Topología Algebraica: examen final

Una introducción a los Conjuntos Simplciales

Guido Arnone

La categoria $\boldsymbol{\Delta}$ de ordinales finitos

Definición

La categoría $\boldsymbol{\Delta}$ *de ordinales finitos tiene por objetos a los conjuntos* $[\![n]\!] := \{0 < 1 < \cdots < n\}$ *y por flechas a los morfismos de posets* $f : [\![n]\!] \to [\![m]\!]$.

Definición

Definimos para cada $n \in \mathbb{N}_0$ *e* $i \in [\![n]\!]$ *los mapas de* ***cocaras***

$$\begin{aligned} d^i : [\![n-1]\!] &\to [\![n]\!] \\ j &\mapsto \begin{cases} j & \textit{si } j < i \\ j+1 & \textit{si } j \geq i \end{cases} \end{aligned}$$

y los mapas de ***codegeneraciones***

$$\begin{aligned} s^i : [\![n+1]\!] &\to [\![n]\!] \\ j &\mapsto \begin{cases} j & \textit{si } j \leq i \\ j-1 & \textit{si } j > i \end{cases} \end{aligned}$$

La categoria $\mathbf{\Delta}$ de ordinales finitos

Proposición

Toda flecha $[\![n]\!] \xrightarrow{f} [\![m]\!]$ *en* $\mathbf{\Delta}$ *se puede escribir como una composición de mapas de cocaras y codegeneraciones.*

♦

Proposición

Los mapas de cocaras y codegeneraciones satisfacen las siguientes ***identidades cosimpliciales****,*

$$\begin{cases} d^j d^i = d^i d^{j-1} & \textit{si } i < j \\ s^j d^i = d^i s^{j-1} & \textit{si } i < j \\ s^j d^j = s^j d^{j+1} = 1 & \\ s^j d^i = d^{i-1} s^j & \textit{si } i > j+1 \\ s^j s^i = s^i s^{j+1} & \textit{si } i \leq j \end{cases}$$

♦

Conjuntos Simpliciales

Definición

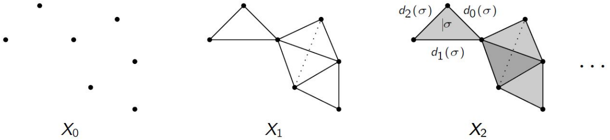
*Un **conjunto simplicial** es un funtor* $X : \mathbf{\Delta}^{\mathrm{op}} \to \mathsf{Set}$*.*
Concretamente, éste consiste de

(i) *una sucesión de conjuntos* $X_0, X_1, X_2, \ldots,$ *y*

(ii) *para cada* $n \in \mathbb{N}_0$ *e* $i \in [\![n]\!]$*, funciones* $d_i : X_n \to X_{n-1}$ *y* $s_i : X_n \to X_{n+1}$ *llamadas mapas de caras y degeneraciones respectivamente, que satisfacen las siguientes **identidades simpliciales**:*

$$\begin{cases} d_i d_j = d_{j-1} d_i & \textit{si } i < j \\ d_i s_j = s_{j-1} d_i & \textit{si } i < j \\ d_j s_j = d_{j+1} s_j = 1 & \\ d_i s_j = s_j d_{i-1} & \textit{si } i > j+1 \\ s_i s_j = s_{j+1} s_i & \textit{si } i \leq j \end{cases}$$

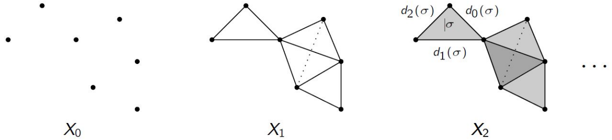
Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, "s_0", shift right=2] & X_1 \arrow[l, shift right=2, "d_0"'] \arrow[l, "d_1"] \arrow[r, "s_0", shift right=2] \arrow[r, "s_1", shift right=4] & X_2 \arrow[l, shift right=4, "d_0"'] \arrow[l, shift right=2, "d_1"'] \arrow[l, "d_2"] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- El n-**símplex estándar** $\Delta^n := \mathbf{\Delta}(-, [\![n]\!])$
- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

