Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Prácticas 4 y 5

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

Elegí el ejercicio (4) de la práctica 4 y los ejercicios (1) y (5) de la práctica 5. Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Observación. Si notamos $I : \mathsf{Top} \to \mathsf{hTop}$ al funtor que es la identidad en objetos y envía cada función continua a su clase de homotopía, para cada espacio topológico X tenemos un funtor al componer con $\mathsf{hTop}(X, -)$,

$$\begin{tikzcd} & \mathsf{hTop} \arrow[dr, "\mathsf{hTop}(X,-)"] & \\ \mathsf{Top} \arrow[ur, "I"] \arrow[rr, dashed] & & \mathsf{Set} \end{tikzcd}$$

Concretamente, éste envía cada espacio Y a $[X, Y]$ y cada función continua $f : Y \to Z$ a

$$[f]_* : [h] \in [X, Y] \mapsto [fh] \in [X, Z].$$

En particular, si f es una equivalencia homotópica entonces If es un isomorfismo y por lo tanto así lo es $[f]_*$.

Por comodidad, en el resultado siguiente notamos $X^{(-1)} = \emptyset$ para cada CW-complejo X.

Lema 1. Sea (X, A) un CW-par, $n \in \mathbb{N}$ y (Z, Y) un par topológico tal que $\pi_n(Z, Y, y) = 0$ para todo $y \in Y$. Si $f : (X, A) \to (Z, Y)$ es una función continua de pares que satisface $f(X^{(n-1)} \cup A) \subset Y$, entonces existe otra función $g : X \to Z$ continua y homotópica a f relativa a $X^{(n-1)} \cup A$ que satisface $g(X^{(n)} \cup A) \subset Y$.

Demostración. Tomemos una n-celda e de $X^{(n)}$ que no sea una celda de A, y sea $\xi : \mathbb{D}^n \to e$ su correspondiente función de adjunción. Notemos que la función $f\xi : \mathbb{D}^n \to Z$ siempre representa a una clase de equivalencia de $\pi_n(Z, Y, f\xi(s))$, donde $s \in \partial\mathbb{D}^n$, pues si $n \geq 1$ entonces

$$f\xi(\partial\mathbb{D}^n) \subset f(X^{(n-1)}) \subset Y.$$

Al ser $\pi_n(Z, Y, f\xi(s)) = 0$, existe una homotopía $H : \mathbb{D}^n \times I \to Z$ entre $f\xi$ y g relativa a $\partial\mathbb{D}^n$ con $\operatorname{im} H_1 \subset Y$. Puesto que la homotopía H es relativa al borde del disco, pasa al cociente por las identificaciones que hace ξ. Existe entonces $\tilde{H} : e \times I \to Z$ tal que

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{D}^n \times I \arrow[r, "H"] \arrow[d, "\xi \times 1"'] & Z \\
e \times I \arrow[ur, dashed, "\tilde{H}"'] &
\end{tikzcd}$$

conmuta. En particular esto dice que

$$\operatorname{im} \tilde{H}_1 = \tilde{H}_1(e) = \tilde{H}_1\xi(\mathbb{D}^n) = H_1(\mathbb{D}^n) \subset Y$$

y $f\xi = H_0 = \tilde{H}_0\xi$. Como ξ es sobreyectiva de aquí vemos que $\tilde{H}_0 = f$, y como $\tilde{H}$ es relativa a $\dot{e}$ (ya que H es relativa a $\partial\mathbb{D}^n$) sabemos que $\tilde{H}_t|_{\dot{e}} = f|_{\dot{e}}$ para todo $t \in I$.

Esto nos dice que para cada n-celda e^n_β de $X^{(n)}$ que no es una celda de A, existe una homotopía $H^n_\beta : e^n_\beta \times I \to Z$ relativa a $\dot{e}^n_\beta$ que satisface

- $(H^n_\beta)_0 = f|_{e^n_\beta}$,
- $\operatorname{im}(H^n_\beta)_1 \subset Y$,
- $(H^n_\beta)_t|_{\dot{e}^n_\beta} = f|_{\dot{e}^n_\beta}$ para todo $t \in I$.

En virtud de que dos n-celdas distintas se intersecan a lo sumo en sus bordes y allí cada homotopía H^n_β coincide con f, por el lema de pegado está bien definida la función continua

$$H : X^{(n)} \cup A \times I \to Z$$

que cumple $H|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv f|_{X^{(n-1)} \cup A}$ y $H|_{e^n_\beta} \equiv H^n_\beta$ en cada n-celda e^n_β que no es una celda de A. Además, por construcción es $H_0 = f|_{X^{(n)} \cup A}$ e $\operatorname{im} H_1 \subset Y$.

