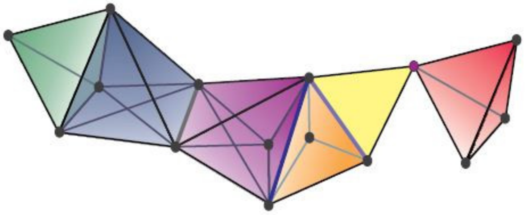
Topología Algebraica: examen final

Una introducción a los Conjuntos Simplciales



Guido Arnone

8 de noviembre de 2019

La categoría $\boldsymbol{\Delta}$ de ordinales finitos

Definición

La categoría $\boldsymbol{\Delta}$ de ordinales finitos tiene por objetos a los conjuntos $[\![n]\!] := \{0 < 1 < \cdots < n\}$ y por flechas a los morfismos de posets $f : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$.

Definición

*Definimos para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $i \in [\![n]\!]$ los mapas de **cocaras***

$$\begin{aligned} d^i : [\![n-1]\!] &\to [\![n]\!] \\ j &\mapsto \begin{cases} j & \textit{si } j < i \\ j+1 & \textit{si } j \geq i \end{cases} \end{aligned}$$

*y los mapas de **codegeneraciones***

$$\begin{aligned} s^i : [\![n+1]\!] &\to [\![n]\!] \\ j &\mapsto \begin{cases} j & \textit{si } j \leq i \\ j-1 & \textit{si } j > i \end{cases} \end{aligned}$$

La categoría $\mathbf{\Delta}$ de ordinales finitos

Proposición

Toda flecha $[\![n]\!] \xrightarrow{f} [\![m]\!]$ en $\mathbf{\Delta}$ se puede escribir como una composición de mapas de cocaras y codegeneraciones.

Proposición

Los mapas de cocaras y codegeneraciones satisfacen las siguientes ***identidades cosimpliciales****,*

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \textit{si } i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \textit{si } i < j \\ s^j d^j = s^j d^{j+1} = 1 & \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & \textit{si } i > j+1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \textit{si } i \leq j \end{cases}$$

Conjuntos Simpliciales

Definición

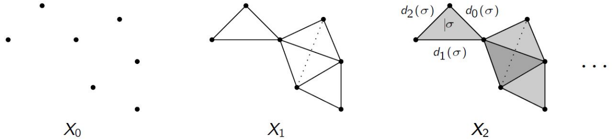
*Un **conjunto simplicial** es un funtor* $X : \boldsymbol{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$*.*
Concretamente, éste consiste de

(i) *una sucesión de conjuntos* $X_0, X_1, X_2, \ldots,$ *y*

(ii) *para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *e* $i \in [\![n]\!]$*, funciones* $d_i : X_n \to X_{n-1}$ *y* $s_i : X_n \to X_{n+1}$ *llamadas mapas de caras y degeneraciones respectivamente, que satisfacen las siguientes* ***identidades simpliciales****:*

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_j s_j = d_{j+1} s_j = 1 & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

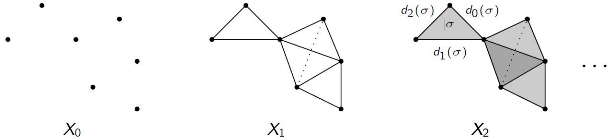
Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$X_0 \;\; \begin{array}{c} \xleftarrow{\;d_0\;} \\ \xleftarrow{\;d_1\;} \\ \xrightarrow{\;s_0\;} \end{array} \;\; X_1 \;\; \begin{array}{c} \xleftarrow{\;d_0\;} \\ \xleftarrow{\;d_1\;} \\ \xleftarrow{\;d_2\;} \\ \xrightarrow{\;s_0\;} \\ \xrightarrow{\;s_1\;} \end{array} \;\; X_2 \quad \cdots$$

- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- El nervio $N\mathscr{C}$ de una categoría $\mathscr{C}$
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Ejemplos

