Topología Algebraica

Ejercicios para Entregar - Práctica 1

Guido Arnone

Sobre los Ejercicios

De los ejercicios propuestos, resolví (3), (5), y una parte del ejercicio (10). Incluyo también la resolución del ejercicio (4) al comienzo, ya que lo ulilizaré para el ejercicio (3). Con la intención de hacer más legibles a las resoluciones, algunos argumentos están escritos en forma de lemas que preceden a cada ejercicio.

Lema 1. Sea K un complejo simplicial y $v \in V_K$. Entonces $st(v)^o \cap V_K = \{v\}$

Demostración. Si $v \in V_K$, luego $\{v\} \ni v$ es un símplex y $\{v\}^o = \{v\}$ así que $v \in st(v)^o$. Recíprocamente si $w \in st(v)^o \cap V_K$, existe $\sigma \ni v$ con $w \in \sigma^o \subset \sigma$. Por lo tanto, al w ser un vértice $\{w\}$ debe ser una cara de σ. Por otro lado, como $\{w\} \subset \sigma^o$ y éste último es justamente quitar las caras propias de σ, necesariamente $\{w\} = \sigma$. Como $\sigma \ni v$ y el único tal símplex de dimensión 0 es $\sigma = \{v\}$, luego $w = v$. $\square$

Lema 2. Sea K un complejo simplicial y sean $\sigma_1, \ldots, \sigma_k$ símplices de K. Si $\bigcap_{i=1}^{k} \sigma_i^o \neq \emptyset$, entonces $\sigma_1 = \cdots = \sigma_k$.

Demostración. Hacemos inducción en k. Tomamos el caso base $k = 2$, pues de ser $k = 1$ esto es claro. Por el absurdo, sean $\sigma \neq \tau \in K$ tales que $\sigma^o \cap \tau^o \neq \emptyset$. Luego $\sigma \cap \tau \supset \sigma^o \cap \tau^o \neq \emptyset$ y es así que $\sigma \cap \tau < \sigma, \tau$, pues al ser los símplices distintos la intersección es una cara propia. Por definición de σ^o es $\sigma \cap \tau \subset (\sigma^o)^c$, y pasando al complemento la contención $\sigma^o \cap \tau^o \subset \sigma^o$ obtenemos $\sigma^o \cap \tau^o \subset \sigma \cap \tau \subset (\sigma^o)^c \subset (\sigma^o \cap \tau^o)^c$, lo que es una contradicción. Ahora, supongamos que el resultado es válido para $2 \leq k - 1$. Como $\bigcap_{i=1}^{k} \sigma_i^o \neq \emptyset$, en particular sabemos que $\bigcap_{i=1}^{k-1} \sigma_i^o \neq \emptyset$. Por inducción, $\sigma_1 = \sigma_j$ si $j \in [\![k-1]\!]$. Podemos ahora reescribir la intersección inicial como $\sigma_1^o \cap \sigma_k^o \neq \emptyset$, y usando el paso inicial vemos por último que $\sigma_1 = \sigma_k$. $\square$

Ejercicio 4. Sea K un complejo simplicial y $\mathcal{U} = \{st(v)^o, v \in V_K\}$ el cubrimiento por stars abiertos de los vértices. Probar que $N(\mathcal{U})$ es isomorfo a K.

Demostración. Consideremos la función entre vértices dada por

$$\begin{aligned} \iota : V_K &\to N(\mathcal{U}) \\ v &\longmapsto st(v)^o \end{aligned}$$

Observemos que ι es un morfismo simplicial: sea $\sigma = \{v_0, \dots, v_n\} \in K$ y veamos que $\{\iota(v_0), \dots, \iota(v_n)\} = \{\mathrm{st}(v_0)^o, \dots, \mathrm{st}(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$. Como $\sigma \ni v_i$ para cada $i \in [\![n]\!]_0$, en cada caso es $\sigma^o \subset \mathrm{st}(v_i)^o$ y por lo tanto,

$$\sigma^o \subset \bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{st}(v_i)^o \neq \emptyset.$$

Esto último dice que, en efecto, $\{\mathrm{st}(v_0)^o, \dots, \mathrm{st}(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$. Afirmamos ahora que ι es biyectiva: la suryectividad se deduce de que los vértices del nervio son precisamente los stars abiertos de algún $v \in K$, así que alcanza con mostrar la inyectividad. En efecto, si $v, w \in K$ son tales que $\mathrm{st}(v)^o = \mathrm{st}(w)^o$, por el Lema 1 luego $\{v\} = \mathrm{st}(v)^o \cap V_K = \mathrm{st}(w)^o \cap V_k = \{w\}$. Tenemos entonces la inversa de ι,

$$j : \mathrm{st}(v)^o \in N(\mathcal{U}) \mapsto v \in K.$$

Veamos que j también es simplicial: sea $\mathfrak{S} = \{\mathrm{st}(v_0)^o, \dots, \mathrm{st}(v_n)^o\} \in N(\mathcal{U})$ un símplex. Por definición es $\bigcap_{i=0}^{n} \mathrm{st}(v_i)^o \neq \emptyset$. En particular, tenemos un punto $x \in \mathrm{st}(v_i)^o$ para cada $i \in [\![n]\!]_0$ y entonces existen símplices $\sigma_i \ni v_i$ con $x \in \sigma_i$ de forma que $\bigcap_{i=0}^{n} \sigma_i^o \ni x$. Luego como esta última intersección es no vacía, el Lema 2 nos asegura que $\sigma := \sigma_0 = \cdots = \sigma_n$. Como para cada $i \in [\![n]\!]_0$ es $v_i \in \sigma_i = \sigma$, luego $\{v_0, \dots, v_n\} \subseteq \sigma$. Como K es un complejo simplicial y cada v_i es un vértice, necesariamente éstos forman una cara de σ que en particular es un símplex:

$$\{j(\mathrm{st}(v_0)^o), \dots, j(\mathrm{st}(v_n)^o)\} = \{v_0, \dots, v_n\} \in K.$$