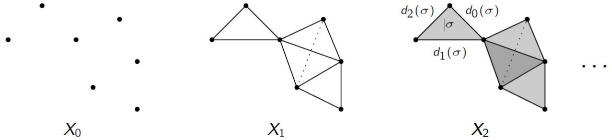
Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$
\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "d_0"] \arrow[r, leftarrow, "d_1"] \arrow[r, shift right=2, "s_0"'] & X_1 \arrow[r, shift left=4, leftarrow, "d_0"] \arrow[r, shift left=2, leftarrow, "d_1"] \arrow[r, leftarrow, "d_2"] \arrow[r, shift right=2, "s_0"'] \arrow[r, shift right=4, "s_1"'] & X_2 & \cdots
\end{tikzcd}
$$

- El n-**símplex estándar** $\Delta^n := \mathbf{\Delta}(-, [\![n]\!])$
- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Ejemplos

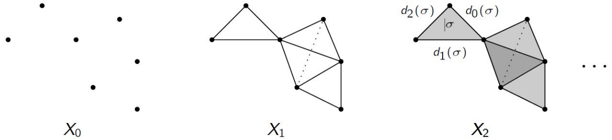


$$\begin{tikzcd} X_0 & X_1 \arrow[l, shift left=4, "d_0"'] \arrow[l, "d_1"'] & X_2 \arrow[l, shift left=8, "d_0"'] \arrow[l, shift left=4, "d_1"'] \arrow[l, "d_2"'] & \cdots \\ \end{tikzcd}$$

$$X_0 \xrightarrow{s_0} X_1, \qquad X_1 \xrightarrow{s_0} X_2, \qquad X_1 \xrightarrow{s_1} X_2$$

- El n**-símplex estándar** $\Delta^n := \mathbf{\Delta}(-, [\![n]\!])$
- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

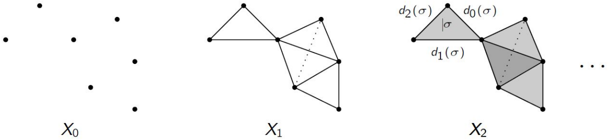
Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X_0 \arrow[r, shift right=6, "s_0"'] & X_1 \arrow[l, shift right=6, "d_0"'] \arrow[l, shift right=0, "d_1"'] \arrow[r, shift right=6, "s_0"'] \arrow[r, shift right=12, "s_1"'] & X_2 \arrow[l, shift right=12, "d_0"'] \arrow[l, shift right=6, "d_1"'] \arrow[l, shift right=0, "d_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- El n**-símplex estándar** $\Delta^n := \mathbf{\Delta}(-, [\![n]\!])$
- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Ejemplos



$$\begin{tikzcd}[column sep=huge]
X_0 \arrow[r, shift right=4, "s_0"'] & X_1 \arrow[l, shift right=4, "d_0"'] \arrow[l, "d_1"'] \arrow[r, shift right=4, "s_0"'] \arrow[r, shift right=8, "s_1"'] & X_2 \arrow[l, shift right=8, "d_0"'] \arrow[l, shift right=4, "d_1"'] \arrow[l, "d_2"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

- El n-**símplex estándar** $\Delta^n := \mathbf{\Delta}(-, [\![n]\!])$
- Los complejos simpliciales ordenados
- El espacio clasificante BG de un grupo G
- Los símplices singulares $\mathscr{S}(X)$ de un espacio topológico X

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

Dado un conjunto simplicial X, definimos su ***complejo de Moore*** *como el complejo de cadenas*

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y el borde

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_i$$

para cada $n \geq 0$. La ***homología*** *$H_\bullet(X)$ de X es la homología de este complejo de cadenas.*

- $\mathscr{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Conjuntos Simpliciales - Homología

Definición

Dado un conjunto simplicial X, definimos su ***complejo de Moore*** *como el complejo de cadenas*

$$\cdots \to \mathbb{Z}X_2 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_1 \xrightarrow{\partial} \mathbb{Z}X_0,$$

con $\mathbb{Z}X_n$ el grupo abeliano libre generado por el conjunto X_n y el borde

$$\partial = \sum_{i=1}^{n} (-1)^i d_i$$

para cada $n \geq 0$. La ***homología*** *$H_\bullet(X)$ de X es la homología de este complejo de cadenas.*

- $\mathscr{S}(X) \rightsquigarrow H_\bullet(X)$

Morfismos Simpliciales

Definición

Dados dos complejos simpliciales $X, Y : \boldsymbol{\Delta}^{op} \to \mathsf{Set}$*, un* ***morfismo de conjuntos simpliciales*** *de* X *a* Y *es una transformación natural* $f : X \to Y$*. Concretamente, esto consiste en dar una familia de funciones* $f_n : X_n \to Y_n$ *tales que para cada* $0 \leq i \leq n$ *los siguientes diagramas conmutan,*