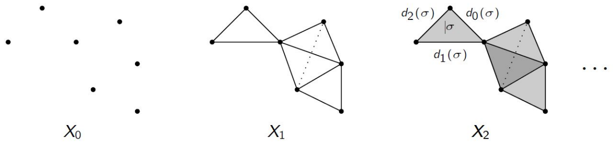


$$\begin{tikzcd}
X_0 & X_1 \arrow[l, shift left=4, "d_0"'] \arrow[l, "d_1"'] & X_2 \arrow[l, shift left=6, "d_0"'] \arrow[l, shift left=3, "d_1"'] \arrow[l, "d_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

$$X_0 \xrightarrow{s_0} X_1, \qquad X_1 \overset{s_0}{\underset{s_1}{\rightrightarrows}} X_2$$

- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- El nervio N$\mathscr{C}$ de una categoría $\mathscr{C}$
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

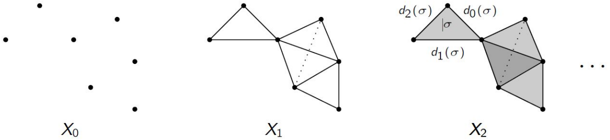
Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, shift left=4, "s_0"] & X_1 \arrow[l, shift left=2, "d_1"] \arrow[l, shift right=2, "d_0"'] \arrow[r, shift left=6, "s_1"] \arrow[r, shift left=3, "s_0"] & X_2 \arrow[l, "d_2"] \arrow[l, shift right=3, "d_1"'] \arrow[l, shift right=6, "d_0"'] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- El nervio $N\mathscr{C}$ de una categoría $\mathscr{C}$
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

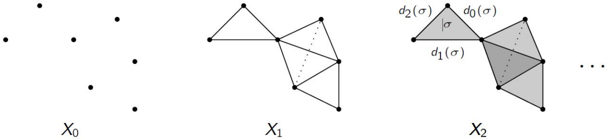
Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X_0 \arrow[r, "s_0", shift right=4] & X_1 \arrow[l, "d_0"', shift right=4] \arrow[l, "d_1"'] \arrow[r, "s_0", shift right=2] \arrow[r, "s_1", shift right=6] & X_2 \arrow[l, "d_0"', shift right=6] \arrow[l, "d_1"', shift right=2] \arrow[l, "d_2"', shift left=2] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- El nervio $N\mathscr{C}$ de una categoría $\mathscr{C}$
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X_0 \arrow[r, "s_0", shift right=6] & X_1 \arrow[l, "d_0"', shift right=6] \arrow[l, "d_1"'] \arrow[r, "s_0", shift right=6] \arrow[r, "s_1", shift right=12] & X_2 \arrow[l, "d_0"', shift right=12] \arrow[l, "d_1"', shift right=6] \arrow[l, "d_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- El nervio $N\mathscr{C}$ de una categoría $\mathscr{C}$
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

Dado un conjunto simplicial X*, definimos su* ***complejo de Moore*** *como el complejo de cadenas*

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ *el grupo abeliano libre generado por el conjunto* X_n *y el borde*

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

para cada $n \geq 0$*. La* ***homología*** $H_\bullet(X)$ *de* X *es la homología de este complejo de cadenas.*

- $K \rightsquigarrow H_\bullet(K)$
- $BG \rightsquigarrow H_\bullet(G)$
- $\mathscr{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

*Dado un conjunto simplicial X, definimos su **complejo de Moore** como el complejo de cadenas*

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y el borde

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

*para cada $n \geq 0$. La **homología** $H_\bullet(X)$ de X es la homología de este complejo de cadenas.*

- $K \rightsquigarrow H_\bullet(K)$
- $BG \rightsquigarrow H_\bullet(G)$
- $\mathscr{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

Dado un conjunto simplicial X, definimos su ***complejo de Moore*** *como el complejo de cadenas*

