Guia 5 filtros digitales

Ejercicio #2

Se desea emular digitalmente la característica de un filtro analógico pasa bajos Butterworth de orden 2, con $f_c = 1\ kHz$.

A. Para $f_s = 100\ kHz$ y aplicando transformación bilineal, obtener un filtro con respuesta $H_{(z)}$ cuyo comportamiento emule al Butterworth analógico.
Trazar la respuesta en frecuencia de módulo y fase de ambos filtros sobre un mismo gráfico para establecer comparaciones.

B. Repetir el punto anterior para $f_s = 10\ kHz$.

C. Repetir los puntos A) y B) si se desea emular digitalmente la característica de un filtro analógico pasa altos Butterworth de orden 2, con $f_c = 6\ kHz$

D. Indique en cuál de los 3 casos (A, B ó C) justificaría rediseñar aplicando prewarping. Explique el motivo en pocas palabras.

filtro analogico:

- Butter 2do orden
- $fc = 1kHz$

a). Obtengo filtro Butter analogico con python

$$H(s) = \frac{C}{s^2 + A\,s + B}$$

z

$$H(z) = H(s)\Big|_{s = k\frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{C}{\left(k\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + A\left(k\frac{z-1}{z+1}\right) + B}$$

$$H(z) = \frac{C}{\dfrac{k^2(z-1)^2 + kA(z-1)(z+1) + (z+1)^2 B}{(z+1)^2}}$$

$$H(z) = \frac{C(z^2+2z+1)}{k^2(z^2-2z+1) + Ak(z^2-1) + (z^2+2z+1)B}$$

$$H(z) = \frac{C(z^2+2z+1)}{z^2(k^2+Ak+B) + z(2B-2k^2) + (k^2-Ak+B)}$$

El resto lo sigo en python

Pasa altos

$$H(s) = \frac{s^2 C}{s^2 + As + B}$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = H(s)\Big|_{s = k\frac{z-1}{z+1}}$$

$$H(z) = \frac{C \cdot \left(k \dfrac{z-1}{z+1}\right)^2}{\left(k\dfrac{z-1}{z+1}\right)^2 + A\left(k\dfrac{z-1}{z+1}\right) + B}$$

$$H(z) = \frac{C\, k^2 \dfrac{(z-1)^2}{\cancel{(z+1)^2}}}{\dfrac{k^2(z-1)^2 + kA(z-1)(z+1) + (z+1)^2 B}{\cancel{(z+1)^2}}}$$

$$H(z) = \frac{C \cdot k^2 (z^2 - 2z + 1)}{z^2(k^2+Ak+B) + z(2B-2k^2) + (k^2-Ak+B)}$$

ejercicio 3

Ejercicio #3

Dadas las siguientes respuestas al impulso se pide:

- Transferencia del sistema $H(z)$
- Singularidades en el plano z
- Respuesta de módulo y fase

a) ***Filtro de media móvil*** (*moving average*).

$h_1(k) = (1, 1)$ significa $h(0) = 1$ y $h(1) = 1$
$h_2(k) = (1, 1, 1)$

1. ¿Qué modificación debería implementarse para que la salida representa la media aritmética?
2. Para el último sistema, ¿qué frecuencia de muestreo se debería adoptar si se quisiera eliminar con dicho filtro la interferencia causada por la frecuencia de línea de 50 Hz?

b) ***Filtro diferenciador***

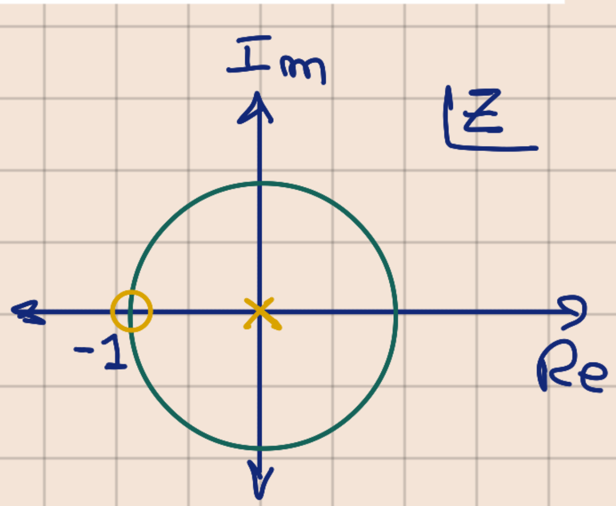
$h_1(k) = (1, -1)$ ***de primer orden***
$h_2(k) = (1, 0, -1)$ ***de segundo orden***