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n-1} \arrow[d, "f_{n-1}"] \\ Y_n \arrow[r, "d_i"'] & Y_{n-1} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} X_n \arrow[r, "s_i"] \arrow[d, "f_n"'] & X_{n+1} \arrow[d, "f_{n+1}"] \\ Y_n \arrow[r, "s_i"'] & Y_{n+1} \end{tikzcd}$$

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K,\leq) \to (L,\preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos via

$$f_n([v_{i_0},\ldots,v_{i_n}]) = [f(v_{i_1}),\ldots,f(v_{i_n})].$$

- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes definido por

$$\varphi_n(g_0,\ldots,g_n) = (\varphi(g_0),\ldots,\varphi(g_n)).$$

Definición

*El **funtor singular** $\mathscr{S}$: Top $\to$ sSet asigna a cada espacio su complejo singular y a cada función continua $f : X \to Y$ el morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ dado por $(f_*)_n(\sigma) = f \circ \sigma$ para cada n-símplex singular $\sigma : |\Delta^n| \to X$.*

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K, \leq) \to (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos via

$$f_n([v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}]) = [f(v_{i_1}), \ldots, f(v_{i_n})].$$

- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes definido por

$$\varphi_n(g_0, \ldots, g_n) = (\varphi(g_0), \ldots, \varphi(g_n)).$$

Definición

*El **funtor singular** $\mathscr{S}$: $\mathrm{Top} \to \mathrm{sSet}$ asigna a cada espacio su complejo singular y a cada función continua $f : X \to Y$ el morfismo simplicial $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ dado por $(f_*)_n(\sigma) = f \circ \sigma$ para cada n-símplex singular $\sigma : |\Delta^n| \to X$.*

Morfismos Simpliciales - Ejemplos

- Un morfismo $f\colon (K, \leq) \to (L, \preceq)$ de complejos simpliciales ordenados induce un morfismo simplicial $f : K \to L$ entre los conjuntos simpliciales inducidos via

$$f_n([v_{i_0}, \ldots, v_{i_n}]) = [f(v_{i_1}), \ldots, f(v_{i_n})].$$

- Un morfismo de grupos $\varphi : G \to H$ induce un morfismo simplicial $\varphi : BG \to BH$ entre sus espacios clasificantes definido por

$$\varphi_n(g_0, \ldots, g_n) = (\varphi(g_0), \ldots, \varphi(g_n)).$$

Definición

El ***funtor singular*** $\mathscr{S} : \mathsf{Top} \to \mathsf{sSet}$ *asigna a cada espacio su complejo singular y a cada función continua* $f : X \to Y$ *el morfismo simplicial* $f_* : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ *dado por* $(f_*)_n(\sigma) = f \circ \sigma$ *para cada* n*-símplex singular* $\sigma : |\Delta^n| \to X$.

Subcomplejos, Productos, Coproductos

Definición

*Sea X un conjunto simplicial. Un **subconjunto simplicial** o subcomplejo de X es un conjunto simplicial K que satisface $K_n \subseteq X_n$ para cada $n \geq 0$ y cuyos mapas de caras y degeneraciones están dados por (co)restringir los de X.*

Definición

*Dados dos conjuntos simplciales X e Y se define su **producto** $X \times Y$ como el conjunto simplicial dado por*

$$(X \times Y)_n := X_n \times Y_n, \quad d_i = d_i^X \times d_i^Y, \quad s_i = s_i^X \times s_i^Y.$$

para cada $0 \leq i \leq n$.
*De forma similar, su **coproducto** $X \sqcup Y$ es el conjunto simplicial dado por*

$$(X \sqcup Y)_n := X_n \sqcup Y_n, \quad d_i = d_i^X \sqcup d_i^Y, \quad s_i = s_i^X \sqcup s_i^Y.$$

para cada $0 \leq i \leq n$.

Complejos de Funciones

Definición

Sean X *e* Y *conjuntos simpliciales. Definimos el* ***complejo de funciones*** $\mathbf{Hom}(X,Y)$ *dado por*

$$\mathbf{Hom}(X,Y)_n := \hom_{\mathsf{sSet}}(X \times \Delta^n, Y)$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$ *y*

$$\begin{aligned} \theta^* : \mathbf{Hom}(X,Y)_m &\to \mathbf{Hom}(X,Y)_n \\ f &\longmapsto f \circ (1_X \times \theta) \end{aligned}$$

para cada $[\![n]\!] \xrightarrow{\theta} [\![m]\!]$.

