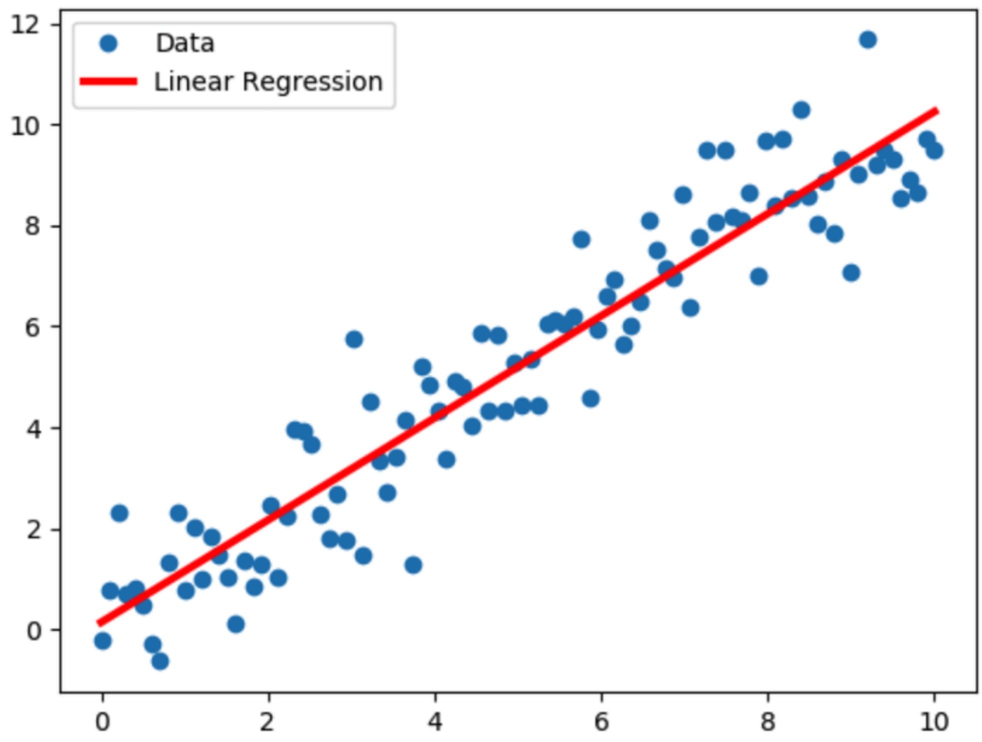
Trabajo Práctico de Aproximación

Matemática Superior 2021

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Alumno: Guido Enrique
Legajo: 164.272-8
Profesor: Santiago Ferreiros
Curso: K3011



Introducción al problema

En el siguiente trabajo, vamos a analizar la evolución del % de concentración de una sustancia en la sangre, luego de transcurrida una cierta cantidad de tiempo desde su administración.
Comparando asi varios métodos para ver su comportamiento, entre ellos:

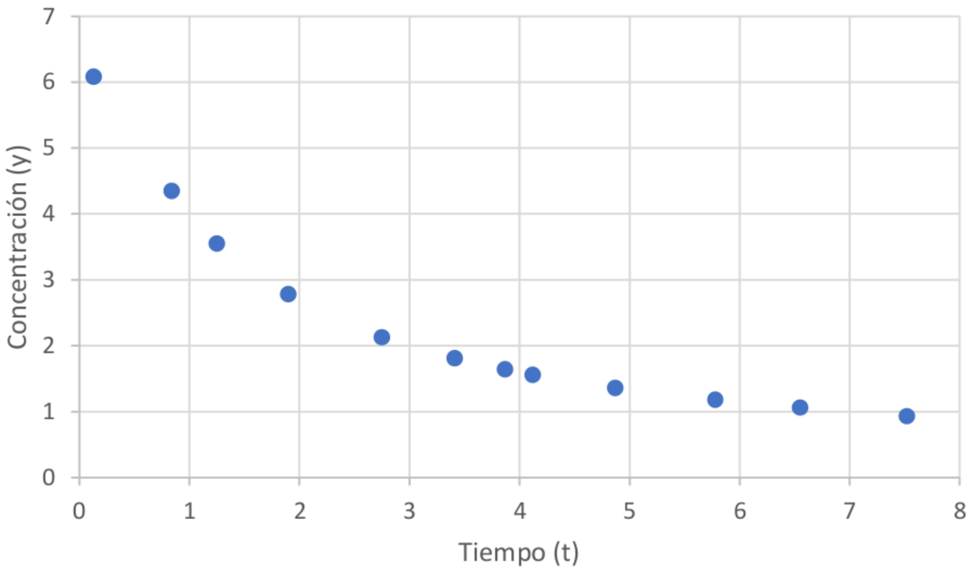
- Recta de mínimos cuadrados
- Parabola de minimos cuadrados
- Aproximación de forma $y = \frac{a}{b+x}$
- Aproximación Exponencial $y = a.e^{bx}$
-

