Números Complejos

Unidad imaginaria: $j = \sqrt{-1}$ $(j \notin \mathbb{R})$

$\downarrow$

$\sqrt{-x} = j\sqrt{x}$ con $x > 0 \wedge \sqrt{x} \in \mathbb{R}$

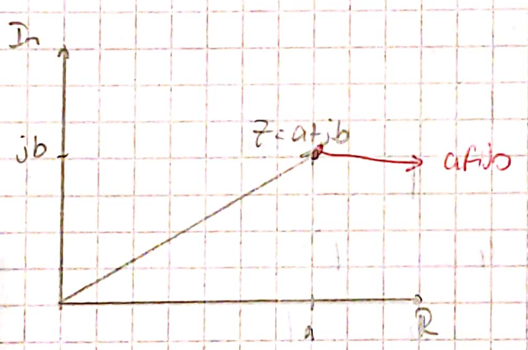
Número complejo: $z = a + bj$ (Forma binómica) $z = (a,b)$ (Forma de par ordenado)

Número real puro: $b = 0$

Número imaginario puro: $a = 0$

$\left.\begin{array}{l} \text{Parte real de } z\text{: } a = Re(z) \\ \text{" imaginaria de } z\text{: } b = Im(z) \end{array}\right\}$ siempre coeficientes (no se pone la j)

Plano complejo



Módulo de un n° complejo:

Sea $z = a + bj \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Adición y resta de complejos: Se suma parte real con parte real y parte imaginaria con parte imaginaria

Multiplicación de complejos: distributiva

Todo número complejo no nulo tiene inverso: $(a,b)^{-1} = \left(\frac{a}{a^2+b^2} ; \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$

Conjugado de un n° complejo:

Sea $z = a + jb \Rightarrow \bar{z} = a - jb$ tiene opuesta parte imaginaria

Propiedades importantes

- $z \cdot \bar{z} = (a+jb)(a-jb) = a^2+b^2 = |z|^2$

Gracias a esto, podemos realizar la división de dos nº complejos, se puede multiplicar numerador y denominador por el conjugado del denominador

- $z + \bar{z} = 2\,Re(z) = 2a$
- $z - \bar{z} = 2\,Im(z) = 2b$

Potencias naturales de un complejo

$j^0 = 1 \qquad j^1 = j \qquad j^2 = -1 \qquad j^3 = -j$

Si $n > 3$ $\qquad j^n = j^r$ siendo r el resto de dividir a n por 4

Triángulo de tartaglia

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

Binomio de Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Raíz cuadrada de un complejo en forma binómica

Sea $z \in \mathbb{C}$, $u \in \mathbb{C}$ $\quad$ u es la raíz cuadrada de $z \iff z = u^2$

Si $z = a+jb$ $\qquad u = \sqrt{z} = \pm\sqrt{\dfrac{|z|+a}{2}} \pm j\sqrt{\dfrac{|z|-a}{2}}$

Esto da lugar a 4 raíces pero si: $b>0 \rightarrow$ toman signos iguales $(+ \text{ y } + \quad o \quad - \text{ y } -)$

$b<0 \rightarrow$ toman signos distintos $(+ \text{ y } - \quad o \quad - \text{ y } +)$

Si $b=0 \Rightarrow u = \pm\sqrt{a}$

Teorema Fundamental del Álgebra

Sea el polinomio $P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ con $a_i \in \mathbb{C}$

$\Rightarrow \exists\, x_1, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ tales que $P(x_i)=0 \quad \forall i: 1, \dots, n$

El T.F.A nos asegura que dicho polinomio siempre tiene n raíces en el complejo, no necesariamente todas distintas, puede haber raíces múltiples

Propiedad:

Sea la ecuación polinómica: $a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n = 0$ con $a_i \in \mathbb{R}$

Si α es raíz compleja entonces $\bar{\alpha}$ también es raíz de dicha ecuación

Corolario 1: Si un polinomio tiene todos sus coeficientes reales, entonces la cantidad de raíces complejas no reales es par

