1 复数

许雷叶18405656590 leoasa@mail.ustc.edu.cn 助教：魏润菊、刘春麟

第一章主要介绍复数的基本性质。

1.1 复数的运算

我们从一个二次方程开始：在实数域范围内找一个x，使得x 有如下特征

$$x^2+1=0.$$

这个方程无解，为了使得方程有解，必须扩大搜索范围。在复数域范围内找一个x，使得x 有如下特征

$$x^2+1=0.$$

该方程有解

$$\pm\sqrt{-1}.$$

记$i=\sqrt{-1}$ 称为虚数单位，相应的$ai, a\in\mathbb{R}$ 称为纯虚数。虚数的概念由卡尔达诺于16世纪引入，当时主要为了解三次方程。因为看不见，摸不着，甚至很难想象，因而笛卡尔将这种数称为虚数，与实数相对应。莱布尼兹的说法最有代表性："圣灵在分析的奇观中找到了超凡的显示，这就是那个理想世界的端兆，那个介于存在与不存在之间的两栖物，那个我们称之为虚的-1的平方根。"

欧拉公式："美"$e^{\pi i}+1=0$；"应用"：傅里叶变换。

复数（complex number），$z=x+yi$，$x,y\in\mathbb{R}$。

复数可以表示为：

代数表示： $z=x+iy$，其中x,y 为实数，x 称为z 的实部记为$\mathrm{Re}z=x$；y 称为z 的虚部记为$\mathrm{Im}z=y$；

向量表示： z 看作复平面上的一向量，作为向量其最大好处是可以任意平移向量。向量的长度称为复数的模长，记为$|z|$；其取值为$(\sqrt{x^2+y^2})$；向量的倾角称为复数的幅角，可以看出给定一个复数，其幅角的取值有无穷多并且以2π 为周期，我们经常约定位于区间$(-\pi,\pi]$ 之间的幅角取值称为z 的幅角的主值；用$arg(z)$ 表示幅角主值，用$Arg(z)$ 表示幅角全体，他们仅对$z\neq 0,\infty$ 有定义；幅角与幅角主值有如下关系：

$$Arg(z)=arg(z)+2k\pi, k\in\mathbb{Z}.$$

幅角有如下表达式：设$z=x+yi$，$xy\neq 0$，则

$$arg(z)=\begin{cases}\arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第一象限；}\\ \pi+\arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第二象限；}\\ -\pi+\arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第三象限；}\\ \arctan\frac{y}{x}, & z\text{ 在第四象限。}\end{cases}$$

作为向量是没法比较大小的（复数之间没法比较大小），但可以比较向量的长度，也就是模长；

指数表示、三角表示： $z = re^{i\theta} = r\cos\theta + ir\sin\theta$，$r \in [0, +\infty), \theta \in \mathbb{R}$，$r$ 为复数的模长；θ 为复数的幅角。

注记：容易看出，要说明两复数相等，只要说明他们的实部和虚部分别相等；或者说明模长和幅角分别相等。

复数的运算：

- 复数运算满足一般实数运算的所有法则（交换律，结合律，分配律等，仅需注意$i^2 = -1$），需要注意的是除法；例子：$\frac{1+i}{1+2i} = \frac{(1+i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \frac{3-i}{5}$，在计算除法的时候，往往要分子分母同时乘以一个特定的复数（分母的共轭）。

- 如果将复数看成向量，则加法减法满足平行四边形法则或者三角形法则；容易看出复数的模满足三角不等式，即
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$
除此之外还满足
$$|z_1 - z_2| \geq ||z_1| - |z_2||.$$

- 如果用指数形式表示复数，则复数的乘法（除法）有简单的形式（模相乘（相除），幅角相加（相减）——棣莫弗定理）；如果用指数表示复数，则幂次有如下公式
$$(re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}, n \in \mathbb{Z}.$$
例子：$(1+i)^{2020} = (\sqrt{2})^{2020} e^{i\frac{\pi}{4}\times 2020} = -2^{1010}$. 利用复数的乘法可以轻松获得很多三角等式，例如：
$$e^{i\theta}e^{i\phi} = \cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi + i(\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi) = e^{i(\theta+\phi)} = \cos(\theta+\phi) + i\sin(\theta+\phi).$$
通过对照，可以得到：
$$\cos\theta\cos\phi - \sin\theta\sin\phi = \cos(\theta+\phi)$$
和
$$\cos\theta\sin\phi + \sin\theta\cos\phi = \sin(\theta+\phi).$$

- 复数的开方的取值一般并不唯一（0 是例外），例如 $\sqrt[n]{z}, n \in \mathbb{N}$ 表示复数范围内所有满足以下方程的x,
$$x^n = z.$$
假设x 的指数表示为$re^{i\theta}$ （θ 为幅角主值，当然也可以是其他幅角），则
$$r^n = |z|, n\theta = Arg(z) = 2k\pi + arg(z).$$
当$z = 0$ 时候，$x = 0$；而当$z \neq 0$ 的时候，有n 个解
$$(\sqrt[n]{|z|})e^{(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})i}, k = 0, 1, \cdots, n-1.$$

需要注意前后 $\sqrt[n]{\ }$ 的含义是不一样的，我们用圆括号加以区分，在没有混淆的情况下，并不需要特别说明。

例子1. （*1*）求 $\sqrt[3]{1}$ 的所有取值；（*2*）解方程，$x^5 = 10 + i$。

解. （*1*）1 的模为1，幅角主值为0。所以

$$\sqrt[3]{1} = (\sqrt[3]{1})e^{\frac{2k\pi}{3}i} = e^{\frac{2k\pi}{3}i}, k = 0, 1, 2.$$

即：1；$-\frac{(\sqrt{3})}{2} + \frac{1}{2}i$；$-\frac{(\sqrt{3})}{2} - \frac{1}{2}i$。

（*2*）设$x = re^{i\theta}$，则

$$r^5 = (\sqrt{101}), 5\theta = \arctan\frac{1}{10} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

解得

$$r = (\sqrt[10]{101}), \theta = \frac{1}{5}\arctan\frac{1}{10} + \frac{2k\pi}{5}, k \in \mathbb{Z}.$$

所以

$$x = (\sqrt[10]{101})e^{i(\frac{1}{5}\arctan\frac{1}{10} + \frac{2k\pi}{5})}, k = 0, 1, 2, 3, 4.$$

- 共轭是复数特有的运算形式，其符号是复数上面加一横（$z \to \bar{z}$：$\overline{x + iy} = x - iy$）；其几何意义是复数关于实轴的对称点。共轭有以下运算规律
  - $\bar{\bar{z}} = z$；
  - $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$；
  - $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$；$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$；
  - $|z|^2 = z\bar{z}$；
  - $\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} = \frac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}$；一般会依此计算复数的除法；例子：$\frac{1+i}{1-2i} = \frac{(1+i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1+3i}{5}$；
  - 需要注意的是$\overline{f(z)} = f(\bar{z})$一般并不成立，最简单的例子就是$f(z) = iz$；
  - 指数表示下，$re^{i\theta}$ 的共轭为$re^{-i\theta}$。

  用共轭可以表示复数的实部，虚部和模
  - $Re(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}$, z 为实数等价于$z = \bar{z}$；
  - $Im(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}$, z 为虚数等价于$z = -\bar{z}$；
  - $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad (z = x + iy)$。

例子2. 求解以下方程：

$$z^{2020} = 2020\bar{z}.$$

解. 不妨设$z = re^{i\theta}$，则有

$$r^{2020}e^{i2020\theta} = 2020re^{-i\theta}.$$

所以

$$r^{2019} = 2020 \text{ 并且} 2021\theta = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

解得：$r = (\sqrt[2019]{2020})$；$\theta = \frac{2k\pi}{2021}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2020$。所以

$$z = (\sqrt[2019]{2020})e^{i\frac{2k\pi}{2021}}, k = 0, 1, 2, \cdots, 2020.$$

例子3. 设$z = x + iy$, $y \neq 0$, $z \neq \pm i$。证明：当且仅当$x^2 + y^2 = 1$ 的时候，$\frac{z}{1+z^2}$ 是实数。

Proof. $\frac{z}{1+z^2}$ 是实数等价于$\frac{z}{1+z^2} = \overline{\left(\frac{z}{1+z^2}\right)} = \frac{\bar{z}}{1+\bar{z}^2}$。即

$$z + z\bar{z}^2 = \bar{z} + \bar{z}z^2.$$

即

$$(z - \bar{z})(1 - z\bar{z}) = 0.$$

所以要么$z = \bar{z}$此时z 为实数，但是$y = 0$ 与条件不符舍去；要么$\bar{z}z = 1 = |z|^2$，即z 位于单位圆周上。 □

例子4. 证明平行四边形对角线的平方和等于边的平方和。

Proof. 不妨设平行四边形的四个顶点分别为$0, z_1, z_2, z_1 + z_2$。则仅需说明

$$2|z_1|^2 + 2|z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2.$$

实际上

$$|z_1 - z_2|^2 = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - z_1\bar{z}_2 - \bar{z}_1 z_2.$$

同理

$$|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2.$$

两式相加既得。 □

例子5. 已知正三角形的两个顶点为z_1, z_2，求第三个顶点z_3？

解. $z_3 - z_1 = (z_2 - z_1)e^{\pm\frac{\pi}{3}i}$。所以

$$z_3 = z_1 + (z_2 - z_1)(\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i).$$

所以

$$z_3 = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_1 + (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_2 \text{ 或者} (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_1 + (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)z_2.$$

1.2 复数列的极限

定义. 设z_n 为复数列，z_0 为复数。

- 如果$\lim_{n\to\infty} |z_n - z_0| = 0$，就称$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0$，也就是在复平面上$z_n$ 无限靠近z_0；
- 如果$\lim_{n\to\infty} |z_n| = \infty$，就称$\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$，也就是在复平面上$z_n$ 无限远离0。

当然我们也可以用极限语言来表述：

- 对任意$\epsilon > 0$，存在自然数N 使得$|z_n - z_0| < \epsilon$ 对任意$n > N$ 成立；
- 对任意$M > 0$，存在自然数N 使得$|z_n| > M$ 对任意$n > N$ 成立。

定义(邻域). 设z_0 为复数，z_0 的邻域是指包含z_0 的开集；∞ 的邻域是指包含“∞”的开集。例如，

$$\{z : |z| < 1\} \text{ 是} 0 \text{ 的邻域;}$$

$$\{z : |z| > 1\} \text{ 是} \infty \text{ 的邻域.}$$

用邻域的概念可以对极限有更直观的了解：

- $\lim_{n\to+\infty} z_n \to z_0$ 当且仅当对z_0 的任何领域U，仅有有限个$z_n \notin U$；也就是说从某个z_n 开始其后面的所有元素都在该邻域内。

定理. 设$z_n = x_n + iy_n, z_0 = x_0 + iy_0$ 为复数，则$\lim_{n\to+\infty} z_n \to z$ 等价于$\lim_{n\to+\infty} x_n \to x$ 并且$\lim_{n\to+\infty} y_n \to y$。但这对于极限是无穷的情况并不成立，例如：

$$z_{2k} = 2k, z_{2k+1} = (2k + 1)i.$$

要看$z_n \to \infty$ 是否成立，只要看它的模是否趋于“$+\infty$”：即，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = \infty \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty} |z_n| = +\infty.$$

同样地，要看$z_n \to 0$ 是否成立，只要看它的模是否趋于“0”：即，

$$\lim_{n\to+\infty} z_n = 0 \text{ 等价于 } \lim_{n\to+\infty} |z_n| = 0.$$

一般而言我们将常规复平面加上∞ 组成一个新的空间，称为闭复平面。

复平面：所有复数的集合；**闭复平面**：所有复数加上一个“∞”。

我们有以下约定

- $\infty + z = \infty, \forall z \neq \infty$；$\infty + \infty$ 没有意义；
- $\infty \times z = \infty, \forall z \neq 0$；$\infty \times 0$ 没有意义；
- $\frac{z}{\infty} = 0, \forall z \neq \infty$；$\frac{\infty}{\infty}$ 没有意义；
- $\frac{z}{0} = \infty, \forall z \neq 0$；$\frac{0}{0}$ 没有意义。

闭复平面与球面（称为复球面）存在连续一一对应的关系，因为球面是闭的，因而闭复平面是“闭”的。

例子6. 设$z_n \to z_0$，$\arg z$ 表示主值。证明

(1) $\bar{z}_n \to z_0$；

(2) 当$z_0 \neq 0$ 和负数的时候，$argz_n \to argz_0$；

(3) $z_0 = \infty$ 呢？

证明. （*1*）设$z_n = x_n + y_n i$，则$\bar{z}_n = x_n + (-y_n)i$。所以$\bar{z}_n \to z_0$ 等价于$x_n \to x_0$ 并且$-y_n \to -y_0$ 等价于$x_n \to x_0$ 并且$y_n \to y_0$ 等价于$z_n \to z_0$。

（*2*）可以用极限语言。当ϵ 足够小的时候，当$z_0 \neq 0$ 和负数的时候，与z_0 的幅角主值相差小于ϵ 的复数全体其实是z_0 的一个角形邻域。由极限的定义马上可以说明结论。同时也可以看到，当$z_0 = 0$的时候，幅角主值不存在，而当z_0 位于负半轴的时候，与z_0 的幅角主值相差小于ϵ 的复数全体并不是z_0 的一个角形邻域，此时可以举例说明结论不成立。

（*3*）当$z_0 = \infty$ 的时候，幅角主值的定义没有意义。但（*1*）依然是正确的。

1.3 区域与曲线

定义(区域)**.** 复平面的一个子集D称为区域如果（1）它是开集；（2）它是连通的；根据连通性的不同，又分为单连通区域（没有洞）和多连通区域（带洞）。

例如：单位圆内部$|z| < 1$ 是单连通区域；但是如果我们把$|z| < 1$的零点挖掉，那它就变成了多连通区域。一般区域都是曲线围成的：

定义(约当曲线：曲线的参数表示)**.** 复平面上的曲线是指连续映射$z(t) = x(t) + iy(t) : [\alpha, \beta] \to \mathbb{C}$；如果曲线的取值除首尾可能一样外其他都不同，称之为若当曲线或简单曲线；特别地，如果若当曲线首尾相连，则称之为若当闭曲线或简单闭曲线。

例子7. 用参数表示直线，圆周，折线等。

- 直线：$z(t) = z_0 t + z_1, t \in \mathbb{R}$ 表示过z_1，方向为z_0 的直线；
- $z(\theta) = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in [0, 2\pi]$ 表示半径为r 的圆周，是简单闭曲线；
- 折线往往需要分开表示，例如表示一个正方形：

$$z(t) = \begin{cases} t, & t \in [0,1]; \\ 1 + i(t-1), & t \in (1,2]; \\ 1 + i - (t-2), & t \in (2,3]; \\ i - (t-3)i, & t \in (3,4]. \end{cases}$$

例如用参数表示一个正三角形：

$$z(t) = \begin{cases} -0.5 + t, & t \in [0,1]; \\ 0.5 + (-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i)(t-1), & t \in (1,2]; \\ \frac{\sqrt{3}}{2}i + (-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i)(t-2), & t \in (2,3]. \end{cases}$$

