Topología Algebraica

Primer Cuatrimestre – 2019

Examen Final

Guido Arnone

Índice general

Parte 1

Preliminares

1.1. La categoría de ordinales finitos

Definición 1.1.1. Se define la **categoría Δ de ordinales finitos** como la categoría que tiene por objetos a los conjuntos ordenados

$$[\![n]\!] := \{0 < 1 < \cdots < n\}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$, y cuyas flechas son las funciones $f : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$ que resultan morfismos de posets. Definimos además, para cada $[\![n]\!] \in \Delta$ e $i \in [\![n]\!]_0$,

- los mapas de **cocaras**,

$$d^i : [\![n-1]\!] \to [\![n]\!]$$
$$j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j < i \\ j+1 & \text{si } j \geq i \end{cases}$$

  y

- los mapas de **codegeneraciones**,

$$s^i : [\![n+1]\!] \to [\![n]\!]$$
$$j \mapsto \begin{cases} j & \text{si } j \leq i \\ j-1 & \text{si } j > i \end{cases}$$

Proposición 1.1.1. Los mapas de cocaras y codegeneraciones satisfacen las siguientes *identidades cosimpliciales*,

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \text{si } i < j \\ s^j d^j = s^j d^{j+1} = 1 & \text{si } i < j \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & \text{si } i > j+1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

Proposición 1.1.2. Toda flecha $[\![n]\!] \xrightarrow{f} [\![m]\!]$ en $\mathbf{\Delta}$ se puede escribir como una composición de mapas de cocaras y codegeneraciones.

Observación 1.1.1. En vista de las dos proposiciones anteriores, usando los mapas de cocaras y codegeneraciones y las identidades cosimpliciales se puede dar «una presentación de $\mathbf{\Delta}$ en términos de generadores y relaciones». A grandes rasgos, esto nos permitirá definir los objetos relacionados a $\mathbf{\Delta}$ únicamente a partir de los mapas de cocaras y codegeneraciones.

1.2. Conjuntos Simpliciales

Ahora sí, pasamos a definir los conjuntos simpliciales:

Definición 1.2.1. Un **conjunto simplcial** es un funtor $X : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathsf{Set}$. Concretamente, éste consiste de

(i) una sucesión $X_0, X_1, X_2, \dots$ de conjuntos, y

(ii) para cada $n \in \mathbb{N}_0$ e $i \in [\![n]\!]_0$, funciones $d_i : X_n \to X_{n-1}$ y $s_i : X_n \to X_{n+1}$ llamadas mapas de caras y degeneraciones respectivamente, que satisfacen las siguientes *identidades simpliciales*:

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \text{si } i < j \\ d_j s_j = d_{j+1} s_j = 1 & \text{si } i < j \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \text{si } i > j+1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

Ejemplo 1.2.1 (el n-símplex estándar). Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ tenemos un conjunto simplicial dado por el funtor $\mathbf{\Delta}(-, [\![n]\!])$. Conrectamente, para cada $j \geq 0$ definimos los conjuntos

$$\Delta^n_m := \mathbf{\Delta}([\![m]\!], [\![n]\!]) = \{f : [\![m]\!] \to [\![n]\!] : \ f \text{ es morfismo de posets } \}$$

y los mapas de caras y degeneraciones están dados por

$$(d^i)^* : f \in \mathbf{\Delta}([\![m]\!], [\![n]\!]) \mapsto f d^i \in \mathbf{\Delta}([\![m-1]\!], [\![n]\!])$$

y

$$(s^i)^* : f \in \mathbf{\Delta}([\![m]\!], [\![n]\!]) \mapsto f s^i \in \mathbf{\Delta}([\![m+1]\!], [\![n]\!]).$$

Llamamos a este conjunto simplicial el **n-símplex estándar** y lo notamos Δ^n.

Una vez más interpretando a $[\![n]\!]$ como el n-símplex combinatorio ordenado, su conjunto simplicial asociado consiste de «todas las formas posibles de incluir o colapsar un m-símplex estándar en $[\![n]\!]$».

Extendiendo esta interpretación tenemos el siguiente ejemplo,

Ejemplo 1.2.2 (complejos simpliciales ordenados). Sea K un complejo simplicial equipado con una relación de orden total para sus vértices $V = \{v_i\}_{i \in I}$. Notamos a cada n-símplex como una n-upla $[v_{i_0}, \dots, v_{i_n}]$ con $v_k < v_{k+1}$ para cada k.