Ley Exponencial

Definición

*Dados X e Y conjuntos simpliciales, se define la **función evaluación***

$$ev : X \times \mathbf{Hom}(X, Y) \to Y.$$

dada por $ev_n(x, f) = f(x, 1_n)$. *Esta resulta un morfismo simplicial que natural en ambas variables.*

Teorema (Ley Exponencial)

Si K, X e Y son conjuntos simpliciales, la aplicación

$$\begin{aligned} ev_* : \hom_{\mathsf{sSet}}(K, \mathbf{Hom}(X, Y)) &\to \hom_{\mathsf{sSet}}(X \times K, Y) \\ g &\longmapsto ev \circ (1_X \times g) \end{aligned}$$

está bien definida y es biyectiva. Más aún, esta resulta natural en las tres variables. ♦

Símplices Degenerados

Definición

Sea X un conjunto simplicial. Un n-simplex $x \in X_n$ se dice ***degenerado*** *si existe $y \in X_{n-1}$ tal que $s_i(y) = x$ para algún $i \in [\![n]\!]$. En caso contrario, decimos que x es* ***no degenerado*** *y notamos*

$$NX_n := \{x \in X_n : \ x \text{ es no degenerado}\}.$$

Proposición

Sea X un conjunto simplicial. Si $x \in X$ es un símplex degenerado, entonces existe un único símplex no degenerado $y \in X$ y mapas de degeneración $s_{i_1}, \dots, s_{i_k}$ tales que $x = s_{i_1} \cdots s_{i_k} y$.

Esqueletos

Definición

Sea X *un conjunto simplicial y* $n \in \mathbb{N}_0$*. Definimos el* n*-esqueleto* $\mathsf{sk}_n X$ *de* X *como el menor subcomplejo de* X *que tiene a los* j*-símplices de* X *para cada* $j \in [\![n]\!]_0$*. Es decir, es el complejo*

$$(\mathsf{sk}_n X)_j = \begin{cases} X_j & \textit{si } j \leq n \\ \{x \in X_j : x = s_{i_1} \cdots s_{i_{j-n}} y \textit{ con } y \in X_n\} & \textit{si } j > n \end{cases}$$

junto con las restricciones de los mapas de caras y degeneraciones de X*. Se tienen además las siguientes inclusiones,*

$$\mathsf{sk}_0 X \subset \mathsf{sk}_1 X \subset \mathsf{sk}_2 X \subset \cdots \subset \mathsf{sk}_n X \subset \cdots$$

Esqueletos

Proposición

Si X *es un conjunto simplicial, entonces* $X \simeq \operatorname{colim}_{n \geq 0} \mathsf{sk}_n X$ *donde el colímite se toma sobre el diagrama inducido por las inclusiones entre los* n*-esqueletos.*

Proposición

Si X *es un conjunto simplicial y* $n \in \mathbb{N}$*, entonces el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} \coprod_{n \in NX_n} \partial\Delta^n \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathsf{sk}_{n-1}X \arrow[d, hook] \\ \coprod_{n \in NX_n} \Delta^n \arrow[r] & \mathsf{sk}_n X \end{tikzcd}$$

es un puhsout.

Realización Geométrica

Definición

Sea X *un conjunto simplicial. Dotando a cada conjunto* X_n *de la topología discreta, definimos la* ***realización geométrica*** *de* X *como el espacio topológico*

$$|X| := \left(\coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n| \right) \Big/ \sim$$

donde identificamos a los puntos

$$(x, |d^i|(p)) \sim (d_i(x), p)$$

y

$$(x, |s^i|(p)) \sim (s_i(x), p)$$

para cada mapa de cocara y codegeneración.

Realización Geométrica - Ejemplos

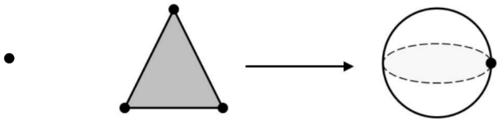
- La realización geométrica de Δ^n es homeomorfa al n-símplex topológico estándar.
- En general, si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n-esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n-1)$-símplex en un punto».