简单闭曲线把复平面分成内外两个区域（看起来理所当然但证明及其困难）。

复平面上的区域通常用复数的运算和不等式表示：例如：

- 上半平面：$\mathrm{Im} z > 0$；
- 单位圆内部：$|z| < 1$；
- 单位圆内部去掉0 点：$0 < |z| < 1$；

- 带状区域：$1 < \mathrm{Re}z < 2$；
- 圆环：$r < |z-a| < R$；
- 椭圆区域：$|z-a| + |z-b| < c$。

用复数表示曲线：

例子8. 用复数表示直线$ax + by + c = 0, a, b, c \in \mathbb{R}$；求$Re\frac{1}{z} = \alpha$ 所代表的曲线。

解. *(1)* 设$z = x + iy$，则

$$x = Rez = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = Imz = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

所以

$$a\frac{z+\bar{z}}{2} + b\frac{z-\bar{z}}{2i} + c = 0.$$

整理得：

$$\frac{a-ib}{2}z + \frac{a+ib}{2}\bar{z} + c = 0.$$

如果我们用$\alpha = \frac{a+ib}{2}$，则上式写为

$$\bar{\alpha}z + \alpha\bar{z} + c = 0.$$

(2) 设$z = x + iy$，则

$$Re\frac{1}{z} = Re\frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} = \alpha.$$

如果$\alpha = 0$，则所代表曲线为$x = 0, y \neq 0$ 的直线（去掉0 点)。如果$\alpha \neq 0$，则、

$$(x - \frac{1}{2\alpha})^2 + y^2 = (\frac{1}{2\alpha})^2.$$

为一个圆心在$\frac{1}{2\alpha}$，半径为$\frac{1}{2|\alpha|}$的圆。

作业：3；4；15；21。

1 解析函数

1.1 复变数函数

何为复变数函数？复数的一个子集（E）与复数之间的对应（f），记为：$w = f(z), z \in E$。如果对应是一对应一的，则称之为单值函数（无特殊说明，均为单值），记为：$w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), z \in E$ 显然一个单值函数可以理解为两个二元函数的组合。如果对应是一对应多的，则称为多值函数；如果反过来也是一对应一，则称为一一映照或双方单值函数。例如：

$$z^a, z \in \mathbb{C}.$$

当a 是整数的时候，它是单值函数；而当a 不是整数的时候它是多值函数。又例如$Arg(z)$ 是多值函数，而$arg(z)$ 单值函数。$1/z$ 是$\mathbb{C}/\setminus\{0\}$ 到$\mathbb{C}\setminus\{0\}$ 的一一映照。当然如果我们把无穷远点考虑进去，则$1/z$ 是$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 到$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ 的一一映照。

从几何上来说，复变数函数就是把复平面上的一个点映成另一个复平面的一个集合。特别地，我们列举以下常见变换：

平移 $z \to z + a$；

旋转 $z \to ze^{i\theta}$；

伸缩 $z \to rz, r \geq 0$；

对称 $z \to \bar{z}$。

例如：关于虚轴对称：$z \to i\overline{(-iz)} = -\bar{z}$。

例子1. *求下列点集在映照$w = z^2$ 下的像：*

1) *平行于坐标轴的直线；*
2) *双曲线族$x^2 - y^2 = c_1$ 及$2xy = c_2$；*
3) *半圆环域：$1 < |z| < 2$，$0 < \arg z < \pi$。*

解. 设$z = x + iy$，$w = u + iv = (x^2 - y^2) + 2xyi$。

1) (a) $y = c$ 为常数，则

$$u = x^2 - c^2, v = 2xc.$$

当$c \neq 0$ 的时候，消去x，得到

$$u - \frac{v^2}{4c^2} + c^2 = 0.$$

这是开口往右的抛物线。而当$c = 0$ 的时候，$v = 0$，退化为非负实轴，原因是$u \geq 0$。

(b) $x = c$ 为常数，则

$$u = c^2 - y^2, v = 2yc.$$

当$c \neq 0$ 的时候，消去y，得到

$$u + \frac{v^2}{4c^2} - c^2 = 0.$$

这是开口往左的抛物线。而当$c = 0$ 的时候，$v = 0$，退化为非正实轴，原因是$u \leq 0$。

2) 分别是$u = c_1$ 和$v = c_2$ 的直线，并且可以全部取到。

3) 半径是$1 - 4$ 的环面（去掉实轴部分）。

1.2 极限、连续性

定义. 设$w = f(z)$ 在z_0 的某个去心邻域内有定义，则

- 如果$\lim_{z\to z_0} |f(z) - w_0| = 0$，就称$\lim_{z\to z_0} f(z) = w_0$；
- 如果$\lim_{z\to z_0} |f(z)| = +\infty$，就称$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$；

当然我们也可以用极限语言来表述：

- 对任意$\epsilon > 0$，存在正的ρ 使得$|f(z) - w_0| < \epsilon$ 对任意$0 < |z - z_0| < \rho$ 成立；
- 对任意$M > 0$，存在的ρ 使得$|f(z)| > M$ 对任意$0 < |z - z_0| < \rho$ 成立。

定义(连续)**.** 设$f(z)$ 是一个复变数函数，如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0)$$

则称f 在z_0 点连续。如果f 在区域D 上每点都连续，则称f 在D 上连续。

连续性有简单的判断方式。

定理. *函数$f(z) = u(x, y) + v(x, y)i$ 在$z_0 = x_0 + iy_0$ 处连续的充分必要条件是u, v 在(x_0, y_0) 处连续。*

原因：

$$\max\{|u(x,y)-u(x_0,y_0)|, |v(x,y)-v(x_0,y_0)|\} \le |f(z)-f(z_0)| \le |u(x,y)-u(x_0,y_0)|+|v(x,y)-v(x_0,y_0)|.$$

复变函数的连续概念与实变数函数一致，因而相应运算规律仍然成立（加减乘除复合）。

1.3 导数、解析

定义. 设复变数函数$w = f(z)$ 是定义在区域D上的复变函数，$z_0 \in D$。如果以下极限

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

存在，我们称$w = f(z)$ 在点z_0 （复）可微，相应极限称为$w = f(z)$ 在z_0 点的导数或者微商，记为$f'(z_0)$；如果$f(z)$ 在区域D 内每一点都可微，则称$f(z)$ 在D 上解析；如果$f(z)$ 在z_0 的某个邻域内可微，则称$f(z)$ 在z_0 处解析。如果$f(z)$ 在z_0 点不解析，则称之为奇点。

注记：这里$\Delta z \to 0$ 是可以多种多样的，可以沿着x 轴趋向于0；可以沿着y 轴趋于0；还可以打着圈趋于0；可以离散地区域零（实际上仅仅沿着射线方向趋于零是不够的，当然如果你发现所有方式趋于零效果结果都区域某个复数，那么必然可微）。如果我们想说明f 在z 点不可微：（1）只要找到两种Δz 趋于零的形式，使得极限不一样就可以了；（2）找到一个Δz 趋于零的方式使得极限为无穷。

例子2. 求$f(z)=\bar{z}$ 在哪可微；$argz$ 呢？

解. （1）设$z=x+iy$，$\Delta z=\Delta x+i\Delta y$，则

$$\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\frac{\Delta x-i\Delta y}{\Delta x+i\Delta y}.$$

以两种方式让Δz 趋于0。（1）沿着实轴趋于0；（2）沿着虚轴趋于0。极限分别为1 和-1，所以处处不可微。

（2）$argz$ 也处处不可微，除了零点和负实轴上没定义或者不连续外，其他地方我们可以选取两种不同的Δz 趋于零的方式，一种是连接z 与零的射线；另一种是以$|z|$ 为半径零为圆心的圆弧。两种趋于零得到的相关极限是不一样的，所以不可微。

例子3. 求多项式函数$f(z)=z^n$ 的微分。

解. 对任意复数z，我们有

$$f(z+\Delta z)-f(z)=(z+\Delta z)^n-z^n=\sum_{i=1}^{n}C_n^i\Delta z^i z^{n-i}.$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z)-f(z)}{\Delta z}=\lim_{\Delta z\to 0}\sum_{i=1}^{n}C_n^i\Delta z^{i-1}z^{n-i}=nz^{n-1}.$$

复变函数的微分定义与一元实变数函数的导数（微分）的定义相同，因而运算的基本法则都一样，比如：

加减法：$(f\pm g)'=f'\pm g'$；

乘法：$(fg)'=f'g+fg'$；

除法：$(\frac{f}{g})'=\frac{f'g-fg'}{g^2}$，要求分母不为零；

复合：$(f\circ g)=(f'\circ g)g'$；

反函数：$(\phi^{-1})'=\frac{1}{\phi'\circ\phi^{-1}}$，要求分母不为零；

所以现在我们已经明确解析性的函数有：（1）多项式；（2）有理函数，即两个多项式相除。后者在分母不取零的区域上解析。

复变函数微分的几何含义：如果$f(z)$ 在z 处可微，则：（1）f 在z 的一个邻域内有定义；（2）在z 的一个非常小的邻域内有关系式

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+o(|\Delta z|).$$

其中$o(|\Delta z|)$ 是相对于$|\Delta z|$ 的无穷小，总而言之当$f'(z)$ 不为零的时候可以忽略之，此时剩余部分为

$$f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z.$$

所以当$f'(z)=re^{i\theta}\neq 0$ 的时候有非常明确的几何意义：在非常小邻域可以近似认为相对长度伸缩r 倍加上相对辐角逆时针旋转θ 角度。也就是说形状大致上是保持的，只是尺度变了。

例子4. $f(z)$ 全平面解析，并且将$0 < argz < \theta < 2\pi$的角形区域映为自身，$f(0) = 0$ 并且在0 点可微。则$f'(0) \geq 0$。

证明. 假设$f'(0) \neq 0$。我们有

$$\lim_{z\to 0} Arg\frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = Argf'(0).$$

也就是说

$$\lim_{z\to 0} Argf(z) - argz = Argf'(0).$$

我们可以让z 沿着$(0,\theta)$ 内的任意一个角度ϕ 的射线趋于0，则有

$$Argf'(0) \subset \{(0,\theta) + 2k\pi - \phi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

但是当ϕ 发生变化的时候，右边唯一共同包含的只有$0 + 2k\pi$。也就是$Argf'(0) = 2k\pi$。即此时，$f'(0) > 0$。

1.4 C-R方程

我们用C-R 方程判断复变函数的可导性或者解析性。

定义(实可微)**.** 设$u(x, y)$ 是一个实的二元函数，如果在(x, y) 处存在a, b （可以和x, y 有关）使得

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) = u(x, y) + a\Delta x + b\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}).$$

则称u 在(x, y) 处（实）可微。并且$a = u_x(x, y), b = u_y(x, y)$。

定理. *复变函数$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在$z = x + iy$ 处可微等价于*

1) u, v 在(x, y) 处可微；

2) u, v 在(x, y) 处满足以下柯西-黎曼方程（简称C-R 方程）

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

从而复变函数f 在区域D 内解析等价于在区域D 内任何一点都满足上述1）和2)。

证明. 假设复变函数f 在$z = x + iy$ 处可微，则有

$$f(z + \Delta z) = f(z) + f'(z)\Delta z + o(|\Delta z|).$$

左边为

$$u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y).$$

右边为

$$\Big(u(x, y) + Ref'(z)\Delta x - Imf'(z)\Delta y + o(\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2})\Big) +$$

$$\left(v(x,y)+Ref'(z)\Delta y+Imf'(z)\Delta x+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2})\right)i.$$

实部与虚部相对照有

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)=u(x,y)+Ref'(z)\Delta x-Imf'(z)\Delta y+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}),$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)=v(x,y)+Ref'(z)\Delta y+Imf'(z)\Delta x+o(\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}).$$

所以u,v 在$z=x+iy$ 处可微。并且

$$u_x(x,y)=v_y(x,y)=Ref'(z),u_y(x,y)=-v_x(x,y)=-Imf'(z).$$

反之，既然u,v 可微，我们有

$$u(x+\Delta x,y+\Delta y)=u(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial u}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta z|),$$

$$v(x+\Delta x,y+\Delta y)=v(x,y)+\frac{\partial u}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial v}{\partial y}\Delta y+o(|\Delta z|).$$

所以

$$f(z+\Delta z)=f(z)+u_x\Delta x+u_y\Delta y+i(v_x\Delta x+v_y\Delta_y)+o(|z|).$$

带入C-R 方程，得到

$$f(z+\Delta z)=f(z)+u_x\Delta x+u_y\Delta y+i(-u_y\Delta x+u_x\Delta_y)+o(|z|)=f(z)+(u_x-iu_y)\Delta z+o(|z|).$$

即f 在z 点可微，并且$f'(z)=u_x-iu_y$。

由证明过程可知，如果$f(z)=u+iv$ 在z 处可微，则

$$f'(z)=u_x-u_yi=v_y+iv_x.$$

有了C-R 方程，我们可以很容易判断更多复变函数的解析性。

例子5. 讨论下列函数的可微性和解析性。

1) $f(z)=x^3-y^3+2ix^2y^2$；

2) $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ 所以指数函数是可微的。

解. *1)* $u=x^3-y^3,v=2x^2y^2$，则

$$u_x=3x^2,v_y=4x^2y,$$

$$u_y=-3y^2,v_x=4xy^2.$$

按C-R 方程联立得

$$3x^2=4x^2y,3y^2=4xy^2$$

解得$(x,y)=(0,0)$ 和$(\frac{3}{4},\frac{3}{4})$，所以该函数仅在

$$0,\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i$$

处可微，相应微分为$f'(0)=0$，$f'(\frac{3}{4}+\frac{3}{4}i)=\frac{27}{16}(1+i)$。全复平面不解析。

2) $u=e^x\cos y, v=e^x\sin y$，则

$$u_x=e^x\cos y, u_y=-e^x\sin y, v_x=e^x\sin y, v_y=e^x\cos y.$$

所以

$$u_x=v_y, u_y=-v_x.$$

所以复变函数$f(z)$ 在全复平面解析和可微，微分为

$$f'(z)=e^x\cos y+ie^x\sin y.$$

注记. 我们可以把$w=f=u(x,y)+iv(x,y)$ 用$z,\bar{z}$ 表示，即

$$w=u(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i})+v(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}).$$

由偏导数的链式法则，如果w 可微，则有

$$w_{\bar{z}}=w_xx_{\bar{z}}+w_yy_{\bar{z}}=\frac{u_x+iv_x}{2}-\frac{u_y+iv_y}{2i}=\frac{u_x-v_y+(u_y+v_x)i}{2}=0.$$

不太严谨地说，一个解析函数其取值必然与$\bar{z}$ 无关。

例子6. 解析函数$f(z)=u+iv$ 满足$u+v=(x+y)(2x-2y+1)$，$f(1)=2+i$，求$f(z)$。

解. 虽然还不知道$f(z)$，但我们可以先求出$f'(z)=u_x-iu_y$。对$u+v$ 分别对x,y 求偏导，有：

$$\begin{cases} u_x+v_x=4x+1, \\ u_y+v_y=-4y+1 \end{cases}$$

带入C-R方程，$u_x=v_y, u_y=-v_x$，得到

$$\begin{cases} u_x-u_y=4x+1, \\ u_y+u_x=-4y+1 \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} u_x=1+2x-2y, \\ u_y=-2y-2x. \end{cases}$$

