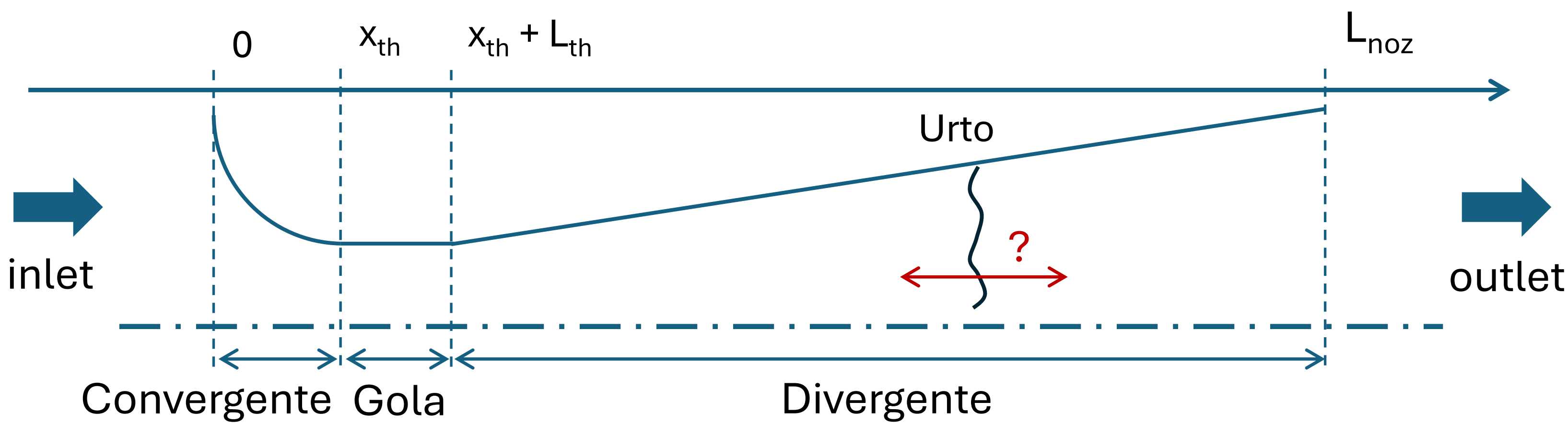
Esercitazione Matlab per il calcolo della distribuzione di p e T in ugello monodimensionale ed isentropico

Richiami teorici

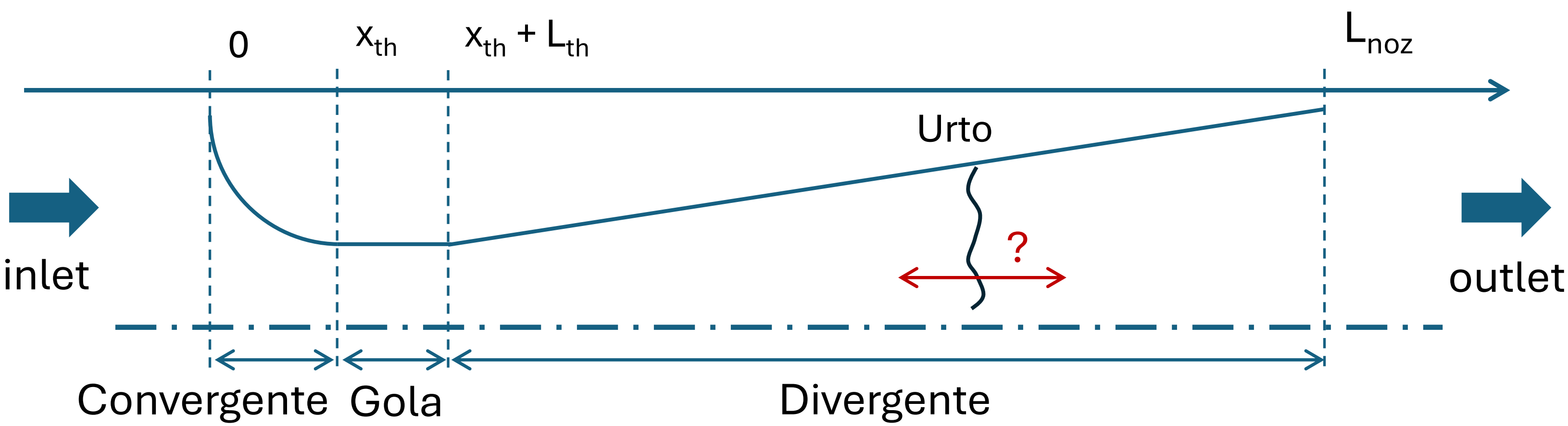
Obiettivi ed ipotesi

- Obiettivi
  1. Determinare gli andamenti di pressione e temperature all'interno dell'ugello
  2. Determinare la posizione dell'onda d'urto
- Ipotesi
  - Moto mono-dimensionale (lungo l'asse dell'ugello)
  - Ugello isentropico (no attrito, no viscosità)
  - Gas ideale e caloricamente perfetto (EoS gas ideale + c_p costante)
  - Flusso sonico in gola (ugello bloccato, $M_{th} = 1$)



Dati noti

- Condizioni in ingresso
  - $p_0 = 200000$ Pa
  - $T_0 = 300$ K
- Fluido
  - $\gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1.4$ (-)
  - $R = 287.1$ (J/kg/K)
- Pressione in uscita (back pressure)
  - Valore da imporre e variabile (ma noto all'inizio della simulazione)



Elementi fondamentali

- La relazione $M_i = f(A_i)$ viene risolta numericamente

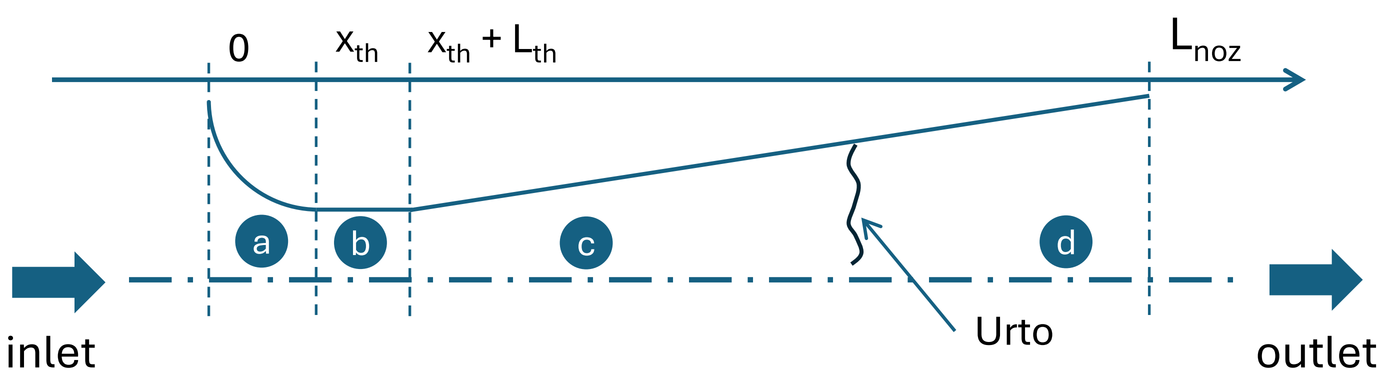
$$\frac{A_i}{\bar{A}} = \frac{\bar{M}}{M_i}\left[\frac{1+(\gamma-1)/2\cdot M_i}{1+(\gamma-1)/2\cdot \bar{M}}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Ossia:
- ❑ Noti $\bar{M}$, $\bar{A}$ e A_x
- ❑ Calcolo $M_x = M(A_x)$

- $M_i = f(A_i)$ ha due soluzioni in *M*, quindi devo scegliere quale delle due soluzioni accettare (o in quale parte del dominio cercare la soluzione)

$$\begin{cases} 0 < M \leq 1 \\ M > 1 \end{cases}$$

- In quale parte del dominio cercare la soluzione dipende da dove ci si trova all'interno dell'ugello