Habiendo visto que tanto ι como j son simpliciales y tanto $j\iota = 1_K$ como $\iota j = 1_{N(\mathcal{U})}$, concluimos entonces que en efecto K y $N(\mathcal{U})$ son isomorfos. $\square$

Lema 3. Sea K un complejo simplicial finito, de forma que su realización geométrica resulta un espacio métrico. Sean ahora $v \in K$ y $\sigma = \{v_0, \dots, v_k\} \in K$. Entonces,

a) $\mathrm{diam}(|\sigma|) \leq \max_{0 \leq i,j \leq k} d(v_i, v_j)$

b) $\mathrm{diam}(\mathrm{st}(v)^o) \leq 2 \max_{\sigma \in K} \mathrm{diam}(|\sigma|)$

c) Existe $0 < \eta < 1$ que sólo depende de la dimensión de K tal que

$$\max_{\sigma \in K'} \mathrm{diam}(|\sigma|) \leq \eta \max_{\sigma \in K} \mathrm{diam}(|\sigma|).$$

d) Si definimos $\Gamma_n := \max_{v \in K^{(n)}} \mathrm{diam}(\mathrm{st}(v)^o)$, entonces $\Gamma_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$.

Demostración. Hacemos cada inciso por separado,

a) Sean $x = \sum_{i=0}^{k} t_t v_i$, $y = \sum_{j=0}^{k} s_j v_j \in |\sigma|$ combinaciones convexas de los vértices de σ. Luego,

$$\begin{aligned}
d(x,y) &= \left\| \sum_{i=0}^{k} t_i v_i - \sum_{j=0}^{k} s_j v_j \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{k} t_i v_i - \overbrace{\sum_{i=0}^{k} t_i}^{=1} \sum_{j=0}^{k} s_j v_j \right\| = \left\| \sum_{i=0}^{k} t_i \left(v_i - \sum_{j=0}^{k} s_j v_j \right) \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} t_i \left\| v_i - \sum_{j=0}^{k} s_j v_j \right\| = \sum_{i=0}^{k} t_i \left\| \overbrace{\sum_{j=0}^{k} s_j}^{=1} v_i - \sum_{j=0}^{k} s_j v_j \right\| = \sum_{i=0}^{k} t_i \left\| \sum_{j=0}^{k} s_j (v_i - v_j) \right\| \\
&\leq \sum_{i=0}^{k} t_i \sum_{j=0}^{k} s_j \|v_i - v_j\| \leq \sum_{i=0}^{k} t_i \sum_{j=0}^{k} s_j \max_{0 \leq r,s \leq k} d(v_r, v_s) \\
&= \max_{0 \leq r,s \leq k} d(v_r, v_s) \sum_{i=0}^{k} t_i \sum_{j=0}^{k} s_j = \max_{0 \leq r,s \leq k} d(v_r, v_s).
\end{aligned}$$

b) Sean $x, y \in st(v)^o$. Luego existen $\sigma_1, \sigma_2 \ni v$ tales que $x \in \sigma_1^o \subset \sigma_1$ e $y \in \sigma_2^o \subset \sigma_2$. Por lo tanto,

$$d(x,y) \leq d(x,v) + d(v,y) \leq \operatorname{diam}(\sigma_1) + \operatorname{diam}(\sigma_2) \leq 2 \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam}(\sigma).$$

c) Sea $\tilde{\sigma} = \{\widehat{\sigma_0}, \dots, \widehat{\sigma_k}\} \in K'$. Por definición de la subdivisión baricéntrica, sabemos que $\sigma_i < \sigma_{i+1}$ para cada $i \in [\![k-1]\!]_0$ y si $0 \leq i < j \leq k$, entonces $\sigma_i = \{v_1, \dots, v_r\}$ y $\sigma_j = \{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_{r+s}\}$. Ahora, notemos que si $v_k \in \sigma_i$ luego es $0 \leq k \leq r+s$ y entonces

$$\begin{aligned}
\|v_k - \widehat{\sigma_j}\| &= \|v_k - \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0}^{r+s} v_l\| = \|\frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0}^{r+s} (v_k - v_l)\| \\
&= \|\frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0, l\neq k}^{r+s} (v_k - v_l)\| \leq \frac{1}{1+r+s} \sum_{l=0, l\neq k}^{r+s} \|(v_k - v_l)\| \\
&\leq \frac{r+s}{1+r+s} \operatorname{diam}(\sigma_j) \leq \frac{r+s}{1+r+s} \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam}(|\sigma|),
\end{aligned}$$

ya que el k-ésimo término de la sumatoria resulta $0 = v_k - v_k$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
d(\widehat{\sigma_j}, \widehat{\sigma_i}) &= \left\| \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} v_i - \widehat{\sigma_j} \right\| = \left\| \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} (v_i - \widehat{\sigma_j}) \right\| \\
&\leq \frac{1}{r+1} \sum_{j=0}^{r} \|v_i - \widehat{\sigma_j}\| \leq \frac{r+s}{1+r+s} \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam}(|\sigma|).
\end{aligned}$$

Ahora, como K tiene dimensión n, necesariamente es $r+s \leq n$, y luego $\frac{r+s}{1+r+s} \leq \frac{n}{1+n} < 1$. Por lo tanto, dado cualquier símplex $\tilde{\sigma}$ es

$$\operatorname{diam}(\tilde{\sigma}) \leq \max_{0 \leq i,j \leq k} d(\widehat{\sigma_i}, \widehat{\sigma_j}) \leq \frac{n}{1+n} \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam}(|\sigma|).$$

