

# Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

Guido Arnone

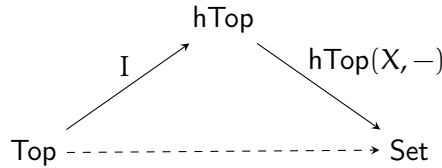
---

## Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio (4) de la práctica 4 y los ejercicios (1) y (5) de la práctica 5. Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

---

**Observación.** Si notamos  $I : \text{Top} \rightarrow \text{hTop}$  al functor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico  $X$  tenemos un functor al componer con  $\text{hTop}(X, -)$ ,



Concretamente, éste envía cada espacio  $Y$  a  $[X, Y]$  y cada función continua  $f : Y \rightarrow Z$  a

$$[f]_* : [h] \in [X, Y] \mapsto [fh] \in [X, Z].$$

En particular, si  $f$  es una equivalencia homotópica entonces  $I f$  es un isomorfismo y por lo tanto así lo es  $[f]_*$ .

Por comodidad, en el resultado siguiente notamos  $X^{(-1)} = \emptyset$  para cada CW-complejo  $X$ .

**Lema 1.** Sea  $(X, A)$  un CW-par,  $n \in \mathbb{N}$  y  $(Z, Y)$  un par topológico tal que  $\pi_n(Z, Y, y) = 0$  para todo  $y \in Y$ . Si  $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  es una función continua de pares que satisface  $f(X^{(n-1)} \cup A) \subset Y$ , entonces existe otra función  $g : X \rightarrow Z$  continua y homotópica a  $f$  relativa a  $X^{(n-1)} \cup A$  que satisface  $g(X^{(n)} \cup A) \subset Y$ .

**Demostración.** Tomemos una  $n$ -celda  $e$  de  $X^{(n)}$  que no sea una celda de  $A$ , y sea  $\xi : \mathbb{D}^n \rightarrow e$  su correspondiente función de adjunción. Notemos que la función  $f\xi : \mathbb{D}^n \rightarrow Z$  siempre representa a una clase de equivalencia de  $\pi_n(Z, Y, f\xi(s))$ , donde  $s \in \partial\mathbb{D}^n$ , pues si  $n \geq 1$  entonces

$$f\xi(\partial\mathbb{D}^n) \subset f(X^{(n-1)}) \subset Y.$$

Al ser  $\pi_n(Z, Y, f\xi(s)) = 0$ , existe una homotopía  $H : \mathbb{D}^n \times I \rightarrow Z$  entre  $f\xi$  y  $g$  relativa a  $\partial\mathbb{D}^n$  con  $\text{im } H_1 \subset Y$ . Puesto que la homotopía  $H$  es relativa al borde del disco, pasa al cociente por las identificaciones que hace  $\xi$ . Existe entonces  $\tilde{H} : e \times I \rightarrow Z$  tal que

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{D}^n \times I & \xrightarrow{H} & Z \\ \xi \times 1 \downarrow & \nearrow \tilde{H} & \\ e \times I & & \end{array}$$

conmuta. En particular esto dice que

$$\text{im } \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(e) = \tilde{H}_1\xi(\mathbb{D}^n) = H_1(\mathbb{D}^n) \subset Y$$

y  $f\xi = H_0 = \tilde{H}_0\xi$ . Como  $\xi$  es sobreyectiva de aquí vemos que  $\tilde{H}_0 = f$ , y como  $\tilde{H}$  es relativa a  $\dot{e}$  (ya que  $H$  es relativa a  $\partial\mathbb{D}^n$ ) sabemos que  $\tilde{H}_t|_{\dot{e}} = f|_{\dot{e}}$  para todo  $t \in I$ .

Esto nos dice que para cada  $n$ -celda  $e_\beta^n$  de  $X^{(n)}$  que no es una celda de  $A$ , existe una homotopía  $H_\beta^n : e_\beta^n \times I \rightarrow Z$  relativa a  $\dot{e}_\beta^n$  que satisface

- $(H_\beta^n)_0 = f|_{e_\beta^n}$ ,
- $\text{im}(H_\beta^n)_1 \subset Y$ ,
- $(H_\beta^n)_t|_{\dot{e}_\beta^n} = f|_{\dot{e}_\beta^n}$  para todo  $t \in I$ .