Asociaremos a K un conjunto simplicial, agregando como en el caso de Δ^n la noción de *símlpices degenerados*. Concretamente, para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos

$$K_n := \left\{ [v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}] : \ v_{i_k} \leq v_{i_{k+1}} \text{ para cada } k, \text{ y } \{v_{i_k}\}_{k=0}^n \in K \right\}.$$

En otras palabras, el conjunto K_n consiste de n-uplas ordenadas de vértices que forman un símplex de K, pero permitiendo repetición. Definimos a su vez los mapas de caras y degeneraciones como

$$d_k[v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}] := [v_{i_0}, \ldots, \widehat{v_{i_k}}, \ldots, v_{i_n}] \quad \text{y} \quad s_k[v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}] := [v_{i_0}, \ldots, v_{i_k}, v_{i_k}, \ldots, v_{i_n}].$$

Definición 1.2.2. Dado un n-śimplex estándar (como complejo simplicial), su **borde** es el complejo $\partial\Delta^n$ dado por la unión de sus caras maximalesy su k-ésimo **cuerno** es el subcomplejo Λ^n_k de $\partial\Delta^n$ que se obtiene quitando la k-ésima cara maximal de Δ^n, para cierto $0 \leq k \leq n$. Decimos que Λ^n_k es un cuerno *interno* si $0 < k < n$, y *externo* en caso contrario.

Ahora sí, veamos un primer ejemplo topológico:

Ejemplo 1.2.3. Sea X un espacio topológico. Para cada $n \in \mathbb{N}_0$ definimos el conjunto

$$\mathcal{S}(X)_n := \mathsf{Top}(|\Delta^n|, X)$$

de todos los n-simplices singulares de X, y las aplicaciones

$$d_i : \mathcal{S}(X)_n \to \mathcal{S}(X)_{n-1}, \quad s_i : \mathcal{S}(X)_n \to \mathcal{S}(X)_{n+1}$$

que envían un n-símplex singular a la restricción $d_i\sigma$ a su i-ésima cara y al $(n+1)$-simplex singular $s_i\sigma$ que corresponde a colapsar $|\Delta^{n+1}|$ a $|\Delta^n|$ a través de $|s^i|$ y luego componer con σ.

Estos conforman el conjunto simplicial $\mathcal{S}(X)$ que se conoce como el **conjunto singular** de X.

Definición 1.2.3. Dado un conjunto simplicial X, definimos su **complejo de Moore** como el complejo de cadenas

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_i$$

para cada $n \geq 0$.

Observación 1.2.1. La homología singular de un espacio topológico X coincide con la homología del complejo de Moore de su conjunto singular.

Ejemplo 1.2.4 (nervio de una categoría). Sea $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña. Definimos el **nervio** de $\mathscr{C}$ como el conjunto simplicial dado por los conjuntos

$$\begin{aligned} N(\mathscr{C})_n = \hom(\mathbf{n}, \mathscr{C}) &= \{(f_1, \ldots, f_k) : f_i \in \operatorname{mor}\mathscr{C},\ \operatorname{cod} f_i = \operatorname{dom} f_{i+1}\} \\ &= \{x_0 \xrightarrow{f_1} x_1 \xrightarrow{f_2} \cdots \xrightarrow{f_n} x_n\} \end{aligned}$$

de n-uplas de morfismos componibles junto con los mapas

$$d_i(f_1, \ldots, f_n) = (f_1, \ldots, f_{i-1},\ f_i \circ f_{i+1}\ , \ldots, f_n)$$

y
$$s_i(f_1,\dots,f_n) = (f_1,\dots,f_i,1,f_{i+1},\dots,f_n),$$
para cada $0 \leq i \leq n$.

En particular, si $\mathscr{C} = BG$ es el grupoide asociado a un grupo G, entonces su nervio consiste de n-uplas de elementos de G y los mapas de caras y degeneraciones están dados por
$$d_i(g_1,\dots,g_n) = (g_1,\dots,g_{i-1},g_ig_{i+1},\dots,g_n), \quad s_i(g_1,\dots,g_n) = (g_1,\dots,g_i,1,g_{i+1},\dots,g_n).$$

Definición 1.2.4. Dados dos complejos simpliciales $X, Y : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathsf{Set}$, un **morfismo de conjuntos simpliciales** de X a Y es una transformación natural $f : X \to Y$. Concretamente, esto consiste en dar una familia de funciones $f_n : X_n \to Y_n$ tales que, para cada $0 \leq i \leq n$, los siguientes diagramas conmutan

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ Y_n \arrow[r, "d_i"'] & Y_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ Y_n \arrow[r, "s_i"'] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

Es decir, un morfismo de conjuntos simpliciales consiste de una colección de aplicaciones que sea compatible con los mapas de caras y degeneraciones.