Corolario 2: todo polinomio de grado impar con todos sus coeficientes reales, tiene al menos una raíz real

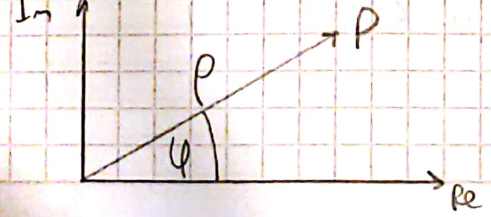
Observación: Si un polinomio NO tiene todos los coeficientes reales, entonces la cantidad de raíces complejas puede ser impar, y no necesariamente la conjugada de una raíz es raíz

Si tenemos un polinomio de 2° grado ax^2+bx+c con $a,b,c \in \mathbb{R}$ y x_1 y x_2 raíces:

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \wedge \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Forma Polar de un Complejo

Sea $z = a + jb \Rightarrow z = [\rho; \varphi]$ donde $\rho = |z|$ y φ es el argumento o ángulo que forma el vector con el semieje positivo real



Polar a binómica:

Sea $z = [\rho; \varphi]$ en forma polar $\Rightarrow z = a + bj$ con $a = \rho \cos\varphi$ y $b = \rho \operatorname{sen}\varphi$

Binómica a Polar

Si $z = a + jb$ en forma binómica $\Rightarrow z = [\rho; \varphi]$ con $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$ y $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{b}{a}\right)$ en ab

Si $a = 0 \Rightarrow \varphi = \pi/2$ o $3/2\,\pi$

Forma trigonométrica de un complejo: $z = \rho(\cos\varphi + j \operatorname{sen}\varphi)$

Forma exponencial de un complejo: $z = \rho e^{j\varphi}$

Igualdad de complejos en forma polar

Sea $z_1 = [\rho_1; z_1]$ y $z_2 = [\rho_2; z_2]$

$z_1 = z_2 \iff \rho_1 = \rho_2 \wedge \varphi_2 = \varphi_1 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$

Operaciones con números complejos en forma polar

No se puede sumar ni restar (se tiene que pasar a binómica)

- Multiplicación: $z_1 \cdot z_2 = [\rho_1 \cdot \rho_2; \varphi_1 + \varphi_2]$
- División: $z_1/z_2 = [\rho_1/\rho_2, \varphi_1 - \varphi_2]$

Potenciación de Exponente natural $z^n = [\rho^n; n\varphi]$ con $n \in \mathbb{N}$ (Fórmula de Moivre)

Raiz N-ésima de un complejo

Definición $w \in \mathbb{C}$ es la raiz n-ésima de $z \in \mathbb{C} \iff z = w^n$.

Sea $z = [\rho; \varphi]$ y supongamos $w = [r; \theta]$ una raiz n-ésima de z

$r = \sqrt[n]{\rho} \wedge \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \wedge k \in \mathbb{Z}$

$$w_k = \left[\sqrt[n]{\rho}; \frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right] \text{ con } k = 0, 1, 2, \dots, n-1$$

Corrección angular:

II cuadrante	I cuadrante
$+\pi$	No realizo corrección
$Re(z)<0 \wedge Im(z)>0$	$Re(z)>0 \wedge Im(z)>0$
III cuadrante	IV cuadrante
$+\pi$	$+2\pi$ (Para obtener el ángulo dentro del 1° giro positivo)
$Re(z)<0 \wedge Im(z)<0$	$Re(z)>0 \wedge Im(z)<0$

Raíces primitivas de la unidad

Sea W_k una raíz n-ésima de la unidad, es decir: $W_k^n=1$; se dice que W_k es una raíz primitiva de orden n si no es de orden inferior

Propiedades.