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y el borde

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

para cada $n \geq 0$. La ***homología*** *$H_\bullet(X)$ de X es la homología de este complejo de cadenas.*

- $K \rightsquigarrow H_\bullet(K)$
- $BG \rightsquigarrow H_\bullet(G)$
- $\mathscr{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

*Dado un conjunto simplicial X, definimos su **complejo de Moore** como el complejo de cadenas*

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y el borde

$$\partial = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i d_i$$

*para cada $n \geq 0$. La **homología** $H_\bullet(X)$ de X es la homología de este complejo de cadenas.*

- $K \rightsquigarrow H_\bullet(K)$
- $BG \rightsquigarrow H_\bullet(G)$
- $\mathscr{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Símplices Degenerados

Definición

Sea X un conjunto simplicial. Un n-simplex $x \in X_n$ se dice ***degenerado*** *si existe $y \in X_{n-1}$ tal que $s_i(y) = x$ para algún $i \in [\![n]\!]$. En caso contrario, decimos que x es* ***no degenerado*** *y notamos*

$$NX_n := \{x \in X_n : \ x \text{ es no degenerado}\}.$$

Proposición

Sea X un conjunto simplicial. Si $x \in X$ es un símplex degenerado, entonces existe un único símplex no degenerado $y \in X$ y mapas de degeneración $s_{i_1}, \dots, s_{i_k}$ tales que $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k} y$.

Símplices Degenerados

Definición

Sea X un conjunto simplicial. Un n-simplex $x \in X_n$ se dice ***degenerado*** *si existe $y \in X_{n-1}$ tal que $s_i(y) = x$ para algún $i \in [\![n]\!]$. En caso contrario, decimos que x es* ***no degenerado*** *y notamos*

$$NX_n := \{x \in X_n : \ x \text{ es no degenerado}\}.$$

Proposición

Sea X un conjunto simplicial. Si $x \in X$ es un símplex degenerado, entonces existe un único símplex no degenerado $y \in X$ y mapas de degeneración $s_{i_1}, \ldots, s_{i_k}$ tales que $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k} y$.

Morfismos Simpliciales

Definición

Dados dos complejos simpliciales $X, Y : \boldsymbol{\Delta}^{op} \to \mathsf{Set}$*, un* ***morfismo de conjuntos simpliciales*** *de* X *a* Y *es una transformación natural* $f : X \to Y$*. Concretamente, esto consiste en dar una familia de funciones* $f_n : X_n \to Y_n$ *tales que para cada* $0 \leq i \leq n$ *los siguientes diagramas conmutan,*

$$
\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\
Y_n \arrow[r, "d_i"'] & Y_{n-1}
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
X_n \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\
Y_n \arrow[r, "s_i"'] & Y_{n+1}
\end{tikzcd}
$$

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K, \leq) \to (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induce un morfismo simplicial $NF : N\mathscr{C} \to N\mathscr{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f : X \to Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

*Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el **funtor singular** $\mathscr{S}$: $\mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$.*

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K, \leq) \to (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induce un morfismo simplicial $NF : N\mathscr{C} \to N\mathscr{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f : X \to Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

*Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el **funtor singular** $\mathscr{S}$: $\mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$.*

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K, \leq) \to (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induce un morfismo simplicial $NF : N\mathscr{C} \to N\mathscr{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f : X \to Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el ***funtor singular*** $\mathscr{S} : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$.

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K,\leq)\to(L,\preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induce un morfismo simplicial $NF : N\mathscr{C} \to N\mathscr{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f : X \to Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

*Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el **funtor singular** $\mathscr{S} : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$.*

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K, \leq) \to (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos
- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes
- Un funtor $F : \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ induce un morfismo simplicial $NF : N\mathscr{C} \to N\mathscr{D}$ entre los nervios
- Una función continua $f : X \to Y$ entre dos espacios induce un morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ entre sus complejos singulares

Observación

Todas estas asignaciones son funtoriales. En particular, se tiene el ***funtor singular*** $\mathscr{S} : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$.