所以

$$f'(z)=u_x-u_yi=1+2x-2y+(2x+2y)i=1+2z+2iz.$$

所以

$$f(z)=z+z^2+iz^2+C.$$

带入$z=1$ 得到$C=0$。所以

$$f(z)=z+z^2+iz^2.$$

例子7. 设$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 全复平面解析，且$u^2+v^2=$常数，证明f 为常数。

证明. 不妨假设$u^2+v^2\neq 0$，则f 恒不等于零。因为常数解析，所以$f\bar{f}=u^2+v^2$ 解析；因为f解析且恒不为零，所以$\bar{f}=\frac{f\bar{f}}{f}$ 解析；因为f解析，所以$u=\frac{f+\bar{f}}{2}$和$v=\frac{f-\bar{f}}{2i}$ 解析；由C-R 方程，

$$u_x=u_y=0.$$

所以u 为常数，同理v 为常数；所以f 为常数。

1.5 初等函数（运算）

(1) 指数函数：e^z

- $e^{x+iy}=e^x(\cos y+i\sin y)$；
- $\mathrm{Re}e^{x+iy}=e^x\cos y$；$\mathrm{Im}e^{x+iy}=e^x\sin y$；$Arge^{x+iy}=y+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$，$|e^{x+iy}|=e^x$；
- 一般指数函数的运算公式对复指数函数依然成立；
- 周期为$2k\pi i$，如果两个指数相等当且仅当他们指数上相差$2k\pi i$；
- 指数函数的取值范围是所有非零复数；
- $(e^z)'=e^z$。

(2) 对数函数：Lnz，是指数函数的反函数，表示所有的$\tilde{z}$，使得

$$e^{\tilde{z}}=z.$$

- 既然指数函数的取值范围是所有非零复数，对数函数的定义域是所有非零复数；
- 既然指数函数的周期是$2k\pi i$，则对数函数是一个多值函数，且不同值之间相差$2k\pi i$；
- $Lnz=ln|z|+(Argz)i$；相应的$lnz=ln|z|+(argz)i$ 称为Lnz 的主值；
- lnz 在除去原点和负实轴的时候是解析的（设$D=\{z=x+iy:-\pi<y<\pi$，则ln 看作指数函数的反函数，实际上可以用逆映射的办法寻找更多Ln 的解析分支，例如$exp:\{z=x+iy:2\pi<y<4\pi\}\to\mathbb{C}$ 有反函数，反过来就是解析的—-沿着实轴割开）。
- $Lnz_1+Lnz_2=Ln(z_1z_2)$，把Ln 换成ln 并不成立。
- $(Lnz)'=\frac{1}{z}$（原因，$(Lnz)'=\frac{1}{e'(Lnz)}=\frac{1}{e^{Lnz}}=\frac{1}{z}$）。

(3) 幂函数z^α （$z\neq 0$）：$z^\alpha=e^{\alpha Lnz}$；$(z^\alpha)'=\alpha z^{\alpha-1}$ （原因，$(z^\alpha)'=(e^{\alpha Lnz})'=e^{\alpha Lnz}\alpha\frac{1}{z}=\alpha z^{\alpha-1}$）。

(1)α 为整数： 单值函数；

(2)α 为分数： 有限多值函数，取决于即约分数的分母；

(3)α 为其他数： 无穷多值；

(4) 为了不引起混乱，如无特别说明，e^z 统一约定为指数函数（例如e^i 作为幂函数，其取值有无穷个，为$-e^{2k\pi},k\in\mathbb{Z}$；但作为指数函数取值唯一，为$-1$)。

(4) 三角函数与双曲函数：

- 正弦函数$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$；余弦函数$\sin z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$；$(\sin z)'=\cos z$；$(\cos z)'=-\sin z$；以$2\pi$ 为周期；
- 双曲正弦函数$shz=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$；双曲余弦$shz=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$；$(shz)'=chz$；$(chz)'=shz$；以$2\pi i$ 为周期；

– 上述四个函数全复平面解析，取值也是全复平面。

(5) 反三角函数：$Arc\sin z$，也就是所有的w 使得$\sin w = z$，即：

$$\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = z.$$

首先我们可以解出e^{iw}，相当于解一个一元二次方程

$$e^{iw} = \frac{2iz + \sqrt{4 - 4z^2}}{2} = iz + \sqrt{1 - z^2}.$$

注意这是两个值。所以

$$w = -iLn(iz + \sqrt{1 - z^2}).$$

同理其他，我们在此略过。

例子8. 计算i^i.

解.

$$i^i = e^{iLni} = e^{i((2k\pi + \frac{\pi}{2})i)} = e^{-(2k\pi + \frac{\pi}{2})}$$

其中k 为所有整数。

例子9. 解方程$\cos z = 3$.

解. 即$\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2} = 3$。先解出$e^{iz}$，得

$$e^{iz} = 3 \pm 2(\sqrt{2}).$$

所以

$$z = -iLn(3 \pm 2(\sqrt{2})) = -iln(3 \pm 2(\sqrt{2})) + 2k\pi.$$

k 可以取所有整数。

1 积分

1.1 复积分的定义以及求法（参数法）

1.1.1 定义和求法

定义1. 复变函数曲线积分的定义与微积分的定义基本相同，都是将有向曲线（不加说明我们总是约定曲线为可求长光滑曲线）分成小段，在每小段上选取代表值，然后加权求和。如果当分割越来越细的时候，求和所得总是趋于某个固定的复数，那么我们就称曲线积分存在，相应的极限值称为曲线积分的取值。

$$\int_C f(z)dz = \lim_{\max_i |z_{i+1}-z_i| \to 0} \sum f(z_i)(z_{i+1}-z_i).$$

定理1. 设$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ 在曲线C 上连续，则复积分$\int_C f(z)dz$ 存在，而且

$$\int_C f(z)dz = \int_C u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_C v(x,y)dx + u(x,y)dy.$$

我们略过证明，该定理提供了一个计算复积分的方法，可以把

$$dz = dx + idy.$$

但在实际操作中，我们并不会直接这么做，而是把曲线参数化：设曲线C 的参数表示为$z(t)$，t 从α 到β，则

$$\int_C f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z(t))z'(t)dt.$$

复曲线积分有一般微积分基本性质，包括：

1. 数乘：相应积分数乘；
2. 加法与减法：相应积分做加法和减法；
3. 改变积分方向：相应积分改变正负号；
4. 曲线组合：相应积分组合；
5. 微积分变换参数的技巧依然成立（要注意有向曲线的方向，参数变换后可能反向）。

例子1. 设有向曲线C：$-2 \longrightarrow -1 \xrightarrow{\text{半径一上半圆弧}} 1 \longrightarrow 2 \xrightarrow{\text{半径二上半圆弧}} -2$，求积分

$$\int_C \frac{z}{\bar{z}}dz.$$

解. 我们要熟练掌握常规曲线的参数化（线段，圆等）。

*1.*线段C_1： $z(t) = -2 + t, t$从0 到1（必须注意积分方向）；所以

$$\int_{C_1} \frac{z}{\bar{z}}dz = \int_0^1 1dt = 1.$$

*2.*圆弧C_2： $z(\theta)=e^{i\theta},\theta$ 是从π 到0；所以

$$\int_{C_2}\frac{z}{\bar z}dz=\int_{\pi}^{0}e^{2i\theta}ie^{i\theta}d\theta=\int_{\pi}^{0}i\cos 3\theta-\sin 3\theta d\theta=\left(\frac{i\sin 3\theta}{3}+\frac{\cos 3\theta}{3}\right)|_{\pi}^{0}=\frac{2}{3}.$$

*3.*线段C_3： $z(t)=1+t,t$从0 到1；所以

$$\int_{C_3}\frac{z}{\bar z}dz=\int_0^1 1dt=1.$$

*4.*圆弧C_4： $z(\theta)=2e^{i\theta},\theta$ 是从0 到π；所以

$$\int_{C_4}\frac{z}{\bar z}dz=\int_0^{\pi}e^{2i\theta}2ie^{i\theta}d\theta=2\int_0^{\pi}i\cos 3\theta-\sin 3\theta d\theta=2\left(\frac{i\sin 3\theta}{3}+\frac{\cos 3\theta}{3}\right)|_0^{\pi}=-\frac{4}{3}.$$

所以，$\int_C\frac{z}{\bar z}dz=1+\frac{2}{3}+1-\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$。

例子2. 求积分：$\int_{|z|=3}z|dz|$（注记：不加说明，我们总认为圆周的方向是逆时针的）。

解. 参数表示$z(\theta)=3e^{\theta i}$，θ 是从0 到2π。所以

$$|dz|=|d(3e^{i\theta})|=|3ie^{i\theta}d\theta|=3d\theta.$$

所以

$$\int_{|z|=3}z|dz|=\int_0^{2\pi}3e^{i\theta}\cdot 3d\theta=\frac{9e^{i\theta}}{i}|_0^{2\pi}=0.$$

例子3 (一个非常重要的积分)**.** 设n 为整数，计算积分

$$\int_{|z-a|=R}(z-a)^n dz.$$

解. 参数表示$z(\theta)=a+Re^{\theta i}$，$\theta$ 是从0 到2π。所以

$$dz=Re^{i\theta}d\theta.$$

所以

$$\int_{|z-a|=R}(z-a)^n dz=\int_0^{2\pi}R^n e^{in\theta}Rie^{i\theta}d\theta=i\int_0^{2\pi}R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}d\theta.$$

有两种情况：

(1). $n=-1$： 积分$=i\int_0^{2\pi}1d\theta=2\pi i$；

(2). $n\neq-1$： 积分$=\frac{iR^{n+1}e^{i(n+1)\theta}}{i(n+1)}|_0^{2\pi}=0$。

1.1.2 长大不等式

定理2. 设C 为有限长光滑曲线，f 为逐段连续复函数，则

$$\left|\int_C f(z)dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz|.$$

如果$f(z)$ 有上界M，曲线长度为l，则上述积分绝对值$\leq Ml$。

证明可以直接由定义得到，在此略过。

定理3. 设$f(z)$ 在一个单连通区域D 去掉里面一个点a 上有定义，并且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z)=k.$$

则对任意$\alpha<\beta\in(0,2\pi]$，有

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}} f(z)=ik(\beta-\alpha).$$

其中$C_{\rho,\alpha,\beta}$ 为有向曲线：$z(\theta)=\rho e^{i\theta}+a$，$\theta$ 从α 到β。

证明1. 由极限定义，对任意$\epsilon>0$，存在相应的$\rho>0$ 使得

$$|(z-a)f(z)-k|\epsilon$$

对所有$|z-a|\leq\rho$ 成立。所以对所有$\tilde{\rho}<\rho$，我们有

$$|\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} f(z)-\frac{k}{z-a}dz|=|\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}}\frac{f(z)(z-a)-k}{z-a}dz|\leq\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}}\frac{|f(z)(z-a)-k|}{|z-a|}|dz|\leq\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}}\frac{\epsilon}{\tilde{\rho}}|dz|.$$

变量替换$z=a+\tilde{\rho}e^{i\theta}$，$\theta$ 从α 到β，则

$$|\int_{C_{\tilde{\rho},\alpha,\beta}} f(z)-\frac{k}{z-a}dz|=\int_\alpha^\beta\frac{\epsilon}{\tilde{\rho}}\tilde{\rho}d\theta=\epsilon(\beta-\alpha).$$

取极限有

$$\lim_{\rho\to 0}|\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}} f(z)-\frac{k}{z-a}dz|=0.$$

即

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}} f(z)dz=\lim_{\rho\to 0}\int_{C_{\rho,\alpha,\beta}}\frac{k}{z-a}dz=ik(\beta-\alpha).$$

注记：这个定理告诉我们，如果一个复函数在某个点a 附近和$\frac{k}{z-a}$ 非常接近，则算积分的时候可以近似地把$f(z)$ 换成$\frac{k}{z-a}$。

例子4. 求以下极限：

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{z+\bar{z}+|z|}}{z}dz.$$

其中C_ρ 为圆心在零点，半径为ρ 的圆，方向为逆时针。

解. 注意到

$$\lim_{z\to 0}(z-0)\frac{e^{z+\bar{z}+|z|}}{z}=1.$$

所以

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho}\frac{e^{z+\bar{z}+|z|}}{z}dz=2\pi i.$$

1.2 柯西积分定理

定理4 (格林公式). 设实二元函数$P(x,y),Q(x,y)$ 连续可微，D 为由光滑简单闭曲线（方向逆时针）围城的区域，则

$$\int_{\partial D} Pdx - Qdy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy.$$

定理5. 设$f(z)=u+iv$ 为单连通区域D 上的解析函数（为方便起见假定$f'(z)$ 连续，本身定理并不需要这一条），则对于区域D 内任何光滑简单闭曲线C 有

$$\int_C f(z)dz = 0.$$

证明2. 由复曲线积分的定义

$$\int_C f(z)dz = \int_C u+ivdx + \int_C iu - vdy.$$

设$P=u+iv$，$Q=iu-v$，则

$$\int_C f(z)dz = \int_C Pdx + Qdy = \int_E \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} dxdy = \int_E iu_x - v_x - u_y - iv_y dxdy.$$

由C-R 方程

$$u_x = v_y, u_y = -v_x.$$

所以，积分为零，我们结束证明。

定理6. 设$f(z)=u+iv$ 为多连通区域D 上的解析函数，C 为区域D 内的一条简单闭曲线，在C 围城的区域内有一列简单闭曲线C_i，由C_i 围城的闭区域没有交集并且由C 及C_i围城的闭区域在D 内，则

$$\int_C f(z)dz = \sum_i \int_{C_i} f(z)dz.$$

（这个定理画一个图很好理解）。

证明略，这个定理有助于我们计算积分，实际上他说明了一点，“解析”函数在光滑简单闭曲线上的积分主要由“洞”提供，而每个洞提供的积分值是固定的，因而我们仅仅需要把“洞”提供的积分算出来，然后把所有起作用的“洞”（也就是被曲线围起来的“洞”）提供的积分叠加就行了，这就是后面的“留数法”的原理。

例子5. 设$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-4)(z-6)}$，求

$$\int_{|z|=i} f(z)dz, i = 1,3,5,7.$$

解. 以2 为圆心半径为ρ 画圆C_ρ，注意到

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)(z-2)dz = \frac{1}{8}.$$

由上一节的定理，可得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{C_\rho} f(z)dz = \frac{1}{8}\times 2\pi i = \frac{\pi i}{4}.$$

实际上当ρ 很小或者是简单闭曲线C 不含4 和6 的时候，积分都是一样的（柯西积分定理）。这就是2 这个“洞”提供的积分值。同理4 提供的积分值为$-\frac{\pi i}{2}$；6 提供的积分值为$\frac{\pi i}{4}$。

所以最后的结果依次为$0, \frac{\pi i}{4}, -\frac{\pi i}{4}, 0$。

1.3 柯西积分公式

定理7. 设f 为单连通区域D 上的解析函数，则对于区域D 内任何光滑简单闭曲线C 以及位于C所围成区域内部的点z，有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi.$$

对于任何正整数n，有

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

证明3. （*1*）由柯西积分定理，我们可以把C 替换成任意接近z 的小圆C_ρ。则由

$$\lim_{\xi\to 0}\frac{f(\xi)}{\xi - z}\times(\xi - z) = f(z).$$

我们有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = f(z).$$

（*2*）如果不是需要太严格地话，我们只要直接求微分就行了

$$f^{(n)}(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{\partial^n}{\partial z^n}\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z}\right)d\xi = \frac{n!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi.$$