- W_0 nunca es primitiva
- W_1 siempre es primitiva
- W_k es primitiva $\Leftrightarrow$ $mcd(k;n)=1$ (k y n son coprimos)

Logaritmo natural de un complejo

$v \in \mathbb{C}$ es un logaritmo natural de $z \in \mathbb{C} \Leftrightarrow z=e^{v}$

$$v_k = \ln z = \ln \rho + j(\varphi + 2k\pi)$$

Se define cuando $k=0$ y $\varphi \in [0; 2\pi]$ el "Valor principal de $\ln z$" $V.P(\ln z) = \ln \rho + j\varphi$

Potencia compleja de un complejo

Sea $z = z_1^{z_2} \Rightarrow \ln(z) = z_2 \ln(z_1) \Rightarrow z = e^{z_2 \cdot \ln(z_1)}$

Fasores complejos

Dados $f_1(t) = 10\cos(3t - \pi/3)$ y $f_2(t) = 5\cos(3t + 5\pi/12)$

Hallar $f_1 + f_2$ utilizando fasores

$$f_1(t) + f_2(t) = Re[Z_1(t) + Z_2(t)] = Re\left[10e^{(3t - \pi/3)j} + 5e^{(3t + 5\pi/6)j}\right]$$

$$f_1(t) + f_2(t) = Re\left[10e^{3t} \cdot e^{-\pi/3 j} + 5e^{3t} \cdot e^{5\pi/6 j}\right]$$

$$= e^{3tj} \cdot Re\left[10\cos(-\pi/3) + 10j\,sen(-\pi/3) + 5\cos(5\pi/12) + 5\,sen(5\pi/12)j\right]$$

$$= e^{3tj} \cdot Re\left[5 - 5\sqrt{3}j + 1{,}29 + 4{,}83j\right]$$

$$= e^{3tj} \cdot Re\left[6{,}29 - 3{,}83j\right] \Rightarrow e^{3tj} \cdot Re\left[7{,}36e^{-0{,}55j}\right]$$

mismo w

$$\boxed{f_1(t) + f_2(t) = 7{,}36\cos(3t - 0{,}55)}$$

Pasar de sen a cos

$$sen\,\alpha = \cos(\alpha - \pi/2)$$

$$\cos\alpha = sen\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)$$

Serie General de Fourier

Serie Trigonométrica de Fourier

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega x) + b_n \operatorname{sen}(n\omega x)$$

integro en un periodo

Donde: $a_0 = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\,dx$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos(n\omega x)\,dx$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\operatorname{sen}(n\omega x)\,dx$$

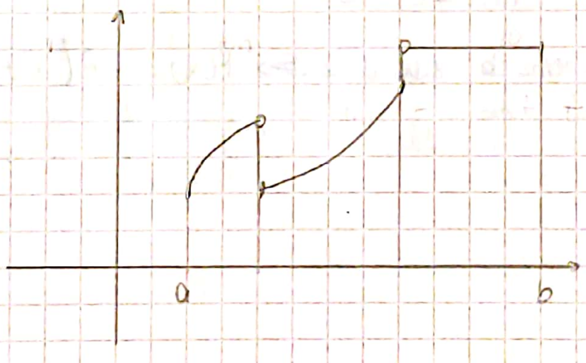
Periodo

$$\boxed{l = \frac{T}{2}}$$

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

Función seccionalmente Continua

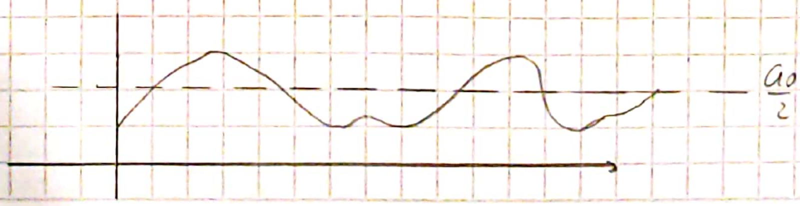
Sea $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. Se dice que f es seccionalmente continua $\Longleftrightarrow$ tiene un número finito de saltos finitos. También se las llama Continuas a Trozo