Realización Geométrica

Definición

*Sea X un conjunto simplicial. Dotando a cada conjunto X_n de la topología discreta, definimos la **realización geométrica** de X como el espacio topológico*

$$|X| := \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) \Big/ \sim$$

donde identificamos a los puntos

$$(x, |d^i|(p)) \sim (d_i(x), p)$$

y

$$(x, |s^i|(p)) \sim (s_i(x), p)$$

para cada mapa de cocara y codegeneración.

Realización Geométrica - Ejemplos

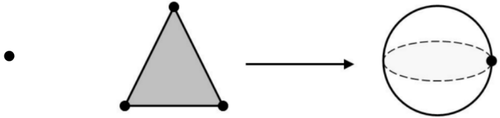
- La realización geométrica de Δ^n es homeomorfa al n-símplex topológico estándar.
- En general, si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n-esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n-1)$-símplex en un punto».

Realización Geométrica - Ejemplos

- La realización geométrica de Δ^n es homeomorfa al n-símplex topológico estándar.
- En general, si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n-esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n-1)$-símplex en un punto».

Realización Geométrica - Ejemplos

- La realización geométrica de Δ^n es homeomorfa al n-símplex topológico estándar.
- En general, si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n-esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n-1)$-símplex en un punto».



Realización Geométrica - La adjunción $|\cdot| \dashv \mathscr{S}(-)$

Proposición

Se tiene un funtor $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *que asigna a cada conjunto simplicial* X *su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial* $f : X \to Y$ *una flecha* $|f| : |X| \to |Y|$ *inducida por la familia de funciones* $\{f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \to Y_n \times |\Delta^n|\}_{n \geq 0}$.

Teorema

Existe una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sSet} \arrow[rr, bend left, "|\cdot|"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Top} \arrow[ll, bend left, "\mathscr{S}"] \end{tikzcd}$$

En otras palabras, se tiene una biyección $\mathsf{Top}(|X|, Y) \simeq \mathsf{sSet}(X, \mathscr{S}(Y))$ *entre las funciones continuas* $|X| \to Y$ *y los morfismos simpliciales* $X \to \mathscr{S}(Y)$. *Más aún, esta biyección es natural tanto en* X *como en* Y.

Realización Geométrica - La adjunción $|\cdot| \dashv \mathscr{S}(-)$

Proposición

Se tiene un funtor $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *que asigna a cada conjunto simplicial* X *su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial* $f : X \to Y$ *una flecha* $|f| : |X| \to |Y|$ *inducida por la familia de funciones* $\{f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \to Y_n \times |\Delta^n|\}_{n \geq 0}$.

Teorema

Existe una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sSet} \arrow[rr, bend left, "|\cdot|"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Top} \arrow[ll, bend left, "\mathscr{S}"] \end{tikzcd}$$

En otras palabras, se tiene una biyección $\mathsf{Top}(|X|, Y) \simeq \mathsf{sSet}(X, \mathscr{S}(Y))$ *entre las funciones continuas* $|X| \to Y$ *y los morfismos simpliciales* $X \to \mathscr{S}(Y)$. *Más aún, esta biyección es natural tanto en* X *como en* Y.

Esqueletos

Definición

Sea X *un conjunto simplicial y* $n \in \mathbb{N}_0$*. Definimos el* n*-esqueleto* $\mathsf{sk}_n X$ *de* X *como el menor subcomplejo de* X *que tiene a los* j*-símplices de* X *para cada* $j \in [\![n]\!]_0$*. Es decir, es el complejo*

$$(\mathsf{sk}_n X)_j = \begin{cases} X_j & \textit{si } j \leq n \\ \{x \in X_j : x = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-n}} y \textit{ con } y \in X_n\} & \textit{si } j > n \end{cases}$$

junto con las restricciones de los mapas de caras y degeneraciones de X*. Se tienen además las siguientes inclusiones,*

$$\mathsf{sk}_0 X \subset \mathsf{sk}_1 X \subset \mathsf{sk}_2 X \subset \cdots \subset \mathsf{sk}_n X \subset \cdots$$