En virtud de que dos  $n$ -celdas distintas se intersecan a lo sumo en sus bordes y allí cada homotopía  $H_\beta^n$  coincide con  $f$ , por el lema de pegado está bien definida la función continua

$$H : X^{(n)} \cup A \times I \rightarrow Z$$

que cumple  $H|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv f|_{X^{(n-1)} \cup A}$  y  $H|_{e_\beta^n} \equiv H_\beta^n$  en cada  $n$ -celda  $e_\beta^n$  que no es una celda de  $A$ . Además, por construcción es  $H_0 = f|_{X^{(n)} \cup A}$  e  $\text{im } H_1 \subset Y$ .

Finalmente como la inclusión del subcomplejo  $X^{(n)} \cup A \hookrightarrow X$  es una cofibración, existe una homotopía  $\tilde{H} : X \times I \rightarrow Z$  que coincide con  $H$  en  $X^{(n)} \cup A$  y satisface  $\tilde{H}_0 = f$ .

$$\begin{array}{ccccc} X^{(n)} \cup A & \xrightarrow{\iota_0} & X^{(n)} \cup A \times I & & \\ \downarrow i & & \downarrow i \times 1 & \nearrow H & \\ X & \xrightarrow{\iota_0} & X \times I & \searrow \exists \tilde{H} & \\ & & & \nearrow f & \\ & & & & Z \end{array}$$

En particular es  $\tilde{H}_1(X^{(n)} \cup A) = \text{im } H_1 \subset Y$  y

$$\tilde{H}|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv H|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv f|_{X^{(n-1)} \cup A},$$

así que basta tomar  $g := \tilde{H}_1$ .

□

A partir del resultado anterior probamos a continuación el *lema crucial*, pues será necesario para resolver el ejercicio (4).

**Lema 2.** Sea  $(X, A)$  un CW-par y  $(Z, Y)$  un par topológico con  $\pi_n(Z, Y) = 0$  para todo  $n \geq 1$  para el cual existen celdas de  $X^{(n)}$  que no pertenecen a  $A$ . Si  $f : (X, A) \rightarrow (Z, Y)$  es una función continua de pares, entonces existe otra función  $g : X \rightarrow Z$  continua y homotópica a  $f$  relativa a  $A$  que satisface  $g(X) \subset Y$ .

*Demostración.* Utilizando el **Lema 1** inductivamente, tenemos una sucesión de homotopías

$$\{H^k : X \times I \rightarrow Z\}_{k \geq 0}$$

tales que

- $H_0^0 = f$ ,
- $H_1^k = H_0^{k+1}$ ,
- $H^k$  es relativa a  $X^{(k-1)} \cup A$ , y
- $H_1^k(X^{(k)} \cup A) \subset Y$ .

En el  $k$ -ésimo paso, de haber  $k$ -celdas que no pertenezcan a  $A$  tomamos la homotopía que nos garantiza el **Lema 1** para la función  $H_1^{k-1}$ , y en caso contrario tomamos la homotopía constante.

Como cada homotopía  $H^i$  es relativa a  $A$ , inductivamente vemos que

$$H_t^i(a) = H_0^i(a) = H_1^{i-1}(a) = H_t^{i-1}(a) = \cdots = H_t^0(a) = H_0^0(a) = f(a)$$

para todo  $a \in A$ ,  $i \geq 0$  y  $t \in I$ .

Del mismo modo, para cada  $x \in X$  existe  $n \geq 1$  tal que  $x \in X^{(n)}$  y como  $H^k$  es relativa a  $X^{(n)}$  si  $k > n$ , es

$$H_t^n(x) = H_t^k(x) \in Y$$

para todo  $k > n$  y  $t \in I$ .

Esto último nos permite definir  $g : X \rightarrow Z$  poniendo  $g|_{X^{(n)}} \equiv H_1^n|_{X^{(n)}}$  para cada  $n \geq 0$ . Por construcción  $g$  resulta continua (pues lo es en cada esqueleto de  $X$ ) y satisface tanto  $g(X) \subset Y$  como  $g|_A = f|_A$ . Veamos ahora que  $g$  es homotópica a  $f$  relativa a  $A$ .

Fijemos una sucesión  $(t_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$  tal que  $t_0 = 0$  y  $t_n \rightarrow 1$  de forma estrictamente creciente, y notemos  $c_i : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow I$  a la función lineal que vale 0 en  $t_i$  y 1 en  $t_{i+1}$ .

Como  $H_1^i = H_0^{i+1}$  para todo  $i \geq 0$ , por el lema de pegado podemos definir una función continua

$$H : X \times [0, 1] \rightarrow Z$$

que satisface  $H|_{X \times [t_i, t_{i+1}]} \equiv H^i \circ c_i$  para cada  $i \geq 0$ . Así, es  $H_0 = f$  y  $H_t|_A = f|_A$  para todo  $t \in [0, 1]$ .