Toda función continua es también seccionalmente continua

Interpretación del $\frac{a_0}{2}$

El $a_0/2$ es el término independiente de la STF y es la componente continua de $s(x)$, es decir es un valor constante tal que el área encerrada entre la función y esta constante por arriba y por abajo es la misma



Funciones pares e impares

- f es par $\Longleftrightarrow f(x) = f(-x) \quad \forall x \in D_f$ — Simétrica respecto del eje Y

- f es impar $\Longleftrightarrow f(x) = -f(-x) \quad \forall x \in D_f$ — Simétrica respecto del origen

Relacionando con Fourier:

Si f es par: $b_n = 0 \;\wedge\; a_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(nwx)\,dx \;\wedge\; a_0 = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,dx$

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nwx) \quad \text{(Serie de cosenos)}$$

Si f es impar: $a_0 = 0 \;\wedge\; a_n = 0 \;\wedge\; b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\,\operatorname{sen}(nwx)\,dx$

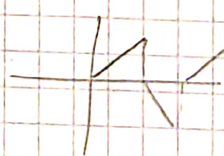
$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(nwx) \quad \text{(Serie de senos)}$$

Funciones periódicas alternadas

f es periódica alternada o tiene simetría de media onda $\Longleftrightarrow f(x) = -f(x + T/2)$

↓

Se invierte en "Y" medio periodo

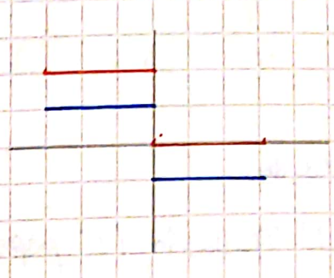


Si f es periódica alternada $\Rightarrow$ los coeficientes de la serie de Fourier a_0, a_{2k}, b_{2k} son nulos.
Es decir, los desarrollos en serie de Fourier de funciones periódicas alternadas sólo términos de frecuencias impares.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$$

Corrimiento vertical

$$g(t) = f(t) + k \Rightarrow S[g(t)] = S[f(t)] + k$$



Serie Exponencial de Fourier

$$\cos\alpha = \frac{e^{j\alpha} + e^{-j\alpha}}{2} \qquad \operatorname{sen}\alpha = \frac{e^{j\alpha} - e^{-j\alpha}}{2}$$

$$\boxed{S(x) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{j(n\omega x)} C_n + e^{-j(n\omega x)} C_{-n}}$$

$$\boxed{C_0 = \frac{a_0}{2}} \qquad \boxed{C_n = \frac{a_n - jb_n}{2}} \qquad \boxed{C_{-n} = \frac{a_n + jb_n}{2}}$$

$$C_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} f(x)\, e^{-j(n\omega x)}$$

Transformada de Fourier

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, e^{-j\omega t}\, dt$$

Transformada de Laplace

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)\, e^{-st}\, dt \qquad s = \alpha + jw$$

↑ es una "s"

Propiedades.

1) Traslación (1° propiedad)

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s-a)$

Ejemplo: como $\mathcal{L}[\cos(2t)] = \dfrac{s}{s^2+4} \Rightarrow \mathcal{L}[e^{-t}\cos(2t)] = F(s+1) = \dfrac{s+1}{(s+1)^2+4}$

2) Traslación (2° propiedad)

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \wedge g(t) = f(t-a)$ si $t>a$ $\quad$ (0 si $t<a$)

$\Rightarrow \mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} F(s)$

Ejemplo: $\cos(t - 2\pi/3)$ si $t > 2\pi/3 \Rightarrow F(s) = e^{-\frac{2\pi}{3}s} \cdot \dfrac{s}{s^2+1}$

Si $t \not> a$ se aplica la definición

↑ no es mayor

3) Transformada de Laplace de las derivadas

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(0)$

Generalización: $\mathcal{L}[f''(t)] = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$