1. ¿Qué demora introducen ambos sistemas?
2. Hasta qué frecuencias estos sistemas se comportan como un derivador ideal. Considere una tolerancia admisible del 5% respecto a su respuesta ideal $|H(\Omega)| = \Omega$.

a)

$h_1(k) = (1; 1)$

$H(z) = 1 + z^{-1} = \dfrac{z+1}{z}$



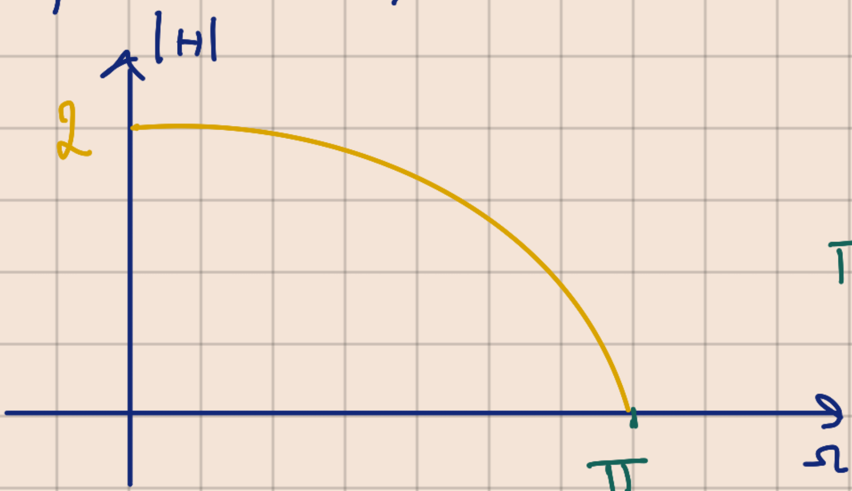
$H(z)\Big|_{z=1e^{j\Omega}} = \dfrac{e^{j\Omega}+1}{e^{j\Omega}}$

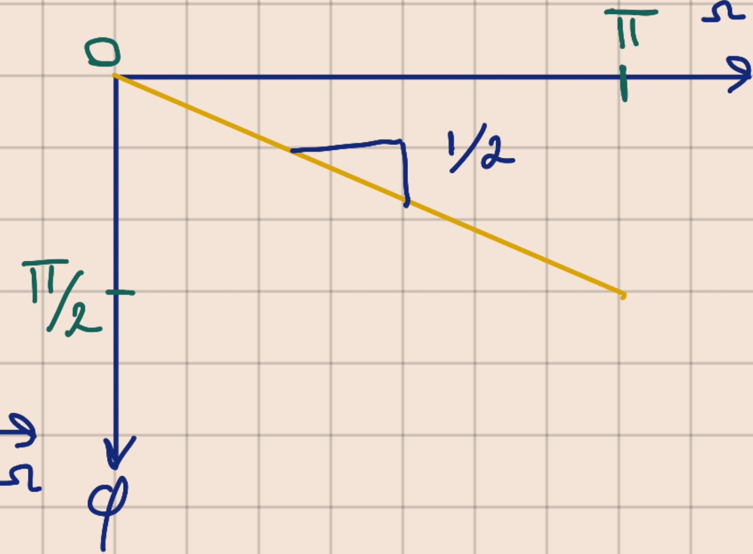
$$H(e^{j\Omega}) = \frac{2e^{j\frac{\Omega}{2}}}{e^{j\Omega}} \Bigg[\underbrace{\frac{e^{j\frac{\Omega}{2}} + e^{-j\frac{\Omega}{2}}}{2}}_{\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)} \Bigg]$$

$$H(j\Omega) = 2e^{-j\Omega/2} \cos(\Omega/2)$$

$$|H(j\Omega)| = 2\cos(\Omega/2)$$

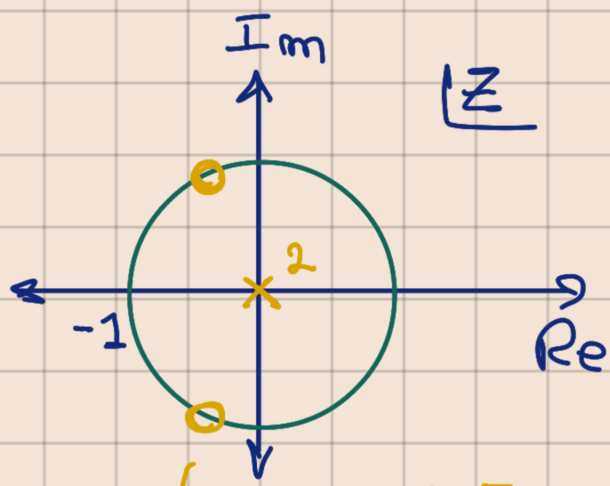
$$\varphi_H = -\Omega/2$$





$$h_1(k) = (1;1;1)$$

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2} = \frac{z^2 + z + 1}{z^2}$$



