

Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Práctica 1

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí resolver los ejercicios (3), (5), y (). Por completitud, incluyo el ejercicio (4) al comienzo ya que lo utilizaré en la resolución de (3). Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Lema 1. Sea K un complejo simplicial y $v \in V_K$. Entonces $\text{st}(v)^0 \cap V_K = \{v\}$

Demostración. Si $v \in V_K$, luego $\{v\} \ni v$ es un símplex y $\{v\}^0 = \{v\}$ así que $v \in \text{st}(v)^0$. Recíprocamente si $w \in \text{st}(v)^0 \cap V_K$, existe $\sigma \ni v$ con $w \in \sigma^0 \subset \sigma$. Por lo tanto, al w ser un vértice $\{w\}$ debe ser una cara de σ . Por otro lado, como $\{w\} \subset \sigma^0$ y éste último es justamente quitar las caras propias de σ , necesariamente $\{w\} = \sigma$. Como $\sigma \ni v$ y el único tal símplex de dimensión 0 es $\sigma = \{v\}$, luego $w = v$. \square

Lema 2. Sea K un complejo simplicial y sean $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ símplexes de K . Si $\bigcap_{i=1}^k \sigma_i^0 \neq \emptyset$, entonces $\sigma_1 = \dots = \sigma_k$.

Demostración. Hacemos inducción en k . Tomamos el caso base $k = 2$, pues de ser $k = 1$ esto es claro. Por el absurdo, sean $\sigma \neq \tau \in K$ tales que $\sigma^0 \cap \tau^0 \neq \emptyset$. Luego $\sigma \cap \tau \supset \sigma^0 \cap \tau^0 \neq \emptyset$ y es así que $\sigma \cap \tau < \sigma, \tau$, pues al ser los símplexes distintos la intersección es una cara propia. Por definición de σ^0 es $\sigma \cap \tau \subset (\sigma^0)^c$, y pasando al complemento la contención $\sigma^0 \cap \tau^0 \subset \sigma^0$ obtenemos $\sigma^0 \cap \tau^0 \subset \sigma \cap \tau \subset (\sigma^0)^c \subset (\sigma^0 \cap \tau^0)^c$, lo que es una contradicción. Ahora, supongamos que el resultado es válido para $2 \leq k-1$. Como $\bigcap_{i=1}^k \sigma_i^0 \neq \emptyset$, en particular sabemos que $\bigcap_{i=1}^{k-1} \sigma_i^0 \neq \emptyset$. Por inducción, $\sigma_1 = \sigma_j$ si $j \in \llbracket k-1 \rrbracket$. Podemos ahora reescribir la intersección inicial como $\sigma_1^0 \cap \sigma_k^0 \neq \emptyset$, y usando el paso inicial vemos por último que $\sigma_1 = \sigma_k$. \square

Ejercicio 4. Sea K un complejo simplicial y $\mathcal{U} = \{\text{st}(v)^0, v \in V_K\}$ el cubrimiento por stars abiertos de los vértices. Probar que $N(\mathcal{U})$ es isomorfo a K .

Demostración. Consideremos la función entre vértices dada por

$$\begin{aligned} \iota : V_K &\rightarrow N(\mathcal{U}) \\ v &\mapsto \text{st}(v)^0 \end{aligned}$$

Observemos que ι es un morfismo simplicial: sea $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ y veamos que $\{\iota(v_0), \dots, \iota(v_n)\} = \{st(v_0)^o, \dots, st(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$. Como $\sigma \ni v_i$ para cada $i \in \llbracket n \rrbracket_0$, en cada caso es $\sigma^o \subset st(v_i)^o$ y por lo tanto,

$$\sigma^o \subset \bigcap_{i=0}^n st(v_i)^o \neq \emptyset.$$

Esto último dice que, en efecto, $\{st(v_0)^o, \dots, st(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$. Afirmamos ahora que ι es biyectiva: la suryectividad se deduce de que los vértices del nervio son precisamente los stars abiertos de algún $v \in K$, así que alcanza con mostrar la inyectividad. En efecto, si $v, w \in K$ son tales que $st(v)^o = st(w)^o$, por el [Lema 1](#) luego $\{v\} = st(v)^o \cap V_K = st(w)^o \cap V_K = \{w\}$. Tenemos entonces la inversa de ι ,