$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \ldots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$

4) Transformada de Laplace de las integrales

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}\left[\int_0^t f(u)\, du\right] = \dfrac{F(s)}{s}$

Ejemplo: $\mathcal{L}\left[\int_0^t \operatorname{sen}(2u)\, du\right] = \dfrac{2}{(s^2+4)s}$

5) Multiplicación por t^n

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$

6) División por t

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^{\infty} F(u)\,du$

7) Teorema del valor inicial

$$\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$$

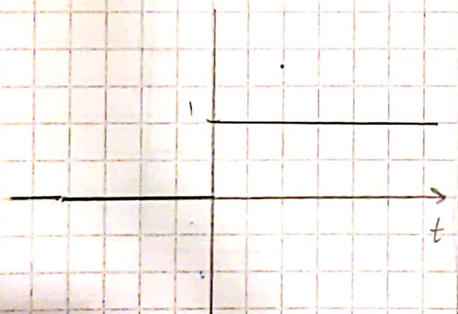
8) Teorema del valor final

$$\lim_{t \to \infty} f(t) = \lim_{s \to 0} sF(s)$$

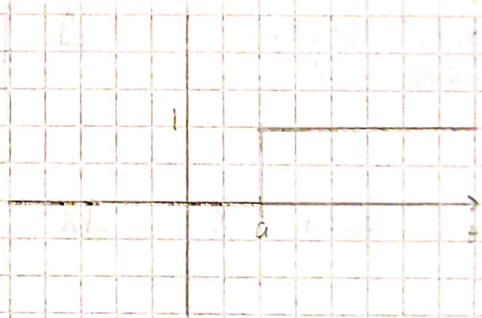
Funciones especiales

- Función Escalón Unitario (Función de Heaviside)

$E(t) = 1$ si $t > 0$



$E(t-a) = 1$ si $t > a$



$$\mathcal{L}[E(t-a)] = \frac{e^{-a}}{s}$$

- Función Impulso Unitario (Función de Dirac)

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

Para antitransformar se utilizan las fracciones simples, donde $F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)}$

donde Grado P < Grado Q

Resolución de ec. diferenciales por Laplace

Dominio del tiempo — Dominio transformado de Laplace

1. Ecuación diferencial en $y(t)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}}$
2. Ecuación algebraica en $Y(s)$ $\downarrow$
3. Solución $Y(s)$ $\xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}}$
4. Solución $y(t)$

Vamos a resolver la ecuación algebraica por Cramer:

Si:

$$\begin{cases} a\,X(s) + b\,Y(s) = c \\ d\,X(s) + e\,Y(s) = f \end{cases}$$

Matriz de los coeficientes: (determinante)

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

Determinante asociado a X:

$$\Delta X = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}$$

$$X(s) = \frac{\Delta X}{\Delta}$$

Determinante asociado a Y:

$$\Delta Y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}$$

Teorema de Convolución o Teorema de Borel

Si $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \wedge g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$

$$\Rightarrow \mathcal{L}^{-1}[F(s) \cdot G(s)] = \int_0^t f(u)\, g(t-u)\, du$$

Evaluación de integrales por medio de Transformada de Laplace

Si $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] \Rightarrow \int_0^\infty f(t)\, e^{-st}\, dt = F(s)$

Tomando límite para $s \to a$ es: $\int_0^\infty f(t)\, e^{-at}\, dt = F(a)$

Ejemplo. $\int_0^\infty \underbrace{t^2}_{f(t)}\, e^{-2t} \to F(2)$

$F(s) = \frac{2}{s^3} \Longrightarrow \boxed{F(2) = \frac{1}{4}}$

TABLA DE LAS TRANSFORMADAS ELEMENTALES:

f(t)	F(s) = $\mathcal{L}$[f(t)]
1	$\frac{1}{s}$ (s>0)
t	$\frac{1}{s^2}$ (s>0)
t^n ($n \in \mathbb{N}$)	$\frac{n!}{s^{n+1}}$ (s>0)
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$ (s>a)
sen (a t)	$\frac{a}{s^2+a^2}$ (s>0)
cos (a t)	$\frac{s}{s^2+a^2}$ (s>0)
δ (t)	1