Esta sustancia es la Cafeína , exactamente aplicado aproximadamente unos 5[mL]

Datos

tiempo(t)	concentracion % (y)
0.13	6,08
0.84	4.35
1.25	3.55
1.9	2.78
2.75	2.13
3.41	1.81
3.87	1.64
4.12	1.56
4.87	1.36
5.78	1.18
6.55	1,06
7.52	0.93

Grafico de dispersión



RECTA DE MINIMOS CUADRADOS

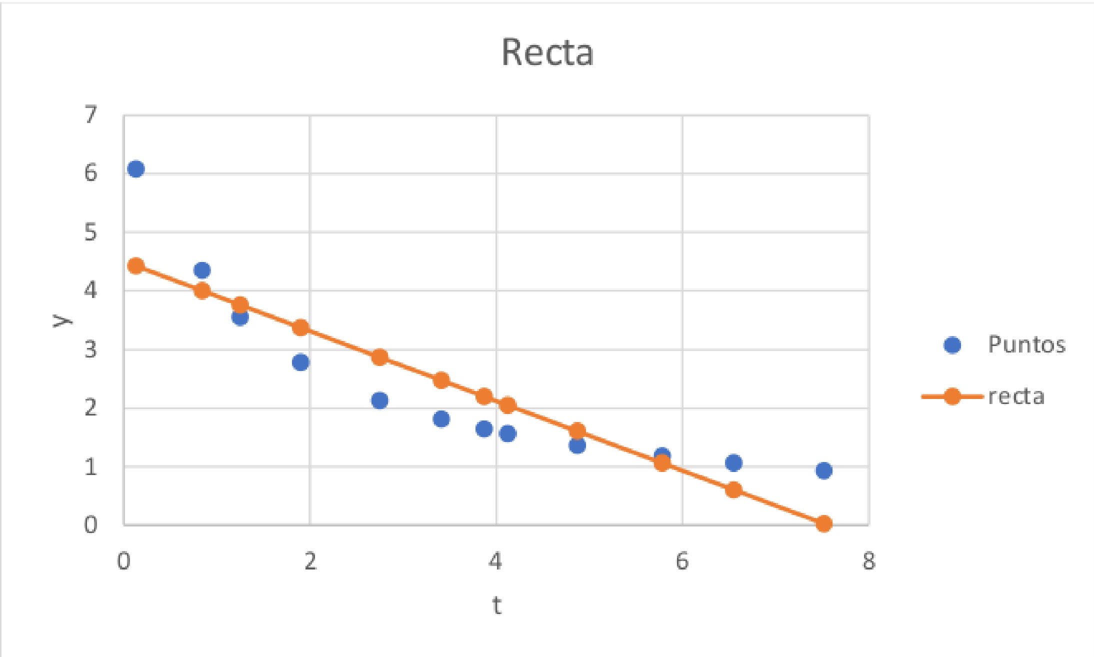
$$\boldsymbol{p(t) = at + b}$$

Sea n: número de puntos dados.