$$j : st(v)^o \in N(\mathcal{U}) \mapsto v \in K.$$

Veamos que j también es simplicial: sea $\sigma = \{st(v_0)^o, \dots, st(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$ un simplex. Por definición es $\bigcap_{i=0}^n st(v_i)^o \neq \emptyset$. En particular, tenemos un punto $x \in st(v_i)^o$ para cada $i \in \llbracket n \rrbracket_0$ y entonces existen simplices $\sigma_i \ni v_i$ con $x \in \sigma_i$ de forma que $\bigcap_{i=0}^n \sigma_i^o \ni x$. Luego como esta última intersección es no vacía, el [Lema 2](#) nos asegura que $\sigma := \sigma_0 = \dots = \sigma_n$. Como para cada $i \in \llbracket n \rrbracket_0$ es $v_i \in \sigma_i = \sigma$, luego $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \sigma$. Como K es un complejo simplicial y cada v_i es un vértice, necesariamente éstos forman una cara de σ que en particular es un simplex:

$$\{j(st(v_0)^o), \dots, j(st(v_n)^o)\} = \{v_0, \dots, v_n\} \in K.$$

Habiendo visto que tanto ι como j son simpliciales y tanto $j\iota = 1_K$ como $\iota j = 1_{N(\mathcal{U})}$, concluimos entonces que en efecto K y $N(\mathcal{U})$ son isomorfos. \square

Lema 3. Sea K un complejo simplicial finito, de forma que su realización geométrica resulta un espacio métrico. Sean ahora $v \in K$ y $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in K$. Entonces,

- a) $\text{diam}(|\sigma|) \leq \max_{0 \leq i, j \leq k} d(v_i, v_j)$
- b) $\text{diam}(st(v)^o) \leq 2 \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|)$
- c) Existe $0 < \eta < 1$ que sólo depende de la dimensión de K tal que

$$\max_{\sigma \in K'} \text{diam}(|\sigma|) \leq \eta \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).$$

- d) Si definimos $\Gamma_n := \max_{v \in K(n)} \text{diam}(st(v)^o)$, entonces $\Gamma_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado,

a) Sean $x = \sum_{i=0}^k t_i v_i$, $y = \sum_{j=0}^k s_j v_j \in |\sigma|$ combinaciones convexas de los vértices de σ . Luego,

$$\begin{aligned}
 d(x, y) &= \left\| \sum_{i=0}^k t_i v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \left\| \sum_{i=0}^k t_i v_i - \sum_{i=0}^k \overbrace{t_i}^{=1} \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \left\| \sum_{i=0}^k t_i \left(v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=0}^k t_i \left\| v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \sum_{i=0}^k t_i \left\| \sum_{j=0}^k \overbrace{s_j}^{=1} v_i - \sum_{j=0}^k s_j v_j \right\| = \sum_{i=0}^k t_i \left\| \sum_{j=0}^k s_j (v_i - v_j) \right\| \\
 &\leq \sum_{i=0}^k t_i \sum_{j=0}^k s_j \|v_i - v_j\| \leq \sum_{i=0}^k t_i \sum_{j=0}^k s_j \max_{0 \leq r, s \leq k} d(v_r, v_s) \\
 &= \max_{0 \leq r, s \leq k} d(v_r, v_s) \sum_{i=0}^k t_i \sum_{j=0}^k s_j = \max_{0 \leq r, s \leq k} d(v_r, v_s).
 \end{aligned}$$

b) Sean $x, y \in \text{st}(v)^\circ$. Luego existen $\sigma_1, \sigma_2 \ni v$ tales que $x \in \sigma_1^\circ \subset \sigma_1$ e $y \in \sigma_2^\circ \subset \sigma_2$. Por lo tanto,