Realización Geométrica - Ejemplos

- La realización geométrica de Δ^n es homeomorfa al n-símplex topológico estándar.
- En general, si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n-esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n-1)$-símplex en un punto».

Realización Geométrica - Ejemplos

- La realización geométrica de Δ^n es homeomorfa al n-símplex topológico estándar.
- En general, si K es un complejo simplicial ordenado, la realización geométrica de su conjunto simplicial asociado es homeomorfa a la realización geométrica como complejo simplicial.
- Una posible realización de la n-esfera: podemos dar un conjunto simplicial con sólo dos símplices no degenerados cuya realización geométrica sea homeomorfa a la esfera «pegando los bordes de un $(n-1)$-símplex en un punto».



Realización Geométrica - Puntos No Degenerados

Definición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. *Un punto* $p \in |\Delta^k|$ *del* k*-símplex topólogico se dice* ***interior*** *si no existe un mapa de cocara* $d^i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ *y* $q \in |\Delta^{k-1}|$ *tal que* $|d^i|(q) = p$.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ *y* $p \in |\Delta^k|$. *Si* p *es interior, existen únicos* $l \in \mathbb{N}_0$, $q \in |\Delta^l|$ *y* $d^{i_1}, \ldots, d^{i_s}$ *mapas de cocara tales que* $p = |d^{i_1} \cdots d^{i_s}|(q)$. *En particular, si* $p \in |\Delta^{k+1}|$ *es interior, y* s^j *es un mapa de codegeneración, entonces* $s_j(p)$ *es interior.*

Definición

Sea X *un conjunto simplicial. Un punto* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$ *se dice* ***no degenerado*** *si* p *es interior y* x *no degenerado.*

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$, *entonces existe un único punto no degerado* (y, q) *relacionado con* (x, p).

Realización Geométrica - Puntos No Degenerados

Definición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. *Un punto* $p \in |\Delta^k|$ *del* k*-símplex topólogico se dice* ***interior*** *si no existe un mapa de cocara* $d^i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ *y* $q \in |\Delta^{k-1}|$ *tal que* $|d^i|(q) = p$.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ *y* $p \in |\Delta^k|$. *Si* p *es interior, existen únicos* $l \in \mathbb{N}_0$, $q \in |\Delta^l|$ *y* $d^{i_1}, \dots, d^{i_s}$ *mapas de cocara tales que* $p = |d^{i_1} \cdots d^{i_s}|(q)$. *En particular, si* $p \in |\Delta^{k+1}|$ *es interior, y* s^j *es un mapa de codegeneración, entonces* $s_j(p)$ *es interior.*

Definición

Sea X *un conjunto simplicial. Un punto* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$ *se dice* ***no degenerado*** *si* p *es interior y* x *no degenerado.*

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$, *entonces existe un único punto no degerado* (y, q) *relacionado con* (x, p).

Realización Geométrica - Puntos No Degenerados

Definición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$. *Un punto* $p \in |\Delta^k|$ *del* k*-símplex topólogico se dice* ***interior*** *si no existe un mapa de cocara* $d^i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ *y* $q \in |\Delta^{k-1}|$ *tal que* $|d^i|(q) = p$.

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ *y* $p \in |\Delta^k|$. *Si* p *es interior, existen únicos* $l \in \mathbb{N}_0$, $q \in |\Delta^l|$ *y* $d^{i_1}, \ldots, d^{i_s}$ *mapas de cocara tales que* $p = |d^{i_1} \cdots d^{i_s}|(q)$. *En particular, si* $p \in |\Delta^{k+1}|$ *es interior, y* s^j *es un mapa de codegeneración, entonces* $s_j(p)$ *es interior.*

Definición

Sea X *un conjunto simplicial. Un punto* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$ *se dice* ***no degenerado*** *si* p *es interior y* x *no degenerado.*

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$, *entonces existe un único punto no degerado* (y, q) *relacionado con* (x, p).