如果需要严格证明，我们只要证明$n = 1$（其他归纳即可）。

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{f(z+h) - f(z)}{h} - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)(\xi - z - h)}d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi\right| \\
=&\left|\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{hf(\xi)}{(\xi - z)^2(\xi - z - h)}d\xi\right|
\end{aligned}$$

设z 到C的距离为D，C 长度l，$|f(z)||_C \le M$ 则

$$\text{上式} \le \frac{|h|Ml}{2\pi D^2(D - |h|)}.$$

令$h \to 0$，得到

$$f'(z) = \lim_{h\to 0}\frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}d\xi.$$

其他类似。

定理8. 柯西积分公式可以反过来求积分：设f 为单连通区域D 上的解析函数，则对于区域D 内任何光滑简单闭曲线C 以及位于C所围成区域内部的点z，有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2\pi i f(z).$$

对于任何正整数n，有

$$\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z).$$

例子6. 计算积分：$\int_C \left[\frac{e^z}{z(z-2i)} + \frac{\cos z}{(z-i)^3}\right] dz$，这里$|z-3i| = r, (2 < r < 3)$。

解. 有三个奇点，只有$i, 2i$ 对积分有贡献，所以

$$\int_C \left[\frac{e^z}{z(z-2i)} + \frac{\cos z}{(z-i)^3}\right] dz = 2\pi i \times \frac{e^{2i}}{2i} + \frac{2\pi i}{2!} (\cos z)^{(2)} |_{z=i} = \pi e^{2i} - \pi i \cos i.$$

例子7. 计算积分：$\int_{|z|=3} \frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z} dz$。

解. 只有2 起作用，所以

$$\int_{|z|=3} \frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z} dz = \int_{|z-2|=1} \frac{\cos(\frac{1}{z-2})}{4-z} dz = \int_{|z|=1} \frac{\cos(\frac{1}{z})}{2-z} dz = \int_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(2z-1)} dz = 2\pi i(-1 + \cos \frac{1}{2}).$$

由柯西积分公式我们可以得到一些有趣的结果，有助于我们对解析函数的了解。

推论1. 设f 是单连通区域D 上的解析函数，则

(1) 设$\{z : |z-a| \le \rho\} \subset D$，则

$$f(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(a + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

用一句话形容就算圆心的取值为圆周取值的平均；

(2) 设有限区域Ω 满足$\overline{\Omega} \subset D$，则$f$ 的最大模在Ω 的总能在边界上取到；

(3) 设$\{z : |z-a| \le \rho\} \subset D$，则对任意非负整数$n$

$$|f^{(n)}(a)| \le \frac{n!}{\rho^n} M(\rho)$$

其中$M(\rho)$ 是f 在$\{z : |z-a| \le \rho\}$ 上取值的最大模；

(4) 如果f 在全平面解析，并且有界，则f 必然是常值函数。

证明4. *(1)*代入参数马上得到；*(2)*可以马上由*(1)* 得到；*(3)*长大不等式：*(4)*由*(3)*可以知道f 的微分处处为零，所以f 只能为常数。

1.4 原函数及求法

定理9. 设f 是单连通区域D 上的连续函数并且对任意D 内闭路C 有

$$\int_C f dz = 0.$$

则存在D 上的解析函数F 使得

$$F' = f.$$

并且成立牛顿莱布尼兹定理。从而不同的原函数之间相差一个常数。

注记：只有在上述定理条件成立时，才会有写法"$\int_a^b f dz$"，其中a, b 是区域D 内的两点；表示连接a 和b 的任意有向曲线的曲线积分（要求曲线在D 内，此时积分只与起点和终点有关）。

证明5. 先固定D 内一个点z_0，对任意$z \in D$，定义

$$F(z) = \int_C f(\xi) d\xi$$

其中C 是任意连结z_0 和z 的位于D 内的有向曲线。由条件可知这个积分的取值与路径无关，因而定义是合理的。由连续性对于$z \in D$ 以及$\epsilon > 0$，存在$\rho > 0$ 使得

$$\{\xi : |\xi - z| < \rho\} \subset D, |f(\xi) - f(z)| < \epsilon \text{ 对} |\xi - z| < \rho \text{ 成立。}$$

对任意$|h| < \rho$，我们用有向线段C_1 连接z 和$z + h$，则C_1 的长度为$|h|$。所以

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| = \left| \int_0^1 f(\xi) - f(z) d\xi \right| \leq \int_0^1 |f(\xi) - f(z)||d\xi| \leq \epsilon |h|.$$

令$h \to 0$，我们就得到了

$$F'(z) = f(z).$$

推论2. 单连通区域内的解析函数都有原函数；并且原函数也是解析的。

注记：多项式函数、指数函数、三角函数等都有原函数，而且形式上和微积分相同；其他函数会有例外，比如非常重要的$\frac{1}{z}$。

例子8. 计算积分：

$$\int_0^i z^2 + \cos 2z dz.$$

解. $z^2 + \cos 2z$ 在全复平面解析，原函数为

$$\frac{z^3}{3} + \frac{\sin 2z}{2}.$$

所以

$$\int_0^i z^2 + \cos 2z dz = \frac{z^3}{3} + \frac{\sin 2z}{2}|_0^i = -\frac{i}{3} + \frac{\sin(2i)}{2} = -\frac{i}{3} + \frac{e^2 - e^{-2}}{4} i.$$

例子9. 分别计算$\frac{1}{z}$ 的在以下区域的一个原函数

(1) 复平面去掉0 和正实轴；

(2) 复平面去掉0 和负实轴；

(3) 分别在*(1)* 和*(2)* 的情形下计算$\int_{1-i}^{1+i}\frac{1}{z}dz$（就算形式一样，单连通区域选取不同，会导致积分值不同）。

解. *(1)* 该区域可以表示为

$$\{re^{i\theta}:0<\theta<2\pi\}.$$

先找一个基准点$z_0=-1$，对任意区域内的点z，随便找一条连接z_0 与$z=|z|e^{i\phi},\phi\in(0,2\pi)$ 并且在区域内的有向曲线，当然这里我们可以取有向线段与有向圆弧的组合：

$$C_1:\xi(t)=-1+(-|z|+1)t,\quad t \text{ 从}0 \text{ 到}1$$

以及

$$C_2:\xi(\theta)=|z|e^{i\theta},\quad \theta \text{ 从}\pi \text{ 到}\phi.$$

分别积分得

$$\int_{C_1}\frac{1}{z}dz=\int_0^1\frac{-|z|+1}{-1+t-|z|t}dt=\int_1^{|z|}\frac{1}{t}dt=ln|z|.$$

$$\int_{C_2}\frac{1}{z}dz=i(\phi-\pi).$$

所以一个原函数为

$$F(z)=ln|z|+i(\phi-\pi),\phi\in(0,2\pi).$$

*(2)*同样的做法，可以求出它的一个原函数为

$$\tilde{F}(z)=ln|z|+i\tilde{\phi},\tilde{\phi}\in(-\pi,\pi).$$

*(3)*在*(1)*的条件下，

$$\int_{1-i}^{1+i}\frac{1}{z}dz=F(i)-F(-i)=i(\phi_{1+i}-\phi_{1-i})=-\frac{3\pi}{2}i.$$

在*(2)*的条件下

$$\int_{1-i}^{1+i}\frac{1}{z}dz=\tilde{F}(i)-\tilde{F}(-i)=i(\tilde{\phi}_{1+i}-\tilde{\phi}_{1-i})=\frac{\pi}{2}i.$$

推论3. 单连通区域内解析等价于连续+积分与路径无关。

1.5 调和函数

定义2. 设u 是区域D 内实二元函数，并有二阶连续偏导数，称u 是调和函数，如果它满足

$$\Delta_2u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$$

定理10 (解析函数和调和函数的关系)**.** 解析函数的实部和虚部都是调和函数。若已知单连通区域上的调和函数u 或者v，则我们可以找到相应的v 或者u 使得$u+iv$ 为解析。

证明6. 我们先证明第一部分，设$f = u + iv$ 为解析函数，则由CR 方程

$$u_x = v_y, u_y = -v_x$$

再次求骗导得到

$$u_{xx} + u_{yy} = v_{xy} - v_{xy} = 0.$$

即u 为调和函数，同理可证v 为调和函数。

再证明第二部分。不妨假设我们已经知道了调和函数u，设$f = u_x - iu_y$。则u_x, u_y 为可微实函数，并且

$$(u_x)_x = u_{xx} = -u_{yy} = (-u_y)_y, (u_x)_y = u_{xy} = u_{yx} = -(-u_y)_x.$$

满足CR 方程，所以f 为解析函数，此区域为单连通区域，所以f 有原函数F 使得

$$F' = f.$$

设$F = U + iV$，

$$U_x = Ref = u_x, U_y = -Imf = u_y.$$

所以$U - u =$ 常数，既然原函数允许差一个常数，我们不妨设$U = u$。结束证明。

注记：实际操作中，我们可以用曲线积分求原函数。

例子10. 已知调和函数$v(x, y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数$a$ 并求出以v 为虚部并满足$f(0) = 0$ 的解析函数。

解. 既然v 是调和函数，有

$$0 = \Delta v = 8 + 2a$$

所以$a = -4$。所以$v = 4x^2 - 4y^2 + x$。所以

$$f' = v_y + iv_x = -8y + i8x + i.$$

如果实在看不出来的话，我们就用曲线积分算f：两条有向线段，C_1 连接$(0, 0)$ 和$(x, 0)$；C_2连接$(x, 0)$ 和(x, y)。得

$$f(z) = f(0) + \int_{C_1} f'dz + \int_{C_2} f'dz = ix + 4ix^2 + (i8x + i)yi - 4y^2 i + f(0) = iz + 4iz^2.$$

例子11. 已知调和函数$u(x, y) = 4x^2 + ay^2 + x$，求常数$a$ 并求出以u 为实部并满足$f(0) = 0$ 的解析函数。

解. 既然u 是调和函数，有

$$0 = \Delta u = 8 + 2a$$

所以$a = -4$。所以$u = 4x^2 - 4y^2 + x$。所以

$$f' = u_x - iu_y = 8x + 1 + 8yi = 8z + 1.$$

所以

$$f = 4z^2 + z + C.$$

又因为$f(0) = 0$，所以

$$f = 4z^2 + z.$$

当$f = u + iv$ 解析的时候，我们一般称v 为u 的共轭调和函数；u 并不一定v 的共轭调和函数（v 的共轭调和函数为$-u$）。共轭调和函数还有以下性质：

定理11. 共轭调和函数的等值曲线正交。

证明7. 设v 为u 的共轭调和函数，则曲线$u = K_1$，$v = K_2$ 对应的法向为

$$\vec{n}_1 = (u_x, u_y), \vec{n}_2 = (v_x, v_y).$$

（沿着等值线移动的时候有$du = u_x dx + u_y dy = 0$，其中(dx, dy) 为切向，相应的(u_x, u_y) 自然为等值曲线在(x, y) 点的法向）。则

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = u_x v_x + u_y v_y = v_y v_x - v_x v_y = 0.$$

调和函数的更多性质：

(1) 平均值性质：设u 是包含$\{(x, y) : (z - a)^2 + (y - b)^2 \leq \rho^2\}$ 的区域上的调和函数，则

$$u(a, b) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + \rho\cos\theta, b + \rho\sin\theta) d\theta.$$

用一句话形容就是圆心的取值为圆周取值的平均；

(2) 由平均值性质容易得到有限闭区域上的调和函数的最大最小值都可以在边界上取到。

1.6 平面场简介

设D 为单连通区域，D 上的连续平面场$\vec{E} = (E_1, E_2)$。我们假设平面场有两个性质

(1) 保守场：电荷沿D 内任意简单闭曲线走一圈做功为零；

(2) 无源场：D 内电荷密度为零。

写成数学形式，即

(1) 对于任何简单闭曲线I，有$\int_I \vec{E} \cdot dI = 0 = \int_I E_1 dx + E_2 dy$；

(2) 对于任何简单闭曲线I，有$\int_I \vec{E} \times dI = 0$；即$\int_I E_1 dy - E_2 dx = 0$。

如果我们用

$$\bar{w} = E_1 - iE_2, z = x + iy.$$

则上式可以写成

$$\int_I \bar{w} dz = 0.$$

这表明$\bar{w}$ 的积分与路径无关，由前面的内容知道，它有原函数，记为f，并记平面场的复势为

$$\Phi = -if = \psi - i\varphi.$$

所以我们得到一个结论：单连通区域上的一个无源保守场对应一个解析函数（无视相差一个常数）；反之单连通区域上的一个解析函数自然对应一个无源保守场。求微分

$$d\Phi = -idf = -i\bar{w}dz = -i(E_1 - iE_2)(x + idy) = (E_1dy - E_2dx) - i\left(E_1dx + E_2dy\right).$$

即

$$d\psi = E_1dy - E_2dx, d\varphi = E_1dx + E_2dy.$$

上述微分等于零时候，有

$$\frac{dy}{dx} = \frac{E_2}{E_1}, \frac{dy}{dx} = -\frac{E_1}{E_2}.$$

相应的解分别称为电力线和等势线，他们都有明确的物理意义：当我们在电场中放一个正电荷，电力线的切向反应了电荷的受力方向；电荷沿着等势线运动电场力做功为零。所以可以看出来只要求出了复势，很多东西都可以求出来。

例子12. 在复平面原点放一个点电荷q，求复势。

解. 电势可以表示为

$$\vec{E} = \frac{2kq}{r^2}z = \frac{2kq}{\bar{z}} = w.$$

则

$$\Phi' = -if' = -i\bar{w} = -i\frac{2kq}{z}.$$

一般原函数的概念仅对单连通区域，对于多联通区域它实际上是个多值函数，其意义是：固定一个点z_0 作为基准点，$\Phi(z)$ 的取值为所有连接z_0 和z 的曲线的曲线积分的可能取值。在这里

$$\Phi = -i2kqLnz.$$

1 级数

1.1 幂级数

1.1.1 复级数

一个复数项无穷级数是指
$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = z_1 + z_2 + \cdots.$$
它的部分和记为
$$S_n = \sum_{k=1}^{n} z_k.$$
显然$\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是一个复数列，称复数项无穷级数收敛如果极限
$$\lim_{n\to\infty} S_n$$
存在。如果我们把极限记为S，则我们记
$$\sum_{k=1}^{\infty} z_k = S.$$
与复数列收敛类似，我们有以下定理。

定理1. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 存在等价于$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 和$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ 存在。

以下推论是显然的

推论1. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 存在的必要条件是$\lim_{k\to\infty} z_k = 0$。

注记：这不是充分条件，一个简单的例子是$z_k = \frac{1}{k}$。
设$z_k = x_k + iy_k$，则称$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛，如果$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ 收敛。

定理2. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 绝对收敛等价于$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ 和$\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ 绝对收敛。

以下推论是显然的

推论2. 设$z_k = x_k + iy_k$，则$\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ 存在的充分条件是$\sum_{k=1}^{\infty} |z_k|$ 存在。

注记：这不是必要条件，一个简单的例子是$z_k = \frac{(-1)^k}{k}$。

例子1. 判断敛散性：

(1) $z_n = \frac{1}{2^n} + \frac{i}{n}$；

(2) $z_n = z^n$。

解. *(1)* 略；
*(2)*当$|z| \geq 1$ 的时候，$\sum_{k=1}^{\infty} z^k$ 收敛；当$|z| \leq 1$ 收敛于$\frac{1}{1-z}$。