$$d(x, y) \leq d(x, v) + d(v, y) \leq \text{diam}(\sigma_1) + \text{diam}(\sigma_2) \leq 2 \max_{\sigma \in K} \text{diam}(\sigma).$$

c) Sea $\tilde{\sigma} = \{\hat{\sigma}_0, \dots, \hat{\sigma}_k\} \in K'$. Por definición de la subdivisión baricéntrica, sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para cada $i \in \llbracket k-1 \rrbracket_0$ y si $0 \leq i < j \leq k$, entonces $\sigma_i = \{v_1, \dots, v_r\}$ y $\sigma_j = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$. Ahora, notemos que si $v_k \in \sigma_i$ luego es $0 \leq k \leq r+s$ y entonces

$$\begin{aligned}
 \|v_k - \hat{\sigma}_j\| &= \left\| v_k - \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0}^{r+s} v_l \right\| = \left\| \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0}^{r+s} (v_k - v_l) \right\| \\
 &= \left\| \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0, l \neq k}^{r+s} (v_k - v_l) \right\| \leq \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0, l \neq k}^{r+s} \|v_k - v_l\| \\
 &\leq \frac{r+s}{1+r+s} \text{diam}(\sigma_j) \leq \frac{r+s}{1+r+s} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|),
 \end{aligned}$$

ya que el k -ésimo término de la sumatoria resulta $0 = v_k - v_k$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
 d(\hat{\sigma}_j, \hat{\sigma}_i) &= \left\| \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r v_i - \hat{\sigma}_j \right\| = \left\| \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r (v_i - \hat{\sigma}_j) \right\| \\
 &\leq \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^r \|v_i - \hat{\sigma}_j\| \leq \frac{r+s}{1+r+s} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).
 \end{aligned}$$

Ahora, como K tiene dimensión n , necesariamente es $r+s \leq n$, y luego $\frac{r+s}{1+r+s} \leq \frac{n}{1+n} < 1$. Por lo tanto, dado cualquier símplex $\tilde{\sigma}$ es

$$\text{diam}(\tilde{\sigma}) \leq \max_{0 \leq i, j \leq k} d(\hat{\sigma}_i, \hat{\sigma}_j) \leq \frac{n}{1+n} \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).$$

Tomando máximo en $\tilde{\sigma}$, vemos que alcanza con tomar $\eta = \frac{n}{1+n} \in (0, 1)$ y que este último depende únicamente de $\dim K$.

- d) Como para todo $n > 1$ sabemos que $\dim K^{(n)} = \dim K^{(n-1)}$, luego existe $0 < \eta < 1$ por el ítem (c) tal que

$$0 \leq \max_{\sigma \in K^{(n)}} \text{diam}(|\sigma|) \leq \eta \max_{\sigma \in K^{(n-1)}} \text{diam}(|\sigma|) \leq \dots \leq \eta^n \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|).$$

Finalmente usando (b), obtenemos:

$$0 \leq \Gamma_n \leq 2 \max_{\sigma \in K^{(n)}} \text{diam}(|\sigma|) \leq 2\eta^n \max_{\sigma \in K} \text{diam}(|\sigma|) \rightarrow 0.$$

□

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X . El nervio de \mathcal{U} es el complejo simplicial $N(\mathcal{U})$ cuyos vértices son los abiertos del cubrimiento y los símlices son los subconjuntos finitos no vacíos de \mathcal{U} , $s = \{U_{i_0}, \dots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$. Notar que efectivamente $N(\mathcal{U})$ es un complejo simplicial. Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \not\leq n-1$. Probar que:

- Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.
- Los espacios discretos tienen dimensión 0.
- El intervalo I tiene dimensión 1.
- Si K complejo simplicial finito y $\dim K = n$ entonces $\dim |K| \leq n$. (En realidad vale la igualdad, se verá más adelante).

Demostración. Probamos cada inciso por separado.