Dove cercare la soluzione di $M_i = f(A_i)$

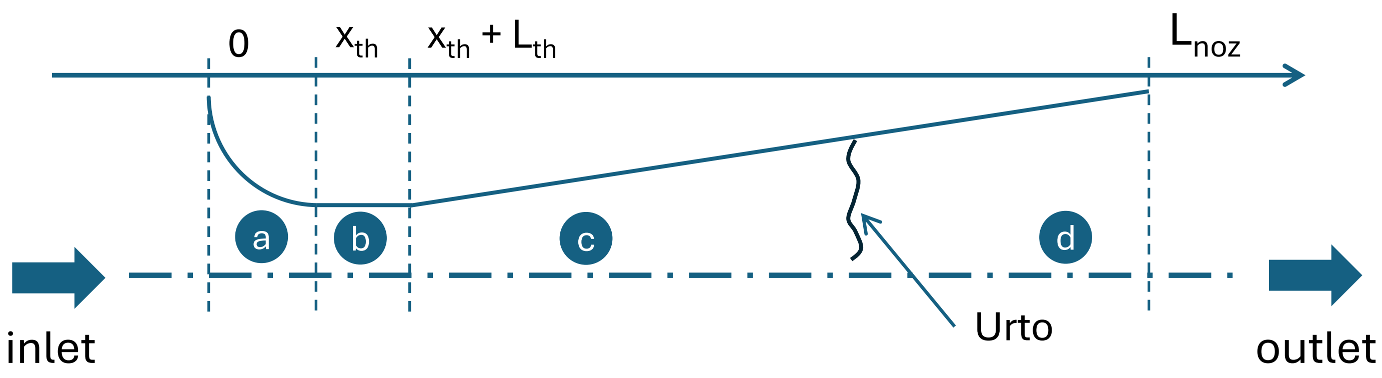
- Nell'ipotesi che il moto sia sonico nella gola ($\mathrm{M_{th}} = 1$)
- Ho quattro casistiche

a. $\mathrm{x} \leq \mathrm{x_{th}}$
Flusso subsonico nel convergente: M ∈ $(0,1)$

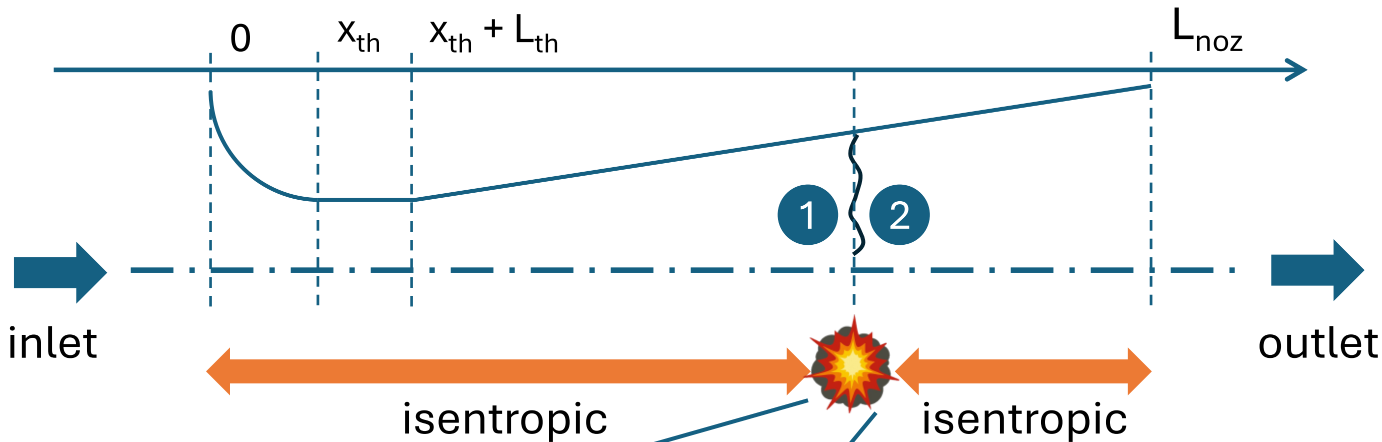
b. $\mathrm{x_{th}} \leq \mathrm{x} \leq \mathrm{x_{th}} + \mathrm{L_{th}}$ (nella gola)
Flusso sonico nella gola: M ∈ $(0,1)$ $\mathrm{M_{th}} = 1$

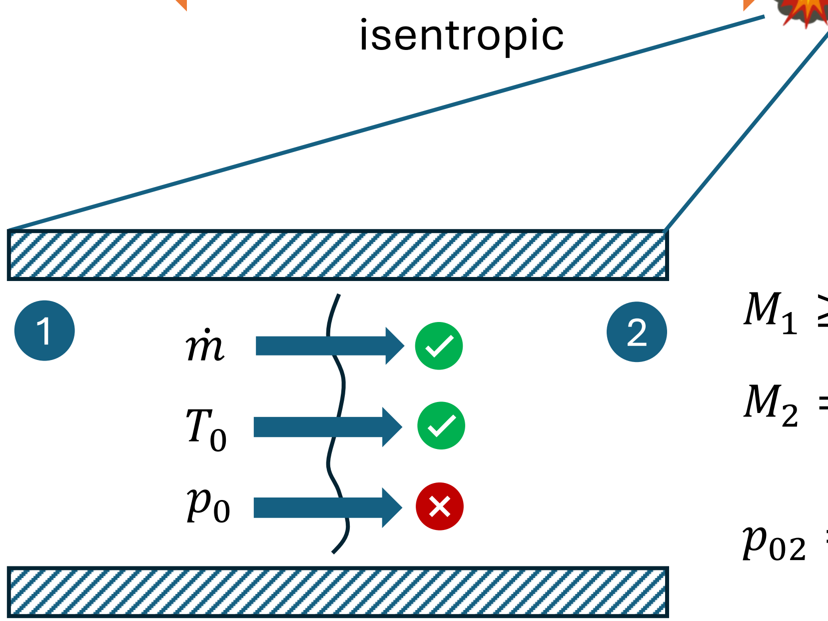
c. $\mathrm{x} \geq \mathrm{x_{th}} + \mathrm{L_{th}}$ & «Prima dell'urto»
Flusso supersonico nel divergente: M ∈ $(1, +\infty)$

d. $\mathrm{x} \geq \mathrm{x_{th}} + \mathrm{L_{th}}$ & «Dopo dell'urto»
Flusso subsonico nel divergente: M ∈ $(0,1)$



Effetto dell'onda d'urto



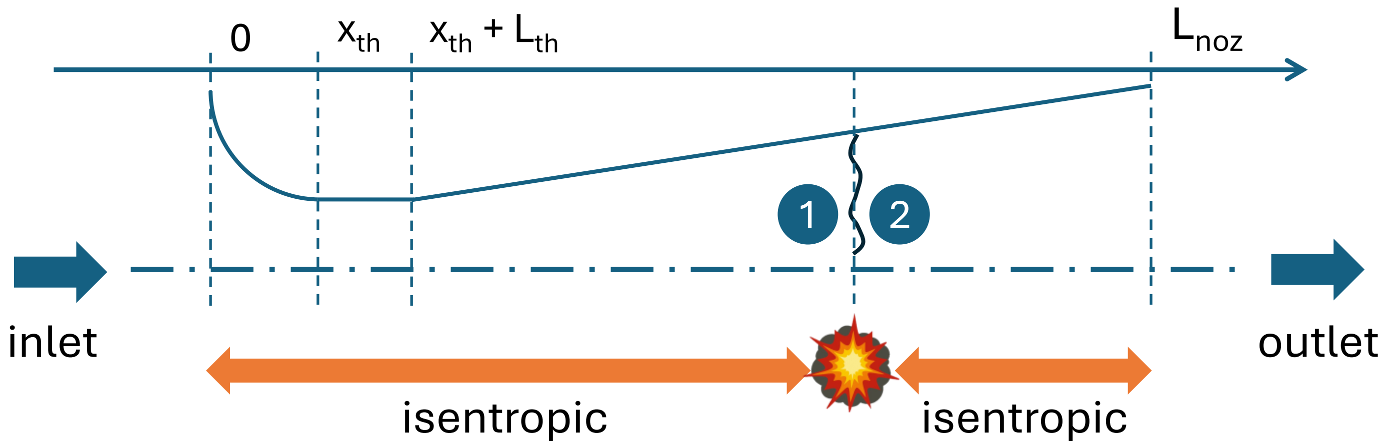


$$M_1 \geq 1$$

$$M_2 = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M_1^2+2}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}}$$

$$p_{02} = p_{01}\left[\frac{(\gamma+1)M_1^2}{(\gamma-1)M_1^2+2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[\frac{(\gamma+1)}{2\gamma M_1^2-(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