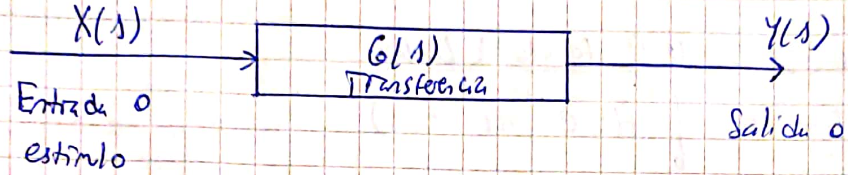
Notas: $a \in R$

s > 0 es para $s \in R$, o bien la parte real de s.

Función de Transferencia

Se la llama también como transmitancia o ganancia del sistema y se la define como el cociente entre la señal de salida y la de entrada

$$G(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$$



En general, G(s) se puede expresar como un cociente de 2 polinomios, siendo el grado del numerador menor que el del denominador

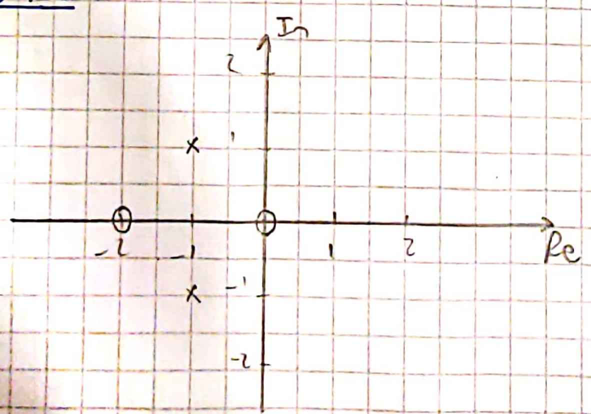
$$G(s) = \frac{P_2(s)}{P_1(s)} = k \frac{\prod (s - z_i)}{\prod (s - p_i)}$$

productoria

Polos y ceros

- z es CERO de G(s) $\iff \lim_{s \to z} G(s) = 0$. Se representan con círculos
- p es POLO de G(s) $\iff \lim_{s \to z} G(s) = \infty$. Se representan con cruces

Constelación de polos y ceros



$z_1 = 0$

$z_2 = -2$

$P_1 = -1 + j$
$P_2 = -1 - j$ } SIEMPRE ofrecen los conjugados

Determinación gráfica de módulo y fase de G(s) en un punto "s" de interés

$$|G(s)| = K \cdot \frac{\prod \text{módulos-de-vectores-con-origen-en-los-ceros}}{\prod \text{módulos-de-los-vectores-con-origen-en-los-polos}}$$

K: Cociente de los coeficientes principales del numerador y denominador respectivamente

$$\theta = \underbrace{\arg}_{\text{argumento}}[G(s)] = \sum \text{argumento-de-los-ceros} - \sum \text{argumento-de-los-polos}$$

Encontrar función según corte de plano de módulo

1) Multiplicar por K toda la función
2) Identificar cantidad de ceros y polos y factorizarlos
3) Los máximos locales son polos complejos en ese punto: $(s-a)^2+b$

   a = lugar real del máximo (altura de x en el plano)