- a) Sea $A \subseteq X$ cerrado, $n := \dim X$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A . Existe entonces para cada $i \in I$ un abierto V_i de X tal que $U_i = V_i \cap A$, y es entonces que la colección $\mathcal{O} = \{V_i\}_{i \in I} \cup \{A^c\}$ cubre X por abiertos, ya que A es cerrado. Por hipótesis, tenemos entonces un refinamiento $\tilde{\mathcal{O}} = \{O_j\}_{j \in J}$ de \mathcal{O} tal que $N(\tilde{\mathcal{O}})$ es un complejo simplicial de dimensión menor o igual que n . Afirmamos ahora que $\tilde{\mathcal{U}} = \{O_j \cap A\}_{j \in J}$ es refinamiento de \mathcal{U} : tenemos que

$$\bigcup_{j \in J} O_j \cap A = A \cap \bigcup_{j \in J} O_j = A \cap X = A,$$

y dado $j \in J$ luego $O_j \cap A$ es abierto en A pues O_j es abierto en X . Por último, si $O_j \cap A \neq \emptyset$ luego $O_j \not\subseteq A^c$ y existe $i_j \in I$ con $O_j \subset V_{i_j}$ y entonces $O_j \cap A \subset V_{i_j} \cap A = U_{i_j} \in \mathcal{U}$. En cualquier caso, $O_j \cap A$ es subconjunto de algún elemento de \mathcal{U} . Para terminar, veamos que $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$. Sea $\sigma = \{O_{j_0} \cap A, \dots, O_{j_k} \cap A\}$ un símplex del nervio de $\tilde{\mathcal{U}}$. Luego,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^k A \cap O_{j_i} \subset \bigcap_{i=0}^k O_{j_i}$$

y entonces $\{O_{j_0}, \dots, O_{j_k}\}$ es un simplex de $N(\tilde{\mathcal{O}})$. Como este último tiene dimensión a lo sumo n , es

$$\dim \sigma = k \leq \dim N(\tilde{\mathcal{O}}) \leq n$$

y en consecuencia, $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$.

- b) Sea $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ discreto y \mathcal{U} un cubrimiento de X por abiertos. Afirmamos que el conjunto $\mathcal{O} := \{\{x\} : x \in X\}$ es un refinamiento de \mathcal{U} . Los elementos de \mathcal{O} son abiertos pues X es discreto. Por otro lado si $\{x\} \in \mathcal{O}$, entonces como \mathcal{U} es cubrimiento de X existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Equivalentemente es $\{x\} \subset U$, y así probamos que el primero es subconjunto de algún abierto de \mathcal{U} . Basta entonces probar que el nervio de \mathcal{O} es de dimensión 0. Como los simplices de $N(\mathcal{O})$ consisten de abiertos de \mathcal{O} cuya intersección sea no vacía, alcanza con ver que cualesquiera dos abiertos de \mathcal{O} son disjuntos. Esto es claro: si $\{x\} \neq \{y\} \in \mathcal{O}$, entonces $x \neq y$ y $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.
- c) Veamos en primer lugar que $\dim I \not\leq 0$. Sea $\mathcal{U} = \{[0, \frac{2}{3}], (\frac{1}{3}, 0]\}$ cubrimiento de I . Cualquier refinamiento de \mathcal{U} tiene entonces al menos 2 elementos. Si I tuviese dimensión cero, existiría un refinamiento \mathcal{O} de \mathcal{U} cuyo nervio es de dimensión cero. Esto diría que los abiertos de \mathcal{O} son disjuntos y por conexión concluiríamos entonces que $1 = \#\mathcal{O} \geq 2$, lo que es absurdo.

Probemos ahora que $\dim I \leq 1$. Notemos que esto es una conclusión inmediata del siguiente ítem pues I es la realización geométrica de un complejo simplicial de dimensión 1. Además, el ítem (d) no utiliza este ítem y por lo tanto no hay peligro de un argumento circular. De todas maneras, a continuación proponemos otro argumento que sólo utiliza la caracterización de los abiertos de \mathbb{R} .

