Topología Algebraica

Guido Arnone

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. El nervio de U es el complejo simplicial $N(U)$ cuyos vértices son los abiertos del cubrimiento y los símplices son los subconjuntos finitos no vacíos de U, $s = \{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$. Notar que efectivamente $N(U)$ es un complejo simplicial. Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \not\leq n-1$. Probar que:

a) Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.

b) Los espacios discretos tienen dimensión 0.

c) El intervalo I tiene dimensión 1.

d) Si K complejo simplicial finito y $\dim K = n$ entonces $\dim |K| \leq n$. (En realidad vale la igualdad, se verá más adelante).

Demostración. Probamos cada inciso por separado.

a) Sea $A \subseteq X$ cerrado, $n := \dim X$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A. Existe entonces para cada $i \in I$ un abierto V_i de X tal que $U_i = V_i \cap A$, y es entonces que la colección $\mathcal{O} = \{V_i\}_{i \in I} \cup \{A^c\}$ cubre X por abiertos, ya que A es cerrado. Por hipótesis, tenemos entonces un refinamiento $\tilde{\mathcal{O}} = \{O_j\}_{j \in J}$ de $\mathcal{O}$ tal que $N(\tilde{\mathcal{O}})$ es un complejo simplicial de dimensión menor o igual que n. Afirmamos ahora que $\tilde{\mathcal{U}} = \{O_j \cap A\}_{j \in J}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$: tenemos que

$$\bigcup_{j \in J} O_j \cap A = A \cap \bigcup_{j \in J} O_j = A \cap X = A,$$

y dado $j \in J$ luego $O_j \cap A$ es abierto en A pues O_j es abierto en X. Por úlimo, si $O_j \cap A \neq \emptyset$ luego $O_j \not\subset A^c$ y existe $i_j \in I$ con $O_j \subset V_{i_j}$ y entonces $O_j \cap A \subset V_{i_j} \cap A = U_{i_j} \in \mathcal{U}$. En cualquier caso, $O_j \cap A$ es subconjunto de algún elemento de $\mathcal{U}$. Para terminar, veamos que $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$. Sea $\sigma = \{O_{j_0} \cap A, \ldots, O_{j_k} \cap A\}$ un símplex del nervio de $\tilde{\mathcal{U}}$. Luego,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^{k} A \cap O_{j_i} \subset \bigcap_{i=0}^{k} O_{j_i}$$

y entonces $\{O_{j_0}, \dots, O_{j_k}\}$ es un símplex de $N(\tilde{\mathcal{O}})$. Como este último tiene dimensión a lo sumo n, es

$$\dim \sigma = k \leq \dim N(\tilde{\mathcal{O}}) \leq n$$

y en consecuencia, $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$.

b) Sea $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ discreto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X por abiertos. Afirmamos que el conjunto $\mathcal{O} := \{ \{x\} : x \in X \}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Los elementos de $\mathcal{O}$ son abiertos pues X es discreto. Por otro lado si $\{x\} \in \mathcal{O}$, entonces como $\mathcal{U}$ es cubrimiento de X existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Equivalentemente es $\{x\} \subset U$, y así probamos que el primero es subconjunto de algún abierto de $\mathcal{U}$. Basta entonces probar que el nervio de $\mathcal{O}$ es de dimensión 0. Como los simplices de $N(\mathcal{O})$ consisten de abiertos de $\mathcal{O}$ cuya intersección sea no vacía, alcanza con ver que cualesquiera dos abiertos de $\mathcal{O}$ son disjuntos. Esto es claro: si $\{x\} \neq \{y\} \in \mathcal{O}$, entonces $x \neq y$ y $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

c) Veamos en primer lugar que $\dim I \not\leq 0$. Sea $\mathcal{U} = \{[0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 0]\}$ cubrimiento de I. Cualquier refinamiento de $\mathcal{U}$ tiene entonces al menos 2 elementos. Si I tuviese dimensión cero, existiría un refinamiento $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}$ cuyo nervio es de dimensión cero. Esto diría que los abiertos de $\mathcal{O}$ son disjuntos y por conexión conluiríamos entonces que $1 = \#\mathcal{O} \geq 2$, lo que es absurdo.