Tomando máximo en $\tilde{\sigma}$, vemos que alcanza con tomar $\eta = \frac{n}{1+n} \in (0,1)$ y que este último depende únicamente de $\dim K$.

d) Como para todo $n > 1$ sabemos que $\dim K^{(n)} = \dim K^{(n-1)}$, luego existe $0 < \eta < 1$ por el ítem (c) tal que

$$0 \leq \max_{\sigma \in K^{(n)}} \operatorname{diam}(|\sigma|) \leq \eta \max_{\sigma \in K^{(n-1)}} \operatorname{diam}(|\sigma|) \leq \cdots \leq \eta^n \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam}(|\sigma|).$$

Finalmente usando (b), obtenemos:

$$0 \leq \Gamma_n \leq 2 \max_{\sigma \in K^{(n)}} \operatorname{diam}(|\sigma|) \leq 2\eta^n \max_{\sigma \in K} \operatorname{diam}(|\sigma|) \to 0.$$

□

Ejercicio 3. Sea X un espacio topológico y $U = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de X. El nervio de U es el complejo simplicial $N(U)$ cuyos vértices son los abiertos del cubrimiento y los símplices son los subconjuntos finitos no vacíos de U, $s = \{U_{i_0}, \ldots, U_{i_n}\}$ tales que $\bigcap U_{i_k} \neq \emptyset$. Notar que efectivamente $N(U)$ es un complejo simplicial. Se dice que un espacio topológico X tiene dimensión $\leq n$ si todo cubrimiento abierto de X admite un refinamiento abierto cuyo nervio es un complejo simplicial de dimensión $\leq n$. Decimos que $\dim X = n$ si $\dim X \leq n$ y $\dim X \nleq n-1$. Probar que:

a) Si $A \subseteq X$ es cerrado entonces $\dim A \leq \dim X$.

b) Los espacios discretos tienen dimensión 0.

c) El intervalo I tiene dimensión 1.

d) Si K complejo simplicial finito y $\dim K = n$ entonces $\dim |K| \leq n$. (En realidad vale la igualdad, se verá más adelante).

Demostración. Probamos cada inciso por separado.

a) Sea $A \subseteq X$ cerrado, $n := \dim X$ y $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de A. Existe entonces para cada $i \in I$ un abierto V_i de X tal que $U_i = V_i \cap A$, y es entonces que la colección $\mathcal{O} = \{V_i\}_{i \in I} \cup \{A^c\}$ cubre X por abiertos, ya que A es cerrado. Por hipótesis, tenemos entonces un refinamiento $\tilde{\mathcal{O}} = \{O_j\}_{j \in J}$ de $\mathcal{O}$ tal que $N(\tilde{\mathcal{O}})$ es un complejo simplicial de dimensión menor o igual que n. Afirmamos ahora que $\tilde{\mathcal{U}} = \{O_j \cap A\}_{j \in J}$ es refinamiento de $\mathcal{U}$: tenemos que

$$\bigcup_{j \in J} O_j \cap A = A \cap \bigcup_{j \in J} O_j = A \cap X = A,$$

y dado $j \in J$ luego $O_j \cap A$ es abierto en A pues O_j es abierto en X. Por úlimo, si $O_j \cap A \neq \emptyset$ luego $O_j \not\subset A^c$ y existe $i_j \in I$ con $O_j \subset V_{i_j}$ y entonces $O_j \cap A \subset V_{i_j} \cap A = U_{i_j} \in \mathcal{U}$. En cualquier caso, $O_j \cap A$ es subconjunto de algún elemento de $\mathcal{U}$. Para terminar, veamos que $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$. Sea $\sigma = \{O_{j_0} \cap A, \ldots, O_{j_k} \cap A\}$ un símplex del nervio de $\tilde{\mathcal{U}}$. Luego,

$$\emptyset \neq \bigcap_{i=0}^{k} A \cap O_{j_i} \subset \bigcap_{i=0}^{k} O_{j_i}$$

y entonces $\{O_{j_0}, \dots, O_{j_k}\}$ es un símplex de $N(\tilde{\mathcal{O}})$. Como este último tiene dimensión a lo sumo n, es

$$\dim \sigma = k \leq \dim N(\tilde{\mathcal{O}}) \leq n$$

y en consecuencia, $\dim N(\tilde{\mathcal{U}}) \leq n$.

b) Sea $X = \{x_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ discreto y $\mathcal{U}$ un cubrimiento de X por abiertos. Afirmamos que el conjunto $\mathcal{O} := \{ \{x\} : x \in X \}$ es un refinamiento de $\mathcal{U}$. Los elementos de $\mathcal{O}$ son abiertos pues X es discreto. Por otro lado si $\{x\} \in \mathcal{O}$, entonces como $\mathcal{U}$ es cubrimiento de X existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $x \in U$. Equivalentemente es $\{x\} \subset U$, y así probamos que el primero es subconjunto de algún abierto de $\mathcal{U}$. Basta entonces probar que el nervio de $\mathcal{O}$ es de dimensión 0. Como los simplices de $N(\mathcal{O})$ consisten de abiertos de $\mathcal{O}$ cuya intersección sea no vacía, alcanza con ver que cualesquiera dos abiertos de $\mathcal{O}$ son disjuntos. Esto es claro: si $\{x\} \neq \{y\} \in \mathcal{O}$, entonces $x \neq y$ y $\{x\} \cap \{y\} = \emptyset$.

c) Veamos en primer lugar que $\dim I \not\leq 0$. Sea $\mathcal{U} = \{[0, \frac{2}{3}), (\frac{1}{3}, 0]\}$ cubrimiento de I. Cualquier refinamiento de $\mathcal{U}$ tiene entonces al menos 2 elementos. Si I tuviese dimensión cero, existiría un refinamiento $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}$ cuyo nervio es de dimensión cero. Esto diría que los abiertos de $\mathcal{O}$ son disjuntos y por conexión conluiríamos entonces que $1 = \#\mathcal{O} \geq 2$, lo que es absurdo.