Effetto dell'onda d'urto



$$\dot{m} = \rho v A = \frac{p}{RT} v A = \frac{p}{RT} A M \sqrt{\gamma R T} = p A M \sqrt{\frac{\gamma}{RT}} = \frac{p_0 A M \sqrt{\gamma/(R T_0)}}{[1+(\gamma-1)M^2/2]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}}$$

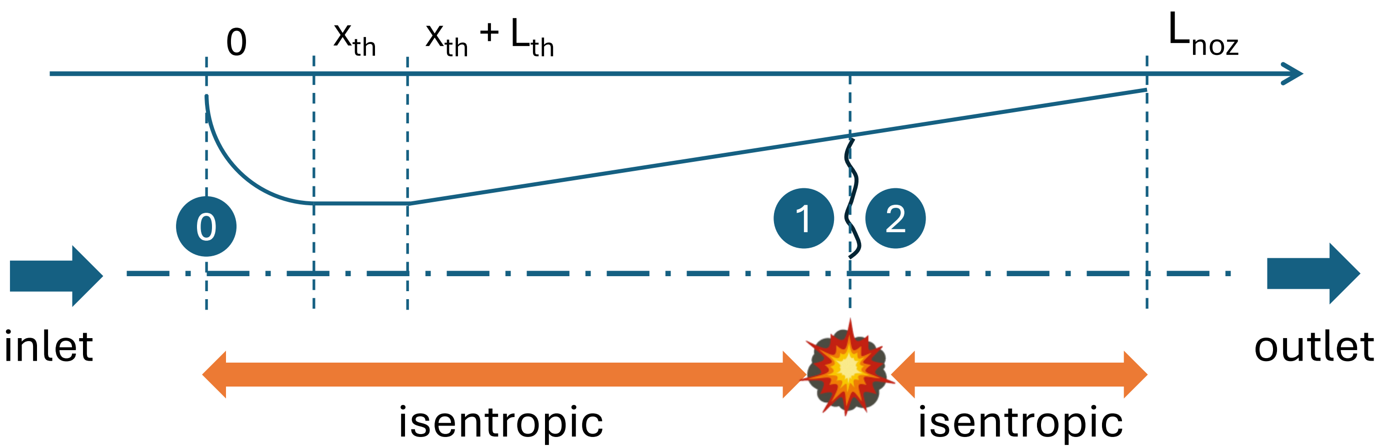
$$T_0 = cost.$$

$$\dot{m}_1 = \dot{m}_2 \rightarrow \frac{\dot{m}_2}{\dot{m}_1} = 1 = \frac{p_{02} A_2 M_2 \cancel{\sqrt{\gamma/(R T_0)}}}{[1+(\gamma-1)M_2^2/2]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}} \cdot \frac{[1+(\gamma-1)M_1^2/2]^{(\gamma+1)/[2(\gamma-1)]}}{p_{01} A_1 M_1 \cancel{\sqrt{\gamma/(R T_0)}}}$$

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{p_{02}}{p_{01}} \cdot \frac{M_2}{M_1} \cdot \left[\frac{1+(\gamma-1)M_1^2/2}{1+(\gamma-1)M_2^2/2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}}$$

Può essere utilizzata nei due tratti isentropici considerando $p_0 = cost.$ ma diversa nei due tratti

Effetto dell'onda d'urto



Prima dell'urto	Dopo l'urto
$M_{th} = 1$	$M_2 = f(M_1)$
$p_{00} = p_{01} = cost.$	$p_{02} = g(M_1, p_{01}) = cost.$
$\frac{A_x}{A_{th}} = \frac{1}{M_x} \cdot \left[\frac{1+(\gamma-1)M_x^2/2}{1+(\gamma-1)/2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$	$\frac{A_x}{A_2} = \frac{M_2}{M_x} \cdot \left[\frac{1+(\gamma-1)M_x^2/2}{1+(\gamma-1)M_2^2/2}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$

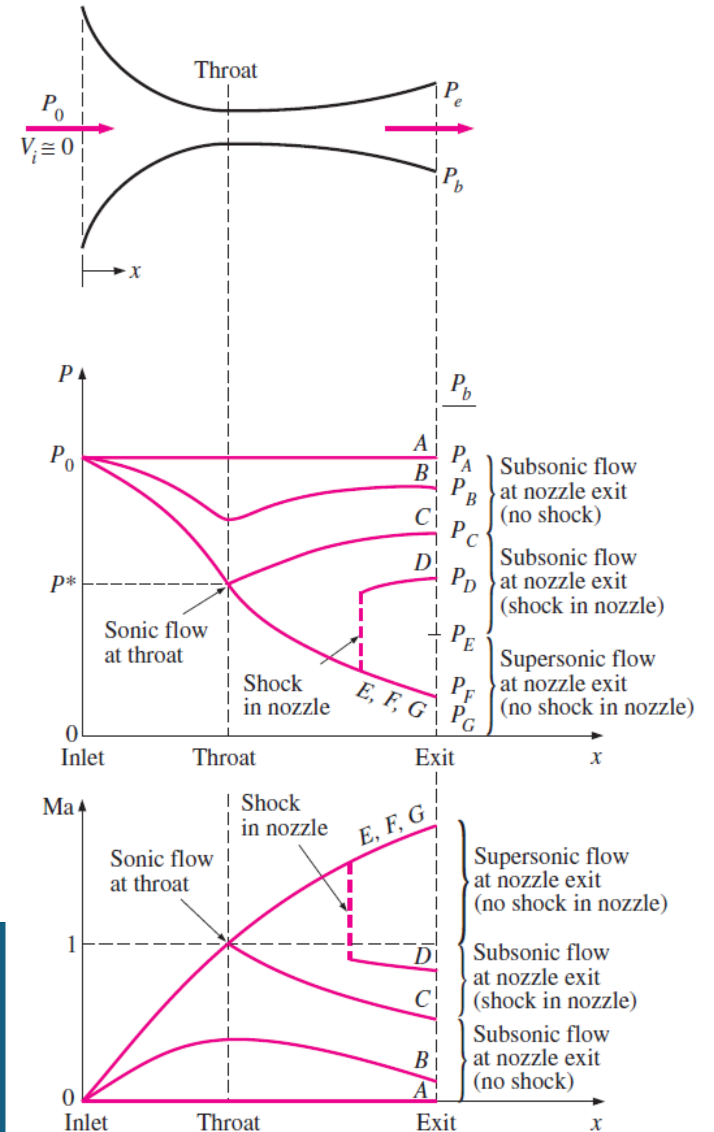
Come se stessi considerando due ugelli distinti

Ma dove avviene l'urto?