注记1. 当且仅当$|z|<1$ 的时候，$\frac{1}{1-z}$ 才可以写成

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = 1 + z + z^2 + \cdots.$$

这个注记很简单，但却很有用。当$|z|>1$ 的时候，应该以以下方式展开

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^k}\right) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{z^k}.$$

1.1.2 幂级数

一个幂级数是指

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k.$$

其中a, a_k 均为复数。

定理3 (收敛半径)**.** 对任意幂级数$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$，我们设$R=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}}$。

(1) 如果$|z-a|<R$，则$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ 绝对收敛；

(2) 如果$|z-a|>R$，则$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ 发散；

(3) 如果$|z-a|=R$，则不确定。

特别地，如果$R=0$，则除了a 点外全复平面发散；如果$R=+\infty$，则全复平面收敛。如果$0<R<\infty$，则对于任意$0<\tilde{R}<R$，幂级数在$|z-a|\le\tilde{R}$ 上绝对一致收敛。

证明. *(1)* 因为$|z-a|<R=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}}$，所以

$$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{|z-a|}.$$

从而存在$N>0$ 和$\delta>0$ 使得当$k>N$ 时

$$|a_k|^{\frac{1}{k}} < \frac{1}{|z-a|+\delta}.$$

所以

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(z-a)^k| = \sum_{k\le N}|a_k(z-a)^k| + \sum_{k>N}|a_k(z-a)^k| \le \sum_{k\le N}|a_k(z-a)^k| + \sum_{k>N}^{\infty}\left(\frac{|z-a|}{|z-a|+\delta}\right)^k.$$

后者收敛，因而$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ 绝对收敛。

(2) 只要能证明$\limsup_{k\to\infty}|a_k||z-a|^k\ge 1$，那么由推论*1*，$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(z-a)^k$ 发散。而要说明$\limsup_{k\to\infty}|a_k||z-a|^k\ge 1$，仅需说明$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}|z-a|>1$。等价于$\frac{|z-a|}{R}>1$。这是显然的。

(3) 可以举一个简单的例子：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{n}z^k$，该幂级数的收敛半径为1。当$z=1$ 的时候收敛，当$z=-1$ 发散。

(4) 我们来证明绝对一致收敛部分，因为$0<\tilde{R}<R=\frac{1}{\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}}$，所以

$$\limsup_{k\to\infty}|a_k|^{\frac{1}{k}}<\frac{1}{\tilde{R}}.$$

从而存在$N>0$ 和$\delta>0$ 使得当$k>N$ 时

$$|a_k|^{\frac{1}{k}}<\frac{1}{\tilde{R}+\delta}.$$

所以对任意$|z-a|\le\tilde{R}$，有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|a_k(z-a)^k|=\sum_{k\le N}|a_k(z-a)^k|+\sum_{k>N}|a_k(z-a)^k|\le\sum_{k\le N}|a_k\tilde{R}^k|+\sum_{k>N}\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+\delta}\right)^k.$$

后者收敛，因而$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 绝对收敛。对任意$M>N$ 和$|z-a|\le\tilde{R}$，有

$$\sum_{k=M}^{\infty}|a_k(z-a)^k|\le\sum_{k\ge M}^{\infty}\left(\frac{\tilde{R}}{\tilde{R}+\delta}\right)^k\to 0, M\to\infty.$$

这说明$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 一致收敛。

我们将这样的R 称为幂级数的收敛半径，$|z-a|<R$ 称为收敛圆。求幂级数$\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$ 收敛半径：

(1) 如果$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|}=r$，则收敛半径为$\frac{1}{r}$；

(2) 如果$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}=r$，则收敛半径为$\frac{1}{r}$。

例如：$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(z-a)^k$ 的收敛半径为1；$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2^k}{k}(z-a)^k$ 的收敛半径为$\frac{1}{2}$。

一致收敛有诸多好处，比如求导与级数交换次序，积分与级数交换次序等（具体可以查看相关教材）。也就是说：设$f(z)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(z-a)^k$，则

(1) 在收敛圆内幂级数求导可以逐项求导；

(2) 在收敛圆内幂级数的曲线积分可以逐项积分；

(3) 幂级数的微分和原函数都是幂级数，并且有相同的收敛半径。

定理4. 设$f(z)$ 如上所述，则

$$f^{(n)}(a)=n!a_n.$$

证明. 设C 是围住a 且在收敛圆内的简单闭曲线，则由柯西积分定理或柯西积分公式

$$f^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\int_C\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{n!}{2\pi i}\sum_{k=1}^{\infty}\int_C a_k(z-a)^{k-n-1}z=n!a_n.$$

例子2. 设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n(a_0\ne 0)$ 的收敛半径$R>0$，

(1) 记$M(r)=\max_{|z|\le r}|f(z)|(r<R)$，利用柯西积分公式证明：$|f^{(n)}(0)|\le\frac{n!M(r)}{r^n}$；

(2) 证明：在圆$|z| < \frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$内$f(z)$ 无零点。其中$r < R$。

Proof. (1) 略；(2) 在圆$|z| < \frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}$内

$$|f(z)| \geq |a_0| - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||z|^n \geq |a_0| - \sum_{n=1}^{\infty} |\frac{M(r)}{r^n}||\frac{|a_0|r}{|a_0|+M(r)}|^n = |a_0| - M(r)\frac{\frac{|a_0|}{|a_0|+M(r)}}{1-\frac{|a_0|}{|a_0|+M(r)}} = 0.$$

等号成立的必要条件是$0 = a_0 = a_2 = \cdots$。此时$f(z) = a_0 \neq 0$。综上所述我们完成了证明。 □

1.2 泰勒展开

1.2.1 泰勒展开

定理5 (泰勒展开)**.** 设$f(z)$ 在$|z-a| \leq R$ 内解析。则对任意$|z-a| < R$，我们可以把$f(z)$ 展开成幂级数的形式，

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} a_n(z-a)^n.$$

特别地：幂级数的收敛半径不小于R；展开形式是唯一的（即是把R 缩小也不会改变幂级数的形式）；幂级数的系数为

$$a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}.$$

证明. 由柯西积分定理

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)} d\xi = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R} \frac{1}{\xi-a}\frac{f(\xi)}{1-\frac{z-a}{\xi-a}} d\xi.$$

展开为

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R} \sum_{n\geq 0} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi.$$

注意到关于ξ 的函数项级数

$$|\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n| \leq \frac{M_R|z-a|^n}{R^{n+1}}.$$

其中$M_R = \sup_{|\xi-a|=R}|f(\xi)|$。关于$\xi$ 的函数项级数被与ξ 无关的收敛等比数列控制，因而函数项级数一致收敛。所以积分可以和求和号交换次序。我们有

$$f(z) = \sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi = \sum_{n\geq 0}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

幂级数的收敛半径不小于R：已知幂级数都有收敛半径，并且在收敛圆外部区域都是发散的；我们考虑的幂级数在$|z-a| < R$ 内收敛，这说明收敛半径不小于R。

幂级数的系数，假设有展开

$$f(z) = \sum_{n\geq 0} b_n(z-a)^n.$$

则取$\rho < R$，我们有

$$\frac{2\pi i f^{(n)}(a)}{n!} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}} = \int_{|z-a|=\rho} \frac{b_n}{\xi - a} = 2\pi i b_n.$$

所以$b_n = a_n$。并以此说明唯一性。

我们称一个定义在区域D 上的复函数在$a \in D$ 可以泰勒展开如果存在$\rho > 0$ 使得

$$\{z : |z-a| < \rho\} \subset D$$

并且

$$f(z)\text{在}|z-a| < \rho \text{ 可以展开成}z-a \text{ 的幂级数。}$$

定理6. $f(z)$ 在区域D 上解析，等价于它在D 内任意点a 可以展开成$z-a$ 的幂级数。

证明. 仅需说明微分存在，既然幂级数微分和求和号在收敛圆内部可以交换次序，这是显然的。

常见函数在0 点的泰勒展开：

指数函数： $e^z = \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{n!}$，收敛半径无穷；

正弦函数： $\sin z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}$，收敛半径无穷；

余弦函数： $\cos z = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}$，收敛半径无穷；

其他： $\frac{1}{1-z} = \sum_{n\geq 0} z^n$，收敛半径为1。

例子3. 设$a \neq 0$，求$\frac{1}{z}$ 在a 点的泰勒展开。

解. 在$|z-a| < |a|$ 内

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{a+(z-a)} = \frac{1}{a}\frac{1}{1-\frac{-(z-a)}{a}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}}(z-a)^n.$$

收敛半径为$|a|$。

例子4. 求$\ln(1+z)$ 在零点的泰勒展开。

解. 在$|z| < 1$ 内，

$$(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n z^n.$$

所以在$|z| < 1$ 内，

$$\ln(1+z) = C + \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}.$$

令$z = 0$，得到$C = 0$，所以

$$\ln(1+z) = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{n+1}.$$

收敛半径为1。

1.2.2 泰勒展开与零点

由泰勒展开可以得到以下零点的性质。

定理7. 设f 在$|z-a|<R$ 上解析，则以下等价

(1) f 在a 点的泰勒展开的前m 项系数（$a_0,\cdots,a_{m-1}$）为零并且第m 项系数（a_m）不为零；

(2) f 可以表示为$f(z)=(z-a)^m g(z)$，其中g 在$|z-a|<R$ 上解析，并且$g(a)\neq 0$；

(3) $f^{(k)}(a)=0, k=0,1,2,\cdots,m-1$ 并且$f^{(m)}\neq 0$。

称a 为f 的m 级零点如果上述之一满足。如果$f(a)=0$，f 在a 点解析并且f 在a 点附近不是零函数，则必然存在自然数m 使得a 是f 的m 级零点。

证明. *(1)*与*(3)* 显然是等价的。*(2)*$\rightarrow$ *(3)* 是显然的。我们仅需要证明*(1)*$\rightarrow$*(2)*，不妨设f 的泰勒展开为

$$f(z)=\sum_{k\geq 0} a_{z+k}(z-a)^{m+k}=(z-a)^m\sum_{k\geq 0} a_{z+k}(z-a)^k.$$

设$g=\sum_{k\geq 0} a_{z+k}(z-a)^k$. g 是一个幂级数且收敛半径与$\sum_{k\geq 0} a_{z+k}(z-a)^{m+k}$ 相同。简单验证得g 满足要求，证明结束。

例子5. 设$f(z)$ 在$z=0$ 解析，$f(0)=1, f'(0)=2, f''(0)=3$，求

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{(f(z)-1)^2}dz.$$

解. 将$f-1$ 在0点泰勒展开，得到

$$f(z)-1=2z+\frac{3}{2}z^2+\cdots.$$

令

$$g(z)=2+\frac{3}{2}z+\cdots.$$

则$f(z)-1=zg(z)$，$g'(0)\neq 0$ 并且g 在$|z|<\rho$ （ρ 足够小）解析。所以

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{z^2g^2}dz=2\pi i(\frac{1}{g^2})'|_{z=0}=-4\pi i\frac{g'(0)}{g^3(0)}.$$

又因为

$$g(0)=2, g'(0)=\frac{3}{2}.$$

代入得

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{|z|=\rho}\frac{1}{(f(z)-1)^2}dz=-\frac{3\pi i}{4}.$$

定理8. 有界连通闭区域上的解析函数如果有无穷多零点，则它必是零函数。

证明. 设f 在有界连通闭区域D 上解析，a 是f 零点的聚点，则存在ρ 使得f 在$|z-a|<\rho$ 上解析。假设f 在$|z-a|$ 上不恒为零，则在$|z-a|$ 上，f 可以表示为

$$f=(z-a)^m g(z).$$

m为正整数，g 为$|z-a|<\rho$ 上解析函数，且$g(a)\neq 0$。考虑到a 为零点的聚点，存在$a_k\to a$，$f(a_k)=0, a_k\neq a$ 且$|a_k-a|<\rho$。代入上式，从而必然有

$$g(a_k)=0, k=1,2,3,\cdots.$$

由连续性，$g(a)=0$，这与$g(a)\neq 0$ 矛盾。所以f 在$|z-a|<\rho$ 上恒为零。通过不断画圆可以说明在D 上恒为零。

1.3 洛朗展开

定理9 (洛朗展开). 设$f(z)$ 在$0\leq r\leq |z-a|\leq R$ 内解析。则对任意$r<|z-a|<R$，我们可以把$f(z)$ 展开成如下形式，

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n(z-a)^n.$$

特别地：展开形式唯一；系数可以表示为

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi.$$

其中$r\leq\rho\leq R$。

证明. 由柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

对于前面一半

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{1}{\xi-a}\frac{f(\xi)}{1-\frac{z-a}{\xi-a}}d\xi.$$

展开为

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\sum_{n\geq 0}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi.$$

注意到关于ξ 的函数项级数

$$|\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n|\leq\frac{M_R|z-a|^n}{R^{n+1}}.$$

其中$M_R=\sup_{|\xi-a|=R}|f(\xi)|$。关于$\xi$ 的函数项级数被与ξ 无关的收敛等比数列控制，因而函数项级数一致收敛。所以积分可以和求和号交换次序。我们得到

$$\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi.$$

对于后面一半

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)-(z-a)}d\xi=\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}-\frac{1}{z-a}\frac{f(\xi)}{1-\frac{\xi-a}{z-a}}d\xi.$$

展开为

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\sum_{n\geq 0}\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n d\xi.$$

注意到关于ξ 的函数项级数

$$\left|\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n\right|\leq\frac{M_r r^n}{|z-a|^{n+1}}.$$

其中$M_r=\sup_{|\xi-a|=r}|f(\xi)|$。因而函数项级数一致收敛。所以积分可以和求和号交换次序。我们得到

$$-\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n d\xi.$$

综合两部分，我们得到

$$f(z)=\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=R}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}(z-a)^n d\xi+\sum_{n\geq 0}\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=r}\frac{f(\xi)}{(z-a)^{n+1}}(\xi-a)^n d\xi.$$

取任意$r<\rho<R$，由柯西积分定理，我们可以整理得到

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi-a|=\rho}\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}d\xi\right)(z-a)^n.$$

注记2. 如同在证明中一样，我们可以把洛朗展开$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n$ 分为两部分

$$\sum_{n<0}a_n(z-a)^n \text{ 称为主要部分，}\quad \sum_{n\geq 0}a_n(z-a)^n \text{ 称为正则部分。}$$

主要部分可以看成一个幂级数$\sum_{n>0}a_{-n}\xi^n$，其收敛半径至少为$\frac{1}{r}$；正则部分也可以看成一个幂级数$\sum_{n>0}a_n\xi^n$，其收敛半径至少为R。

例子6. 分别在下面区域洛朗展开$f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)}$：

(1) $|z|<1$;

(2) $1<|z|<2$;

(3) $|z|>2$。

解. 要时刻注意得到的级数是否在要求区域是有意义的。$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}$。

(1) $f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n\geq 0}(1-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$。

(2)$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}-\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n\geq 0}(-1)z^{-n-1}+\sum_{n\geq 0}(-\frac{1}{2^{n+1}})z^n$。

(3)$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}+\frac{1}{z}\frac{1}{1-2/z}=\sum_{n\geq 0}(-1+2^n)z^{-n-1}$。

例子7. 洛朗展开$f(z)=\frac{1}{(1-z)(2-z)^2}$，$1<|z|<2$。

解. 可以直接按系数的公式展开:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\xi|=3/2}\frac{1}{\xi^{n+1}(1-\xi)(2-\xi)^2}d\xi.$$

当$n\le 0$ 的时候,

$$a_n = -\frac{1}{\xi^{n+1}(2-\xi)^2}|_{\xi=1} = -1.$$

当$n\ge -1$ 的时候,

$$a_n = \left(\frac{1}{n!}\frac{1}{(1-\xi)(2-\xi)^2}\right)^{(n)}|_{\xi=0} - \frac{1}{\xi^{n+1}(2-\xi)^2}|_{\xi=1} = -\frac{n+3}{2^{n+2}}.$$

所以$f(z)=\sum_{n\ge 0}-\frac{n+3}{2^{n+2}}z^n-\sum_{n\le -1}z^n$.