Finalmente como la inclusión del subcomplejo $X^{(n)} \cup A \hookrightarrow X$ es una cofibración, existe una homotopía $\tilde{H} : X \times I \to Z$ que coincide con H en $X^{(n)} \cup A$ y satisface $\tilde{H}_0 = f$.

$$\begin{tikzcd}
X^{(n)} \cup A \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[d, hook, "i"'] & X^{(n)} \cup A \times I \arrow[d, hook, "i \times 1"'] \arrow[ddr, bend left, "H"] & \\
X \arrow[r, "\iota_0"] \arrow[drr, bend right, "f"'] & X \times I \arrow[dr, dashed, "\exists \tilde{H}"'] & \\
 & & Z
\end{tikzcd}$$

En particular es $\tilde{H}_1(X^{(n)} \cup A) = \operatorname{im} H_1 \subset Y$ y

$$\tilde{H}|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv H|_{X^{(n-1)} \cup A \times I} \equiv f|_{X^{(n-1)} \cup A},$$

así que basta tomar $g := \tilde{H}_1$.

$\square$

A partir del resultado anterior probamos a continuación el *lema crucial*, pues será necesario para resolver el ejercicio (4).

Lema 2. Sea (X, A) un CW-par y (Z, Y) un par topológico con $\pi_n(Z, Y) = 0$ para todo $n \geq 1$ para el cual existen celdas de $X^{(n)}$ que no pertenecen a A. Si $f : (X, A) \to (Z, Y)$ es una función continua de pares, entonces existe otra función $g : X \to Z$ continua y homotópica a f relativa a A que satisface $g(X) \subset Y$.

Demostración. Utilizando el Lema 1 inductivamente, tenemos una sucesión de homotopías

$$\{H^k : X \times I \to Z\}_{k \geq 0}$$

tales que

- $H^0_0 = f$,
- $H^k_1 = H^{k+1}_0$,
- H^k es relativa a $X^{(k-1)} \cup A$, y
- $H^k_1(X^{(k)} \cup A) \subset Y$.

En el k-ésimo paso, de haber k-celdas que no pertenezcan a A tomamos la homotopía que nos garantiza el Lema 1 para la función H^{k-1}_1, y en caso contrario tomamos la homotopía constante.

Como cada homotopía H^i es relativa a A, inductivamente vemos que

$$H^i_t(a) = H^i_0(a) = H^{i-1}_1(a) = H^{i-1}_t(a) = \cdots = H^0_t(a) = H^0_0(a) = f(a)$$

para todo $a \in A$, $i \geq 0$ y $t \in I$.

Del mismo modo, para cada $x \in X$ existe $n \geq 1$ tal que $x \in X^{(n)}$ y como H^k es relativa a $X^{(n)}$ si $k > n$, es

$$H^n_t(x) = H^k_t(x) \in Y$$

para todo $k > n$ y $t \in I$.

Esto último nos permite definir $g : X \to Z$ poniendo $g|_{X^{(n)}} \equiv H^n_1|_{X^{(n)}}$ para cada $n \geq 0$. Por construcción g resulta continua (pues lo es en cada esqueleto de X) y satisface tanto $g(X) \subset Y$ como $g|_A = f|_A$. Veamos ahora que g es homotópica a f relativa a A.

Fijemos una sucesión $(t_n)_{n \geq 0} \subset \mathbb{R}$ tal que $t_0 = 0$ y $t_n \to 1$ de forma estrictamente creciente, y notemos $c_i : [t_i, t_{i+1}] \to I$ a la función lineal que vale 0 en t_i y 1 en t_{i+1}.

Como $H^i_1 = H^{i+1}_0$ para todo $i \geq 0$, por el lema de pegado podemos definir una función continua

$$H : X \times [0, 1) \to Z$$

que satisface $H|_{X \times [t_i, t_{i+1}]} \equiv H^i \circ c_i$ para cada $i \geq 0$. Así, es $H_0 = f$ y $H_t|_A = f|_A$ para todo $t \in [0, 1)$.

Afirmamos que

$$\begin{aligned} \tilde{H} : X \times I &\longrightarrow Z \\ (x, t) &\mapsto \begin{cases} H(x, t) & \text{si } t \in [0, 1) \\ g(x) & \text{si } t = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

es una homotopía entre f y g relativa a A. Por las observaciones anteriores sólo resta ver que ésta es continua, y es suficiente probarlo en cada cerrado $X^{(n)} \times I$.