Esqueletos

Lema

Si X *es un conjunto simplicial, entonces* $\mathsf{X} \simeq \operatorname{colim}_{n\geq 0} \mathsf{sk}_n \mathsf{X}$ *donde el colímite se toma sobre el diagrama inducido por las inclusiones entre los* n*-esqueletos.*

Lema

Si X *es un conjunto simplicial y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{n \in NX_n} \partial\Delta^n & \longrightarrow & \mathsf{sk}_{n-1}X \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \coprod_{n \in NX_n} \Delta^n & \longrightarrow & \mathsf{sk}_n X \end{array}$$

es un puhsout.

Esqueletos

Lema

Si X *es un conjunto simplicial, entonces* $X \simeq \operatorname{colim}_{n\geq 0} \mathsf{sk}_n X$ *donde el colímite se toma sobre el diagrama inducido por las inclusiones entre los* n*-esqueletos.*

Lema

Si X *es un conjunto simplicial y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{n \in NX_n} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathsf{sk}_{n-1}X \arrow[d, hook] \\ \coprod_{n \in NX_n} \Delta^n \arrow[r] & \mathsf{sk}_n X \end{tikzcd}$$

es un puhsout.

Realización Geométrica - CW Aproximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.*

Teorema

La realización geométrica de un conjunto simplicial X *es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.*

Teorema

Si X *es un espacio topológico, la counidad de la adjunción* $\eta_X : |\mathscr{S}(X)| \to X$ *es una equivalencia débil. Concretamente, si* $f : X \to Y$ *es una función continua entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} |\mathscr{S}(X)| \arrow[r, "|Sf|"] \arrow[d, "\eta_X"] & |\mathscr{S}(Y)| \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, y tanto η_X *como* η_Y *son equivalencias débiles.*

Realización Geométrica - CW Aproximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.*

Teorema

La realización geométrica de un conjunto simplicial X *es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.*

Teorema

Si X *es un espacio topológico, la counidad de la adjunción* $\eta_X : |\mathscr{S}(X)| \to X$ *es una equivalencia débil. Concretamente, si* $f : X \to Y$ *es una función continua entonces el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} |\mathscr{S}(X)| & \xrightarrow{|Sf|} & |\mathscr{S}(Y)| \\ \downarrow \eta_X & & \downarrow \eta_Y \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

conmuta, y tanto η_X *como* η_Y *son equivalencias débiles.*

Realización Geométrica - CW Aproximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.*

Teorema

La realización geométrica de un conjunto simplicial X *es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.*

Teorema

Si X *es un espacio topológico, la counidad de la adjunción* $\eta_X : |\mathscr{S}(X)| \to X$ *es una equivalencia débil. Concretamente, si* $f : X \to Y$ *es una función continua entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} |\mathscr{S}(X)| \arrow[r, "|Sf|"] \arrow[d, "\eta_X"] & |\mathscr{S}(Y)| \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, y tanto η_X *como* η_Y *son equivalencias débiles.*

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathsf{sSet}) \arrow[r, bend left, "|\cdot|_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ho}(\mathsf{Top}) \arrow[l, bend left, "\mathcal{S}_*"] \end{tikzcd}$$

  que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»
- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathsf{sSet}) \arrow[r, bend left, "|\cdot|_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ho}(\mathsf{Top}) \arrow[l, bend left, "\mathcal{S}_*"] \end{tikzcd}$$

  que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»
- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathsf{sSet}) \arrow[r, bend left, "|\cdot|_*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Ho}(\mathsf{Top}) \arrow[l, bend left, "\mathcal{S}_*"] \end{tikzcd}$$

  que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»
- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Categorías de modelos y categorías de homotopía