- Deve valere $x > x_{th}$
- La pressione in uscita p_{out} (back pressure) deve essere inferiore a quella che blocca l'ugello
- <u>Non devo avere già avuto urti</u>

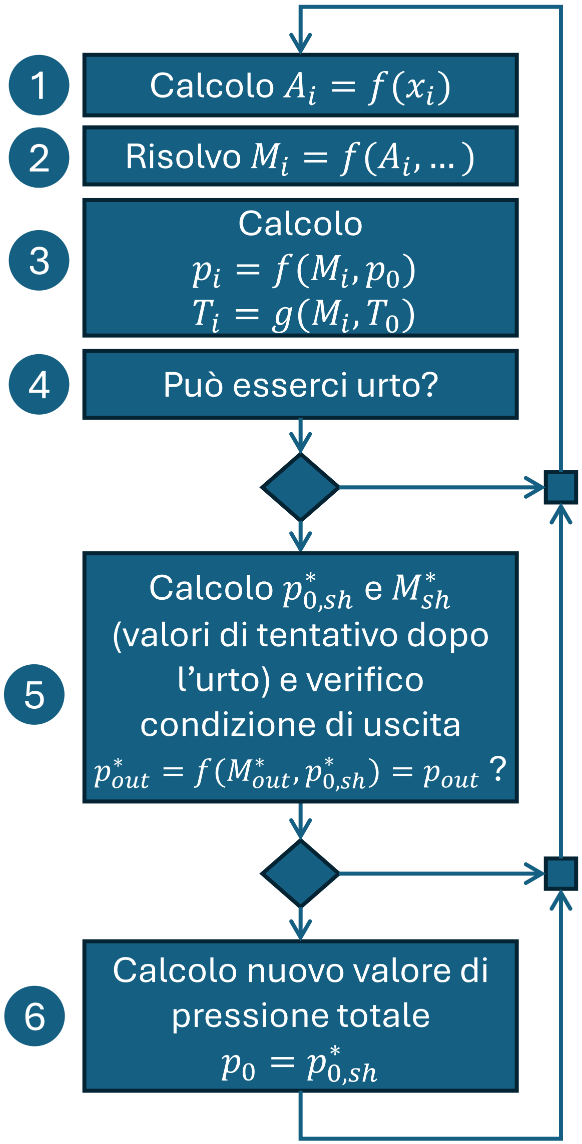
- Posso cominciare a cercare l'urto quando la pressione nell'ugello diventa inferiore a quella in uscita ($p(x) \leq p_{out}$)
  - Suppongo avvenga l'urto e calcolo M_2^* e p_{02}^* (* = variabile di tentativo)
  - Uso la relazione fra A e M nel tratto divergente rimanente e calcolo la p_{out}^*
  - Controllo se $p_{out}^* = p_{out}$
    - Si: la $x^* = x_{shock}$
    - No: continuo a cercare

Ricalcolo la pressione totale e risolvo il resto dell'ugello considerando M<1



Approccio usato per risolvere l'esercizio

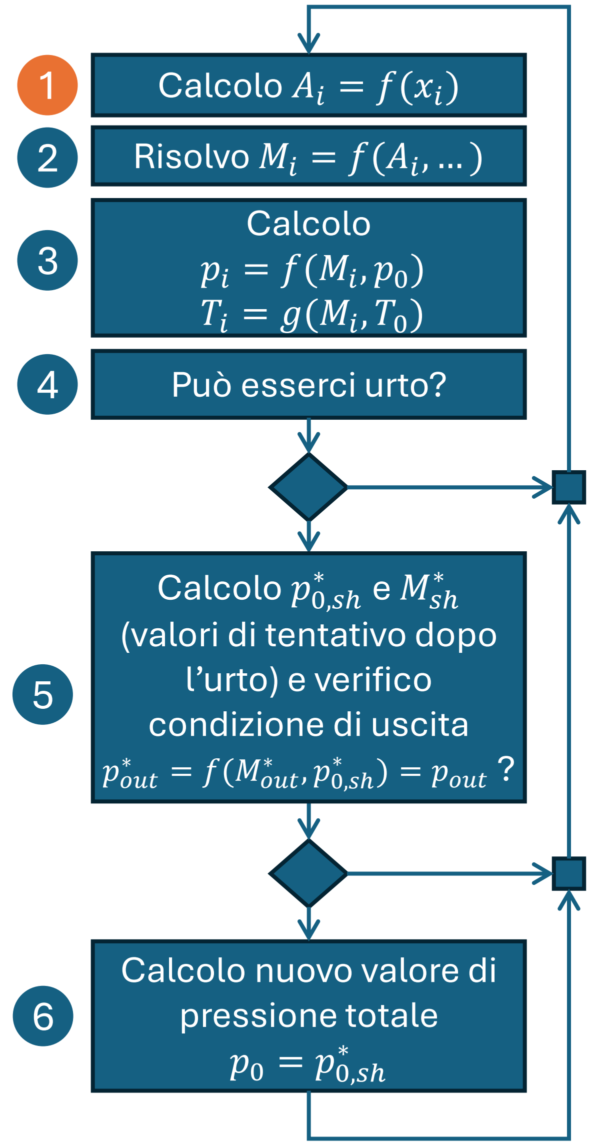
Algoritmo di risoluzione



Algoritmo di risoluzione

Step 1

- Considero la i-esima sezione dell'ugello
- In funzione della discretizzazione scelta determino la posizione lungo l'asse dell'ugello nell'iterazione i-esima → $x(i) = x_i$
- Dalla distribuzione dell'area con la posizione assiale, calcolo $A_i = f(x_i)$



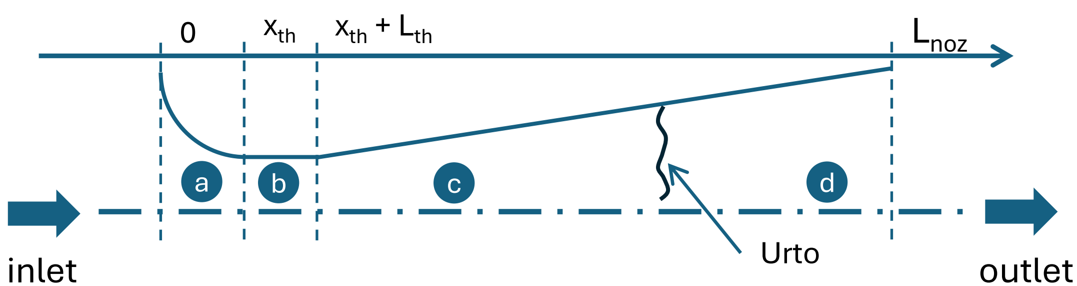
Algoritmo di risoluzione

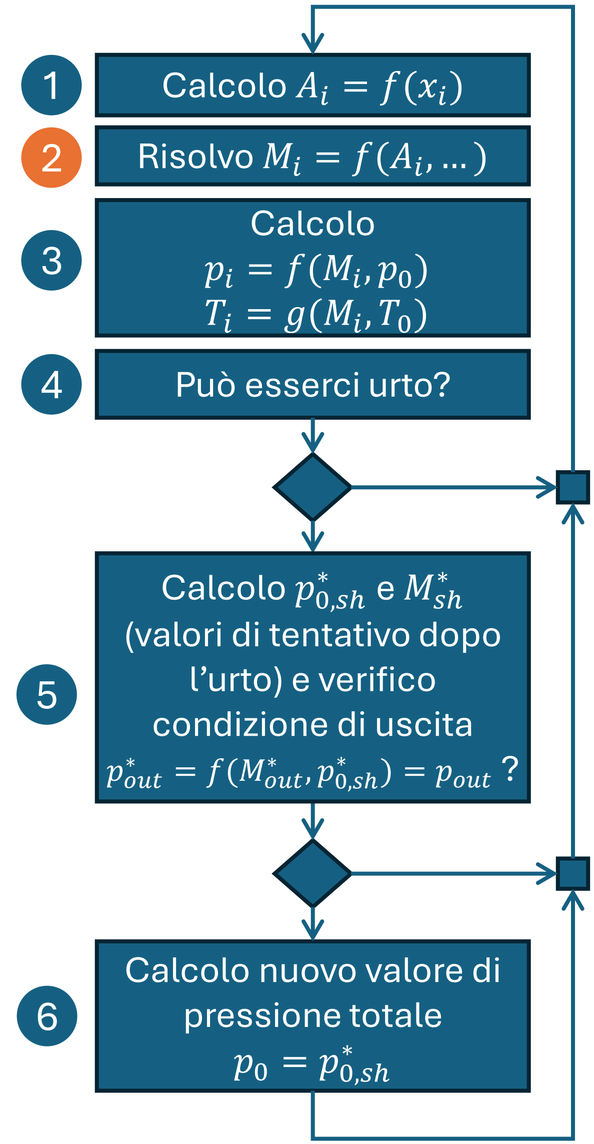
Step 2 (1/2)