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de I . Como los abiertos de \mathbb{R} son unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos, luego para cada $i \in I$ existen conjuntos $J_i \subset \mathbb{N}$ e intervalos $\{I_j^i\}_{j \in J_i}$ abiertos (en I) y disjuntos tales que $U_i = \bigsqcup_{j \in J_i} I_j^i$. Por compacidad tenemos luego intervalos $I_1, \dots, I_n \in \{I_j^i\}_{i \in I, j \in J_i}$ tales que $\bigcup_{i=1}^n I_i = I$ y, por construcción, cada intervalo es subconjunto de algún abierto U_i . Obtuvimos así un refinamiento $\mathcal{O}_0 = \{I_1, \dots, I_n\}$ de \mathcal{U} . Construimos a continuación un refinamiento \mathcal{O} de \mathcal{U} de la siguiente forma: tomamos primero los intervalos de \mathcal{O}_0 . A los que no sean abiertos (como intervalos) les quitamos los extremos: estos seguirán siendo abiertos en I , pues sólo pueden provenir de alguno de la forma $[0, 1]$, $(a, 1]$ o $[0, b)$. Luego, dados $J_0, J_1 \in \mathcal{O}_0$ con $s \in J_s$ para $s \in \{0, 1\}$, agregamos entornos $E_0 := [0, \varepsilon)$, $E_1 := (1 - \varepsilon, 1]$ a \mathcal{O} con $0 < \varepsilon \ll 1$ tal que estos sean disjuntos y estén contenidos en J_0 y J_1 respectivamente. Esto garantiza que \mathcal{O} cubre a I ya que volvemos a cubrir sus extremos. Finalmente, de existir algún intervalo que esté contenido en la unión de otros, seleccionamos alguno de ellos y lo quitamos. Repetimos el proceso hasta que no haya más intervalos de este tipo, lo cual es posible pues hay finitos intervalos en total. Como removemos intervalos de uno, \mathcal{O} sigue siendo refinamiento pues sigue cubriendo a I .

Afirmamos ahora que $N(\mathcal{O})$ es de dimensión a lo sumo 1, o equivalentemente, que no hay tres intervalos de \mathcal{O} cuya intersección sea no vacía. Supongamos que sí y sean $\{J_i\}_{1 \leq i \leq 3} \subset \mathcal{O}$ de intersección no vacía y tales que el interior de J_i en \mathbb{R} es $(a_i, b_i)^1$. Como los intervalos no se contienen entre sí, existen dos de ellos distintos con el menor extremo izquierdo y mayor extremo derecho, que suponemos son J_1 y J_3 respectivamente. Así, $J_1 \cap J_3 = (a_3, b_1)$. Como

¹Esto evita tratar por separado la posible elección de E_0 o E_1 , ya que al ser los únicos dos intervalos semiabiertos, el argumento que sigue funciona aún si $a_1 \in J_1$ o $b_3 \in J_3$. Siempre tenemos que tanto J_2 como $J_1 \cap J_3$ son intervalos abiertos, y no hace falta que las desigualdades entre a_1 y a_2 o b_2 y b_3 sean estrictas.

$J_2 \not\subseteq J_1$ debe ser $b_2 > b_1$, y similarmente como $J_2 \not\subseteq J_3$ tenemos que $a_2 < a_3$. Si ahora $s \in J_2$, entonces $a_1 \leq a_2 < s < b_2 \leq b_3$. Si $s \notin J_1$, luego $s > b_1 > a_3$ y consecuentemente $s \in J_3$. En cualquier caso, $s \in J_1 \cup J_3$. Esto implica que $J_2 \subset J_1 \cap J_3$, lo que es absurdo: no hay entonces tres intervalos cuya intersección sea no vacía. Dado un cubrimiento arbitrario encontramos un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo 1, lo que completa la demostración.