Efectivamente, en $X^{(n)} \times [0, t_{n+1}]$ la función $\tilde{H}$ es continua pues coincide con H, y en $[t_{n+1}, 1]$ es constante, pues cuando $m > n$ sabemos que $H^m|_{X^{(n)}} \equiv H^n|_{X^{(n)}}$. Por lo tanto $\tilde{H}$ es continua en $X^{(n)} \times I$ para cada $n \in \mathbb{N}_0$, lo que concluye la demostración. $\square$

Ejercicio 4. Probar que una equivalencia débil $f : Y \to Z$ induce biyecciones $[X, Y] \to [X, Z]$ para todo CW-complejo X.

Demostración. En primer lugar, notemos que f *se factoriza a través de* M_f,

$$\begin{tikzcd} & M_f \arrow[dr, "j"] & \\ Y \arrow[ur, hook, "i"] \arrow[rr, "f"] & & Z \end{tikzcd}$$

donde la inclusión i es una cofibración y j es una equivalencia homotópica. Esto a su vez da un diagrama en Set,

$$\begin{tikzcd} & {[X, M_f]} \arrow[dr, "{[j]_*}"] & \\ {[X, Y]} \arrow[ur, "{[i]_*}"] \arrow[rr, "{[f]_*}"] & & {[X, Z]} \end{tikzcd}$$

con $[j]_*$ biyectiva. Por lo tanto $[f]_*$ es biyectiva sí y solo si $[i]_*$ lo es. Usando una vez más que j es equivalencia homotópica vemos también que f es una equivalencia débil si y sólo si lo es i. Esto nos dice que sin pérdida de generalidad podemos probar el ejercicio para un subespacio Y de un espacio topológico Z e $i : Y \to Z$ la inclusión.

Como por hipótesis i induce isomorfismos en los grupos de homotopía, de la suceción exacta larga de pares

$$\cdots \to \pi_n(Y, y) \xrightarrow{i_*} \pi_n(Z, y) \to \pi_n(Z, Y, y) \to \ldots$$

vemos que debe ser $\pi_n(Z, Y, y) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $y \in Y$.

Por lo tanto, si $g : X \to Z$ es una función continua, es una función de pares de $(X, \emptyset)$ a (Z, Y). Por el Lema 2, sabemos entonces que existe $h : X \to Z$ continua tal que $h \simeq g$ y $h(X) \subset Y$. En consecuencia, correstringiendo h a Y vemos que

$$[i]_* \left([h|^Y] \right) = [ih|^Y] = [h] = [g],$$

lo que prueba la sobreyectividad de i_*.

Ahora veamos la inyectividad. Sean $h_0, h_1 : X \to Y$ funciones continuas tales que $ih_0 \simeq ih_1$, y veamos que h_0 y h_1 son homotópicas. Por hipótesis sabemos que existe una homotopía H entre ih_0 e ih_1. Más aún, ésta puede ser vista como una función de pares de $(X \times I, X \times \partial I)$ a (Z, Y), pues tanto ih_0 como ih_1 tienen imagen en Y.

Una vez más, por el Lema 2 existe una función continua $K : (X \times I, X \times \partial I) \to (Z, Y)$ y una homotopía $\Gamma : K \simeq H$ relativa a $X \times \partial I$ tal que $K(X \times I) \subset Y$. En particular H y K coinciden en $X \times \partial I$, así que si $s \in \{0, 1\}$ entonces

$$h_s(x) = H(x, s) = K(x, s)$$

para todo $x \in X$. Por lo tanto la correstricción $K|^Y : X \times I \to Y$ de K es una función continua que satisface $K_s = h_s$, y consecuentemente h_0 y h_1 son homotópicas. $\square$

Lema 3. Sea $n \in \mathbb{N}$ y $f : \mathbb{S}^{2n} \to \mathbb{S}^{2n}$ una función continua. Si f no tiene puntos fijos, entonces $\deg f = -1$.

Demostración. Notemos que como la homología de $\mathbb{S}^{2n}$ es trivial excepto en grado 0 y $2n$, es

$$\begin{aligned}\lambda(f) &= \sum_{q\geq 0}(-1)^q \cdot \operatorname{tr}(H_n f) = \operatorname{tr}(H_0 f) + (-1)^{2n}\operatorname{tr}(H_{2n} f)\\ &= 1 + (-1)^{2n}\deg f = 1 + \deg f.\end{aligned}$$

Como f no tiene puntos fijos debe ser $\lambda(f) = 0$, lo que nos dice que $\deg f = -1$. □

Ejercicio 1. Probar que $\mathbb{Z}_2$ es el único grupo no trivial que puede actuar libremente en una esfera de dimensión par.