- Risolvo numericamente l'equazione che lega i Mach alla distribuzione di area (impongo $M_{th} = 1$)

$$\frac{A_i}{\bar{A}} = \frac{\bar{M}}{M_i}\left[\frac{1+(\gamma-1)/2 \cdot M_i}{1+(\gamma-1)/2 \cdot \bar{M}}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

- Ho quattro casistiche possibili (prima/dopo gola e moto subsonico/supersonico)
    a. $x \leq x_{th} \rightarrow M \in (0,1)$
    b. $x_{th} \leq x \leq x_{th} + L_{th} \rightarrow M_{th} = 1$
    c. $x \geq x_{th} + L_{th}$ & «Prima dell'urto» $\rightarrow M \in (1, +\infty)$
    d. $x \geq x_{th} + L_{th}$ & «Dopo dell'urto» $\rightarrow M \in (0,1)$





Algoritmo di risoluzione

Step **2** (2/2)

- Risolvo numericamente l'equazione che lega i Mach alla distribuzione di area (impongo $M_{th} = 1$)

$$\frac{A_i}{\bar{A}} = \frac{\bar{M}}{M_i}\left[\frac{1+(\gamma-1)/2 \cdot M_i}{1+(\gamma-1)/2 \cdot \bar{M}}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

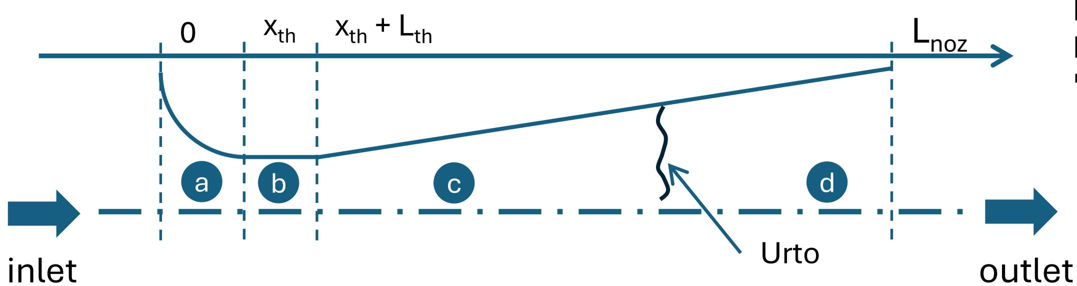
- Ho quattro casistiche possibili (prima/dopo gola e moto subsonico/supersonico)

a. $x \leq x_{th} \rightarrow M \in (0,1)$

b. $x_{th} \leq x \leq x_{th} + L_{th} \rightarrow M_{th} = 1$

c. $x \geq x_{th} + L_{th}$ & «Prima dell'urto» $\rightarrow M \in (1, +\infty)$

d. $x \geq x_{th} + L_{th}$ & «Dopo dell'urto» $\rightarrow M \in (0,1)$



➢ Utilizzo due versioni della relazione fra Area e Mach

➢ Fra le due versioni, cambia la sezione presa a riferimento

$$\frac{A_i}{A_{th}} = \frac{1}{\bar{M}}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\right)M_i\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

$$\frac{A_i}{A_{sh}} = \frac{M_{sh}}{M_i}\left[\frac{1+(\gamma-1)/2 \cdot M_i}{1+(\gamma-1)/2 \cdot M_{sh}}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

Algoritmo di risoluzione

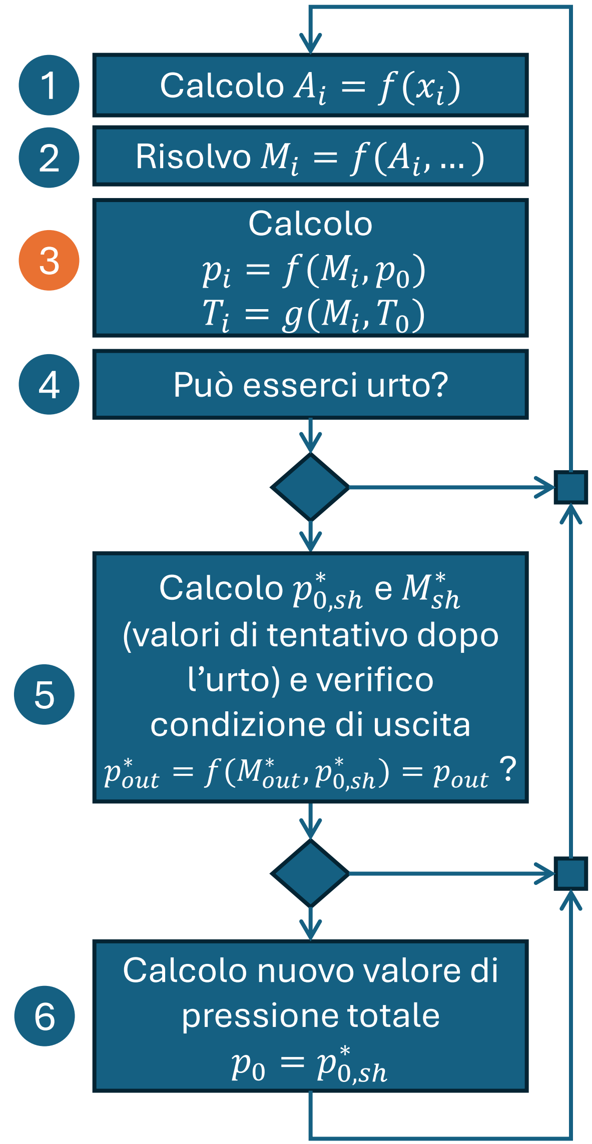
Step 3

- Calcolo le condizioni statiche nell'ugello a partire dalle condizioni totali in ingresso (invariate lungo l'ugello <u>isentropico</u>)

$$p_i = p_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$
$$T_i = T_0 \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2\right)^{-1}$$

- Ricavo la densità (se mi dovesse essere utile) dall'equazione dei gas perfetti

$$\rho_i = \frac{RT_i}{p_i}$$



Algoritmo di risoluzione

Step 4

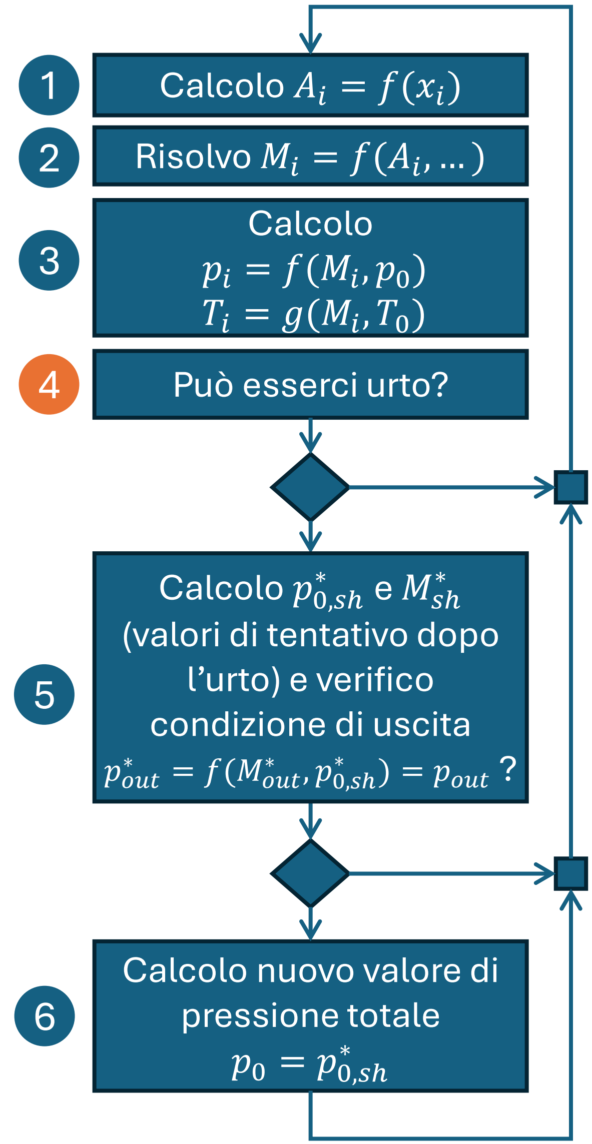
- Controllo se le condizioni in termini di pressione statica nella sezione i-esima dell'ugello sono tali da poter avere l'onda d'urto.
- Per poter aver l'onda d'urto, devono essere verificate <u>contemporaneamente</u> le tre condizioni seguenti

