg} S_q(X, A)$. Ahora usando la

Observación 3 se tiene que

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{rg} S_i X = \sum_{i\geq 0}(-1)^i(\operatorname{rg} S_i A + \operatorname{rg} S_i(X,A))\\ &= \chi(A) + \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{rg} S_i(X,A) = \chi(A) + \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{rg} H_i(X,A).\end{aligned}$$

Como (X,A) es un par bueno, como consecuencia de escisión tenemos que $H_i(X,A) = \tilde{H}_i(X/A)$ para todo $i \geq 0$. Observando que para cualquier espacio Y es $\tilde{H}_0(Y) \oplus \mathbb{Z} \simeq H_0(Y)$, en particular $\operatorname{rg} H_0(X,A) = \operatorname{rg} \tilde{H}_0(X/A) = \operatorname{rg} H_0(X/A) - 1$ y entonces

$$\begin{aligned}\chi(X) &= \chi(A) + \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{rg} H_i(X,A)\\ &= \chi(A) + \sum_{i\geq 0}(-1)^i \operatorname{rg} H_i(X/A) - 1\\ &= \chi(X) + \chi(X/A) - 1,\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. □