Realización Geométrica - Puntos No Degenerados

Definición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$*. Un punto* $p \in |\Delta^k|$ *del* k*-símplex topólogico se dice* ***interior*** *si no existe un mapa de cocara* $d^i : \Delta^{k-1} \to \Delta^k$ *y* $q \in |\Delta^{k-1}|$ *tal que* $|d^i|(q) = p$*.*

Proposición

Sea $k \in \mathbb{N}_0$ *y* $p \in |\Delta^k|$*. Si* p *es interior, existen únicos* $l \in \mathbb{N}_0$*,* $q \in |\Delta^l|$ *y* $d^{i_1}, \ldots, d^{i_s}$ *mapas de cocara tales que* $p = |d^{i_1} \cdots d^{i_s}|(q)$*. En particular, si* $p \in |\Delta^{k+1}|$ *es interior, y* s^j *es un mapa de codegeneración, entonces* $s_j(p)$ *es interior.*

Definición

Sea X *un conjunto simplicial. Un punto* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$ *se dice* ***no degenerado*** *si* p *es interior y* x *no degenerado.*

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $(x, p) \in \coprod_{n \geq 0} X_n \times |\Delta^n|$*, entonces existe un único punto no degerado* (y, q) *relacionado con* (x, p)*.*

Realización Geométrica - La adjunción $|\cdot| \dashv \mathscr{S}(-)$

Proposición

Se tiene un funtor $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *que asigna a cada conjunto simplicial* X *su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial* $f : X \to Y$ *una flecha* $|f| : |X| \to |Y|$ *inducida por las funciones* $\{f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \to Y_n \times |\Delta^n|\}_{n \geq 0}$.

Teorema

Existe una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sSet} \arrow[r, bend left, "|\cdot|"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Top} \arrow[l, bend left, "\mathscr{S}"] \end{tikzcd}$$

En otras palabras, se tiene una biyección $\mathsf{Top}(|X|, Y) \simeq \mathsf{sSet}(X, \mathscr{S}(Y))$ *entre las funciones continuas* $|X| \to Y$ *y los morfismos simpliciales* $X \to \mathscr{S}(Y)$. *Más aún, esta biyección es natural tanto en* X *como en* Y.

Realización Geométrica - La adjunción $|\cdot| \dashv \mathscr{S}(-)$

Proposición

Se tiene un funtor $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *que asigna a cada conjunto simplicial* X *su realización geométrica, y a cada morfismo simplicial* $f : X \to Y$ *una flecha* $|f| : |X| \to |Y|$ *inducida por las funciones* $\{f_n \times 1 : X_n \times |\Delta^n| \to Y_n \times |\Delta^n|\}_{n \geq 0}$.

Teorema

Existe una adjunción

$$\begin{tikzcd} \mathsf{sSet} \arrow[rr, bend left, "|\cdot|"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathsf{Top} \arrow[ll, bend left, "\mathscr{S}"] \end{tikzcd}$$

En otras palabras, se tiene una biyección $\mathsf{Top}(|X|, Y) \simeq \mathsf{sSet}(X, \mathscr{S}(Y))$ *entre las funciones continuas* $|X| \to Y$ *y los morfismos simpliciales* $X \to \mathscr{S}(Y)$. *Más aún, esta biyección es natural tanto en* X *como en* Y.

Realización Geométrica - CW Arpoximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.* ♦

Teorema

La realización geométrica de un conjunto símplicial X *es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.*

Teorema

Si X *es un espacio topológico, la counidad de la adjunción* $\eta_X : |\mathscr{S}(X)| \to X$ *es una equivalencia débil. Concretamente, si* $f : X \to Y$ *es una función continua entonces el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} |\mathscr{S}(X)| & \xrightarrow{|Sf|} & |\mathscr{S}(Y)| \\ \downarrow{\scriptstyle \eta_X} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_Y} \\ X & \xrightarrow{\quad f \quad} & Y \end{array}$$

conmuta, y tanto η_X *como* η_Y *son equivalencias débiles.*

Realización Geométrica - CW Arpoximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot| : \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.* ♦

Teorema

La realización geométrica de un conjunto símplicial X *es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.*

Teorema

Si X *es un espacio topológico, la counidad de la adjunción* $\eta_X : |\mathscr{S}(X)| \to X$ *es una equivalencia débil. Concretamente, si* $f : X \to Y$ *es una función continua entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} {|\mathscr{S}(X)|} \arrow[r, "|Sf|"] \arrow[d, "\eta_X"] & {|\mathscr{S}(Y)|} \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, y tanto η_X *como* η_Y *son equivalencias débiles.*

Realización Geométrica - CW Arpoximación

Observación

La realización geométrica $|\cdot|: \mathsf{sSet} \to \mathsf{Top}$ *preserva colímites. En particular, preserva coproductos y pushouts.* ♦