$\hookrightarrow -0{,}5 \pm \frac{\sqrt{3}}{2} j$

$$H(z)\Big|_{z=1e^{j\Omega}} = \frac{e^{2j\Omega} + e^{j\Omega} + 1}{e^{2j\Omega}}$$

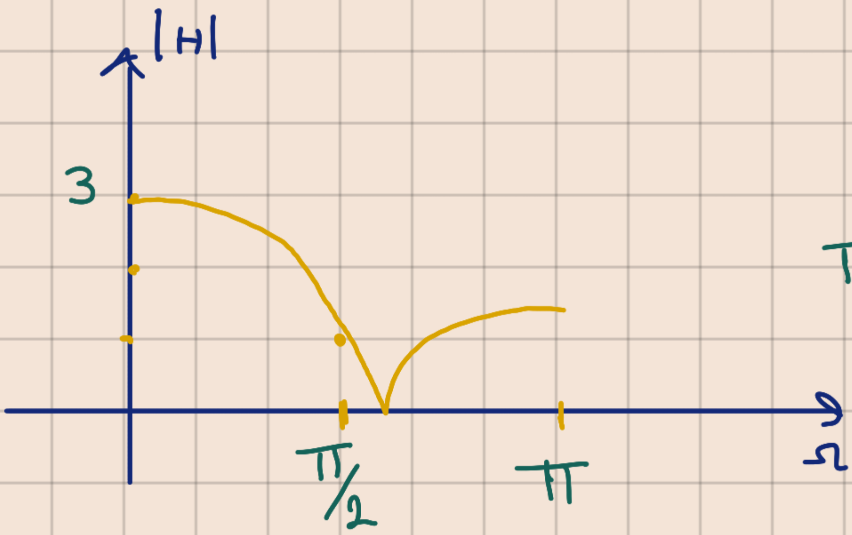
$$H(j\omega) = \frac{e^{j\Omega}}{e^{2j\Omega}}\left(1 + e^{j\Omega} + e^{-j\Omega}\right)$$

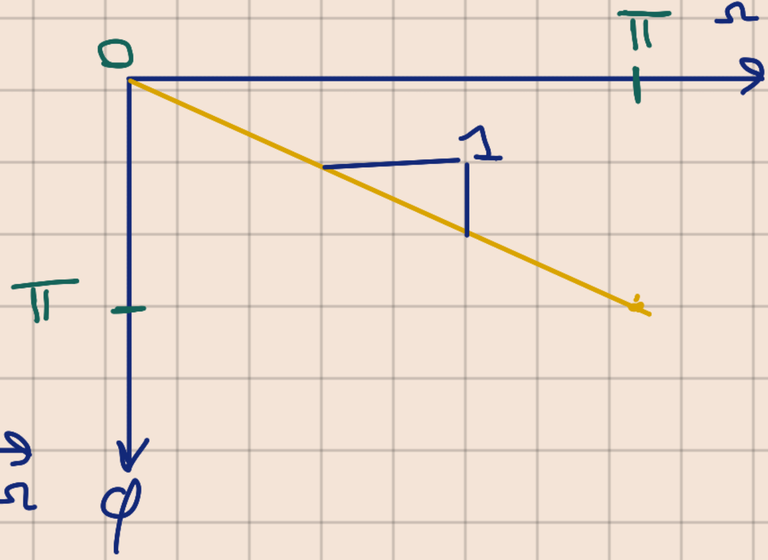
$$H(j\omega) = e^{-j\Omega}\left(1 + 2\left[\frac{e^{j\Omega}+e^{-j\Omega}}{2}\right]\right)$$

$$H(j\omega) = e^{-j\Omega}\left(1 + 2\cos(\Omega)\right)$$

$$|H(j\Omega)| = 2\cos(\Omega) + 1$$

$$\varphi_H = \Omega$$





b)

Si analizamos la transferencia en muestras:

$$H(z) = 1 + z^{-1} \longrightarrow y(k) = x(k) + x(k-1)$$

$$Y(z) = X(z)\left[1 + z^{-1}\right]$$

de igual forma:

$$H(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}$$

$$y(z) = X(z)\left[1 + z^{-1} + z^{-2}\right]$$

$$\hookrightarrow y(k) = X(k) + X(k-1) + X(k-2)$$

En ambos casos se suman con el mismo peso la muestra actual y las anteriores.

