Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Observación 1. Si notamos $I : \mathsf{Top} \to \mathsf{hTop}$ al funtor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico X tenemos un funtor al componer con $\mathsf{hTop}(X, -)$,

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{hTop} \arrow[dr, "\mathsf{hTop}(X,-)"] & \\ \mathsf{Top} \arrow[ur, "I"] \arrow[rr, dashed] & & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

Concretamente, éste envía cada espacio Y a $[X, Y]$ y cada función continua $f : Y \to Z$ a

$$[f]_* : [h] \in [X, Y] \mapsto [fh] \in [X, Z].$$

En particular, si f es una equivalencia homotópica entonces If es un isomorfismo y por lo tanto así lo es $[f]_*$.

Lema 2. Sea (X, A) un CW-par y (Z, Y) un par topológico tal que $\pi_n(Z, Y) = 0$ para todo $n \geq 1$. Si $f : (X, A) \to (Z, Y)$ es una función continua de pares, entonces existe otra función continua $g : X \to Z$ tal que $g(X) \subset Y$ y $f \simeq g$ relativa a Y.

Demostración. □

Ejercicio 4. Probar que una equivalencia débil $f : Y \to Z$ induce biyecciones $[X, Y] \to [X, Z]$ para todo CW-complejo X.

Demostración. En primer lugar, notemos que f *se factoriza a través* de M_f,

$$\begin{tikzcd}
& M_f \arrow[dr, "j"] & \\
Y \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "f"] & & Z
\end{tikzcd}$$

donde la inclusión i es una cofibración y j es equivalencia homotópica. Por la Observación 1, esto a su vez da un diagrama en Set,

$$\begin{tikzcd}
& {[X, M_f]} \arrow[dr, "{[j]_*}"] & \\
{[X, Y]} \arrow[ur, "{[i]_*}"] \arrow[rr, "{[f]_*}"] & & {[X, Z]}
\end{tikzcd}$$

y como j es equivalencia homotópica, la función $[j]_*$ es biyectiva. Por lo tanto, $[f]_*$ es biyectiva sí y solo si $[i]_*$ lo es. Del mismo modo, f es una equivalencia débil si y sólo si lo es i.

Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el enunciado en el caso de $i : Y \to Z$ la inclusión de un subespacio Y en un espacio topológico Z.

Ahora, como por hipótesis i induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la suceción exacta larga de pares

$$\cdots \to \pi_n(Y, y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z, y) \to \pi_n(Z, Y, y) \to \dots$$

vemos que debe ser $\pi_n(Z, Y, y) = 0$ para todo $n \in N$ e $y \in Y$.

Por lo tanto, si $g : X \to Z$ es una función continua, es una función de pares de $(X, \emptyset)$ a (Z, Y). Por el Lema 2, sabemos entonces que existe $h : X \to Z$ continua tal que $h \simeq g$ y $h(X) \subset Y$. En consecuencia, correstringiendo h a Y vemos que

$$[i]_* \left([h|^Y]\right) = [ih|^Y] = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de i_*.

Ahora veamos la inyectividad. Sean $h_0, h_1 : X \to Y$ funciones continuas tales que $ih_0 \simeq ih_1$ y veamos que h_0 y h_1 son homotópicas. Por hipótesis, sabemos que existe una homotopía $H : ih_0 \simeq ih_1$, que puede ser vista como una función de pares de $(X \times I, X \times \partial I)$ a (Z, Y), ya que tanto ih_0 como ih_1 tienen imagen en Y.

Una vez más, por el Lema 2 existe una función continua $K : (X \times I, X \times \partial I) \to (Z, Y)$ y una homotopía $\Gamma : K \simeq H$ relativa a $X \times \partial I$ tal que $K(X \times I) \subset Y$. En particular H y K coinciden en $X \times \partial I$, así que si $s \in \{0, 1\}$ entonces

$$h_s(x) = H(x, s) = K(x, s)$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto la correstricción $K|^Y : X \times I \to Y$ de K es una función continua que satisface $K_s = h_s$, y consecuentemente h_0 y h_1 son homotópicas. □

Lema 3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ una función continua. Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg f = -1$.