Afirmamos que

$$\begin{aligned} \tilde{H} : X \times I &\longrightarrow Z \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} H(x, t) & \text{si } t \in [0, 1] \\ g(x) & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es una homotopía entre  $f$  y  $g$  relativa a  $A$ . Por las observaciones anteriores sólo resta ver que ésta es continua, y es suficiente probarlo en cada cerrado  $X^{(n)} \times I$ .

Efectivamente, en  $X^{(n)} \times [0, t_{n+1}]$  la función  $\tilde{H}$  es continua pues coincide con  $H$ , y en  $[t_{n+1}, 1]$  es constante, pues cuando  $m > n$  sabemos que  $H^m|_{X^{(n)}} \equiv H^n|_{X^{(n)}}$ . Por lo tanto  $\tilde{H}$  es continua en  $X^{(n)} \times I$  para cada  $n \in \mathbb{N}_0$ , lo que concluye la demostración.  $\square$

**Ejercicio 4.** Probar que una equivalencia débil  $f : Y \rightarrow Z$  induce biyecciones  $[X, Y] \rightarrow [X, Z]$  para todo CW-complejo  $X$ .

*Demostración.* En primer lugar, notemos que  $f$  se factoriza a través de  $M_f$ ,

$$\begin{array}{ccc} & M_f & \\ i \nearrow & & \searrow j \\ Y & \xrightarrow{f} & Z \end{array}$$

donde la inclusión  $i$  es una cofibración y  $j$  es una equivalencia homotópica. Esto a su vez da un diagrama en  $\text{Set}$ ,

$$\begin{array}{ccc} & [X, M_f] & \\ [i]_* \nearrow & & \searrow [j]_* \\ [X, Y] & \xrightarrow{[f]_*} & [X, Z] \end{array}$$

con  $[j]_*$  biyectiva. Por lo tanto  $[f]_*$  es biyectiva si y solo si  $[i]_*$  lo es. Usando una vez más que  $j$  es equivalencia homotópica vemos también que  $f$  es una equivalencia débil si y sólo si lo es  $i$ . Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el ejercicio para un subespacio  $Y$  de un espacio topológico  $Z$  e  $i : Y \rightarrow Z$  la inclusión.

Como por hipótesis  $i$  induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la sucesión exacta larga de pares

$$\cdots \rightarrow \pi_n(Y, y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z, y) \rightarrow \pi_n(Z, Y, y) \rightarrow \cdots$$

vemos que debe ser  $\pi_n(Z, Y, y) = 0$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  e  $y \in Y$ .

Por lo tanto, si  $g : X \rightarrow Z$  es una función continua, es una función de pares de  $(X, \emptyset)$  a  $(Z, Y)$ . Por el **Lema 2**, sabemos entonces que existe  $h : X \rightarrow Z$  continua tal que  $h \simeq g$  y  $h(X) \subset Y$ . En consecuencia, correstringiendo  $h$  a  $Y$  vemos que

$$[i]_*([h]^Y) = [ih]^Y = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de  $i_*$ .

Ahora veamos la inyectividad. Sean  $h_0, h_1 : X \rightarrow Y$  funciones continuas tales que  $ih_0 \simeq ih_1$ , y veamos que  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas. Por hipótesis sabemos que existe una homotopía  $H$  entre  $ih_0$  e  $ih_1$ . Más aún, ésta puede ser vista como una función de pares de  $(X \times I, X \times \partial I)$  a  $(Z, Y)$ , pues tanto  $ih_0$  como  $ih_1$  tienen imagen en  $Y$ .

Una vez más, por el **Lema 2** existe una función continua  $K : (X \times I, X \times \partial I) \rightarrow (Z, Y)$  y una homotopía  $\Gamma : K \simeq H$  relativa a  $X \times \partial I$  tal que  $K(X \times I) \subset Y$ . En particular  $H$  y  $K$  coinciden en  $X \times \partial I$ , así que si  $s \in \{0, 1\}$  entonces

$$h_s(x) = H(x, s) = K(x, s)$$

para todo  $x \in X$ . Por lo tanto la correstricción  $K|^Y : X \times I \rightarrow Y$  de  $K$  es una función continua que satisface  $K_s = h_s$ , y consecuentemente  $h_0$  y  $h_1$  son homotópicas.  $\square$

**Lema 3.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $f : S^{2n} \rightarrow S^{2n}$  una función continua. Si  $f$  no tiene puntos fijos, entonces  $\deg f = -1$ .