- Podemos generalizar la noción de fibraciones, cofibraciones, y equivalencias débiles a otros contextos
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría de modelos, podemos considerar su categoría de homotopía $\mathsf{Ho}(\mathscr{C})$
- La adjunción que vimos induce una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ho}(\mathsf{sSet}) \arrow[rr, bend left, "|\cdot|_*"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Ho}(\mathsf{Top}) \arrow[ll, bend left, "\mathcal{S}_*"] \end{tikzcd}$$

  que es una equivalencia de categorías. Esto dice que «las teorías de homotopía de espacios y conjuntos simpliciales son en esencia la misma»
- ¿Qué es la teoría de homotopía simplicial?

Fibraciones de Kan

Definición

Un morfismo simplicial $f : X \to Y$ *se dice una* ***fibración de Kan*** *(o simplemente una fibración) si para cada diagrama conmutativo de la forma*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

existe una flecha $\Delta^n \to X$ *que sigue haciendo conmutar el diagrama.*

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X *se dice un* ***complejo de Kan*** *si el morfismo simplicial* $X \xrightarrow{!\exists} \Delta^0$ *es una fibración de Kan.*
Equivalentemente,

- *Un conjunto simplicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial* $\alpha : \Lambda^n_k \to X$ *tenemos una extensión* $\overline{\alpha} : \Delta^n \to X$ *al* n*-símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\, \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un conjunto simplicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada* n*-upla de* $(n-1)$*-símplices* $(x_0, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n)$ *de* X *tales que* $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ *si* $i < j$, $i, j \neq k$*, existe un* n*-símplex* $x \in X_n$ *tal que* $d_i x = x_i$ *para cada* i.

Complejos de Kan

Definición

*Un conjunto simplicial X se dice un **complejo de Kan** si el morfismo simplicial $X \xrightarrow{!\exists} \Delta^0$ es una fibración de Kan.*
Equivalentemente,

- *Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial $\alpha : \Lambda^n_k \to X$ tenemos una extensión $\overline{\alpha} : \Delta^n \to X$ al n-símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\,\overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un conjunto simplicial X es un complejo de Kan sí y sólo si para cada n-upla de $(n-1)$-símplices $(x_0, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n)$ de X tales que $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ si $i < j$, $i, j \neq k$, existe un n-símplex $x \in X_n$ tal que $d_i x = x_i$ para cada i.*

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X *se dice un* ***complejo de Kan*** *si el morfismo simplicial* $X \xrightarrow{!\exists} \Delta^0$ *es una fibración de Kan.*
Equivalentemente,

- *Un conjunto simplicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial* $\alpha : \Lambda^n_k \to X$ *tenemos una extensión* $\overline{\alpha} : \Delta^n \to X$ *al* n*-símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\ \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un conjunto simplicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada* n*-upla de* $(n-1)$*-símplices* $(x_0, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n)$ *de* X *tales que* $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ *si* $i < j,\ i, j \neq k$*, existe un* n*-símplex* $x \in X_n$ *tal que* $d_i x = x_i$ *para cada* i*.*

Complejos de Kan

Proposición

Una función continua $f : X \to Y$ *es una fibración de Serre sí y sólo si el morfismo simplicial* $\mathscr{S}(f) : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ *es una fibración de Kan.*

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^n_k| \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ |\Delta^n| \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{S}(X) \arrow[d, "\mathscr{S}(f)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & \mathscr{S}(Y) \end{tikzcd}$$

Proposición

Si X *es un espacio topológico, entonces* $\mathscr{S}(X)$ *es un complejo de Kan.*

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^n_k| \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ |\Delta^n| \arrow[ur, dashed, "\exists\ \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathscr{S}(X) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\ \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Homotopía Simplicial