Demostración. Notemos que como la homología de $\mathbb{S}^{2n}$ es trivial excepto en grado 0 y $2n$, es

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \sum_{q\geq 0} (-1)^q \cdot \operatorname{tr}(H_n f) = \operatorname{tr}(H_0 f) + (-1)^{2n} \operatorname{tr}(H_{2n} f)\\ &= 1 + (-1)^{2n} \deg f = 1 + \deg f.\end{aligned}$$

Como f no tiene puntos fijos debe ser $\lambda(f) = 0$, lo que nos dice que $\deg f = -1$. □

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{Z}_2$ es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y G un grupo que actúa libremente en $\mathbb{S}^{2n}$. Esto es equivalente a que para cada $g \in G$ distinto de la unidad la función

$$\begin{aligned} m_g : \mathbb{S}^{2n} &\longrightarrow \mathbb{S}^{2n}\\ x &\longmapsto g\cdot x\end{aligned}$$

no tenga puntos fijos. Por el Lema 3 sabemos entonces que $\deg m_g = -1$ para todo $g \neq 1$.

Si ahora tomamos $g, h \in G \setminus \{1\}$ tenemos que

$$\deg m_{gh} = \deg m_g \circ m_h = \deg m_g \cdot \deg m_h = (-1)^2 = 1,$$

asi que el contrarrecíproco del Lema 3 dice que m_{gh} tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser $gh = 1$.

Dado que G no es trivial, existe algún elemento $g \in G \setminus \{1\}$. Si ahora $h \in G \setminus \{1\}$ es arbitrario, de $gh^{-1} = 1$ obtenemos $h = g$ para cualquier $h \neq 1$. Por lo tanto es $G = \{1, g\}$. y en consecuencia, $G \simeq \mathbb{Z}_2$. □

Lema 4. Sea G un grupo. Si $x \in \mathbb{Z}[G]$ es no nulo y G-invariante, entonces G es finito y existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = k \cdot \sum_{g\in G} g$.

Demostración. Como $x \in \mathbb{Z}[G] \setminus \{0\}$, existen finitos elementos $g_1, \dots, g_n \in G$ y enteros $a_1, \dots, a_n$ con $a_1 \neq 0$ tales que

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n.$$

Para cada $g \in G$, es

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = x = g g_1^{-1} x = a_1 g + a_2 g g_1^{-1} g_2 + \cdots + a_n g g_1^{-1} g_n \tag{1}$$

así que por la unicidad de la escritura en combinaciones formales, necesariamente $g \in \{g_1, \dots, g_n\}$. Esto prueba que $G = \{g_1, \dots, g_n\}$, y en particular G resulta finito.

Ahora, si para cada $i \in [\![n]\!]$ ponemos $g = g_i$ en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = a_1 g_i + \cdots + a_n g_i g_1^{-1} g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe $k := a_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k = a_1 = \cdots = a_n$ y consecuentemente

$$x = a_1 g_1 + \dots a_n g_n = k g_1 + \dots k g_n = k \cdot \sum_{g\in G} g.$$

□

Ejercicio 5. Probar que $\mathrm{cd}(G) = 0$ si y sólo si G es el grupo trivial.

Demostración. Una implicación es clara: si $G = 1$, un $\mathbb{Z}[1]$-módulo es simplemente un $\mathbb{Z}$ módulo, y entonces la sucesión

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[1]$-módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial. En particular $\mathbb{Z}$ resulta un $\mathbb{Z}[G]$-módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r : \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]$. Como la acción de G en $\mathbb{Z}$ es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada $g \in G$, y además $s(1) \neq 0$ pues al ser sección s es inyectiva. Esto dice que $s(1)$ es no nulo y G-invariante, así que por el Lema 4 existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Aplicando r se obtiene

$$1 = rs(1) = r\left(k \cdot \sum_{g \in G} g\right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k|G|,$$

lo que implica $|G| = k = 1$. Por lo tanto, necesariamente G es el grupo trivial. $\square$