Teorema

La realización geométrica de un conjunto símplicial X *es un CW-complejo, con una celda por cada símplex no degenerado.*

Teorema

Si X *es un espacio topológico, la counidad de la adjunción* $\eta_X : |\mathscr{S}(X)| \to X$ *es una equivalencia débil. Concretamente, si* $f : X \to Y$ *es una función continua entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd} |\mathscr{S}(X)| \arrow[r, "|Sf|"] \arrow[d, "\eta_X"] & |\mathscr{S}(Y)| \arrow[d, "\eta_Y"] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

conmuta, y tanto η_X *como* η_Y *son equivalencias débiles.*

Fibraciones de Kan

Definición

Un morfismo simplicial $f : X \to Y$ *se dice una* ***fibración de Kan*** *(o simplemente una fibración) si para cada diagrama conmutativo de la forma*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

existe una flecha $\Delta^n \to X$ *que sigue haciendo conmutar el diagrama.*

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X *se dice un* ***complejo de Kan*** *si el morfismo simplicial* $X \xrightarrow{!\exists} \Delta^0$ *es una fibración de Kan.*
Equivalentemente,

- *Un conjunto simlpicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial* $\alpha : \Lambda^n_k \to X$ *tenemos una extensión* $\overline{\alpha} : \Delta^n \to X$ *al* n*-símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\, \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un conjunto simlpicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada* n*-upla de* $(n-1)$*-símplices* $(x_0, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n)$ *de* X *tales que* $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ *si* $i < j$, $i, j \neq k$, *existe un* n*-símplex* $x \in X_n$ *tal que* $d_i x = x_i$ *para cada* i.

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X *se dice un* ***complejo de Kan*** *si el morfismo simplicial* $X \xrightarrow{!\exists} \Delta^0$ *es una fibración de Kan.*
Equivalentemente,

- *Un conjunto simlpicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial* $\alpha : \Lambda^n_k \to X$ *tenemos una extensión* $\overline{\alpha} : \Delta^n \to X$ *al* n*-símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\, \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un conjunto simlpicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada* n*-upla de* $(n-1)$*-símplices* $(x_0, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n)$ *de* X *tales que* $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ *si* $i < j$, $i, j \neq k$*, existe un* n*-símplex* $x \in X_n$ *tal que* $d_i x = x_i$ *para cada* i.

Complejos de Kan

Definición

Un conjunto simplicial X *se dice un* ***complejo de Kan*** *si el morfismo simplicial* $X \xrightarrow{!\exists} \Delta^0$ *es una fibración de Kan.*
Equivalentemente,

- *Un conjunto simlpicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada morfismo simplicial* $\alpha : \Lambda^n_k \to X$ *tenemos una extensión* $\overline{\alpha} : \Delta^n \to X$ *al* n*-símplex,*

$$\begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\, \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

- *Un conjunto simlpicial* X *es un complejo de Kan sí y sólo si para cada* n*-upla de* $(n-1)$*-símplices* $(x_0, \ldots, \widehat{x}_k, \ldots, x_n)$ *de* X *tales que* $d_i x_j = d_{j-1} x_i$ *si* $i < j$, $i, j \neq k$*, existe un* n*-símplex* $x \in X_n$ *tal que* $d_i x = x_i$ *para cada* i*.*

Complejos de Kan

Proposición

Una función continua $f : X \to Y$ *es una fibración de Serre sí y sólo si el morfismo simplicial* $\mathscr{S}(f) : \mathscr{S}(X) \to \mathscr{S}(Y)$ *es una fibración de Kan.*

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^n_k| \arrow[r] \arrow[d, hook] & X \arrow[d, "f"] \\ |\Delta^n| \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Y \end{tikzcd} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r] \arrow[d, hook] & \mathscr{S}(X) \arrow[d, "\mathscr{S}(f)"] \\ \Delta^n \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & \mathscr{S}(Y) \end{tikzcd}$$

Proposición

Si X *es un espacio topológico, entonces* $\mathscr{S}(X)$ *es un complejo de Kan.*

$$\begin{tikzcd} |\Lambda^n_k| \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & X \\ |\Delta^n| \arrow[ur, dashed, "\exists\, \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd} \quad \leftrightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \Lambda^n_k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, hook] & \mathscr{S}(X) \\ \Delta^n \arrow[ur, dashed, "\exists\, \overline{\alpha}"'] & \end{tikzcd}$$

Homotopía Simplicial

Una **homotopía** entre dos morfismos simpliciales $f, g : X \to Y$ es un morfismo simplicial $H : X \times \Delta^1 \to Y$ que vale f al restringir el 1-símplex en una cara y g al restringir a la otra.