Observación 1.2.2. Los conjuntos simpliciales junto con los morfismos antes definidos forman una categoría[1], que notaremos sSet.

Observación 1.2.3. Un morfismo $f : K \to L$ de complejos simlpiciales ordenados induce a su vez un morfismo de conjuntos simpliciales dado por $f_n[v_{i_1},\dots,v_{i_n}] := [f(v_{i_1}),\dots,f(v_{i_n})]$ para cada n-símplex $[v_{i_1},\dots,v_{i_n}]$ (posiblemente degenerado) de K.

De forma similar, una función continua $f : X \to Y$ induce un morfismo $f_* : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ entre conjuntos singulares vía la postcomposición. De hecho,

Definición 1.2.5. El **funtor singular** $\mathcal{S} : \mathsf{Top} \to \mathsf{sSet}$ asigna a cada espacio su conjunto singular, y a cada función continua $f : X \to Y$ el morfismo simplicial $f_* : \mathcal{S}(X) \to \mathcal{S}(Y)$ dado por $(f_*)_n(\sigma) = f \circ \sigma$ para cada $\sigma : |\Delta^n| \to X$.

Observación 1.2.4. Si X es un conjunto simplicial, el conjunto X_n está determinado por los morfismos de conjuntos simpliciales de Δ^n a X.

Concretamente, por el lema de Yoneda tenemos una biyección natural
$$\hom_{\mathsf{sSet}}(\Delta^n, X) \simeq X_n$$
que a cada elemento $x \in X_n$ le asigna un morfismo de conjuntos simpliciales $\iota_x : \Delta^n \to X$ que satisface $\iota_x(1_{[\![n]\!]}) = x$.

Esto se corresponde con la intuición que proveen los ejemplos anteriores, en los que los n-símplices de un conjunto simplicial son alguna «manifestación» de el n-símplex estándar: como la cara de un m-símplex de dimensión mayor, como un m-símplex de dimensión menor que represente un colapso del mismo, o como el n-símplex singular de un espacio topológico.

Definición 1.2.6. Sea X un conjunto simplicial. Un n-simplex $x \in X_n$ se dice **degenerado** si existe $y \in X_{n-1}$ tal que $s_i(y) = x$ para algún $i \in [\![n]\!]_0$. En caso contrario, decimos que x es **no degenerado**.

[1]Esta es precisamente la categoría de prehaces de $\mathbf{\Delta}^{op}$.

1.3. Realización Geométrica

Durante la materia vimos como a partir de un complejo simplicial K podemos construir un espacio topológico $|K|$, la realización geométrica de K. Siguiendo esta idea, queremos extender esta noción al contexto de los conjuntos simpliciales.

Definición 1.3.1 (realización geométrica, primera definición). Sea X un conjunto simplicial. Dotando a cada conjunto X_n de la topología discreta, definimos la **realización geométrica** de X como el espacio

$$|X| = \left(\coprod_{n\geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) \Big/ \sim$$

donde identificamos a los puntos $(x, |d^i|(p)) \sim (d_i(x), p)$ y $(x, |s^i|(p)) \sim (s_i(x), p)$.

Esto formaliza la intuición anterior: para cada $x \in X_n$ construimos una copia del n-símplex estándar y los pegamos en función de si son caras o colapsos unos de otros.

Además, como veremos en breve esta asignación es funtorial, teniéndose así un análogo a la realización geométrica para complejos simpliciales.

Proposición 1.3.1. La realización geométrica del n-símplex estándar $\Delta^n : \mathbf{\Delta}^{op} \to \mathsf{Set}$ es homeomorfa a la realización geométrica del n-símplex estándar como complejo simplicial.

Demostración. Para evitar ambiguedades, en toda la demostración notaremos $|\Delta^n|$ exclusivamente para referirnos a la realización geométrica del n-símplex como complejo simplicial. Por otro lado, notaremos $|\mathbf{\Delta}(-, n)|$.

Para cada $k \in \mathbb{N}_0$ tenemos una aplicación

$$(f, x) \in \mathbf{\Delta}(k, n) \times |\Delta^k| \to |f|(x) \in |\Delta^n|,$$

que resulta continua pues cada espacio $\mathbf{\Delta}(k, n)$ es discreto.