   a. $x_i > x_{th} + L_{th}$ ✓/✗

   b. $p_i \leq p_{out}$ ✓/✗

   c. Non ho ancora trovato onde d'urto ✓/✗

- Se ho almeno un ✗, procedo con le iterazioni normalmente
- Se ho tre ✓, controllo se si verifica l'onda d'urto



Algoritmo di risoluzione

Step 5

- Verifico che l'urto avvenga effettivamente. Assumo di avere l'urto nella sezione i-esima – *what if…?*
  Il Mach dopo l'urto:

$$M_{sh}^* = \sqrt{\frac{(\gamma-1)M_i^2+2}{2\gamma M_i^2-\gamma+1}} \qquad \text{(* = valore di tentativo)}$$

- Calcolo la nuova pressione totale

$$p_{0,sh}^* = p_0\left[\frac{(\gamma+1)M_i^2}{(\gamma-1)M_i^2+2}\right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}\left[\frac{(\gamma+1)}{2\gamma M_i^2-(\gamma-1)}\right]^{\frac{1}{\gamma-1}}$$

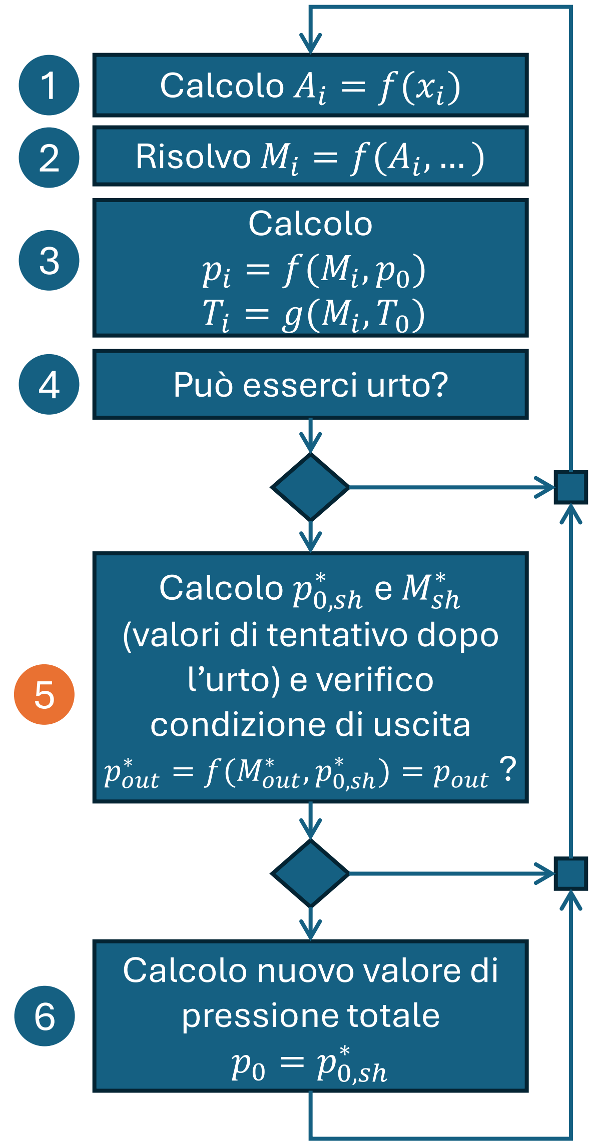
- Risolvo $M_i = f(A_i)$ per la sezione di uscita (M_{sh}^* noto)

$$\frac{A_{out}}{A_{sh}^*} = \frac{M_{sh}^*}{M_{out}^*}\left[\frac{1+(\gamma-1)/2\cdot M_{out}^*}{1+(\gamma-1)/2\cdot M_{sh}^*}\right]^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \Rightarrow M_{out}^*$$

- Calcolo la pressione di uscita e la confronto con quella imposta

$$p_{out}^* = p_{0,sh}^*\left[1+\frac{\gamma-1}{2}(M_{out}^*)^2\right]^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = p_{out}\ ?$$

- iter. *i*+1: moto supersonico e p_0 invariata
- iter. *i*+1: moto subsonico e aggiorno p_0



Algoritmo di risoluzione

Step 6

- Aggiorno il valore della pressione totale tenendo conto delle dissipazioni avvenute nell'urto (p aumenta, ma p_0 diminuisce)

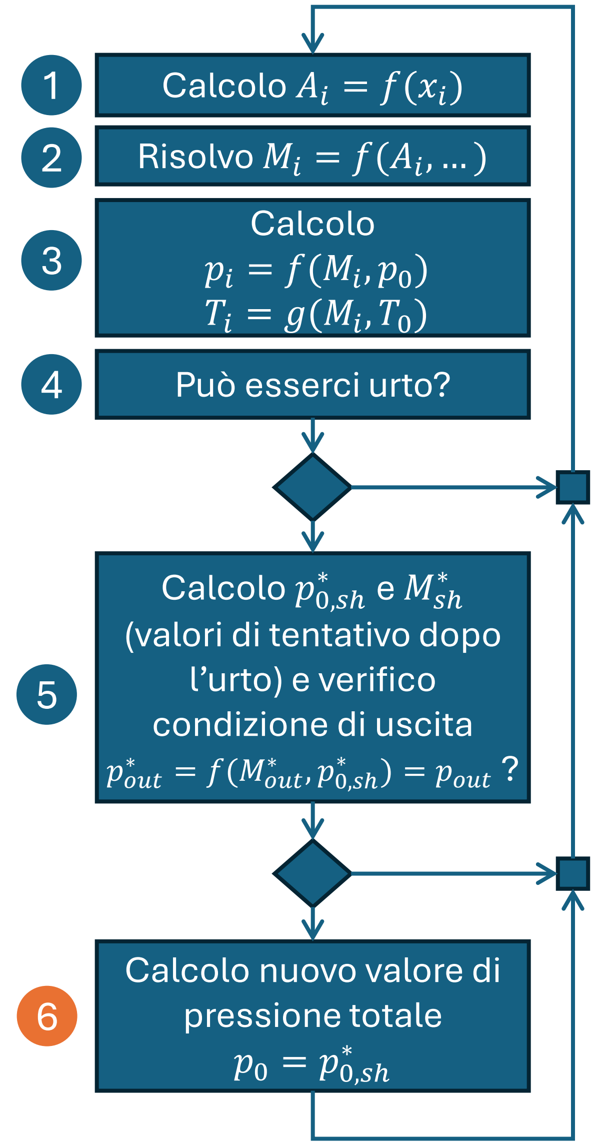
$$p_0 = p_{0,sh}$$

- Nelle prossime iter., la nuova pressione totale sarà utilizzata per il calcolo delle condizioni statiche

$$p_i = p_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_i^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}} = p_{0,sh}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_i^2\right)^{\frac{-\gamma}{\gamma-1}}$$

$$T_i = T_0\left(1+\frac{\gamma-1}{2}M_i^2\right)^{-1}$$ (T_0 si conserva nell'urto)

- Nelle prossime iter., la soluzione dell'equazione $M_i = f(A_i)$ sarà subsonica (M $\in (0,1)$)