Probemos ahora que $\dim I \leq 1$. Notemos que esto es una conclusión inmediata del siguiente ítem pues I es la realización geométrica de un complejo simplicial de dimensión 1. Además, el ítem (d) no utiliza este ítem y por lo tanto no hay peligro de un argumento circular. De todas maneras, a continuación proponemos otro argumento que sólo utiliza la caracterización de los abiertos de $\mathbb{R}$.

Sea $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ un cubrimiento por abiertos de I. Como los abiertos de $\mathbb{R}$ son unión numerable de intervalos abiertos y disjuntos, luego para cada $i \in I$ existen conjuntos $J_i \subset \mathbb{N}$ e intervalos $\{I^i_j\}_{j \in J_i}$ abiertos (en I) y disjuntos tales que $U_i = \bigsqcup_{j \in J_i} I^i_j$. Por compacidad tenemos luego intervalos $I_1, \dots, I_n \in \{I^i_j\}_{i \in I, j \in J_i}$ tales que $\bigcup_{i=1}^N I_i = I$ y, por construcción, cada intervalo es subconjunto de algún abierto U_i. Obtuvimos así un refinamiento $\mathcal{O}_0 = \{I_1, \dots, I_n\}$ de $\mathcal{U}$. Construimos a continuación un refinamiento $\mathcal{O}$ de $\mathcal{U}$ de la siguiente forma: tomamos primero los intevalos de $\mathcal{O}_0$. A los que no sean abiertos (como intervalos) les quitamos los extremos: estos seguirán siendo abiertos en I, pues sólo pueden provenir de alguno de la forma $[0, 1], (a, 1]$ o $[0, b)$. Luego, dados $J_0, J_1 \in \mathcal{O}_0$ con $s \in J_s$ para $s \in \{0, 1\}$, agregamos entornos $E_0 := [0, \varepsilon), E_1 := (1 - \varepsilon, 1]$ a $\mathcal{O}$ con $0 < \varepsilon \ll 1$ tal que estos sean disjuntos y estén contenidos en J_0 y J_1 respectivamente. Esto garantiza que $\mathcal{O}$ cubre a I ya que volvemos a cubrir sus extremos. Finalmente, de existir algún intervalo que esté contenido en la unión de otros, seleccionamos alguno de ellos y lo quitamos. Repetimos el proceso hasta que no haya más intervalos de este tipo, lo cual es posible pues hay finitos intervalos en total. Como removemos intervalos de uno, $\mathcal{O}$ sigue siendo refinamiento pues sigue cubriendo a I.

Afirmamos ahora que $N(\mathcal{O})$ es de dimensión a lo sumo 1, o equivalentemente, que no hay tres intervalos de $\mathcal{O}$ cuya intersección sea no vacía. Supongamos que sí y sean $\{J_i\}_{1 \leq i \leq 3} \subset \mathcal{O}$ de intersección no vacía y tales que el interior de J_i en $\mathbb{R}$ es (a_i, b_i)[1]. Como los intervalos no se contienen entre sí, existen dos de ellos distintos con el menor extremo izquierdo y mayor extremo derecho, que suponemos son J_1 y J_3 respectivamente. Así, $J_1 \cap J_3 = (a_3, b_1)$. Como

[1] Esto evita tratar por separado la posible elección de E_0 o E_1, ya que al ser los únicos dos intervalos semiabiertos, el argumento que sigue funciona aún si $a_1 \in J_1$ o $b_3 \in J_3$. Siempre tenemos que tanto J_2 como $J_1 \cap J_3$ son intervalos abiertos, y no hace falta que las desigualdades entre a_1 y a_2 o b_2 y b_3 sean estrictas.

$J_2 \not\subseteq J_1$ debe ser $b_2 > b_1$, y similarmente como $J_2 \not\subseteq J_3$ tenemos que $a_2 < a_3$. Si ahora $s \in J_2$, entonces $a_1 \leq a_2 < s < b_2 \leq b_3$. Si $s \notin J_1$, luego $s > b_1 > a_3$ y consecuentemente $s \in J_3$. En cualquier caso, $s \in J_1 \cup J_3$. Esto implica que $J_2 \subset J_1 \cap J_3$, lo que es absurdo: no hay entonces tres intervalos cuya intersección sea no vacía. Dado un cubrimiento arbitrario encontramos un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo 1, lo que completa la demostración.

d) Sea K un complejo simplicial de dimensión n y $\mathcal{U}$ un cubrimiento por abiertos de K. Como K es finito, es compacto, y por lo tanto existe un número de Lebesgue $\mu > 0$ para el cubrimiento. Por el Lema 3, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que la m-ésima subdivisión baricéntrica $K^{(m)}$ de K verifica $\operatorname{diam}(st(v)^o) < \mu$ para cada $v \in K^{(m)}$. Como éstos cubren a $|K^{(m)}| = |K|$ por abiertos y tienen diámetro menor a μ, cada star abierto está contenido en algún abierto de $\mathcal{U}$. Es decir, $\mathcal{S} = \{st(v)^o\}_{v \in K^{(m)}}$ refina a $\mathcal{U}$. Por otro lado, el ejercicio (4) asegura que $N(\mathcal{S}) \simeq K^{(m)}$ como complejos simpliciales y en particular, $\dim N(\mathcal{S}) = \dim K^{(m)} = \dim K = n$. Esto prueba que todo cubrimiento por abiertos de $|K|$ tiene un refinamiento cuyo nervio es de dimensión a lo sumo n, es decir, hemos visto en efecto que $\dim |K| \leq n$.