Para conseguir la media aritmetica solo hace falta dividir por el numero de muestras promediadas.

orden del filtro.

$$y(k) = \frac{1}{(N)} \sum_{i=0}^{N-1} X(k-i)$$

Si lo analizamos en transformada Z:

$$y(z) = \frac{X(z)}{N} \cdot \sum_{i=0}^{N-1} z^{-i}$$

$$H(z) = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{z^{-i}}{(N)}$$

Por ejemplo para el primer caso:

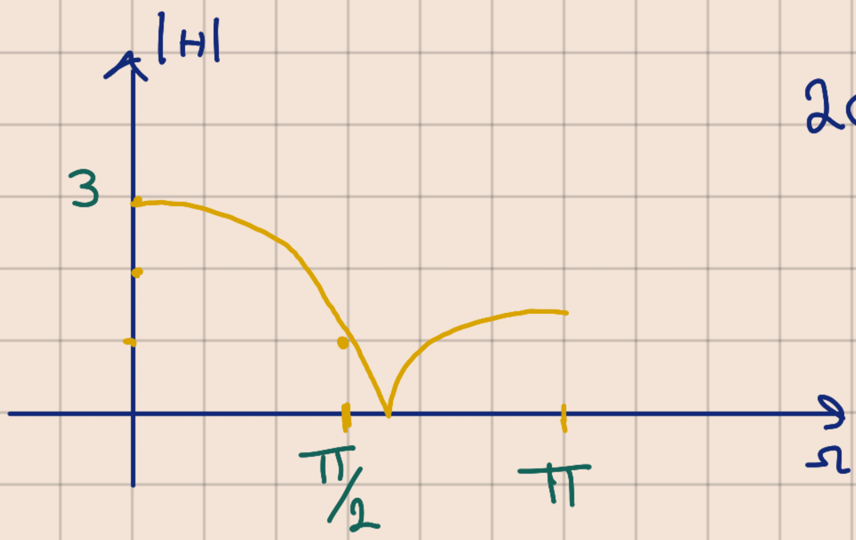
$$h_1(k) = \left(\frac{1}{2} ; \frac{1}{2}\right)$$

Segundo caso:

$$h_2(k) = \left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$$

c) Sabiendo la respuesta en modulo:

$$|H(j\Omega)| = 2\cos(\Omega) + 1$$ → Busco valor de Ω donde $|H(j\Omega)| = 0$



$$2\cos(\Omega) + 1 = 0$$

$$\Omega = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\Omega = \frac{2}{3}\pi$$

Sabiendo que la relacion entre W y Ω es:

$$W = k\, Tg(\Omega/2) \quad \text{con } k = 2f_s$$

$f = 50\,Hz \longrightarrow W = 2\pi f \; ; \; \Omega = \frac{2}{3}\pi$

$$\frac{\cancel{2}\pi f}{Tg\left(\frac{\pi}{3}\right)\cancel{2}} = f_s \Rightarrow \boxed{f_s = 90{,}689\,Hz}$$

b) Filtro diferenciador

$h_1(k) = (1, -1)$ ***de primer orden***

$h_2(k) = (1, 0, -1)$ ***de segundo orden***

1. ¿Qué demora introducen ambos sistemas?
2. Hasta qué frecuencias estos sistemas se comportan como un derivador ideal. Considere una tolerancia admisible del 5% respecto a su respuesta ideal $|H(\Omega)| = \Omega$.

1

$$h_1(k) = (1 ; -1)$$

$$H(z) = 1 - z^{-1} = \frac{z-1}{z}$$

analizando su respuesta en Ω:

$$H(j\Omega) = \frac{e^{j\Omega} - 1}{e^{j\Omega}} = \frac{e^{j\Omega/2}}{e^{j\Omega}}\left(e^{j\Omega/2} - e^{-j\Omega/2}\right)\frac{2j}{2j}$$

$$H(j\Omega) = e^{-j\Omega/2}\left[2\,\text{sen}(\Omega/2)\right] \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

$$\varphi(j\Omega) = -\frac{\Omega}{2} + \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi - \Omega}{2}$$

$$D(\Omega) = \frac{-\partial\varphi(j\Omega)}{\partial\Omega} = \frac{1}{2}$$ → la demora o retardo de grup[o] es cte en 1/2.