   Probemos ahora que $\dim I \leq 1$. Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de I. Como los abiertos de $\mathbb{R}$ son unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos, luego para cada $i \in I$ existen conjuntos $J_i \subset \mathbb{N}$ e intervalos $\{I^i_j\}_{j \in J_i}$ abiertos (en I) y disjuntos tales que $U_i = \bigsqcup_{j \in J_i} I^i_j$. Por compacidad tenemos luego intervalos $I_1, \dots, I_n \in \{I^i_j\}_{i \in I, j \in J_i}$ tales que $\bigcup_{i=1}^N I_i = I$ y, por construcción, cada intervalo es subconjunto de algún abierto U_i. Obtuvimos así un refinamiento $\mathcal{O}_0 = \{I_1, \dots, I_n\}$ de $\mathcal{U}$. Construimos a continuación un refinamiento $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}$ de la siguiente forma: tomamos primero los intevalos de $\mathcal{O}_0$. A los que no sean abiertos (como intervalos) les quitamos los extremos: estos seguirán siendo abiertos en I, pues sólo pueden provenir de alguno de la forma $[0, 1], (a, 1]$ o $[0, b)$. Luego, dados $J_0, J_1 \in \mathcal{O}_0$ con $s \in J_s$ para $s \in \{0, 1\}$, agregamos entornos $E_0 := [0, \varepsilon), E_1 := (1 - \varepsilon, 1]$ a $\mathcal{O}$ con $0 < \varepsilon \ll 1$ tal que estos sean disjuntos y estén contenidos en J_0 y J_1 respectivamente. Esto garantiza que $\mathcal{O}$ cubre a I ya que volvemos a cubrir sus extremos. Finalmente, de existir algún intervalo que esté contenido en la unión de otros, seleccionamos alguno de ellos y lo quitamos. Repetimos el proceso hasta que no haya más intervalos de este tipo, lo cual es posible pues hay finitos intervalos en total. Como removemos intervalos de uno, $\mathcal{O}$ sigue siendo refinamiento pues sigue cubriendo a I.

   Afirmamos ahora que $N(\mathcal{O})$ es de dimensión a lo sumo 1, o equivalentemente, que no hay tres intervalos de $\mathcal{O}$ cuya intersección sea no vacía. Supongamos que sí y sean $\{J_i\}_{1 \leq i \leq 3} \subset \mathcal{O}$ de intersección no vacía y tales que el interior de J_i en $\mathbb{R}$ es (a_i, b_i)[1]. Como los intervalos no se contienen entre sí, existen dos de ellos distintos

[1] Esto evita tratar por separado la posible elección de E_0 o E_1, ya que al ser los únicos dos intervalos semiabiertos, el argumento que sigue funciona aún si $a_1 \in J_1$ o $b_3 \in J_3$. Siempre tenemos que tanto J_2 como $J_1 \cap J_3$ son intervalos abiertos, y no hace falta que las desigualdades entre a_1 y a_2 o b_2 y b_3 sean estrictas.

con el menor extremo izquierdo y mayor extremo derecho, que suponemos son J_1 y J_3 respectivamente. Así, $J_1 \cap J_3 = (a_3, b_1)$. Como $J_2 \not\subseteq J_1$ debe ser $b_2 > b_1$, y similarmente como $J_2 \not\subseteq J_3$ tenemos que $a_2 < a_3$. Si ahora $s \in J_2$, entonces $a_1 \leq a_2 < s < b_2 \leq b_3$. Si $s \neq J_1$, luego $s > b_1 > a_3$ y consecuentemente $s \in J_3$. En cualquier caso, $s \in J_1 \cup J_2$. Esto implica que $J_2 \subset J_1 \cap J_2$, lo que es absurdo: no hay entonces tres intervalos cuya intersección sea no vacía. Dado un cubrimiento arbitrario encontramos un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo 1, lo que completa la demostración.

d) Hacemos inducción en $\dim K$. Si $\dim K = 0$, entonces los símplices de K tienen todos dimensión cero. Por lo tanto, si $\sigma \in S_K$, entonces $|\sigma| \equiv *$. Luego, como la realización geométrica $|K|$ de K tiene la topología final respecto de las inclusiones $|\sigma| \hookrightarrow |K|$, este último es homeomorfo a un espacio discreto de $\#S_K = \#V_K$ puntos. Por (b), sabemos entonces que $\dim |K| = 0$. Sea ahora K de dimensión n y supongamos ahora que $\dim |L| = m$ para todo complejo simplicial L de dimensión $m < n$. Como suponemos K finito, cada (realizción de) sínmplex $|\sigma| \subset K$ es compacta en

$\square$