Dettagli implementativi

Requisiti

- Il codice è stato sviluppato con Matlab 2023a
- Richiede la presenza di 3 file:
  - La geometria dell’ugello
  - I dati per il confronto fra il modello monodimensionale ed il CFD
  - I file si chiamano:
    - «nozzle_geometry.mat»
    - «cfd_data_freeslip.mat»
    - «cfd_data_noslip.mat»
- Il codice non richiede nessun toolbox aggiuntivo (Matlab base)

- Il codice e questa presentazione sono disponibili presso https://github.com/guidoffrate/Nozzle-exercise

Nota sui Metodi utilizzati

- Il codice utilizza funzionalità standard per caricare dati (*load()*), scegliere fra varie condizioni (*if…else*) e raffigurare I risultati (*plot()*)
- L'operazione più «avanzata» che viene effettuata è la risoluzione numerica di una equazione in una variabile (risoluzione numerica di $M_i = f(A_i)$)
  - Per la risoluzione viene utilizzata *fzero()* https://it.mathworks.com/help/matlab/ref/fzero.html https://en.wikipedia.org/wiki/Brent's_method
  - fzero() richiede di definire una funzione ($\mathrm{M_i = f(A_i)}$) e cerca la soluzione intorno ad un punto $\mathrm{x_0}$ specificato dall'utente o, come nel nostro caso, all'interno di un intervallo specificato, ad es. $(0,1)$ o $(1,5)$

Funzione

```
% Supersonic flow in divergent section before shock
% Area-Mach relation (solved numerically)
func = @(M) A(i)/A_throat - 1/M * (2/(gamma+1) * (1 + (gamma-1) / 2 * M^2))^((gamma+1) / (2*(gamma-1)));
M(i) = fzero(func, [1+1e-8 5]);
```

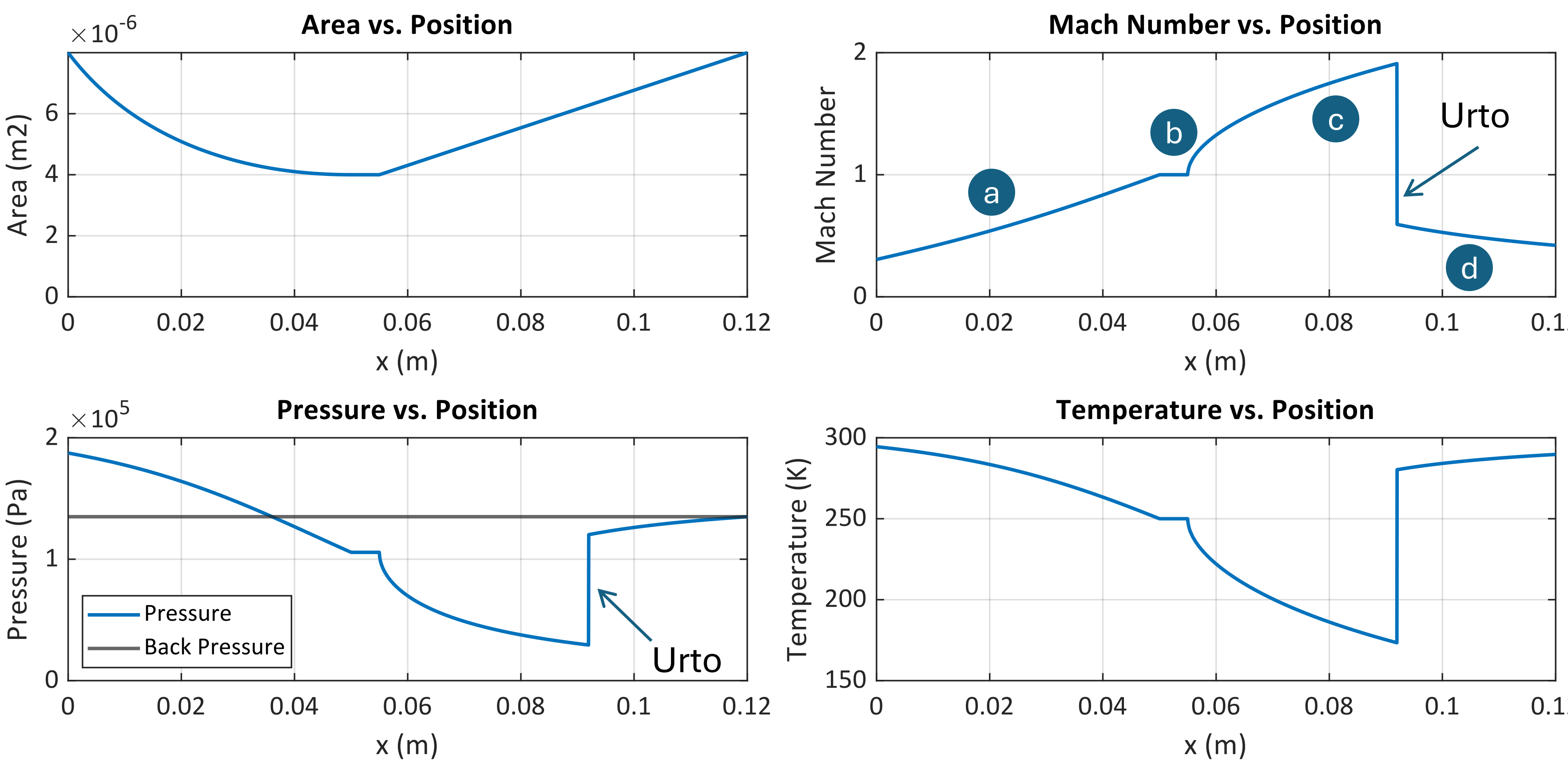
Intervallo $(1, +\infty)$

Esempio di risultati

Andamenti assiali ($p_b = 1.35$ bar)

- Area, grandezze statiche e Mach lungo l'asse
- Pressione in uscita pari a 1.35 bar

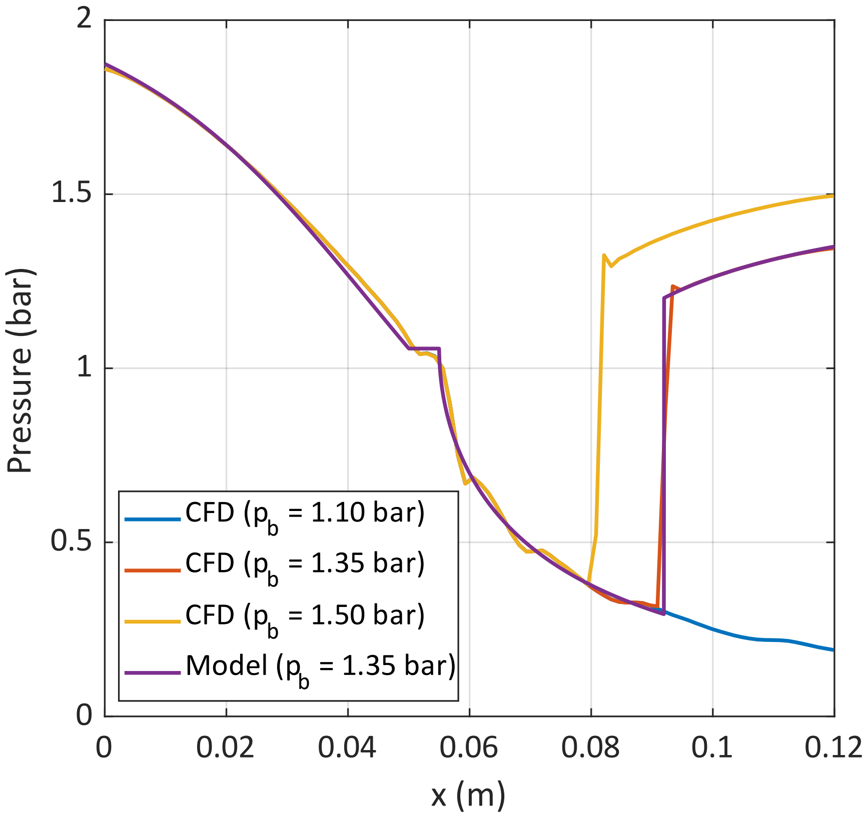
a. $\mathrm{M} \in (0,1)$
b. $\mathrm{M_{th}} = 1$
c. $\mathrm{M} \in (1, +\infty)$
d. $\mathrm{M} \in (0,1)$