Como se trata de un sistema digital <u>No puede</u> demorar media muestra.

El retardo variaría entre 1 y 0 muestras.

En el segundo caso tenemos:

$$h(k) = (1 ; 0 ; -1)$$

$$H(z) = 1 - z^{-2} = \frac{z^2 - 1}{z^2}$$

$$H(j\Omega) = \frac{e^{2j\Omega} - 1}{e^{2j}} = \frac{e^{j\Omega}}{e^{2j}} \left(e^{j\Omega} - e^{-j\Omega} \right) \frac{2j}{2j}$$

$$H(j\Omega) = e^{-j\Omega} \cdot 2\,\mathrm{sen}(\Omega) \cdot e^{j\frac{\pi}{2}}$$

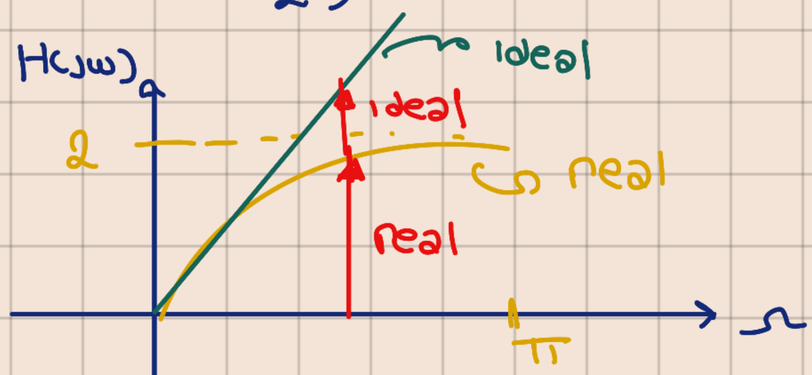
$$H(j\Omega) = e^{j\left(\frac{\pi - 2\Omega}{2}\right)} \cdot 2\,\mathrm{sen}(\Omega)$$

$$\varphi(\Omega) = \frac{\pi - 2\Omega}{2}$$

$D(\Omega) = 1 \rightarrow$ demora cte de una muestra

2) primer caso: ideal:

$$|H(j\Omega)| = 2\,\mathrm{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad |H(j\Omega)| = \Omega$$



$$2\,\text{sen}\left(\frac{\Omega}{2}\right)\cdot 1{,}05 = \Omega$$

$$\frac{\text{sen}(\Omega/2)}{\Omega/2} = (1{,}05)^{-1} = 0{,}9523$$

resuelvo en forma grafica

$\Omega = 1{,}076823$ → punto a partir del cual el error es superior al 5%

Segundo caso

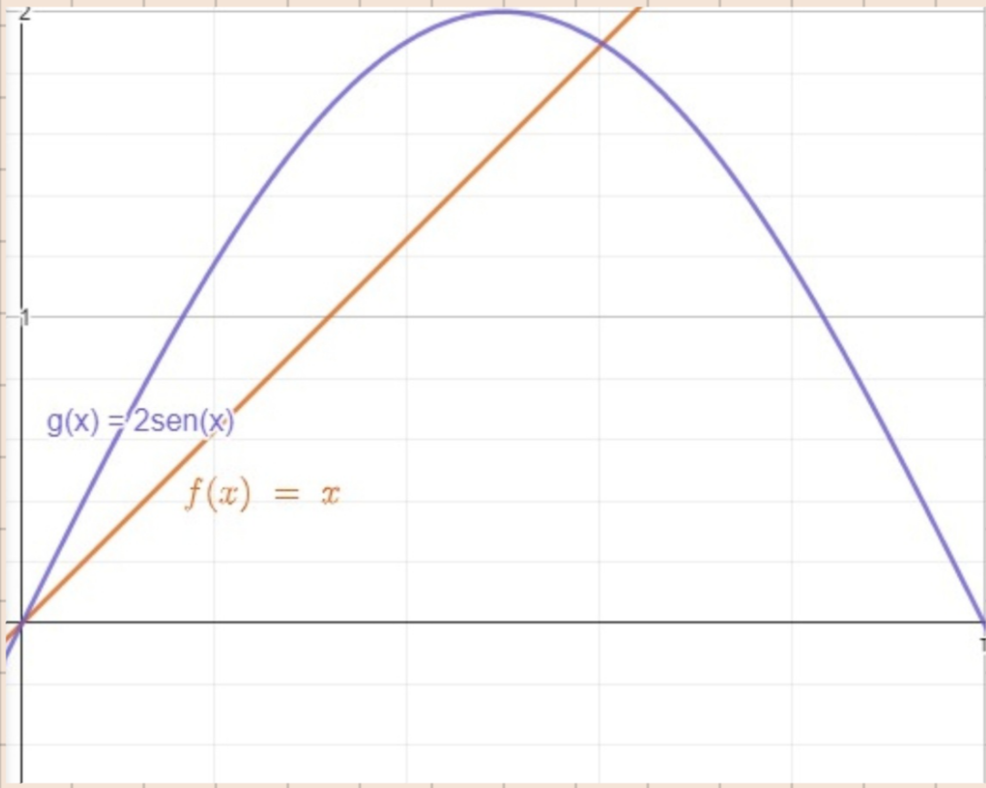
Ideal:

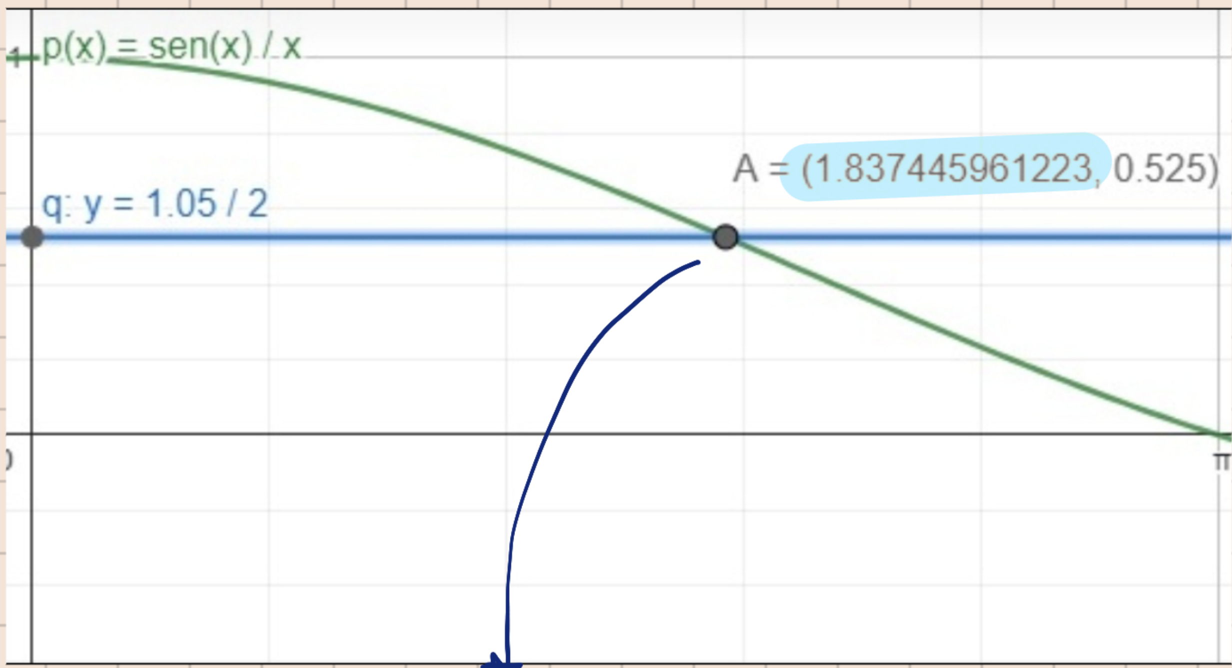
$$H(j\Omega) = 2\,\text{sen}(\Omega)$$

$$H(j\Omega) = \Omega$$

$$2\,\text{sen}(\Omega) > 1{,}05 \cdot \Omega$$

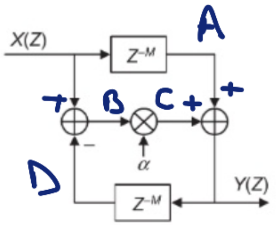
$\frac{sen(x)}{x} > \frac{1,05}{2}$ → resuelvo gráficamente





punto a partir del cual el error es superior al 5%.