计算有点麻烦,我们干脆全部拆开:待定系数

$$f(z)=\frac{A}{1-z}+\frac{B}{2-z}+\frac{C}{(2-z)^2}=\frac{(A+B)z^2-(4A+3B+C)z+(4A+2B+C)}{(1-z)(2-z)^2}.$$

得到

$$A=1, B=-1, C=-1.$$

即$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2-z}-\frac{1}{(2-z)^2}$。分别展开

$$\frac{1}{1-z}=-\frac{1}{z}\frac{1}{1-1/z}=-\sum_{n\le -1}z^n.$$

$$\frac{1}{2-z}=\frac{1}{2}\frac{1}{1-z/2}=\sum_{n\ge 0}\frac{1}{2^{n+1}}z^n.$$

$$\frac{1}{(2-z)^2}=\left(\frac{1}{2-z}\right)'=\sum_{n\ge 0}\frac{n+1}{2^{n+2}}z^n.$$

所以

$$f(z)=\sum_{n\ge 0}\frac{n+3}{2^{n+2}}z^n-\sum_{n\le -1}z^n.$$

例子8. 求$f(z)=\sin\frac{z}{z-1}$ 在$z=1$ 的洛朗展开。

解. 设$\xi=z-1$,则

$$f=\sin(1+\frac{1}{\xi})=\sin 1\cos\frac{1}{\xi}+\cos 1\sin\frac{1}{\xi}=\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n\sin 1}{(2n)!}\frac{1}{\xi^{2n}}+\sum_{n\ge 0}\frac{(-1)^n\cos 1}{(2n+1)!}\frac{1}{\xi^{2n+1}}.$$

1.4 孤立奇点

设$f(z)$ 在a 的一个去心邻域$0<|z-a|<\rho$ 内解析,在a 点不解析,则我们称a 为孤立奇点。我们可以在a 点洛朗展开

$$f(z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n(z-a)^n.$$

根据洛朗展开主要部分的不同,我们可以将孤立奇点分类:

(1) 可去奇点：主要部分为零；

(2) m阶极点(m 为正整数)：满足$a_n = 0, n \le -m-1$，$a_{-m} \neq 0$；

(3) 本性奇点：主要部分有无限项系数不为零。

三类奇点的判断方法：

定理10. 设a 是f 的孤立奇点，则：

(1) a 为可去奇点等价于$\lim_{z\to a} f(z)$ 存在；

(2) a 为m阶极点等价于存在解析函数φ且$\varphi(a) \neq 0$ 使得在a 的某个去心邻域$f = \frac{\varphi}{(z-a)^m}$；$a$ 为极点等价于$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$；

(3) a 为本性奇点等价于$\lim_{z\to a} f(z)$ 不存在且不为∞。

证明. （*1*）如果a 为可去奇点，则f 可以在a 的某个去心邻域内展开成幂级数，既然幂级数在收敛圆内极限存在并且是解析的，自然$\lim_{z\to a} f(z)$ 存在；反之，我们求下系数（n 为正整数）

$$|a_{-n}| = \lim_{\rho\to 0} |\frac{1}{2\pi i}\int_{|z-a|=\rho} f(\xi)(\xi-a)^{n-1}d\xi| = \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{2\pi}|\int_0^{2\pi} f(a+\rho e^{i\theta})\rho^n e^{in\theta}d\theta| \le \lim_{\rho\to 0}\rho^n|f(a)| = 0.$$

（*2*）前面一半是显然的，我们证明后面一半。设a 为m阶极点，设a 点的洛朗展开为

$$f(z) = \sum_{k\ge -m} a_k(z-a)^k.$$

令

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} a_{-m+k}(x-a)^k.$$

这是一个幂级数且和$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(x-a)^k$ 有相同的收敛半径。由幂级数性质，φ 在a 的一个邻域内解析，并且$\varphi(a) = a_{-m} \neq 0$。从而

$$\lim_{z\to a} f(z) = \frac{a_{-m}}{0} = \infty.$$

反之，假设$\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ 并且f 在a 的一个去心领域解析。容易得到存在$\rho > 0$，使得

$$f(z) \neq 0, \forall 0 < |z-a| < \rho.$$

从而$\frac{1}{f(z)}$ 在区域$0 < |z-a| < \rho$ 上解析并且

$$\lim_{z\to a}\frac{1}{f(z)} = 0.$$

即a 是$\frac{1}{f(z)}$ 的可去奇点。有洛朗展开

$$\frac{1}{f(z)} = \sum_{k\ge m} a_k(z-a)^k = (z-a)^m\phi.$$

其中m 是最小的下标使得$a_m \neq 0$。容易得到$m \geq 1$。既然$\phi(a) \neq 0$，$\frac{1}{\phi}$ 在a 点可以泰勒展开

$$\frac{1}{\phi} = b_0 + \sum_{k \geq 1} b_k (z-a)^k.$$

所以$f(z)$ 在a 点的洛朗展开为

$$f(z) = \sum_{k \geq 0} b_k (z-a)^{k-m}.$$

既然$b_0 \neq 0$，a 为m 阶极点。

（*3*）由（*1*）与（*2*）立即得到。

例子9. 求

$$f(z) = \frac{(z-5)\sin z}{(z-1)^2 z^2 (z+1)^3}.$$

的奇点，并且确定类型。

解. $1, -1, 0$ 分别为2，1，3阶极点。

例子10. 求

$$f(z) = \cos(\frac{1}{z+i}).$$

的奇点，并且确定类型。

解. 本性奇点。

1.4.1 无穷远点

如果$f(z)$ 在无穷远点∞的去心邻域上解析，则我们称∞ 为f 的奇点。我们通常用变换$\xi = \frac{1}{z}$ 将无穷远点变换为0 点。将$f(\frac{1}{\xi})$ 在0 点洛朗展开

$$f(\frac{1}{\xi}) = \sum a_n \xi^n = \sum b_n z^n.$$

其中$b_n = -a_n$。称$z = \infty$ （$\xi = 0$）为

(1) 可去奇点：$b_n = 0, n \geq 1$；

(2) m阶极点(m 为正整数)：满足$b_n = 0, n \geq m+1$，$b_m \neq 0$；

(3) 本性奇点：无穷多$n \geq 1$，$b_n \neq 0$。

同样，我们有如下判别法：

(1) ∞ 为可去奇点等价于$\lim_{z\to\infty} f(z)$ 存在；

(2) ∞ 为极点等价于$\lim_{z\to\infty} f(z) = \infty$；

(3) ∞ 为本性奇点等价于$\lim_{z\to\infty} f(z)$ 不存在且不为∞。

例子11. 求积分

$$\int_{|z|=100} \frac{z^2}{1+z+z^2+z^3} dz.$$

解. 注意奇点的位置。变换$\xi = \frac{1}{z}$，得到

$$\int_{|z|=100} \frac{z^2}{1+z+z^2+z^3} dz = \int_{|\xi|=1/100} \frac{1}{\xi(1+\xi+\xi^2+\xi^3)} d\xi = 2\pi i \frac{1}{1+\xi+\xi^2+\xi^3}|_{\xi=0} = 2\pi i.$$

1 留数

1.1 留数定理

设f在a 的去心邻域内解析，在a 点不解析，则我们有洛朗展开

$$f(z) = \sum a_n (z-a)^n.$$

从而当$\rho > 0$ 充分小的时候

$$\int_{|z-a|=\rho} f(z)dz = 2\pi i a_{-1}.$$

我们发现在计算积分的时候a_{-1} 起了决定性的作用。称a_{-1} 为f 在孤立奇点a 点的留数，记作

$$Res[f(z), a].$$

于是由柯西积分定理，任意将a 围起来的简单闭曲线C，有

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i Res[f(z), a].$$

进一步我们有以下定理。

定理1 (留数定理)**.** *如果函数$f(z)$ 在闭路C 上解析，在C 内部除了有限个孤立奇点$a_1, \cdots, a_n$ 外也解析，则*

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res[f(z), a_k].$$

证明是显然的，我么在此略过。有了该定理，我们经常会把求积分转化为求留数。可去奇点的留数为0；本性奇点的留数一般用洛朗展开；极点的留数除了用洛朗展开求还有以下办法：

定理2. *如果a 是$f(z)$ 的m-阶极点，则*

$$Res[f(z), a] = \lim_{z\to a} \frac{1}{(m-1)!} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)}.$$

特别地，当$m = 1$ 地时候，$Rex[f(z), a] = \lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

证明. 设洛朗展开为

$$f(z) = \sum_{k\geq -m} a_k (z-a)^k.$$

则

$$\frac{1}{(m-1)!} \left((z-a)^m f(z)\right)^{(m-1)} |_{z=a} = a_{-1}.$$

推论1. 设$P(z), Q(z)$ 在a 点解析，$P(a) \neq 0$，a 为Q 的一级零点。则

$$Res[\frac{P}{Q}, a] = \frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

证明.

$$Res[\frac{P}{Q},a]=\lim_{z\to a}(z-a)\frac{P(z)}{Q(z)}=\lim_{z\to a}\frac{P(z)}{\frac{Q(z)-Q(a)}{z-a}}=\frac{P(a)}{Q'(a)}.$$

例子1. 求留数：$f(z)=\frac{\sin 2z}{(z+1)^3}+\frac{e^z}{z-1}$。

解. f 有两个奇点，$z=1$ （*1*阶极点）以及$z=-1$ （*3*阶极点）。

$$Res[f(z),1]=\lim_{z\to 1}(z-1)f(z)=e^1.$$

$$Res[f(z),-1]=\lim_{z\to -1}\frac{1}{2!}((z+1)^3f(z))^{(2)}=2\sin 2.$$

例子2. 求积分

$$\int_{|z|=n}\tan(\pi z)dz.$$

解. $\tan(\pi z)=\frac{\sin\pi z}{\cos\pi z}$。其所有奇点为

$$z=k+\frac{1}{2},k\in\mathbb{Z}.$$

且均为一阶极点，所以

$$Res[\tan(\pi z),k+\frac{1}{2}]=\frac{\sin((k+\frac{1}{2})\pi)}{-\pi\sin((k+\frac{1}{2})\pi)}=-\frac{1}{\pi}.$$

所以

$$\int_{|z|=n}\tan(\pi z)dz=-\frac{4n\pi i}{\pi}=-4ni.$$

例子3. $\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}dz.$

解. 首先我们求出所有的奇点。即解方程

$$1-\cos(z-2)=0.$$

解得

$$z_k=2k\pi+2,k\in\mathbb{Z}.$$

在$|z|<3$ 内有只有一个孤立奇点为

$$z_0=2i.$$

计算留数：在$z=2$点的留数，将$1-cos(z-2)$ 在$z=2$ 泰勒展开

$$1-\cos(z-2)=(z-2)^2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+2)!}(z-2)^{2k}=(z-2)^2\varphi(z).$$

$z=2$为*2*阶极点。所以

$$Res[\frac{z+5}{1-\cos(z-2)},2]=\lim_{z\to 2}\left(\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}(z-2)^2\right)'=\lim_{z\to 2}\left(\frac{z+5}{\varphi(z)}\right)'=\frac{\varphi-(z+5)\varphi'}{\varphi^2}|_{z=2}=2.$$

所以

$$\int_{|z|=3}\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}dz=2\pi iRes[\frac{z+5}{1-\cos(z-2)},2]=4\pi i.$$

当然我们可以用更直接的办法求留数：在$z=2$ 的洛朗展开为

$$\frac{z+5}{1-\cos(z-2)}=\frac{z+5}{\frac{1}{2}(z-2)^2-(z-2)^4\phi}=\frac{2}{(z-2)^2}((z-2)+7)(1+(z-2)^2\phi+\cdots).$$

显然$a_{-1}=2$ 即$Res[\frac{z+5}{1-\cos(z-2)},2]=2$。

例子4. 求积分

$$I=\int_{|z|=1}\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3}dz.$$

解. 首先把所有奇点都找出来

$$z_k=2k\pi i,k\in\mathbb{Z}.$$

除了$z_0=0$ 为一阶极点外其余都是三阶极点。但求积分只要考虑零就行了。

$$Res[\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3},0]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2\sin z}{(1-e^z)^3}=-1.$$

故积分为$-2\pi i$。如果我们要算其他孤立奇点的留数，比如$z_1=2\pi i$。不妨设

$$1-e^z=(z-z_1)\psi(z).$$

则

$$\begin{aligned}Res[\frac{z\sin z}{(1-e^z)^3},z_1]&=\frac{1}{2}\lim_{z\to z_1}\left((z-z_1)^3\frac{z\sin z}{(z-z_1)^3\psi^3}\right)''\\&=\lim_{z\to 2\pi i}\frac{-z\sin z+2\cos z}{\psi^3}-\frac{6(z\cos z+\sin z)\psi'}{\psi^4}-3\frac{z\sin z(\psi''\psi-4\psi'^2)}{\psi^5}.\end{aligned}$$

其中$\psi=-\sum_{k\geq 0}\frac{1}{(k+1)!}(z-2\pi i)^k$. 所以

$$\psi(2\pi i)=-1,\psi(2\pi i)=-\frac{1}{2},\psi''(2\pi i)=-\frac{1}{3}.$$

代入即得，在此我们省略。

1.2 定积分的计算

1.2.1 $I=\int_0^{2\pi}R(\sin\theta,\cos\theta)d\theta$ 类型积分

这里$R(a,b)$ 是关于a,b 的有理函数。变换

$$z=e^{i\theta},\theta\in[0,2\pi].$$

则有

$$d\theta=\frac{dz}{iz},\cos\theta=\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}),\sin\theta=\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}).$$

可以把积分变为

$$I=\int_{|z|=1}R\left(\frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z}),\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z})\right)\cdot\frac{1}{iz}dz.$$

例子5. 求积分$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2},(0<p<1)$.