- d) Sea K un complejo simplicial de dimensión n y \mathcal{U} un cubrimiento por abiertos de K . Como K es finito, es compacto, y por lo tanto existe un número de Lebesgue $\mu > 0$ para el cubrimiento. Por el [Lema 3](#), existe $m \in \mathbb{N}$ tal que la m -ésima subdivisión baricéntrica $K^{(m)}$ de K verifica $\text{diam}(\text{st}(v)^0) < \mu$ para cada $v \in K^{(m)}$. Como éstos cubren a $|K^{(m)}| = |K|$ por abiertos y tienen diámetro menor a μ , cada star abierto está contenido en algún abierto de \mathcal{U} . Es decir, $\mathcal{S} = \{\text{st}(v)^0\}_{v \in K^{(m)}}$ refina a \mathcal{U} . Por otro lado, el ejercicio (4) asegura que $N(\mathcal{S}) \simeq K^{(m)}$ como complejos simpliciales y en particular, $\dim N(\mathcal{S}) = \dim K^{(m)} = \dim K = n$. Esto prueba que todo cubrimiento de K tiene un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo n , lo que completa la demostración.

□

Lema 4. Sea X un espacio topológico, R una relación en X y X/R el espacio cociente. Notamos $q : X \rightarrow X/R$ a la proyección. Si U, V son abiertos saturados disjuntos en X , entonces $q(U)$ y $q(V)$ son abiertos disjuntos en X/R . En particular, si $[x] \neq [y] \in X/R$ y existen $U \ni x, V \ni y$ abiertos saturados disjuntos, los abiertos $q(U)$ y $q(V)$ separan a $[x]$ de $[y]$.

Demostración. Ya sabemos que los abiertos de X/R son precisamente las imágenes por q de abiertos saturados, resta ver entonces que $q(U) \cap q(V) = \emptyset$. Si no fuera así existirían $z \in U$ y $w \in V$ con $q(z) = q(w)$. En particular, tendríamos que $z \sim w$ y como U es saturado, luego $w \in U$. Sin embargo esto contradice que U y V son disjuntos. □

Ejercicio 5. Sea $A \subset X$ subespacio cerrado y $f : A \rightarrow B$ continua. Denotemos con $B \cup_f X$ al espacio de adjunción. Probar que si

- B y X son Hausdorff,
- Para todo $x \in X \setminus A$, existe un entorno cerrado de x en X que no interseca a A y
- $A \subset X$ es retracto de entorno,

entonces $B \cup_f X$ es Hausdorff.

Demostración. Recordemos que $B \cup_f X = B \sqcup X / \sim$, con \sim la relación generada por la identificación $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$. Sea ahora $q : X \sqcup B \rightarrow X \cup_f B$ la proyección al cociente. Notemos además que por construcción, si $x \in X \setminus A$ e $y \in B \setminus f(A)$ entonces $[x] = \{x\}$, $[y] = \{y\}$. Es decir, en el cociente sólo se identifican puntos de A y $f(A)$. Más aún, los elementos de $f(A)$ no se relacionan entre sí, y cada $a \in A$ está relacionado a su imagen por f . Esto dice que $q(X \setminus A \sqcup B)$ es un sistema de representantes para esta relación y

$$q^{-1}([x]) = \begin{cases} \{x\} & \text{si } x \in X \setminus A \text{ ó } x \in B \setminus f(A) \\ \{x\} \sqcup f^{-1}(x) & \text{si } x \in f(A) \end{cases}$$

Ahora, sean $[x]$ e $[y]$ puntos del espacio de adjunción con $x, y \in X \setminus A \sqcup B$. Queremos ver que siempre existen abiertos disjuntos $U \ni [x]$ y $V \ni [y]$. Para esto, podemos separar en casos según a que espacio pertenecen los representantes, y por el [Lema 4](#), alcanza con ver que en cada caso tenemos abiertos saturados disjuntos $U \ni x, V \ni y$.