$$\begin{cases} a\sum t_i + b_n = \sum f(t_i) \\ a\sum t_i^2 + b\sum t_i = \sum f(t_i).t_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 42{,}99\, a + 12\, b = 28{,}43 \\ 213{,}6151\, a + 42{,}99\, b = 66{,}3477 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = -0{,}59561 \quad ; \quad b = 4{,}50274$$

$$\boldsymbol{p(t) = at + b \rightarrow p(t) = -0,59561\, t + 4,50274}$$



PARABOLA DE MINIMOS CUADRADOS

$$p(t) = at^2 + bt + c$$

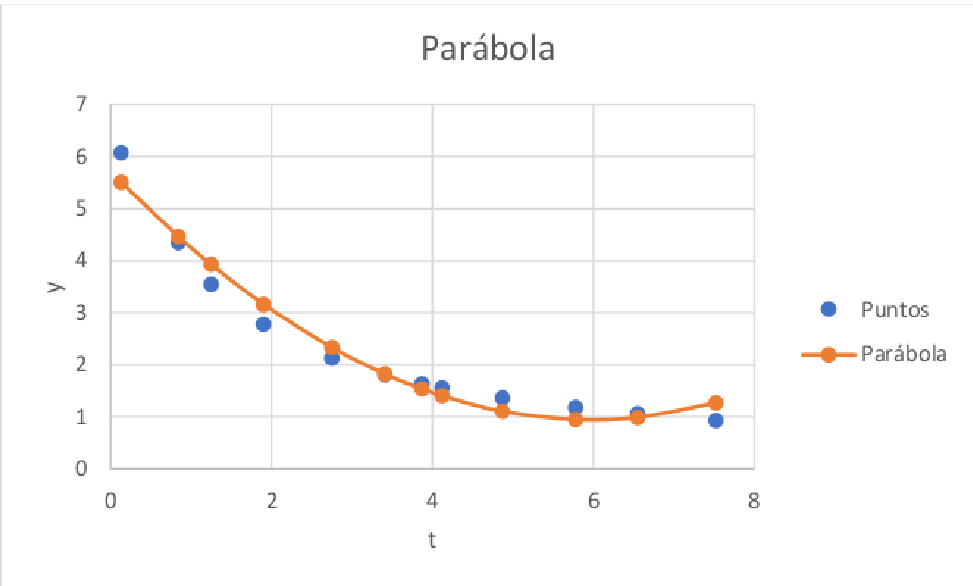
Sea n: número de puntos dados.

$$\begin{cases} a\sum t_i^2 + b\sum t_i + c_n = \sum f(t_i) \\ a\sum t_i^3 + b\sum t_i^2 + c\sum t_i = \sum f(t_i).t_i \\ a\sum t_i^4 + b\sum t_i^3 + c\sum t_i^2 = \sum f(t_i).t_i^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} 213{,}6151\, a + 42{,}99\, b + 12\, c = 28{,}43 \\ 1212{,}6231\, a + 213{,}6151\, b + 42{,}99\, c = 66{,}3477 \\ 7437{,}99837\, a + 1212{,}6231\, b + 213{,}6151\, c = 276{,}69737 \end{cases}$$

$$\rightarrow a = 0{,}13372 \;;\; b = -1{,}59706 \;;\; c = 5{,}71463$$

$$p(t) = at^2 + bt + c \rightarrow \boldsymbol{p(t) = 0,13372\, t^2 - 1,59706\, t + 5,71463}$$



APROXIMACIÓN DE FORMA $y = \frac{a}{b+x}$

$$y = \frac{a}{b+t} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{b+t}{a} \rightarrow \frac{1}{y} = \frac{t}{a} + \frac{b}{a} \rightarrow Y = BT + A$$