Una **homotopía** entre dos morfismos simpliciales $f, g : X \to Y$ es un morfismo simplicial $H : X \times \Delta^1 \to Y$ que vale f al restringir el 1-símplex en una cara y g al restringir a la otra.

$$\begin{tikzcd}
X \times \Delta^0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[d, "1\times d_1"'] & X \arrow[d, "f"] \\
X \times \Delta^1 \arrow[r, "H"] & Y \\
X \times \Delta^0 \arrow[r, "\simeq"] \arrow[u, "1\times d_0"] & X \arrow[u, "g"']
\end{tikzcd}$$

Ésta se dice **relativa** a un subcomplejo K de X si además es «constante en K».

$$\begin{tikzcd}
X \times \Delta^1 \arrow[r, "H"] & Y \\
K \times \Delta^1 \arrow[r, "\pi_1"] \arrow[u, hook, "i\times 1"] & K \arrow[u, "\alpha"']
\end{tikzcd}$$

Homotopía Simplicial

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces las homotopías simpliciales de vértices definen una relación de equivalencia en X_0.

Observación

*En particular esto nos dice que Δ^1 **no** es un complejo de Kan.*

Proposición

Sea X un conjunto simplicial e Y un complejo de Kan. Si K es un subcomplejo de Y, las homotopías simpliciales relativas a K definen una relación de equivalencia en $\hom_{\mathsf{sSet}}(X, Y)$.

Grupos de Homotopía

Definición

Sea X *un complejo de Kan y* $n \in \mathbb{N}$*. Se define el* n*-ésimo grupo de homotopía con punto base* $v \in X_0$ *como el conjunto* $\pi_n(X, v)$ *de clases de homotopía relativas a* $\partial\Delta^n$ *de morfismos simpliciales* $\alpha : \Delta^n \to X$ *que valen constantemente* v *en el borde del símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "\alpha"] & X \\ \partial\Delta^n \arrow[u, hook] \arrow[r, "\exists!"] & \Delta^0 \arrow[u, "v"'] \end{tikzcd}$$

Teorema

Si X *es un complejo de Kan y* $v \in X_0$ *un vértice, entonces* $\pi_n(X, v)$ *es un grupo para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Modelos Minimales

Definición

*Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n-símplices $x, y\colon \Delta^n \to M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.*

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i : M \hookrightarrow X$ y una retracción $r : X \to M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f : M \to M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M *es un* ***complejo minimal*** *si cada vez que se tienen dos* n*-símplices* $x, y\colon \Delta^n \to M$ *homotópicos relativos a* $\partial\Delta^n$ *se tiene que* $x = y$.

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $x, y \in X_n$ *son dos símplices degenerados tales que* $\partial x = \partial y$, *entonces* $x = y$.

Proposición

Si X *es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal* $i : M \hookrightarrow X$ *y una retracción* $r : X \to M$ *tal que* $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M *un complejo minimal y* $f : M \to M$ *un morfismo simplicial. Si* $f \simeq 1$, *entonces* f *es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.*

Modelos Minimales

Definición

*Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n-símplices $x, y \colon \Delta^n \to M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.*

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i : M \hookrightarrow X$ y una retracción $r : X \to M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f : M \to M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M *es un* ***complejo minimal*** *si cada vez que se tienen dos* n*-símplices* $x, y \colon \Delta^n \to M$ *homotópicos relativos a* $\partial\Delta^n$ *se tiene que* $x = y$*.*

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $x, y \in X_n$ *son dos símplices degenerados tales que* $\partial x = \partial y$*, entonces* $x = y$*.*

Proposición

Si X *es un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal* $i : M \hookrightarrow X$ *y una retracción* $r : X \to M$ *tal que* $ir \simeq 1_X$*.*

Teorema

Sea M *un complejo minimal y* $f : M \to M$ *un morfismo simplicial. Si* $f \simeq 1$*, entonces* f *es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.*

¡Fin!