2) Se dispone del siguiente filtro digital:



a) Para la transferencia del filtro con M = 2 y α=0.8; calcular 1) el diagrama de polos y ceros y la respuesta en frecuencia de 2) módulo, 3) fase y 4) retardo de grupo.

b) Si quisiéramos anular una senoidal interferente de 125 Hz y su segunda armónica, y sólo dispone de un sumador y el filtro de la figura con M = 4. Proponga un esquema de la solución y calcule los parámetros del filtro que sería necesario adecuar.

$$A = X(z) \cdot z^{-M}$$

$$Y(z) = A + C$$

$$D = Y(z) \cdot z^{-M}$$

$$B = X(z) - D$$

$$C = B \cdot \alpha$$

$$Y(z) = X(z) z^{-M} + B \cdot \alpha$$

$$Y(z) = X(z) z^{-M} + (X(z) - D) \cdot \alpha$$

$$Y(z) = X(z) z^{-M} + (X(z) - Y(z) z^{-M}) \alpha$$

$$Y(z)\left[1 + z^{-M} \alpha\right] = X(z)\left[z^{-M} + \alpha\right]$$

$$Y(z) = X(z) \frac{\left[z^{-M} + \alpha\right]}{1 + z^{-M} \cdot \alpha}$$

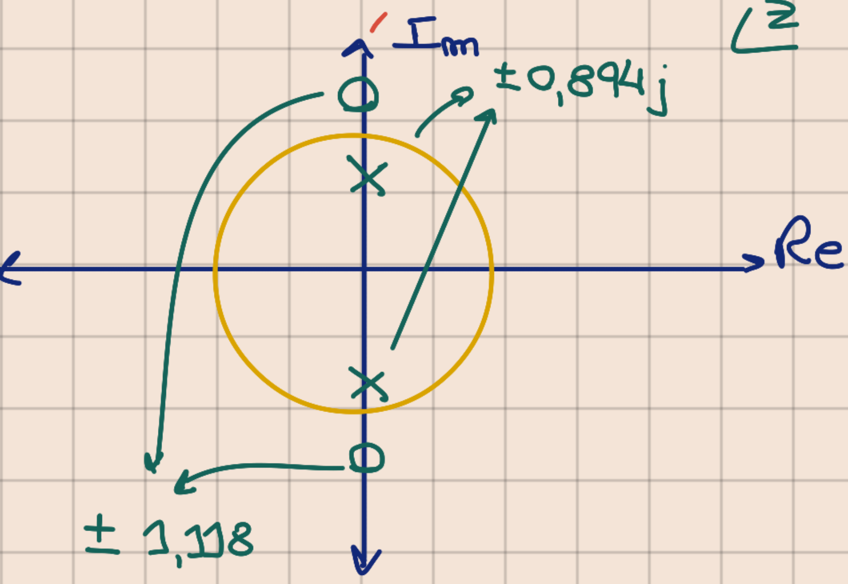
$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-2} + \alpha}{1 + z^{-2}\alpha} = \frac{1 + \alpha z^{2}}{z^{2} + \alpha}$$

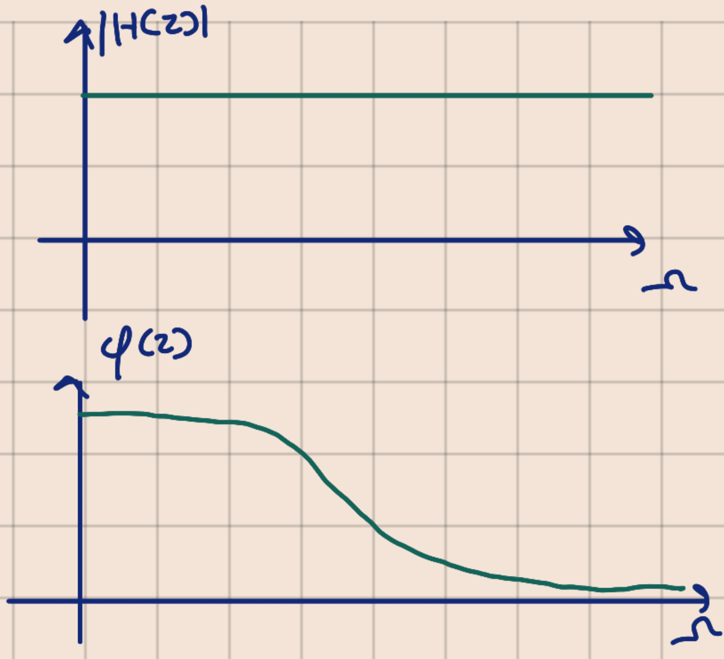
$$H(z) = \alpha \frac{\left(z^2 + \frac{1}{\alpha}\right)}{\left(z^2 + \alpha\right)}$$