$\square$

Lema 4. Sea X un espacio topológico, R una relación en X y X/R el espacio cociente. Notamos $q : X \to X/R$ a la proyección. Si U, V son abiertos saturados disjuntos en X, entonces $q(U)$ y $q(V)$ son abiertos disjuntos en X/R. En particular, si $[x] \neq [y] \in X/R$ y existen $U \ni x, V \ni y$ abiertos saturados disjuntos, los abiertos $q(U)$ y $q(V)$ separan a $[x]$ de $[y]$.

Demostración. Ya sabemos que los abiertos de X/R son precisamente las imágenes por q de abiertos saturados, resta ver entonces que $q(U) \cap q(V) = \emptyset$. Si no fuera así existirían $z \in U$ y $w \in V$ con $q(z) = q(w)$. En particular, tendríamos que $z \sim w$ y como U es saturado, luego $w \in U$. Sin embargo esto contradice que U y V son disjuntos. $\square$

Ejercicio 5. Sea $A \subset X$ subespacio cerrado y $f : A \to B$ continua. Denotemos con $B \cup_f X$ al espacio de adjunción. Probar que si

- B y X son Hausdorff,
- Para todo $x \in X \setminus A$, existe un entorno cerrado de x en X que no interseca a A y
- $A \subset X$ es retracto de entorno,

entonces $B \cup_f X$ es Hausdorff.

Demostración. Recordemos que $B \cup_f X = B \sqcup X / \sim$, con $\sim$ la relación generada por la identificación $a \sim f(a)$ para cada $a \in A$. Sea ahora $q : X \sqcup B \to X \cup_f B$ la proyección al cociente. Notemos además que por construcción, si $x \in X \setminus A$ e $y \in B \setminus f(A)$ entonces $[x] = \{x\}$, $[y] = \{y\}$. Es decir, en el cociente sólo se identifican puntos de A y $f(A)$. Más aún, los elementos de $f(A)$ no se relacionan entre sí, y cada $a \in A$ está relacionado a su imagen por f. Esto dice que $X \setminus A \sqcup B$ es un sistema de representantes para esta relación y

$$q^{-1}([x]) = \begin{cases} \{x\} \text{ si } x \in X \setminus A \text{ ó } x \in B \setminus f(A) \\ \{x\} \sqcup f^{-1}(x) \text{ si } x \in f(A) \end{cases}$$

Ahora, sean $[x]$ e $[y]$ puntos del espacio de adjunción con $x, y \in X \setminus A \sqcup B$. Queremos ver que siempre existen abiertos disjuntos $\mathcal{U} \ni [x]$ y $\mathcal{V} \ni [y]$. Para esto, podemos separar en casos según a que espacio pertenecen los representantes, y por el Lema 4, alcanza con ver que en cada caso tenemos abiertos saturados disjuntos $U \ni x, V \ni y$.

- **Caso 1:** $x, y \in X \setminus A$. Como tanto x como y están en el complemento de A en X, tenemos entornos cerrados de cada punto que no intersecan a A. Es decir, existen abiertos O_x, O_y y cerrados F_x, F_y tales que $x \in O_x \subset F_x \subset X \setminus A$ e $y \in O_y \subset F_y \subset X \setminus A$. Por otro lado, como X es T_2, existen abiertos $U_x \ni x$ y $V_y \ni y$ tales que $U_x \cap V_y = \emptyset$. Definimos luego los abiertos $U := U_x \cap O_x$ e $V := V_y \cap O_y$ que contienen a x e y respectivamente. Éstos son saturados pues están contenidos en $X \setminus A$ donde no hay identificaciones no triviales y finalmente son disjuntos pues $U \cap V \subset U_x \cap V_y = \emptyset$.

- **Caso 2:** $x \in X \setminus A, y \in B$. Como en el caso anterior, tenemos $x \in O_x \subset F_x \subset X \setminus A$ con O_x abierto y F_x cerrado en X. Luego, $x \in O_x$ y $F_x^c \sqcup B \ni y$ son abiertos disjuntos en $X \sqcup B$. Veamos que éstos son saturados. Para $O_x \subset X \setminus A$ podemos utilizar el argumento del Caso 1. Por último, sea $z \in F_x^c \sqcup B$ y $z \sim w$ con $w \neq z$. Como en B no hay identificaciones entre puntos distintos, tenemos tres casos: si $w \in A$ entonces $f(z) = f(w)$ o $z = f(w)$, y si $w \in f(A)$ entonces $w = f(z) \in f(A)$. En cualquier caso, $w \in A \sqcup f(A) \subset F_x^c \sqcup B$ y por lo tanto éste último es saturado. Por simetría, obviamos el caso en que $x \in B$ e $y \in X \setminus A$.

- **Caso 3:** $x, y \in B$. Como B es Hausdorff, tenemos abiertos $U \ni x$ y $V \ni y$ de B que resultan disjuntos, pero no necesariamente saturados. Buscamos entonces conseguir abiertos de x e y en base a los anteriores que sean saturados pero sigan siendo disjuntos. Como A es retracto de entorno, existe un abierto $U \subset X$ que contiene a A y una función continua $r : U \to A$ tal que $r(a) = a$ para todo $a \in A$. Ahora, como U y V son disjuntos, sus preimagenes por $fr : U \to B$ son disjuntas y abiertas en U, ya que fr es continua. Como U es abierto de X, esto dice que $(fr)^{-1}(U)$ y $(fr)^{-1}(V)$ son en realidad abiertos de X. Por lo tanto, los conjuntos $(fr)^{-1}(U) \sqcup U$ y $(fr)^{-1}(V) \sqcup V$ son abiertos de $X \sqcup B$ que contienen a x e y respectivamente. Para terminar, veamos que son saturados. Como ambos casos son simétricos, sin pérdida de generalidad lo hacemos sólo para $(fr)^{-1}(U) \sqcup U$. Sea $z \in (fr)^{-1}(U) \sqcup U$ y $w \sim z$ con $w \neq z$. Como en el Caso 2, al no haber identifiaciones entre puntos distintos en B los casos posibles son:

  - $f(w) = f(z)$ con $w \in A, z \in A \cap (fr)^{-1}(U)$. Aquí es
  $$fr(w) = f(w) = f(z) = fr(z) \in fr((fr)^{-1}(U)) \subset U,$$
  y entonces $w \in (fr)^{-1}(U)$.
  - $f(w) = z$ con $w \in A, z \in U$. Como $fr(w) = f(w) = z \in U$, tenemos que $w \in (fr)^{-1}(U)$.
  - $w = f(z)$ con $w \in f(A), z \in A \cap (fr)^{-1}(U)$. Luego $w = f(z) = fr(z) \in fr((fr)^{-1}(U)) \subset U$.

  En todo momento w es un elemento de $(fr)^{-1}(U) \sqcup U$ y por lo tanto éste es saturado.

Habiendo encontrado en cada caso abiertos saturados y disjuntos de $X \sqcup B$ que contienen a x e y respectivamente, concluimos entonces que $X \cup_f B$ es Hausdorff. □

Ejercicio 10. Probar que los CW-complejos admiten revestimientos y que el revestimiento de un CW-complejo de dimensión n es un CW-complejo de la misma dimensión. En particular los revestimientos de grafos son grafos.

Demostración. Sea X un CW-complejo de dimensión n con estructura celular $\{e_\alpha^k\}_{\alpha \in J_k}^{k \in [\![n]\!]_0}$. Procedemos por etapas: primero, veremos que si $p : E \to X$ es un revestimiento, entonces E tiene una estructura de CW-complejo de dimensión n. Para esto, construimos una estructura celular en E y vemos que verifica tanto (C) como (W). Luego, probamos que siempre existe un revestimiento universal de X si éste es arcoconexo (i.e. conexo). Sea entonces $p : E \to X$ un revestimiento. Antes que nada, verfiquemos que E es Hausdorff: sean $x \neq y \in E$. Si $p(x) \neq p(y)$, luego existen $U \ni p(x), V \ni p(y)$ abiertos disjuntos en X pues éste es Hausdorff, y entonces $p^{-1}(U)$ y $p^{-1}(V)$ son abiertos que separan a E. Si en cambio $p(x) = p(y) =: b$, como p es revestimiento tenemos un abierto $U \ni b$ tal que $p^{-1}(U) = \sqcup_{i\in I} U_i$ es unión de abiertos disjuntos y $p|_{U_i} : U_i \to U$ es homeomorfismo para cada $i \in I \neq \emptyset$. Como $x, y \in E_b$, luego $x, y \in \sqcup_{i\in I} U_i$. Basta ver que estos no pertenecen al mismo abierto, lo cual ocurre pues si fuera $x, y \in U_i$, la función $p|_{U_i}$ no sería inyectiva, en particular no sería un homeomorfismo.

Ahora sí, comenzamos con la construcción de estructura celular de E. Para cada $k \in [\![n]\!]_0$, el disco $\mathbb{D}^k$ es simplemente conexo y localmente arcononexo así que cada función característica $f^k_\alpha : \mathbb{D}^k \to X$ compuesta con la inclusión[1] $e^k_\alpha \hookrightarrow X$ tiene un levantado a E. Más aún, el levantado está unicamente determinado por la imagen de un punto. Para tener una buena definición, si fijamos $0 \in \mathbb{D}^k$ y $p^k_\alpha := f^k_\alpha(0)$, para cada $x \in E^k_\alpha := E_{p^k_\alpha}$ hay un único levantado,

$$\begin{tikzcd} & & E \arrow[d, "p"] \\ \mathbb{D}^n \arrow[r, "f^k_\alpha"'] \arrow[urr, dashed, "\exists! g^{k,x}_\alpha"] & e^n_\alpha \arrow[r, hook] & X \end{tikzcd}$$

tal que $g^{k,x}_\alpha(0) = x$. Además, todo levantado de una función característica es de ésta forma, pues queda determinada unívocamente por su imagen en cualquiera de sus puntos, en particular, en 0. Ahora, afirmamos que $\mathcal{C} = \{c^{k,x}_\alpha := g^{k,x}_\alpha(\mathbb{D}^n) : k \in [\![n]\!]_0, \alpha \in J_k, x \in E^k_\alpha\}$ es una estructura celular:

(i) $\bigcup_{c^{k,y}_\alpha \in \mathcal{C}} c^{k,y}_\alpha = E$ pues si $q \in E$, luego $p(q) \in X$ pertenece a alguna celda e^k_α. Así, es $p(q) = f^k_\alpha(z)$ para cierto $z \in \mathbb{D}^k$. Luego existe una única función $g^{k,y}_\alpha$ tal que $g^{k,y}_\alpha(z) = q$. En consecuencia, es $q \in c^{k,y}_\alpha$.