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^0 & \xrightarrow{\simeq} & X \\ {\scriptstyle 1\times d_1}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & Y \\ {\scriptstyle 1\times d_0}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle g} \\ X \times \Delta^0 & \xrightarrow{\simeq} & X \end{array}$$

Ésta se dice **relativa** a un subcomplejo K de X si además es «constante en K».

$$\begin{array}{ccc} X \times \Delta^1 & \xrightarrow{H} & Y \\ {\scriptstyle i\times 1}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \alpha} \\ K \times \Delta^1 & \xrightarrow{\pi_1} & K \end{array}$$

Homotopía Simplicial

Proposición

Si X es un complejo de Kan, entonces las homotopías simpliciales de vértices definen una relación de equivalencia en X_0.

Observación

*En particular esto nos dice que Δ^1 **no** es un complejo de Kan.*

Homotopía Simplicial

Proposición

Si X *es un conjunto simplicial e* Y *un complejo de Kan, las homotopías simpliciales definen una relación de equivalencia en* $\hom_{\mathsf{sSet}}(X, Y)$.

Proposición

Sea X *un conjunto simplicial e* Y *un complejo de Kan. Si* K *es un subcomplejo de* Y*, las homotopías simpliciales relativas a* K *definen una relación de equivalencia en* $\hom_{\mathsf{sSet}}(X, Y)$.

Grupos de Homotopía

Definición

Sea X *un complejo de Kan y* $n \in \mathbb{N}$*. Se define el* n*-ésimo grupo de homotopía con punto base* $v \in X_0$ *como el conjunto* $\pi_n(X, v)$ *de clases de homotopía relativas a* $\partial\Delta^n$ *de morfismos simpliciales* $\alpha : \Delta^n \to X$ *que valen constantemente* v *en el borde del símplex,*

$$\begin{array}{ccc} \Delta^n & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \big\uparrow & & \big\uparrow{\scriptstyle v} \\ \partial\Delta^n & \xrightarrow{\exists!} & \Delta^0 \end{array}$$

Theorem

Si X *es un complejo de Kan y* $v \in X_0$ *un vértice, entonces* $\pi_n(X, v)$ *es un grupo para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

Modelos Minimales

Definición

*Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n-símplices $x, y \colon \Delta^n \to M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.*

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i : M \hookrightarrow X$ y una retracción $r : X \to M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f : M \to M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

*Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n-símplices $x, y\colon \Delta^n \to M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.*

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i : M \hookrightarrow X$ y una retracción $r : X \to M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f : M \to M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

*Decimos que un complejo de Kan M es un **complejo minimal** si cada vez que se tienen dos n-símplices $x, y\colon \Delta^n \to M$ homotópicos relativos a $\partial\Delta^n$ se tiene que $x = y$.*

Lema

Sea X un conjunto simplicial. Si $x, y \in X_n$ son dos símplices degenerados tales que $\partial x = \partial y$, entonces $x = y$.

Proposición

Si X un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal $i : M \hookrightarrow X$ y una retracción $r : X \to M$ tal que $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M un complejo minimal y $f : M \to M$ un morfismo simplicial. Si $f \simeq 1$, entonces f es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.

Modelos Minimales

Definición

Decimos que un complejo de Kan M *es un* ***complejo minimal*** *si cada vez que se tienen dos* n*-símplices* $x, y \colon \Delta^n \to M$ *homotópicos relativos a* $\partial\Delta^n$ *se tiene que* $x = y$.

Lema

Sea X *un conjunto simplicial. Si* $x, y \in X_n$ *son dos símplices degenerados tales que* $\partial x = \partial y$, *entonces* $x = y$.

Proposición

Si X *un complejo de Kan, entonces existe un subcomplejo minimal* $i : M \hookrightarrow X$ *y una retracción* $r : X \to M$ *tal que* $ir \simeq 1_X$.

Teorema

Sea M *un complejo minimal y* $f : M \to M$ *un morfismo simplicial. Si* $f \simeq 1$, *entonces* f *es un isomorfismo. En particular, dos complejos minimales homotópicamente equivalentes son isomorfos.*

¡Fin!