Demostración. Sea $n \in \mathbb{N}$ y G un grupo no trivial que actúa libremente en $\mathbb{S}^{2n}$. Esto es equivalente a que, para cada $s \in G$ distinto de la unidad, la función

$$\begin{aligned} m_s : \mathbb{S}^{2n} &\to \mathbb{S}^{2n}\\ x &\longmapsto s \cdot x\end{aligned}$$

no tenga puntos fijos. Por el Lema 3 sabemos entonces que $\deg m_s = -1$ para todo $s \neq 1$.

Si ahora tomamos $g, h \in G \setminus \{1\}$ tenemos que

$$\deg m_{gh^{-1}} = \deg m_g \circ m_{h^{-1}} = \deg m_g \cdot \deg m_{h^{-1}} = (-1)^2 = 1,$$

asi que el contrarrecíproco del Lema 3 dice que $m_{gh^{-1}}$ tiene puntos fijos: como la acción es libre, debe ser $gh^{-1} = 1$. Es decir, debe ser $g = h$.

Dado que G no es trivial, existe algún elemento $g \in G \setminus \{1\}$. El argumento anterior nos dice que

$$G = \{1, g\}$$

así que necesariamente $G \simeq \mathbb{Z}_2$. □

Observación. Sabemos además que efectivamente $\mathbb{Z}_2 = \langle \sigma \mid \sigma^2 \rangle$ actúa en $\mathbb{S}^{2n}$ de forma libre, por ejemplo vía $\sigma \cdot p := -p$.

Lema 4. Sea G un grupo. Si $x \in \mathbb{Z}[G]$ es no nulo y G-invariante, entonces G es finito y existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $x = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Demostración. Al $x \in \mathbb{Z}[G]$ ser no nulo, existen finitos elementos $g_1, \ldots, g_n \in G$ y enteros $a_1, \ldots, a_n$ con $a_1 \neq 0$ tales que

$$x = a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n.$$

Como para cada $g \in G$ es

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = x = g g_1^{-1} x = a_1 g + a_2 g g_1^{-1} g_2 + \cdots + a_n g g_1^{-1} g_n, \tag{1}$$

por la unicidad de la escritura en combinaciones formales necesariamente $g \in \{g_1, \ldots, g_n\}$. Esto prueba que $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ y en particular G resulta finito.

Ahora, si para cada $i \in [\![n]\!]$ ponemos $g = g_i$ en la igualdad (1), se tiene que

$$a_1 g_1 + \cdots + a_n g_n = a_1 g_i + \cdots + a_n g_i g_1^{-1} g_n.$$

Una vez más, por la unicidad de la escritura existe $k := a_1 \in \mathbb{Z}$ tal que $k = a_1 = \cdots = a_n$ y consecuentemente

$$x = a_1 g_1 + \ldots a_n g_n = k g_1 + \ldots k g_n = k \cdot \sum_{g \in G} g.$$

$\square$

Ejercicio 5. Probar que $\mathrm{cd}(G) = 0$ si y sólo si G es el grupo trivial.

Demostración. Si G es trivial un $\mathbb{Z}[G]$-módulo es simplemente un $\mathbb{Z}$ módulo, y entonces

$$0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathbb{Z} \to 0$$

es una resolución libre (en particular, proyectiva) de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial que tiene longitud cero.

Recíprocamente, supongamos que existe una resolución proyectiva

$$0 \to P_0 \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{Z} \to 0$$

de $\mathbb{Z}$ como $\mathbb{Z}[G]$-módulo trivial. En particular $\mathbb{Z}$ resulta un $\mathbb{Z}[G]$-módulo proyectivo y por lo tanto, el epimorfismo

$$r : \sum_{g \in G} k_g \cdot g \in \mathbb{Z}[G] \mapsto \sum_{g \in G} k_g \in \mathbb{Z}$$

tiene una sección $s : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[G]$. Como la acción de G en $\mathbb{Z}$ es trivial, es

$$g \cdot s(1) = s(g \cdot 1) = s(1)$$

para cada $g \in G$, y además $s(1) \neq 0$ pues al ser sección s es inyectiva. Esto dice que $s(1)$ es no nulo y G-invariante, así que por el Lema 4 existe $k \in \mathbb{Z}$ tal que $s(1) = k \cdot \sum_{g \in G} g$.

Aplicando r se obtiene

$$1 = rs(1) = r\left(k \cdot \sum_{g \in G} g\right) = k \cdot \sum_{g \in G} 1 = k|G|,$$

lo que a su vez implica $|G| = k = 1$, y por lo tanto G es el grupo trivial. $\square$