Si $\alpha = 0,8$

$$\boxed{H(z) = 0,8 \frac{\left(z^2 + \frac{5}{4}\right)}{z^2 + \frac{4}{5}}}$$

filtno pasa todo





$$H(j\Omega) = 0{,}8 \left(\frac{e^{2j\Omega} + 1{,}25}{e^{2j\Omega} + 0{,}8} \right)$$

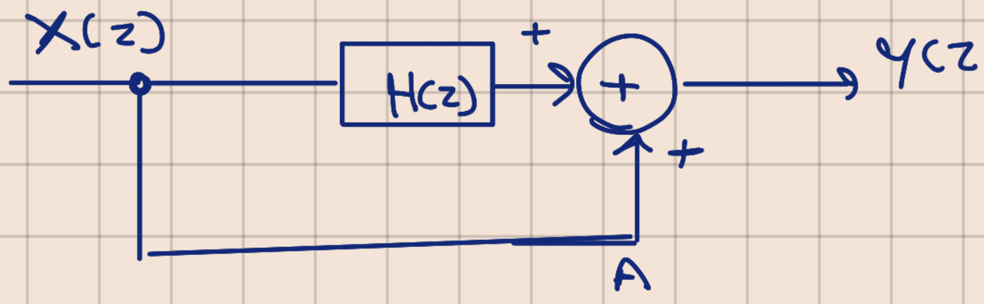
$$= \frac{\left(\cos(2\Omega) + j\,\mathrm{sen}(2\Omega) + 1{,}25\right)}{\cos(2\Omega) + j\,\mathrm{sen}(2\Omega) + 0{,}8} \cdot 0{,}8$$

$$|H(j\Omega)| = \sqrt{\frac{(\cos(2\Omega)+1{,}25)^2 + \mathrm{sen}(2\Omega)^2}{(\cos(2\Omega)+0{,}8)^2 + \mathrm{sen}(2\Omega)^2}} \cdot 0{,}8$$

$$\varphi(j\Omega) = \mathrm{arcTg}\left(\frac{\mathrm{sen}(2\Omega)}{\cos(2\Omega)+1{,}25} \right) - \mathrm{arcTg}\left(\frac{\mathrm{sen}(2\Omega)}{\cos(2\Omega)+0{,}8} \right)$$

b).- $H(z) = \alpha \dfrac{\left(z^4 + \frac{1}{\alpha}\right)}{z^4 + \alpha}$

Circuito propuesto :



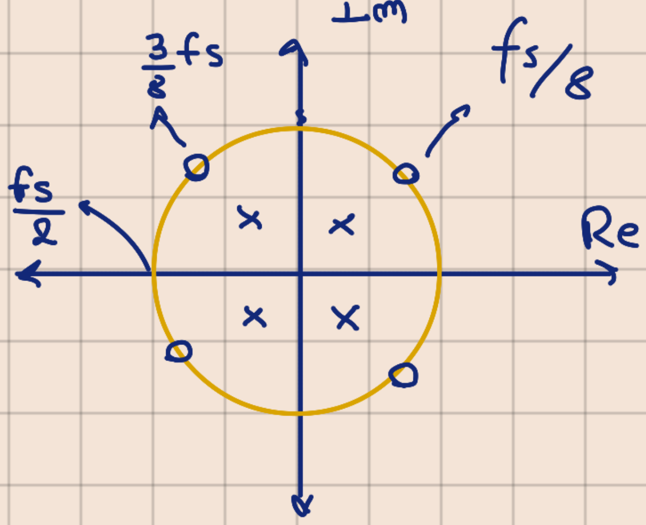
$$Y(z) = X(z)\,H(z) + X(z)$$

$$Y(z) = X(z)\,\alpha \frac{\left(z^4 + \frac{1}{\alpha}\right)}{z^4+\alpha} + X(z)$$

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\alpha\left(z^4 + \frac{1}{\alpha}\right) + z^4 + \alpha}{z^4+\alpha}$$

$$T(z) = \frac{z^4\alpha + z^4 + 1 + \alpha}{z^4+\alpha} = \frac{z^4(1+\alpha)+(1+\alpha)}{z^4+\alpha}$$

$$T(z) = \frac{(z^4+1)(1+\alpha)}{z^4+\alpha}$$



Como tengo que eliminar 125 Hz $\longrightarrow \frac{fs}{8} = 125\,Hz$

$fs = 1\,kHz$

Se filtran la frecuencia de 125 Hz y la de 375 Hz.