解. 变换
$$z = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi].$$
得到
$$I = \int_{|z|=1} \frac{1}{1+p^2-p(z+z^{-1})} \cdot \frac{1}{iz} dz = \int_{|z|=1} \frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)}.$$
注意到
$$pz^2+p-z(1+p^2) = (pz-1)(z-p).$$
因而有两个奇点$z=p$(1阶极点)，$z=\frac{1}{p}$(1阶极点)。只有$z=p$ 在$|z|<1$ 内，所以
$$Res[\frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)}, p] = \lim_{z\to p} \frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)}(z-p) = \frac{i}{p^2-1}.$$
所以
$$I = 2\pi i Res[\frac{idz}{pz^2+p-z(1+p^2)}, p] = \frac{2\pi}{1-p^2}.$$
例子6. 求积分
$$I = \int_0^\pi \frac{\cos mx}{5-4\cos x} dx.$$
解. 注意到
$$\int_0^\pi \frac{\cos mx}{5-4\cos x} dx = \int_{-\pi}^0 \frac{\cos mx}{5-4\cos x} dx.$$
所以
$$I = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{\cos mx}{5-4\cos x} dx.$$
把另一半补上
$$J = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{\sin mx}{5-4\cos x} dx.$$
则
$$I + iJ = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^\pi \frac{z^m}{5-4\cos x} dx = \frac{1}{2i}\int_{|z|=1} \frac{z^m}{5z-2z^2-z} dz.$$
有两个孤立奇点$2, \frac{1}{2}$，均为一阶。
$$Res[\frac{z^m}{5z-2z^2-z}, \frac{1}{2}] = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{1}{5-4\times 1/2} = \frac{1}{3\times 2^m}.$$
所以
$$I + iJ = \frac{1}{2i} \times 2\pi i Res[\frac{z^m}{5z-2z^2-z}, \frac{1}{2}] = \frac{\pi}{3\times 2^m}.$$
对照实部与虚部，我们有
$$I = \frac{\pi}{3\times 2^m}.$$
例子7. 求积分$I = \int_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-i|^2}$.

解. 先做一个变换

$$z = 2e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi).$$

则

$$|dz| = 2d\theta, \theta \in [0, 2\pi).$$

所以

$$I = \int_{|z|=2} \frac{|dz|}{|z-i|^2} = \int_0^{2\pi} \frac{2d\theta}{(2e^{i\theta}-i)(2e^{-i\theta}+i)}.$$

再做一个变换$\xi = e^{i\theta}, \theta \in [0, 2\pi)$. 得到

$$I = \int_{|\xi|=1} \frac{2dz}{iz(2z-i)(2z^{-1}+i)} = \int_{|\xi|=1} \frac{2dz}{i(2z-i)(2+iz)}.$$

有两奇点$2i, \frac{i}{2}$ 都是一阶。我们仅需要考虑$\frac{i}{2}$

$$Res[\frac{2}{i(2z-i)(2+iz)}, i/2] = \frac{2}{3i}.$$

所以

$$I = \frac{4\pi}{3}.$$

1.2.2 $I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx$型积分

这一小节我们将计算

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx.$$

其中，P，Q 均为多项式，Q 的次数比P 至少高二次，Q 的所有零点都不在实轴上。我们需要以下引理：

引理1. 设当R 充分大得时候，复函数f 在圆弧$C_R = Re^{i\theta}, \alpha < \theta < \beta$ 上连续，并且

$$\lim_{z\to\infty} zf(z) = A.$$

则

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = i(\beta - \alpha)A.$$

证明. 设$z = Re^{i\theta}$，则$dz = iRe^{i\theta}d\theta = izd\theta$。所以

$$\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} f(z)dz = \int_\alpha^\beta f(z)izd\theta = i(\beta - \alpha)A.$$

现在我们计算I，补上一个$C_R : |z| = R, argz \in [0, \pi]$。则

$$I = \lim_{R\to\infty} \left(\int_{C_R \cup [-R,R]} \frac{P(z)}{Q(z)} dz - \int_{C_R} \frac{P(z)}{Q(z)} dz \right).$$

注意到Q 的次数比P 至少高二次，所以

$$\lim_{|z|\to\infty} z\frac{P(z)}{Q(z)} = 0.$$

根据引理，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=0.$$

所以仅需要计算

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{P(z)}{Q(z)}dz.$$

由留数定理

$$I=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}\frac{P(z)}{Q(z)}dz=2\pi i\sum_{z_i}Res[\frac{P(z)}{Q(z)},z_i],$$

其中z_i 为Q 所有位于上半复平面的零点。

例子8. 计算积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^3}\quad(a>0).$$

解. $\frac{1}{(x^2+a^2)^3}$ 在上半平面只有一个奇点$z=ai$ （三阶极点）。所以

$$2\pi iRes[\frac{1}{(x^2+a^2)^3},ai]=2\pi i\frac{1}{2}\lim_{z\to ai}\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^3}(z-ai)^2\right)''=\frac{3\pi}{8a^5}.$$

1.2.3 $I_1=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\cos mxdx$ 和$I_2=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)\sin mxdx$，$(m>0)$ 型积分

这里$R=\frac{P}{Q}$，P,Q 都是多项式，Q的零点不在实轴上，Q 的次数至少比P 高一次。显然我们仅需求

$$I_1+iI_2=\int_{-\infty}^{\infty}R(x)e^{imx}dx.$$

要求这个积分，我们也要一个引理

引理2 (若当引理). 当R 充分大的时候$g(z)$ 在$C_R:|z|=R,Im(z)>-a\ (a\geq 0)$ 上连续，并且$\lim_{z\to\infty}g(z)=0$. 则对任意正数λ，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}g(z)e^{i\lambda z}dz=0.$$

我们先默认该引理是对的，补上一个$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$。则

$$I_1+iI_2=\lim_{R\to\infty}\left(\int_{C_R\cup[-R,R]}R(z)e^{imz}dz-\int_{C_R}R(z)e^{imz}dz\right).$$

注意到

$$\lim_{z\to\infty}R(z)=0.$$

所以由若当引理，我们有

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}R(z)e^{imz}dz=0.$$

所以

$$I_1+iI_2=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R\cup[-R,R]}R(z)e^{imz}dz=2\pi i\sum_{z_i}Res[R(z)e^{imz},z_i].$$

$$I_1 = Re\left(2\pi i \sum_{z_i} Res[R(z)e^{imz}, z_i]\right).$$

$$I_2 = Im\left(2\pi i \sum_{z_i} Res[R(z)e^{imz}, z_i]\right).$$

其中z_i 为所有$R(z)$ 位于上半复平面的奇点，也就是$Q(z)$ 所有位于上半平面的零点。 我们证明若当引理：

证明. 图见书：首先是侧面的小弧，当R 很大的时候

$$|\int_{\widehat{AB}} g(z)e^{i\lambda z}dz| \le \int_{-\alpha}^{0} M_R e^{-\lambda R\sin\theta} Rd\theta \le \int_{-\alpha}^{0} M_R e^{\lambda a} Rd\theta = M_R e^{\lambda a} R\alpha \le 2M_R e^{\lambda a} R\sin\alpha = \frac{\pi}{2} M_R e^{\lambda a} a.$$

即

$$|\int_{\widehat{AB}} g(z)e^{i\lambda z}dz| \to 0 (R \to \infty).$$

然后是最上面的大弧，

$$|\int_{\widehat{BC}} g(z)e^{i\lambda z}dz| \le \int_0^{\pi} M_R e^{-\lambda R\sin\theta} Rd\theta = 2\int_0^{\pi/2} M_R e^{-\lambda R\sin\theta} Rd\theta \le 2\int_0^{\pi/2} M_R e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta} Rd\theta.$$

所以

$$|\int_{\widehat{BC}} g(z)e^{i\lambda z}dz| \le -\frac{M_R}{\lambda} e^{-\frac{2}{\pi}\lambda R\theta}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \to 0.$$

例子9. 计算积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2+a^2)^2} dx \quad (a > 0).$$

解. $\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}$ 在上半复平面只有一个奇点$z = ai$（二阶极点）。所以

$$Res[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}, ai] = \lim_{z\to ai}\left(\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}(z-ai)^2\right)' = -\frac{e^{-a}i}{4a^2} - \frac{e^{-a}i}{4a^3}.$$

$$I = Re\left(2\pi i Res[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)^2}, ai]\right) = \frac{\pi e^{-a}}{2a^2} + \frac{\pi e^{-a}}{2a^3}.$$

最后我们举个例子说明孤立奇点在实轴上的情形。此时往往会用到以下引理：

引理3. 设当r 充分小的时候，复函数f 在圆弧$C_r = a + re^{i\theta}, \alpha < \theta < \beta$ 上连续，并且

$$\lim_{z\to a}(z-a)f(z) = A.$$

则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_r} f(z)dz = i(\beta-\alpha)A.$$

例子10. 计算积分$\int_0^{\infty} \frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)} dx.$

解. 仅需求
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx.$$
这题目和前面的很像，但不能代公式，因为实轴上有个奇点$z=0$。

*(错误做法)*补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$。$z=0$ 是可去奇点，无视掉。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx=\lim_{R\to\infty}\int_C-\int_{C_R}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz.$$
每一段我们都能求出来：
$$\lim_{R\to\infty}\int_C\frac{1-\cos z}{z^2(z^2+9)}dz=2\pi i\frac{1-\cos(3i)}{(3i)^2(3i+3i)}=\frac{\pi(e^3+e^{-3}-2)}{27}.$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$
又因为
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\cos z+i\sin z}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$
所以*(此处错误)*
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{\cos z}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$
所以
$$\int_0^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx=\frac{\pi(e^3+e^{-3}-2)}{54}.$$
（正确做法）补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 和一个小圆弧$C_r:|z|=R,argz\in[0,\pi]$。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos x}{x^2(x^2+9)}dx=Re\left(\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz\right).$$
每一段我们都能求出来：
$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz=2\pi i\frac{1-e^{-3}}{(3i)^2(3i+3i)}=\frac{\pi(e^{-3}-1)}{27}.$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$
$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz=0.$$
因为
$$\lim_{r\to 0}z\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}=-\frac{i}{9}.$$
所以
$$\int_{C_r}\frac{1-e^{iz}}{z^2(z^2+9)}dz=\frac{\pi}{9}.$$
所以结果为
$$\frac{\pi(e^{-3}+2)}{54}.$$

例子11. 计算积分$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$.

解. 同样地，我们仅需要计算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}dx.$$

补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 和一个小圆弧$C_r:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin}{x(x^2+1)}dx=Im\left(\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz\right).$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=2\pi i\frac{e^{i^2}}{i(2i)}=-\frac{\pi i}{e}.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=0.$$

因为

$$\lim_{r\to 0}z\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}=1.$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}dz=\pi i.$$

所以结果为

$$\pi-\frac{\pi}{e}.$$

1.2.4 杂例

例子12. 计算积分$\int_0^{\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx$.

解. 我们仅需要计算

$$I=\int_{-\infty}^{\infty}(\frac{\sin x}{x})^2dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2x^2}dx.$$

补上一个大圆弧$C_R:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 和一个小圆弧$C_r:|z|=R,argz\in[0,\pi]$ 。设C 是由实轴和圆弧形成的简单闭曲线。则

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1-\cos(2x)}{2x^2}dx=Re\left(\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C-\int_{C_R}+\int_{C_r}\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz\right).$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz=0.$$

因为

$$\lim_{r\to 0}z\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}=-i.$$

所以

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{1-e^{2zi}}{2z^2}dz=\pi.$$

所以结果为

$$\frac{\pi}{2}.$$

例子13 (弗雷涅积分)**.** *$I=\int_0^\infty \cos x^2 dx$.*

解. 考察全平面解析函数$\cos(z^2)+i\sin z^2=e^{iz^2}$。画折线$C:0\to R\overset{C_1}{\to}R+Ri\overset{C_2}{\to}0$（见书本）。则

$$J=\int_0^\infty e^{iz^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int_C-\int_{C_1}-\int_{C_2}e^{iz^2}dz.$$

每一段我们都能求出来：

$$\lim_{R\to\infty}\int_C e^{iz^2}dz=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}|\int_{C_1}e^{iz^2}dz|\le\lim_{R\to\infty}\int_0^R|e^{(R+it)^2i}i|dt\le\lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-2Rt}dt=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2R}=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}e^{iz^2}dz=\lim_{R\to\infty}\int_R^0 e^{(1+i)^2t^2i}(1+i)dt=-\lim_{R\to\infty}(1+i)\int_0^R e^{-2t^2}dt=-\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\sqrt{\pi}.$$

所以$J=\frac{1+i}{2\sqrt{2}}\pi$. 即

$$\int_0^\infty\cos x^2dx=\int_0^\infty\sin x^2dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}.$$

例子14. *计算$I_1=\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\cos bx dx$ 和$I_2=\int_{-\infty}^\infty e^{-ax^2}\sin bx dx$ $(a>0)$.*

解. 仅需要计算$J=I_1+iI_2$。

$$J=\int_{-\infty}^\infty e^{az^2+ibz}dz=\int_{-\infty}^\infty e^{-a(z-\frac{bi}{2a})^2-\frac{b^2}{4a}}dz=\int_{-\infty-\frac{bi}{2a}}^{\infty+\frac{bi}{2a}}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz.$$

画一个矩形的闭曲线$-R\to R\overset{C_1}{\to}R-\frac{bi}{2a}\to -R-\frac{bi}{2a}\overset{C_2}{\to}-R$（见书本）。

$$\lim_{R\to\infty}|\int_{C_1}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz|\le\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}|e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}||dz|\le\lim_{R\to\infty}e^{-R^2+\frac{b^2}{4a}}\times\frac{b}{2a}=0.$$

所以$\lim_{R\to\infty}\int_{C_1}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=0$；同理$\lim_{R\to\infty}\int_{C_2}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=0$。所以

$$J=\int_{-\infty-\frac{bi}{2a}}^{\infty+\frac{bi}{2a}}e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=\int_{-\infty}^\infty e^{-az^2-\frac{b^2}{4a}}dz=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}.$$

即$I_1=\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}e^{-\frac{b^2}{4a^2}}$, $I_2=0$。书上是$\int_0^\infty$，所以是一半。

1.2.5 多值情形：只要求了解。

计算某些积分的时候，我们会碰到多值的情形。

例子15. 计算积分
$$I=\int_0^\infty \frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx.$$

解. 复函数$\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}$，$Ln(z)=ln|z|+iArgz, Argz\in(-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2})$ 解析区域为全复平面去掉负虚轴；围道$C:-R\overset{C_1}{\to}-r\overset{小圆弧C_r}{\to}r\overset{C_2}{\to}R\overset{大圆弧C_R}{\to}-R$。

$$\int_{C_1}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\int_R^r\frac{Ln(-x)}{((-x)^2+1)^2}(-1)dx=-\int_R^r\frac{\ln x+i\pi}{(x^2+1)^2}dx=\int_r^R\frac{\ln x+i\pi}{(x^2+1)^2}dx.$$

$$\int_{C_2}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\int_r^R\frac{\ln x}{(x^2+1)^2}dx.$$

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\lim_{z\to 0}z\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}\times(\pi i)=0.$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}dz=\lim_{z\to\infty}z\frac{Lnz}{(z^2+1)^2}\times(\pi i)=0.$$

最后当R 很大r 很小的时候，

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_{C_1}+\int_{C_2}+\int_{C_r}+\int_{C_R}=2\pi iRes[\frac{Lnz}{(z^2+1)^2},i]=\frac{\pi+2i}{8}.$$

最后

$$I=\frac{\pi+2i}{16}-\frac{1}{2}\int_0^\infty\frac{i\pi}{(x^2+1)^2}dx=\frac{\pi+2i}{16}-\frac{1}{4}\int_{-\infty}^\infty\frac{i\pi}{(x^2+1)^2}dx=-\frac{\pi}{4}.$$

一般情形

$$2\int_0^\infty R(x)\ln xdx+\pi\int_0^\infty R(x)dx=2\pi i\sum_{z_i}Res[R(z)\ln z,z_i].$$