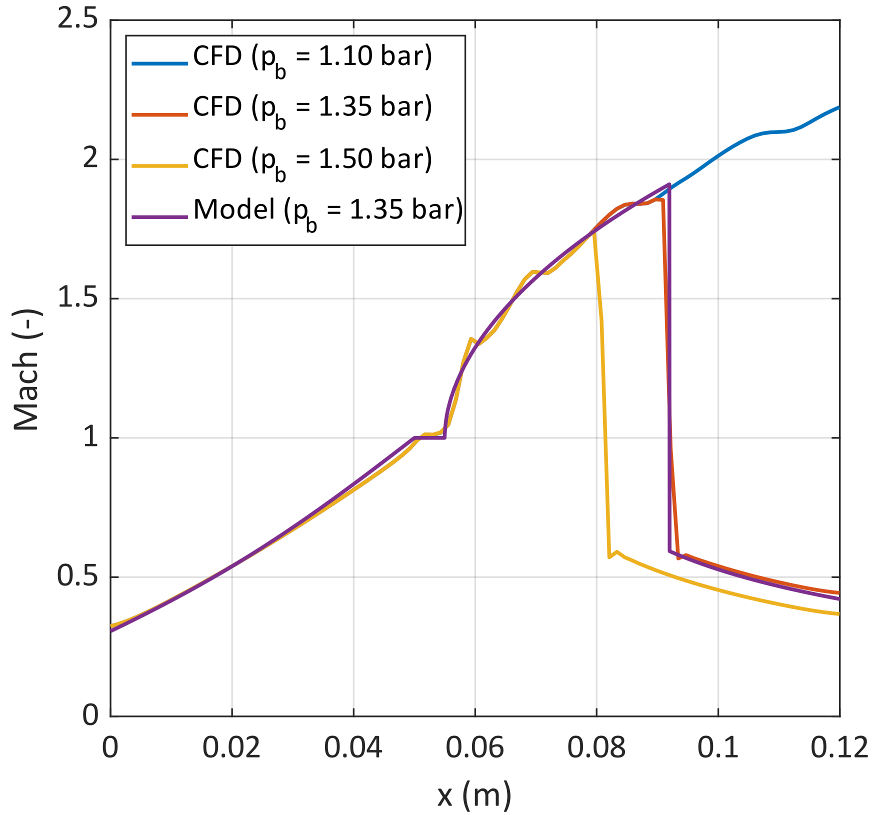


Confronto CFD (1/2)

- CFD senza attrito né forze viscose
- Pressione in uscita pari a 1.35 bar

Accordo fra modello Matlab monodimensionale e CFD molto buono!

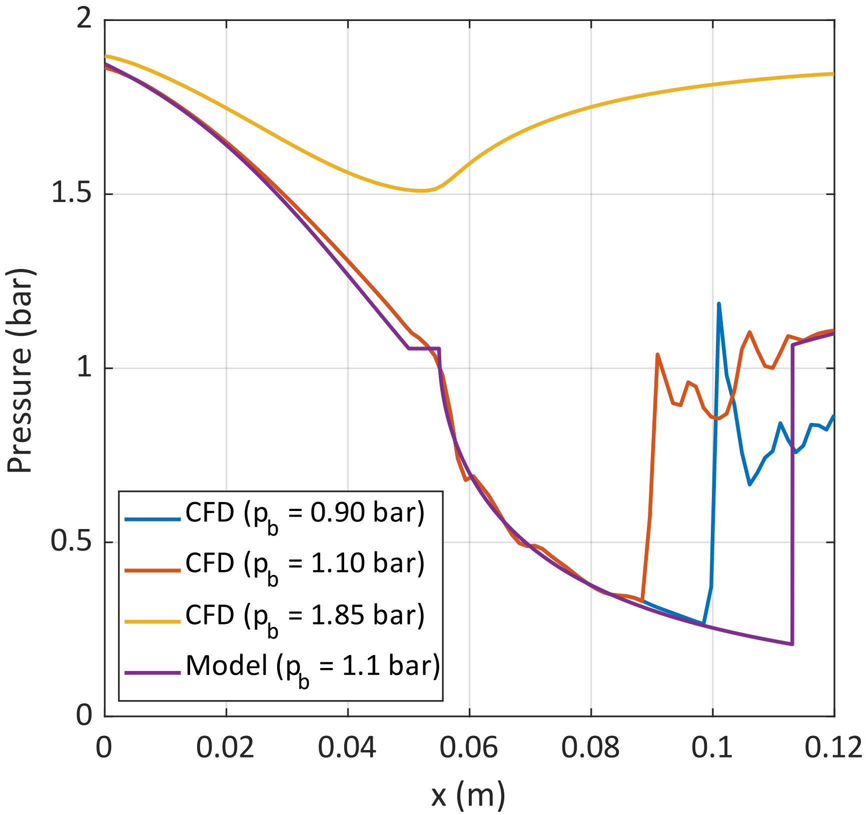


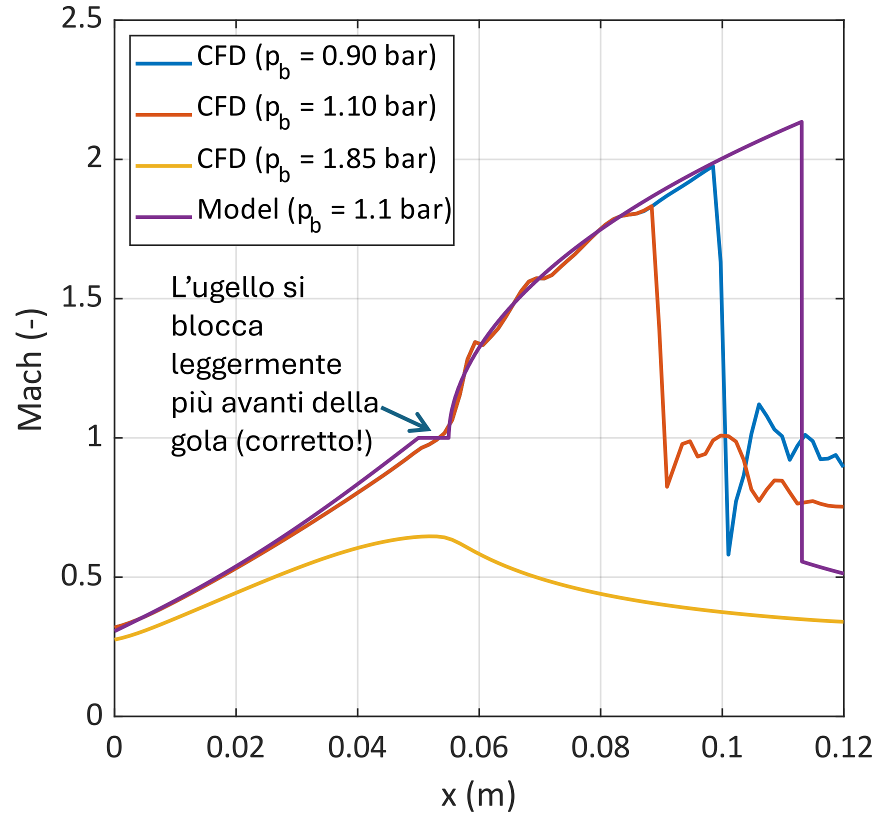


Confronto CFD (2/2)

- CFD con attrito e forze viscose
- Pressione in uscita pari a 1.35 bar

Accordo fra modello Matlab monodimensionale e CFD molto scarso!





Esercitazione Matlab per il calcolo della distribuzione di *p* e T in ugello monodimensionale ed isentropico