Siendo: $Y = \frac{1}{y}$; $B = \frac{1}{a}$; $T = t$; $A = \frac{b}{a}$

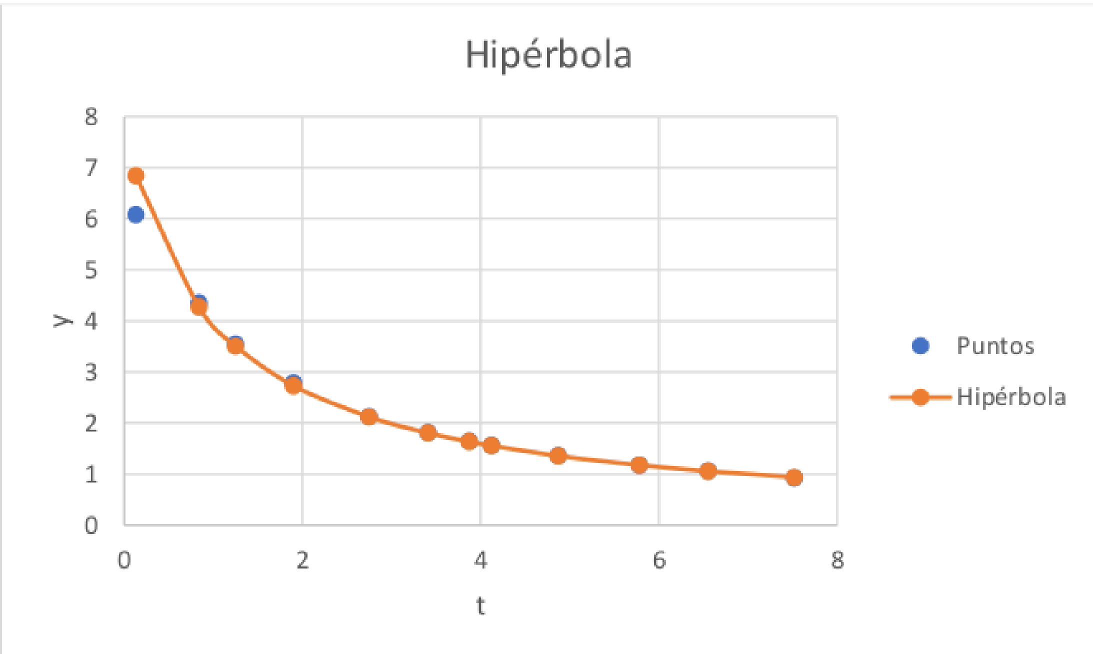
Sea n: número de puntos dados.

$$\begin{cases} A_n + B\sum T_i = \sum Y_i \\ A\sum T_i + B\sum T_i^2 = \sum T_i Y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12\,A + 42{,}99\,B = 6{,}90994 \\ 42{,}99\,A + 213{,}6151\,B = 32{,}1704 \end{cases}$$

$$\rightarrow A = 0{,}12996 \; ; \; B = 0{,}12446$$

$$\rightarrow a = \frac{1}{B} = \frac{1}{0.12446} = 8{,}03471 \quad ; \quad b = A.a = 0{,}12996\,.\,8{,}03471 = 1{,}04419$$