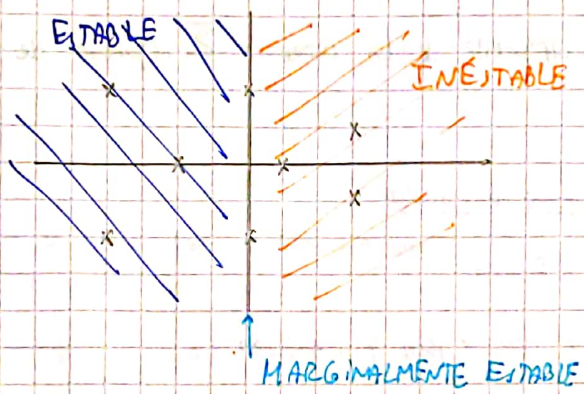
   b = no lo sabemos

4) Las asíntotas verticales son polos reales $(s-P_n)$ siendo P_n el valor del eje x donde está la asíntota

Sistemas Estables

Estabilidad de un sistema

- **Inestable**: al menos 1 polo con parte real positiva
- **Marginalmente estable**: no es inestable y tiene al menos un polo simple con parte real nula
- **Estable**: todos los polos con parte real negativa



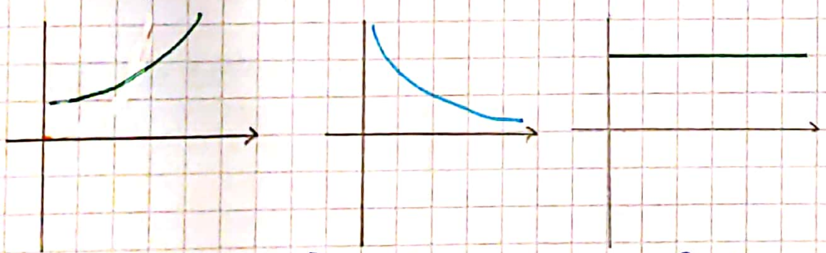
Sistema lineal

Un sistema se denomina lineal cuando se le puede aplicar el Principio de Superposición, el cual establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos o más funciones de entradas diferentes, es la suma de c/u de las respuestas individuales.

Por lo tanto, para estudiar este tipo de sistemas, se puede ir estudiando una entrada por vez y luego se suman todas

Respuesta de Sistemas Lineales

- Polos simples reales

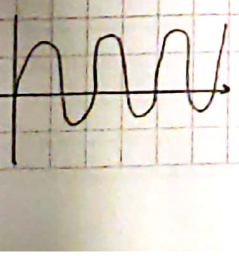


Exponencial Creciente — e^{at} $a>0$

Exponencial decreciente — e^{at} $a<0$

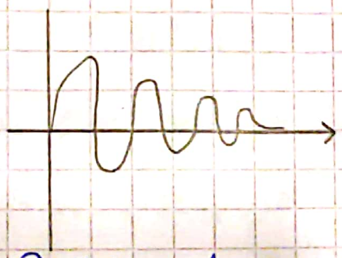
Constante — Polo en el origen

- Polos imaginarios puros simples



Oscilatoria pura

- Polos complejos conjugados



Oscilatoria Amortiguada

Parte real $\alpha < 0$

$\downarrow$

amortiguada por la exponencial con factor de amortiguamiento α

Oscilatoria creciente

Parte real $\alpha > 0$

Transformada z

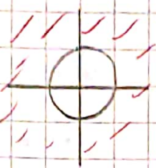
$$\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\, z^{-n}$$ (Transformada unilateral)

Convergencia

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{si } |a| < 1$$ → "a" va a tener z entonces va a quedar

$|z| > k$ para ser estable

↑ n° complejo



Paridad

Sea $a_n = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \text{ es par} \\ g(n) & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$

Par: $2n$

impar: $2n+1$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(2n)\, z^{-2n} + \sum_{n=0}^{\infty} g(2n+1)\, z^{-(2n+1)}$$

Múltiplos

Sea $a_n = \begin{cases} f(n) & \text{si } n \text{ es múltiplo de } 3 \\ g(n) & \text{si } n \text{ no es múltiplo de } 3 \end{cases}$

Múltiplo: kn

No múltiplo: $kn+1$

$kn+2$

$\vdots$

Hasta $kn-1$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(3n)\, z^{-3n} + \sum_{n=0}^{\infty} g(3n+1)\, z^{-(3n+1)} + \sum_{n=0}^{\infty} g(3n+2)\, z^{-(3n+2)}$$