Ésta familia de funciones induce un morfismo en el coproducto que pasa al cociente por las identificaciones de la realización geométrica, pues si g es un mapa de cocara o codegeneración, entonces

$$r(g^*(f), x) = |fg|(x) = r(f, |g|(x)).$$

Se tiene entonces una función continua $r : [(f, x)] \in |\mathbf{\Delta}(-, n)| \to |f|(x) \in |\Delta^n|$.

Por otro lado, podemos considerar la inclusión $i : |\Delta^n| \to |\mathbf{\Delta}(-, n)|$ dada por la composición

$$|\Delta^n| \xrightarrow{\simeq} \{id\} \times |\Delta^n| \hookrightarrow |\mathbf{\Delta}(-, n)|,$$

que satisface $ri = 1$ pues

$$ri(x) = [(id, x)] = |id|(x) = x$$

para todo $x \in |\Delta^n|$. En particular sabemos que i es inyectiva. Por lo tanto, para terminar basta ver que i es sobreyectiva, en cuyo caso es un homeomorfismo con inversa f.

Equivalentemente, resta ver que todo elemento $[(f, x)]$ está relacionado con un punto de la forma (id, y) para cierto $y \in |\Delta^n|$. En efecto, sea $(f, x) \in |\mathbf{\Delta}(-, n)|$ con $f : [\![k]\!] \to [\![n]\!]$ un morfismo de posets y $x \in |\Delta^k|$. Sabemos entonces que existen mapas de cocara o codegeneración $f_1, \ldots, f_n$ tales que $f = f_1 \cdots f_n$. En consecuencia es

$$\begin{aligned} [(f, x)] &= [(f_1 \cdots f_n, x)] = [(f_n^* \circ \cdots \circ f_1^*(id), x)] \\ &= [(id, |f_1 \cdots f_n|(x))] = [(id, |f|(x))], \end{aligned}$$

lo que concluye la demostración.

Definición 1.3.2. Sea X un conjunto simplicial. Su **categoría de símplices** es la categoría coma $\Delta \downarrow X$, donde $\Delta : \mathbf{\Delta} \to \mathsf{Set}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ es el embedding de Yoneda de $\mathbf{\Delta}$ y $X : \mathbf{\Delta} \to \mathsf{Set}^{\mathbf{\Delta}^{op}}$ es el funtor que vale constantemente X. Concretamente, los objetos de $\Delta \downarrow X$ son *símplices* de X, entendidos como morfismos simpliciales $\Delta^n \to X$, y las flechas son morfismos $\theta : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$ de posets tales que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Delta^n \arrow[dr, "\sigma"] \arrow[dd, "\theta_*"'] & \\
& X \\
\Delta^m \arrow[ur, "\tau"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta, donde θ_* es la postcomposición por θ.

Teorema 1.3.1. Si X es un conjunto simplicial, entonces

$$|X| \simeq \operatorname*{colim}_{\substack{\Delta^n \to X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} |\Delta^n|.$$

Demostración. Observemos que si Z es un espacio topológico arbitrario, una función continua $g : |X| \to Z$ se corresponde unívocamente con una función continua $\tilde{g} : \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \to Z$ que sea compatible con la relación que identifica caras y colapsos.

A su vez, usando la propiedad universal del coproducto y el hecho de que cada espacio X_n tiene la topología discreta, esto equivale a dar funciones

$$\lambda_x : |\Delta^n| \to Z$$

para cada $x \in X_n$ y $n \geq 0$, que satisfagan las condiciones de compatibilidad de antes: esto es, que para cada morfismo de posets[2] $\theta : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$ se tenga $\lambda_{X(\theta)(x)} = \lambda_x \circ |\theta| = |\theta_*|(\lambda_x)$.

Recordemos ahora que, por el lema de Yoneda, tenemos que

$$\hom(\Delta^n, \Delta^m) \simeq \mathbf{\Delta}(n, m) = \{\theta : [\![n]\!] \to [\![m]\!] : \ \theta \text{ es morfismo de posets}\}$$

y

$$\hom(\Delta^n, X) \simeq X_n$$

para cada $n, m \geq 0$. Por lo tanto, cada elemento $x \in X_n$ se corresponde a un único morfismo simplicial $\sigma_x : \Delta^n \to X$, y toda flecha $\Delta^n \to \Delta^m$ es la poscomposición por cierto morfismo de posets $\theta : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$.