- **Caso 1:** $x, y \in X \setminus A$. Como tanto x como y están en el complemento de A en X , tenemos entornos cerrados de cada punto que no intersecan a A . Es decir, existen abiertos O_x, O_y y cerrados F_x, F_y tales que $x \in O_x \subset F_x \subset X \setminus A$ e $y \in O_y \subset F_y \subset X \setminus A$. Por otro lado, como X es T_2 , existen abiertos $U_x \ni x$ y $V_y \ni y$ tales que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Definimos luego los abiertos $U := U_x \cap O_x$ e $V := V_y \cap O_y$ que contienen a x e y respectivamente. Éstos son saturados pues están contenidos en $X \setminus A$ donde no hay identificaciones no triviales y finalmente son disjuntos pues $U \cap V \subset U_x \cap V_y = \emptyset$.
- **Caso 2:** $x \in X \setminus A, y \in B$. Como en el caso anterior, tenemos $x \in O_x \subset F_x \subset X \setminus A$ con O_x abierto y F_x cerrado en X . Luego, $x \in O_x$ y $F_x^c \sqcup B \ni y$ son abiertos disjuntos en $X \sqcup B$. Veamos que éstos son saturados. Para $O_x \subset X \setminus A$ podemos utilizar el argumento del **Caso 1**. Por último, si $z \in F_x^c \sqcup B$ y $z \sim w$ con $w \neq z$ entonces o bien $w \in A$ y $f(z) = f(w)$ o $z = f(w)$, o bien $w = f(z) \in f(A)$ pues en B no hay identificaciones entre puntos distintos. En cualquier caso, $w \in A \sqcup f(A) \subset F_x^c \sqcup B$ y por lo tanto éste último es saturado. Por simetría, obviamos el caso en que $x \in B$ e $y \in X \setminus A$.
- **Caso 3:** $x, y \in B$. Como B es Hausdorff, tenemos abiertos $U \ni x$ y $V \ni y$ de B que resultan disjuntos, pero no necesariamente saturados. Buscamos entonces conseguir abiertos de x e y en base a los anteriores que sean saturados pero sigan siendo disjuntos. Como A es retracto de entorno, existe un abierto $U \subset X$ que contiene a A y una función continua $r : U \rightarrow A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Ahora, como U y V son disjuntos, sus preimágenes por $fr : U \rightarrow B$ son disjuntas y abiertas en U , ya que fr es continua. Como U es abierto de X , esto dice que $(fr)^{-1}(U)$ y $(fr)^{-1}(V)$ son en realidad abiertos de X . Por lo tanto, los conjuntos $(fr)^{-1}(U) \sqcup U$ y $(fr)^{-1}(V) \sqcup V$ son abiertos de $X \sqcup B$ que contienen a x e y respectivamente. Para terminar, veamos que son saturados. Como ambos casos son simétricos, sin pérdida de generalidad lo hacemos sólo para $(fr)^{-1}(U) \sqcup U$. Sea $z \in (fr)^{-1}(U) \sqcup U$ y $w \sim z$ con $w \neq z$. Como en el **Caso 2**, al no haber identificaciones entre puntos distintos en B los casos posibles son:

► $f(w) = f(z)$ con $w \in A, z \in A \cap (fr)^{-1}(U)$. Aquí es

$$fr(w) = f(w) = f(z) = fr(z) \in fr((fr)^{-1}(U)) \subset U,$$

y entonces $w \in (fr)^{-1}(U)$.

► $f(w) = z$ con $w \in A, z \in U$. Como $fr(w) = f(w) = z \in U$, tenemos que $w \in (fr)^{-1}(U)$.

► $w = f(z)$ con $w \in f(A), z \in A \cap (fr)^{-1}(U)$. Luego $w = f(z) = fr(z) \in fr((fr)^{-1}(U)) \subset U$.

En todo momento w es un elemento de $(fr)^{-1}(U) \sqcup U$ y por lo tanto éste es saturado.

Habiendo encontrado en cada caso abiertos saturados y disjuntos de $X \sqcup B$ que contienen a x e y respectivamente, concluimos entonces que $X \cup_f B$ es Hausdorff. \square