$$y = \frac{a}{b+t} \rightarrow \boldsymbol{y = \frac{8,03471}{1,04419 + t}}$$



<u>APROXIMACION EXPONENCIAL</u> $y = a.e^{bx}$

$y = ae^{bt} \rightarrow ln(y) = ln(a) + bt \rightarrow Y = A + BT$

Siendo: $Y = ln(y)$; $A = ln(a)$; $B = b$; $T = t$

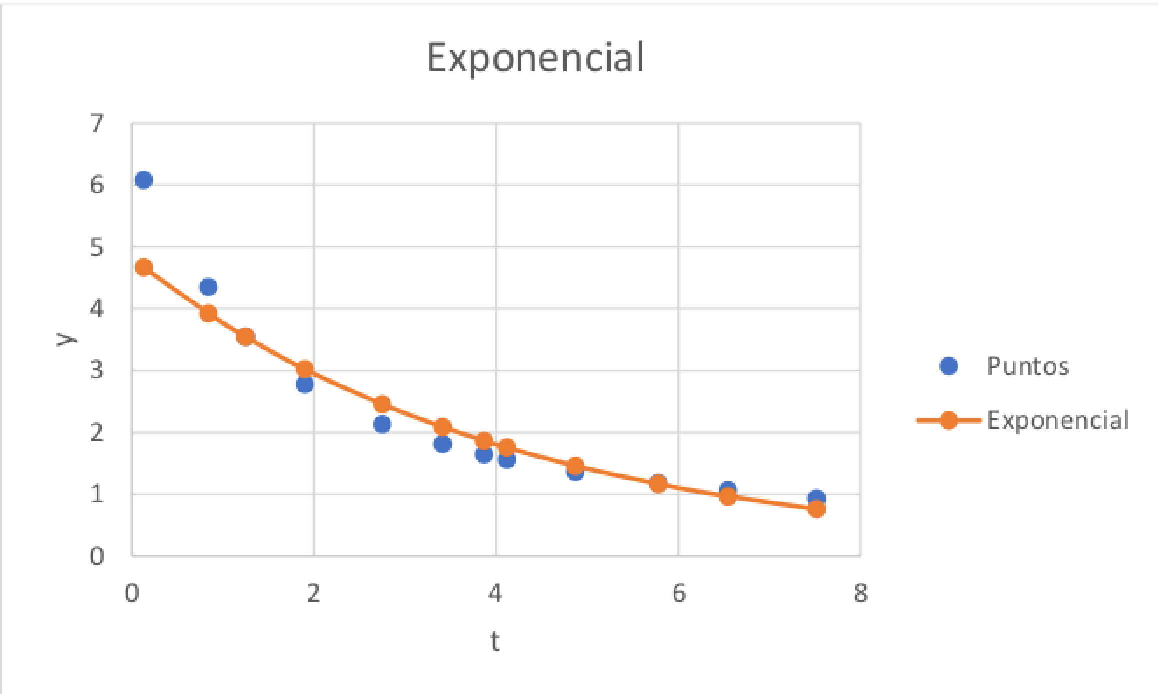
Sea n: número de puntos dados.

$$\begin{cases} A_n + B\sum T_i = \sum Y_i \\ A\sum T_i + B\sum T_i^2 = \sum T_i Y_i \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 12\,A + 42{,}99\,B = 8{,}31211 \\ 42{,}99\,A + 213{,}6151\,B = 15{,}13517 \end{cases}$$

$\rightarrow\ A = 1{,}57272$; $B = -0{,}24567$

$\rightarrow\ a = e^A = e^{1{,}57272} = 4{,}81974$; $b = B = -0{,}24567$

$y = a\,e^{bt} \rightarrow \boldsymbol{y = 4{,}81974\, e^{-0{,}24567\, t}}$



Comparaciones

Para decidir cuál de las curvas es la mejor aproximación, se calcula en cada una de ellas el error, mediante el cálculo de la suma de los cuadrados de las distancias entre la imagen de cada punto de la función original y la imagen de cada punto de la función aproximante. El menor error corresponderá a la curva que mejor se aproxima a la función original.

Para la Recta:

$$Error = \sum d_i^2 = \sum [p(t_i) - f(t_i)]^2 = \mathbf{5,88388}$$

Para la Parábola:

$$Error = \sum d_i^2 = \sum [p(t_i) - f(t_i)]^2 = \mathbf{0,93899}$$

Para la aproximación de forma $y = \frac{a}{b+x}$:

$$Error = \sum d_i^2 = \sum [p(t_i) - f(t_i)]^2 = \mathbf{0,59436}$$

Para la Exponencial:

$$Error = \sum d_i^2 = \sum [p(t_i) - f(t_i)]^2 = \mathbf{2,54965}$$

Por lo tanto, al ser el Error de la aproximación de forma $y = \frac{a}{b+x}$ el menor de todos, se concluye que esa es la mejor aproximación en este caso.

Ahora calculamos el tiempo en el que la concentración (y) es del 2% con la aproximación de forma $y = \frac{a}{b+x}$.

$$y = \frac{a}{b+t} \rightarrow 2 = \frac{8,03471}{1,04419 + t} \rightarrow 2t + 2,08838 = 8,03471 \rightarrow \boldsymbol{t = 2,97316}$$

Entonces, aproximadamente en el tiempo t = 2,97316 la concentración es de 2%.

Conclusión

Como se puede apreciar en los cálculos, el error de la aproximación con forma y = a/b+x tiene el menor error, y el mayor fue el de la recta
Podría decirse que con solo obtener la nube de puntos, podríamos de antemano elegir un buen modelo que se ajuste, sabiendo que por ejemplo en la regresión normal de la recta, vamos a tener que trazar una recta que aproxime todos los puntos, si los puntos no siguen una 'linea' entre si y tienen varias dispersiones, se debería ya descartar de por si este modelo, tomando otro como los manifestados arriba