*Demostración.* Notemos que como la homología de  $S^{2n}$  es trivial excepto en grado 0 y  $2n$ , es

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \sum_{q \geq 0} (-1)^q \cdot \text{tr}(H_q f) = \text{tr}(H_0 f) + (-1)^{2n} \text{tr}(H_{2n} f) \\ &= 1 + (-1)^{2n} \deg f = 1 + \deg f.\end{aligned}$$

Como  $f$  no tiene puntos fijos debe ser  $\lambda(f) = 0$ , lo que nos dice que  $\deg f = -1$ .  $\square$

**Ejercicio 1.** Probar que  $\mathbb{Z}_2$  es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

*Demostración.* Sea  $n \in \mathbb{N}$  y  $G$  un grupo no trivial que actúa libremente en  $S^{2n}$ . Esto es equivalente a que, para cada  $s \in G$  distinto de la unidad, la función

$$\begin{aligned}m_s : S^{2n} &\rightarrow S^{2n} \\ x &\mapsto s \cdot x\end{aligned}$$

no tenga puntos fijos. Por el **Lema 3** sabemos entonces que  $\deg m_s = -1$  para todo  $s \neq 1$ .

Si ahora tomamos  $g, h \in G \setminus \{1\}$  tenemos que

$$\deg m_{gh^{-1}} = \deg m_g \circ m_{h^{-1}} = \deg m_g \cdot \deg m_{h^{-1}} = (-1)^2 = 1,$$

así que el contrarrecíproco del **Lema 3** dice que  $m_{gh^{-1}}$  tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser  $gh^{-1} = 1$ . Es decir, debe ser  $g = h$ .

Dado que  $G$  no es trivial, existe algún elemento  $g \in G \setminus \{1\}$ . El argumento anterior nos dice que

$$G = \{1, g\}$$

así que necesariamente  $G \simeq \mathbb{Z}_2$ .  $\square$

**Observación.** Sabemos además que efectivamente  $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 \rangle$  actúa en  $S^{2n}$  de forma libre, por ejemplo vía  $\sigma \cdot p := -p$ .

**Lema 4.** Sea  $G$  un grupo. Si  $x \in \mathbb{Z}[G]$  es no nulo y  $G$ -invariante, entonces  $G$  es finito y existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $x = k \cdot \sum_{g \in G} g$ .

*Demostración.* Al  $x \in \mathbb{Z}[G]$  ser no nulo, existen finitos elementos  $g_1, \dots, g_n \in G$  y enteros  $a_1, \dots, a_n$  con  $a_1 \neq 0$  tales que

$$x = a_1 g_1 + \dots + a_n g_n.$$

Como para cada  $g \in G$  es

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = x = g g_1^{-1} x = a_1 g + a_2 g g_1^{-1} g_2 + \cdots + a_n g g_1^{-1} g_n, \quad (1)$$

por la unicidad de la escritura en combinaciones formales necesariamente  $g \in \{g_1, \dots, g_n\}$ . Esto prueba que  $G = \{g_1, \dots, g_n\}$  y en particular  $G$  resulta finito.

Ahora, si para cada  $i \in \llbracket n \rrbracket$  ponemos  $g = g_i$  en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = a_1 g_i + \cdots + a_n g_i g_1^{-1} g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe  $k := a_1 \in \mathbb{Z}$  tal que  $k = a_1 = \cdots = a_n$  y consecuentemente

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = k g_1 + \cdots + k g_n = k \cdot \sum_{g \in G} g.$$

□

**Ejercicio 5.** Probar que  $\text{cd}(G) = 0$  si y sólo si  $G$  es el grupo trivial.

*Demostración.* Si  $G$  es trivial un  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo es simplemente un  $\mathbb{Z}$  módulo, y entonces

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\text{id}} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \rightarrow 0$$

de  $\mathbb{Z}$  como  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo trivial. En particular  $\mathbb{Z}$  resulta un  $\mathbb{Z}[G]$ -módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r : \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección  $s : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}[G]$ . Como la acción de  $G$  en  $\mathbb{Z}$  es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada  $g \in G$ , y además  $s(1) \neq 0$  pues al ser sección  $s$  es inyectiva. Esto dice que  $s(1)$  es no nulo y  $G$ -invariante, así que por el **Lema 4** existe  $k \in \mathbb{Z}$  tal que  $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$ .

Aplicando  $r$  se obtiene

$$1 = r s(1) = r \left( k \cdot \sum_{g \in G} g \right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k |G|,$$

lo que a su vez implica  $|G| = k = 1$ , y por lo tanto  $G$  es el grupo trivial.

□