(ii) Supongamos $c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta \neq \emptyset$ y veamos que $\alpha = \beta, x = y, k = l$. Siempre es

$$p(c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta) \subset p(c^{k,x}_\alpha \cap c^{l,y}_\beta) \subset p(c^{k,x}_\alpha) \cap p(c^{l,y}_\beta) = e^k_\alpha \cap e^l_\beta. \tag{1}$$

Veamos ahora que $p(c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta) \subset e^{k\,o}_\alpha \cap e^{l\,o}_\beta$. Como ya sabemos que vale (1) y $e^k_\alpha \cap e^l_\beta \subset c^{l,y\,o}_\beta \cap e^{k\,o}_\alpha \cup \dot{e}^k_\alpha \cup \dot{e}^l_\beta$, es suficiente probar que

$$p(c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta) \subset \dot{e}^{k\,c}_\alpha,\ \dot{e}^{l\,c}_\beta. \tag{2}$$

Ambos casos son similares, lo hacemos para e^k_α. Por el absurdo, si $p(q) \in \dot{e}^k_\alpha$, luego existe e^m_γ tal que $p(q) \in e^m_\gamma$ y $m < k$. Existe entonces $g^{m,w}_\gamma$ tal que $g^{m,w}_\gamma(z) = q$ para cierto $z \in \mathbb{D}^m$ y así $q \in c^{m,w}_\gamma$ con $m < k$, lo que es absurdo pues $q \in c^{k,x\,o}_\alpha$. En conclusión, hemos probado (2) y entonces siempre es $p(c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta) \subset e^{k\,o}_\alpha \cap e^{l\,o}_\beta$. Esto en particular implica que como $c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta \neq \emptyset$, la intersección $e^{k\,o}_\alpha \cap e^{l\,o}_\beta$ es no vacía y entonces $\alpha = \beta, k = l$. Para terminar, veamos que $x = y$. Sea $q \in c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{l,y\,o}_\beta = c^{k,x\,o}_\alpha \cap c^{k,y\,o}_\alpha$. Luego existen $z, z' \in \mathbb{D}^k$ tales que

$$g^{k,x}_\alpha(z) = q = g^{k,y}_\alpha(z'). \tag{3}$$

[1] A partir de ahora, para aligerar notación pensamos a los puntos de la imagen de cada función característica como puntos de X, i.e. dejamos de escribir la postcomposición con la inclusión $e^k_\alpha \hookrightarrow X$.

Aplicando p, tenemos

$$f_\alpha^k(z) = p(q) = f_\alpha^k(z'),$$

y como acabamos de probar que $p(q) \in {e_\alpha^k}^o = f_\alpha^k((\mathbb{D}^k)^o)$, luego $z, z' \in (\mathbb{D}^k)^o$. Restringida allí sabemos que f_α^k es biyectiva (de hecho, es un homeomorfismo con su imagen) así que $z = z'$. Volviendo a (3), tenemos dos levantados $g_\alpha^{k,x}, g_\alpha^{k,y}$ de f_α^k que coinciden en un punto y por lo tanto deben ser iguales. Finalmente, $x = g_\alpha^{k,x}(0) = g_\alpha^{k,y}(0) = y$.

Antes de seguir observemos que tomando celdas iguales, en (ii) probamos en particuar que $p(c_\alpha^{k,x}) \subset e_\alpha^{k,x}$ y $p({c_\alpha^{k,x}}^o) \subset {e_\alpha^{k,x}}^o$ para cuaqluier celda.

(iii) Afirmamos por último que las correstricciones $g_\alpha^{k,y} : \mathbb{D}^k \to c_\alpha^{k,y}$ son funciones características: debemos ver que $g_\alpha^{k,y}(\mathbb{S}^{k-1}) = \dot{c}_\alpha^{k,x}$, $g_\alpha^{k,y}({\mathbb{D}^k}^o) = {c_\alpha^{k,x}}^o$ y que la restricción $g_\alpha^{y,k} : {\mathbb{D}^k}^o \to {c_\alpha^{y,k}}^o$ es homeomorfismo.

- Si $x \in \mathbb{S}^{k-1}$ entonces $f_\alpha^k(x) \in \dot{e}_\alpha^k$ y por lo tanto $f_\alpha^k(x) \in e_\beta^m$ para cierta celda con $m < k$. Luego como $g_\alpha^{k,y}(x) \in E_{f_\alpha^k(x)}$, existe un levantado $g_\beta^{m,z}$ de f_β^m tal que $g_\beta^{m,z}(x') = g_\alpha^{k,y}(x)$ para cierto $x' \in \mathbb{D}^m$. Por lo tanto $g_\alpha^{k,y}(x) \in c_\alpha^{k,x} \cap c_\beta^{m,z}$ y así $g_\alpha^{k,y}(\mathbb{S}^{k-1}) \subset \dot{c}_\alpha^{k,y}$. Recíprocamente, si $q = g_\alpha^{k,y}(x) \in c_\alpha^{k,y} \cap c_\beta^{m,w}$ para cierta celda con $m < k$ entonces $f_\alpha^k(x) = p(q) \in p(c_\alpha^{k,y}) \cap p(c_\beta^{m,w}) \subset \dot{e}_\alpha^k$. Por lo tanto, necesariamente es $x \in \mathbb{S}^{k-1}$ y entonces $\dot{c}_\alpha^{y,k} \subset g_\alpha^{k,y}(\mathbb{S}^{k-1})$.
- Sea $x \in {\mathbb{D}^k}^o$. Si su imagen por $g_\alpha^{k,y}$ no fuera parte del interior de $c_\alpha^{k,y}$, debe estar en el borde. Por lo tanto, por lo anterior existe $x' \in \mathbb{S}^{k-1}$ tal que $g_\alpha^{y,k}(x') = g_\alpha^{y,k}(x)$. Componiendo con p, luego es $f_\alpha^k(x') = f_\alpha^k(x)$ lo que es absurdo, pues este elemento sería imagen del borde e interior de e_α^k al mismo tiempo. Recíprocamente, si $g_\alpha^{y,k}(x) \in {c_\alpha^{y,k}}^o$ entonces $f_\alpha^k(x) = pg_\alpha^{k,y}(x) \in {e_\alpha^k}^o$ y por lo tanto $x \in {\mathbb{D}^k}^o$.
- Sabemos que $g_\alpha^{y,k} : {\mathbb{D}^k}^o \to {c_\alpha^{y,k}}^o$ es continua y sobreyectiva. Como f_α^k es inyectiva en el interior del disco, también tenemos la inyectividad: si $g_\alpha^{y,k}(x) = g_\alpha^{y,k}(x')$ para ciertos $x, x' \in {\mathbb{D}^k}^o$ componiendo con p es $f_\alpha^k(x) = f_\alpha^k(x')$ y entonces $x = x'$. Resta ver que $g_\alpha^{y,k}$ es abierta. Sea $U \subset {\mathbb{D}^k}^o$ abierto, y veamos que $g_\alpha^k(U)$ es abierto. Por hipótesis, $f_\alpha^k(U)$ es abierto en ${e_\alpha^k}^o$, es decir tenemos que $f_\alpha^k(U) = V \cap {e_\alpha^k}^o$ con V abierto en X. Luego $p^{-1}(V)$ es abierto y afirmamos entonces que $g_\alpha^{k,y}(U) = p^{-1}(V) \cap {c_\alpha^{k,y}}^o$. Ya sabemos que $g_\alpha^{k,y}(U) \subset {c_\alpha^{k,y}}^o$, y además $pg_\alpha^{k,y}(U) = f_\alpha^k(U) \subset V$ así que $g_\alpha^{k,y}(U) \subset p^{-1}(V)$. Veamos la otra contención: sea $y \in p^{-1}(V) \cap {c_\alpha^{k,y}}^o$. Como $g_\alpha^{k,y}$ es una biyección entre el interior del disco y de la celda, luego $y \in p^{-1}(V) \cap {c_\alpha^{k,y}}^o$ si y sólo si $y = g_\alpha^{k,y}(x)$ con $p(y) = f_\alpha^k(x) \in V$ y $x \in {\mathbb{D}^k}^o$. Una vez más, como f_α^k es una biyección entre el interior del disco y el interior de e_α^k, esto equivale a decir que $f_\alpha^k(x) \in V \cap {e_\alpha^k}^o = f_\alpha^k(U)$. En particular x debe ser un elemento del interior del disco, y como f_α^k es biyectiva en U, luego es $x \in U$ e $y = g_\alpha^{k,y}(x) \in g_\alpha^{k,y}(U)$.