Propiedades

1) Desplazamiento temporal (lateral) a derecha

Sea $x(n)$ secuencia con transformada $\mathcal{Z}[x(n)] = X(z) \Rightarrow \mathcal{Z}[x(n-a)] = z^{-a} X(z)$

Ejemplo: $Y(z) = z^{-3} X(z)$ Se desplazó 3 lugares a la derecha

2) Desplazamiento temporal a izquierda

$$\mathcal{Z}[x(n+1)] = z[X(z) - x(0)]$$

$$\mathcal{Z}[x(n+2)] = z^2[X(z) - x(0) - x(1)\, z^{-1}]$$

Generalizando: $\mathcal{Z}[x(n+a)] = z^a [X(z) - x(0) - x(1)\, z^{-1} - x(2)\, z^{-2} - \dots - x(a-1)\, z^{-a+1}]$

3) Multiplicación por a^n

$$Z[a^n x(n)] = X(a^{-1}z)$$ especializar $X(z)$ en $a^{-1}z$

4) Multiplicación por n (diferenciación respecto a z)

$$Z[n\, x(n)] = -z \frac{dX(z)}{dz}$$

Generalizando: $Z[n^k x(n)] = \left(\frac{-z\, d}{dz}\right) X(z)$ (ver ejemplo pág 15 apunte)

5) Teorema del Valor Inicial

$$\lim_{z \to \infty} X(z) = x(0)$$

6) Teorema del Valor Final

$$\lim_{n \to \infty} x(n) = \lim_{z \to 1} \frac{z-1}{z} X(z)$$

7) Convolución

$$x(n) * y(n) = X(z) . Y(z)$$

En particular, si $x(n)$ es la entrada de un sistema lineal invariante con el tiempo y $h(n)$ es la respuesta al impulso, entonces

$$x(n) * h(n) = Y(z) = X(z) . H(z)$$

donde $H(z)$ es la transformada de $h(n)$. Para obtener la salida $y(n)$ hay que antitransformar $Y(z)$

Para antitransformar utilizamos fracciones simples PREVIAMENTE sacando una "z" de factor común, porque en la tabla siempre hay z

Si no puedo sacar z factor común

Ejemplo: $F(z) = \frac{1}{z-3} \xrightarrow{\text{asociada}} X(z) = \frac{z}{z-3} \xrightarrow{Z^{-1}} x(n) = 3^n$

$$F(z) = z^{-1} X(z) \to f(n) = 3^{n-1} \quad (n \geq 1)$$

Para resolver las ecuaciones en diferencia de cualquier orden hay que aplicar la propiedad 2

$$a_{n+1} - a_n = \overset{x(n)}{''} \Rightarrow x(n+1) - x(n) = x(n) \Rightarrow z[X(z) - x(0)] - X(z) = Z[x(n)]$$

TABLA DE ALGUNAS TRANSFORMADAS Z

En la siguiente tabla se escriben las transformadas Z de las principales secuencias discretas:

$x(n)$ con $n \geq 0$	$Z[x(n)] = X(z)$	Radio de Convergencia $\|z\| > R$
$\delta(n)$	1	0
$\delta(n-m)$	z^{-m}	0
$u(n) = 1$	$\frac{z}{z-1}$	1
n	$\frac{z}{(z-1)^2}$	1
n^2	$\frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	1
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\|a\|$
$n\,a^n$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$	$\|a\|$
$(n+1)\,a^n$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$\|a\|$
$\cos(an)$	$\frac{z(z-\cos(a))}{z^2-2z\cos(a)+1}$	1
$\mathrm{sen}(an)$	$\frac{z\,\mathrm{sen}(a)}{z^2-2z\cos(a)+1}$	1
e^{-an}	$\frac{z}{z-e^{-a}}$	e^{-a}