En éstos terminos, la información anterior se puede describir como un morfismo $\lambda_\sigma : |\Delta^n| \to Z$ para cada símplex $\sigma : \Delta^n \to X$, de forma que para todo morfismo de posets $\theta : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$ y símplices $\sigma : \Delta^n \to X, \tau : \Delta^m \to X$ tales que $\sigma = \tau\, \theta_*$ se tenga que $\lambda_\sigma = \lambda_\tau |\theta_*|$.

[2] Si bien la condición original era sobre los mapas de caras y degeneración, que son imagen por X de los mapas de cocaras y codegeneración en $\mathbf{\Delta}$. Al clausurar la relación de equivalencia se tiene una condición equivalente reemplazando éstos por cualquier función $X(\theta)$ con θ un morfismo en $\mathbf{\Delta}$.

Es decir, dar un morfismo $g : |X| \to Z$ es equivalente a dar un cocono sobre Z para el funtor $F : \Delta \downarrow X \to \mathsf{Top}$ que envía $(\sigma : \Delta^n \to X) \xrightarrow{\theta_*} (\tau : \Delta^m \to X)$ a $|\Delta^n| \xrightarrow{|\theta_*|} |\Delta^m|$.

Por otro lado, tenemos un cocono sobre X dado por las funciones

$$\iota_\sigma : p \in |\Delta^n| \to [(x, p)] \in |X|,$$

para cada $\sigma : \Delta^n \to X$ que está en correspondencia con $x \in X_n$. Por las observaciones anteriores, sabemos que $(\lambda_\sigma)_{\sigma \in \Delta \downarrow X}$ se factoriza por $(\iota_\sigma)_{\sigma \in \Delta \downarrow X}$ a través de g ya que es

$$\lambda_\sigma(p) = g([(x, p)]) = g(\iota_\sigma(x, p))$$

para todo $\sigma : \Delta^n \to X$ y $p \in |\Delta^n|$. Pero como notamos anteriormente, de existir una función continua $|X| \to Z$ está determinada por lo que vale en la imagen de cada morfismo ι_σ. Hemos visto entonces que todo cono sobre $F : \Delta \downarrow X \to \mathsf{Top}$ se factoriza a través de $(\iota_\sigma)_\sigma$ de forma única, y esto es precisamente que

$$|X| \simeq \operatorname*{colim}_{\substack{\Delta^n \to X \\ \text{en } \Delta \downarrow X}} |\Delta^n|.$$

Proposición 1.3.2. Se tiene un funtor

$$|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$$

que asigna a cada conjunto simplicial X su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial $f : X \to Y$ una flecha $|f| : |X| \to |Y|$ inducida por cada función $f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \to Y_n \times |\Delta^n|$.

Demostración. En primer lugar, notemos que las aplicaciones $\{f_n \times 1\}_{n \geq 1}$ inducen una función continua

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{n\geq 0} X_n \times |\Delta^n| \arrow[r, "\widetilde{f}"] & \coprod_{n\geq 0} Y_n \times |\Delta^n| \\
X_n \times |\Delta^n| \arrow[r, "f_n \times 1"] \arrow[u, hook] & Y_n \times |\Delta^n| \arrow[u, hook]
\end{tikzcd}$$

entre los coproductos. Como f es un morfismo simplicial, si $\theta : [\![m]\!] \to [\![m]\!]$ es un morfismo de posets entonces el diagrama

$$\begin{tikzcd}
X_n \times |\Delta^n| \arrow[r, "X\theta"] \arrow[d, "f_n \times 1"'] & X_m \times |\Delta^n| \arrow[d, "f_m \times 1"] \\
Y_n \times |\Delta^n| \arrow[r, "Y\theta"] & Y_m \times |\Delta^n|
\end{tikzcd}$$

conmuta. Por lo tanto, se tiene que

$$\widetilde{f}(X\theta(x), p) = (f_m X\theta(x), p) = (Y\theta f_n(x), p)$$

y

$$\widetilde{f}(x, |\theta|(p)) = (f_n(x), |\theta|(p)),$$

lo que nos dice que $\widetilde{f}$ manda puntos relacionados en puntos relacionados. En consecuencia, está bien definida la función continua $|f| : |X| \to |Y|$ que envía $[(x, p)]$ a $[(f_n(x), p)]$ si $x \in X_n$, y de esta caracterización se deduce la funtorialidad de $|\cdot|$.

Bibliografía

[1] P. Goerss y J. Jardine, *Simplicial Homotopy Theory*. Birkhäuser, 2010.

[2] G. Friedman. *An elementary introduction to simplicial sets*, arXiv:0809.4221v5 [at], 2016.