Esto termina la demostración de que E admite una estructura celular. Veamos ahora que es CW-complejo, es decir, que cumple las propiedades (C) y (W).

- E verifica (C): si $c_\beta^{l,y} < c_\alpha^{k,x}$ entonces $e_\alpha^l < e_\beta^k$ pues

$$p(c_\alpha^{k,x} \cap c_\beta^{l,y^o}) \subset p(c_\alpha^{k,x}) \cap p(c_\beta^{l,y^o}) \subset e_\alpha^k \cap e_\beta^{l\ o},$$

  y más aún de aquí se ve que si $c_\beta^{l,y}$ es cara de $c_\alpha^{k,x}$ entonces e_α^l es cara de e_β^k. Entonces, si $c_\beta^{l,y}$ tuviese infinitas caras, tendríamos al menos numerables celdas $\{c_{\alpha_n}^{k_n,y_n}\}_{n\geq 1}$ que son caras de $c_\beta^{l,y}$. Luego las celdas $\{e_{\alpha_n}^{k_n}\}_{n\geq 1}$ serían caras de e_β^l y como X es CW-complejo, deben ser finitas: así, las suceciones $(\alpha_n)_n, (k_n)_n$ toman finitos valores $\gamma_1, \ldots, \gamma_s$ y $m_1, \ldots, m_r$. Luego, debe existir un par (γ_i, k_j) tal que hay infinitas celdas de la forma $c_{\gamma_i}^{k_j,x}$ que son caras de $c_\beta^{l,y}$. **[Me faltó probar que esto último es absurdo. Una idea que tuve, pero que no pude conretar, fue intentar ver que algunos de estos puntos formaban un subespacio discreto y usar la compacidad de $c_\alpha^{l,y}$]**

- E verifica (W): cada celda $c_\alpha^{k,y}$ es compacta en E Hausdorff así que es cerrada, y en particular si $F \subset E$ es cerrado entonces $F \cap c_\alpha^{k,y}$ es cerrado para cada $c_\alpha^{k,y}$. Equivalentemente un abierto en E es abierto en cada celda. Debemos ver la recíproca: supongamos que $U \subset E$ es tal que $U \cap c_\alpha^{k,y}$ es abierto para toda celda $c_\alpha^{k,y}$ y veamos que U es abierto. **[No pude completar la prueba: una idea que no pude llevar a cabo era considerar las preimagenes de abiertos parejamente cubiertos. Como cubren E, alcanza ver que U es abierto al intersecarlo con cada una de éstas, y de ahí se podría intentar "pasar el problema a uno en X" y usar que éste tiene la topología final con respecto a sus celdas]**

Esto termina de probar que E es un CW-complejo, y es de dimensión n por construimos su estructura celular. Finalmente, veamos que un CW-complejo arcoconexo siempre admite un revestimiento universal. Para esto, basta probar que los CW-complejos son localmente arcoconexos y semi-localmente simplemente conexos. Como cada celda es localmente arcoconexa y "ser localmente arcoconexo" es una propiedad cerrada por cocientes y uniones disjuntas, en particular el 0-esqueleto es localmente arconocexo. Más aún, inductivamente todo k-esqueleto es localmente arcoconexo pues es un cociente de una unión disjunta de espacios localmente arcoconexos. Por último, eso dice que $\sqcup_{k\geq 0} X^{(k)}$ es arcoconexo, y como $q : x \in X^{(s)} \subset \sqcup_{k\geq 0} X^{(k)} \mapsto x \in X^{(s)} \subset X$ es cociente pues X tiene la topología final respecto de las inclusiones de cada esqueleto, luego X es un cociente de un espacio localmente arcoconexo: en particular, X es localmente arcoconexo. **[Me faltó probar que los CW-complejos son semi-localmente simplemente conexos]** $\square$