其中z_i 为所有上半平面奇点；其中$R(x)$ 为偶的有理多项式，分母比分子至少高二次，零点不在实轴上。

例子16. $I=\int_0^\infty z^pR(z)dz$，$p$ 不是整数；R 为有理多项式，奇点不在正实轴；并且满足

$$\lim_{z\to 0}z^{p+1}R(z)=\lim_{z\to\infty}z^{p+1}R(z)=0.$$

解. 图见书本：画围道$C:r\overset{实轴上沿C_1}{\to}R\overset{大圆C_R}{\to}R\overset{实轴下沿C_2}{\to}r\overset{小圆C_r}{\to}r$。

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ r\to 0}}\int_C z^pR(z)dz=2\pi i\sum_i Res[z^pR(z),z_i].$$

其中z_i 表示所有奇点。

$$\int_{C_2}z^pR(z)dz=-\int_{C_1}e^{2\pi p}z^pR(z)dz.$$

由两个引理：

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r}z^pR(z)dz=\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}z^pR(z)dz=0.$$

所以

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to 0}} \int_{C_1} z^p R(z) dz = \frac{1}{1-e^{2\pi p}} 2\pi i \sum_i Res[z^p R(z), z_i].$$

其中z_i 表示所有奇点。

1.3 罗歇定理

在这一节中，我们主要关心一个解析函数在简单闭曲线内部的零点个数。设$C:[0,1]\to\mathbb{C}$（逆时针）是简单闭曲线并且$f|_C$ 恒不为零，f 在C 和C 所围城的曲线内部除了极点（$b_1,\cdots,b_l$，阶数相应为$n_1,\cdots,n_l$）解析，我们不妨用指数形式表示

$$f(z) = r(z)e^{i\theta(z)}.$$

其中$r(z)$ 是模，$\theta(z)$ 是幅角（每个点取一个幅角但要保证连续，首尾取值可以不相等）。所以限制在C 上，

$$\frac{f'}{f} = \frac{r'e^{i\theta} + rie^{i\theta}\theta'}{re^{i\theta}} = \frac{r'}{r} + i\theta'.$$

所以

$$\int_C \frac{f'}{f} dz = \ln r(z)|_{z_1}^{z_2} + i\int_C 1 d\theta, .$$

所以

$$\int_C \frac{f'}{f} dz = i\int_C 1 d\theta.$$

又设f 在C 内部的所有零点为$a_1,\cdots,a_k$相应阶数为$m_1,\cdots,m_k$，则在C 内部f 可以写为

$$f = (z-a_1)^{m_1}\cdots(z-a_k)^{m_k}(z-b_1)^{-n_1}\cdots(z-b_l)^{-n_l}g$$

$g(z)$ 在C 和C 内没有零点且解析。所以

$$\int_C \frac{f'}{f} dz = \int_C \sum_i \frac{m_i}{z-a_i} - \sum_i \frac{n_i}{z-b_i} + \frac{g'}{g} dz.$$

由柯西积分定理和柯西积分公式，我们有

$$\int_C \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \sum_i m_i - 2\pi i \sum_i n_i.$$

比较得到

定理3.

$$\sum_i m_i - \sum_i n_i = \frac{\int_C 1 d\theta}{2\pi} = \frac{\Delta_C arg[f]}{2\pi}.$$

换句话说就是零点个数（计重数）减去极点个数（计算重数）等于曲线在f 下的象围绕0 点的圈数。显然有以下性质

$$\Delta_C arg[fg] = \Delta_C arg[f] + \Delta_C arg[g].$$

但是呢直接数曲线的象围绕0 点的圈数并不容易。我们往往用到以下定理来找零点个数：

定理4. 假设解析函数f,φ 在简单闭曲线C 上满足

$$|f| > |\varphi|.$$

则f 和$f\pm\varphi$ 在C 内有相同的零点个数。

证明.

$$\Delta_C arg[f\pm\varphi] = \Delta_C arg[f(1\pm\frac{\varphi}{f})] = \Delta_C arg[f] + \Delta_C arg[1\pm\frac{\varphi}{f}].$$

仅需要说明$\Delta_C arg[1\pm\frac{\varphi}{f}] = 0$。实际上$1\pm\frac{\varphi}{f}$ 将曲线C 映入$Re(z) > 0$，其围绕0的圈数必定是零，所以$\Delta_C arg[1\pm\frac{\varphi}{f}] = 0$。

例子17. 求$z^{2020}+z^{20}=20$ 在$1<|z|<2$ 内部的零点个数。

解. 设$f=z^{2020}+z^{20}-20, \varphi_1 = z^{20}-20$ 则在$|z|=2$ 上

$$|f| > |\varphi_1|, f-\varphi_1 = z^{2020}.$$

所以f 在$|z|<2$ 有2020 个零点。又设$\varphi_2 = z^{2020}+z^{20}$，则在$|z|=1$ 上

$$|f| > |\varphi_2|, f-\varphi_2 = -20.$$

所以f 在$|z|<1$ 没有零点。显然f 在$|z|=1$ 上没有零点，所以f 在$1<|z|<2$ 有2020 个零点。

1 Laplace 变换

我们研究的过程是从零时刻开始的。f 是定义在$[0,\infty)$ 上的分段连续函数；也可以看作$(-\infty,\infty)$ 上的函数，此时默认$f|_{(-\infty,0)}=0$。

研究这类函数，比较常用的工具是傅里叶变换

$$F(\lambda)=F[f]=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-i\lambda t}dt.$$

相应的傅里叶反变换为

$$f=F^{-1}[F(\lambda)]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

但是呢，一般傅里叶变换有个要求，那就是绝对可积，即

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f|dt<\infty.$$

所以常规意义下能够傅里叶变换的函数并不多，连最简单的函数

$$h(t)=1=\begin{cases}1,t\geq 0,\\0,t<0.\end{cases}$$

都没法使用傅里叶变换。针对这个问题，数学家选择了两条路线：一是扩大函数的范围适用范围，广义函数论；第二就是乘上一个衰减项，也就是拉普拉斯变换。

拉普拉斯变换：设$f(t)$ 为定义在$[0,\infty)$ 上的分段连续函数，满足

$$|f(t)|\leq Ke^{ct},K,c>0.$$

f 的拉普拉斯变换定义为

$$L[f]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt.$$

其中$Rep>c$ 。在此条件下

$$\int_0^{\infty}|f(t)e^{-pt}|dt\leq\int_0^{\infty}Ke^{(c-Rep)t}dt=\frac{K}{Rep-c}<\infty.$$

因而定义是合理的。设$p=\sigma+i\lambda$，则拉普拉斯变换和傅里叶变换有如下关系

$$L[f]=L(\sigma+i\lambda)=F[f(t)e^{-\sigma t}].$$

所以

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(\sigma+i\lambda)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

例子1. 计算$L[e^{at}]$。

解. $L[e^{at}]=\int_0^{\infty}f(t)e^{-pt}dt=\frac{e^{(a-p)t}}{a-p}|_0^{\infty}=\frac{1}{p-a}.$

拉普拉斯变换的主要性质：

(1) 线性性质：$L[C_1 f + C_2 g] = C_1 L[f] + C_2 L[g]$；

由此可得：

$$L[\cos at] + iL[\sin at] = L[e^{iat}] = \frac{1}{p - ia} = \frac{p}{p^2 + a^2} + \frac{a}{p^2 + a^2} i.$$

$$L[\cos at] - iL[\sin at] = L[e^{-iat}] = \frac{1}{p + ia} = \frac{p}{p^2 + a^2} - \frac{a}{p^2 + a^2} i.$$

即

$$L[\cos at] = \frac{p}{p^2 + a^2}, L[\sin at] = L[e^{-iat}] = \frac{a}{p^2 + a^2}.$$

(2) 频移性质：$L[f(t)e^{\lambda t}] = L(p - \lambda)$；

$$L[f(t)e^{\lambda_0 t}] = \int_0^\infty f(t) e^{-(p-\lambda_0)t} dt = L(p - \lambda_0).$$

$$L[e^{\lambda t} \cos at] = \frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + a^2}, L[e^{\lambda t} \sin at] = L[e^{-iat}] = \frac{a}{(p - \lambda)^2 + a^2}.$$

(3) 延迟性质：$\tau > 0$，$L[f(t - \tau)h(t - \tau)] = L(p) \times e^{-p\tau}$，其中$h(t) = 1, t \geq 0; h(t) = 0, t < 0$；

$$L[f(t - \tau)] = \int_0^\infty f(t - \tau) e^{-pt} dt = e^{-p\tau} \int_0^\infty f(t) e^{-pt} dt = e^{-p\tau} L(p).$$

(4) 相似性质：$a > 0$, $L[f(at)] = \frac{1}{a} L(\frac{p}{a})$；

$$L[f(at)] = \int_0^\infty f(at) e^{-pt} dt = \frac{1}{a} \int_0^\infty f(t) e^{-p\frac{t}{a}} dt = \frac{1}{a} L(\frac{p}{a}).$$

(5) 微分性质：$L[f^{(n)}(t)] = p^n L(p) - p^{n-1} f(0+) - p^{n-2} f'(0+) - \cdots$.

仅需说明$n = 1$ 的情形即可：

$$\int_0^\infty f'(t) e^{-pt} dt = f(t) e^{-pt}|_0^\infty + p \int_{-\infty}^\infty f(t) e^{-pt} dt = pL[f] - f(0+).$$

(6) 像函数微分：$L[f(t)]^{(n)} = L[(-t)^n f]$.

$$L[f(t)]^{(n)} = \int_0^\infty f(t) \frac{\partial^n e^{-pt})}{\partial p^n} dt = L[(-t)^n f].$$

由例子一，可以得到$L[1] = \frac{1}{p}$，所以

$$L[t^n] = (-1)^n \left(\frac{1}{p}\right)^{(n)} = \frac{n!}{p^{n+1}}.$$

(7) 本函数积分：$L[\int_0^t f(s)ds] = \frac{L[f]}{p}$. 由微分性质直接得到。

(8) 卷积性质：$L[f * g] = L[f] \times L[g]$。这里的卷积定义为

$$f * g = \int_0^t f(s) g(t - s) ds = \int_0^\infty f(s) g(t - s) ds.$$

原因：

$$
\begin{aligned}
L[f*g] = \int_0^{\infty}\int_0^{t} f(t-s)g(s)ds e^{-pt}dt &= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t-s)g(s)dse^{-pt}dt \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t-s)g(s)dse^{-pt}dt \\
&= \int_0^{\infty}\int_0^{\infty} f(t-s)e^{-p(t-s)}dtg(s)e^{-ps}ds \\
&= \int_0^{\infty} L[f]g(s)e^{-ps}ds \\
&= L[f]L[g].
\end{aligned}
$$

常用的是它的反变换，

$$L^{-1}[fg] = L^{-1}[f]*L^{-1}[g].$$

用拉普拉斯变换解常微分方程主要用到了拉普拉斯的微分性质：

例子2. 解微分方程：

$$
\begin{cases}
y' + 2y = e^{-t}, \\
y|_{t=0} = 0.
\end{cases}
$$

解. 设$L[y]=L(p)$，则

$$pL(p) + 2L(p) = \frac{1}{p+1}.$$

解得

$$L(p) = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{p+2}.$$

所以

$$y = e^{-t} - e^{-2t}.$$

例子3. 解微分方程：

$$
\begin{cases}
y'' + y = e^{t}\cos 2t, \\
y(0) = 4, y'(0) = 0.
\end{cases}
$$

解. 设$L[y]=L(p)$，则

$$p^2L(p) - 4p + L(p) = L[e^t\cos 2t].$$

解得

$$L(p) = \frac{L[e^t\cos 2t]}{p^2+1} + \frac{4p}{p^2+1}.$$

由卷积性质：

$$
\begin{aligned}
y &= \left(e^t\cos 2t\right)*\sin t + 4\cos t \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{e^t\sin 2t - e^t\cos 2t}{2} - \frac{e^t\sin 2t - 3e^t\cos 2t}{10} - \frac{\sin t - \cos t}{2} - \frac{\sin t + 3\cos t}{10}\right) + 4\cos t \\
&= \frac{1}{5}e^t\sin 2t - \frac{1}{10}e^t\cos 2t - \frac{3}{10}\sin t + \frac{41}{10}\cos t.
\end{aligned}
$$

1.1 拉普拉斯变换反演公式

这一节我们主要是考察拉普拉斯变换的反演公式。前面已经说过拉普拉斯可以看成推广的傅里叶变换。设$p=\sigma+i\lambda t$，则

$$L(p)=L[f]=F[fe^{-\sigma t}].$$

应用傅里叶变换的反演公式：

$$f(t)e^{-\sigma t}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(p)e^{i\lambda t}d\lambda.$$

即

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(p)e^{\sigma t+i\lambda t}d\lambda=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}L(p)e^{pt}d\lambda=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-\infty i}^{\sigma+\infty i}L(p)e^{pt}dp.$$

该公式称为傅里叶-梅林公式。

定理1. *设$L(p)$ 在左半平面($Rep<\sigma,\sigma>c$)有奇点$p_i,i=1,2,\cdots,n$。并且除掉这些奇点外解析，$\lim_{p\to\infty}L(p)=0$。则*

$$f(t)=\sum_{p_i}Res[L(p)e^{pt},p_i].$$

证明. 用变量替换：$p=iz$，则积分变为

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma i-\infty}^{-\sigma i+\infty}L(iz)e^{izt}dz.$$

$L(iz)$ 所有奇点为$z_i=\frac{p_i}{i}$ 位于$Imz>-\sigma$ 内。做大圆$C_R:|z|=R,Imz\geq-\sigma$，则由若当定理

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{C_R}L(iz)e^{izt}dz=0.$$

所以

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\sigma i-\infty}^{-\sigma i+\infty}L(iz)e^{izt}dz=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\left(\int_C-\int_{C_R}\right)L(iz)e^{izt}dz=i\sum_{p_i}Res[L(iz)e^{izt},\frac{p_i}{i}].$$

其中

$$Res[L(iz)e^{izt},\frac{p_i}{i}]=a_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\int_{C_\rho}L(iz)e^{izt}dz\overset{p=zi}{=}\frac{1}{i}\left(\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{C}_\rho}L(p)e^{pt}dp\right)=\frac{1}{i}Res[L(p)e^{pt},p_i].$$

所以

$$f(t)=\sum_{p_i}Res[L(p)e^{pt},p_i].$$

特别地，对于有理多项式$L(p)=\frac{P(p)}{Q(p)}$，Q 的次数比P 至少高一次，则我们有以下公式：

$$f(t)=\sum_{p_i}Res[L(p)e^{pt},p_i].$$

其中p_i 为所有的奇点。

例子4. 求$L(p)=\frac{p+7}{p^3+p^2+3p-5}$ 的本函数。

解. 方法一：注意到$p^3+p^2+3p-5=(p-1)(p+1+2i)(p+1-2i)$。用待定系数法，不妨设

$$L(p)=\frac{A}{p-1}+\frac{B}{p+1+2i}+\frac{C}{p+1-2i}.$$

解得$A=1,B=-\frac{1}{2}-\frac{i}{4},C=-\frac{1}{2}+\frac{i}{4}$。所以本函数

$$f(t)=e^t-\left(\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right)e^{-(1+2i)t}+\left(-\frac{1}{2}+\frac{i}{4}\right)e^{-(1-2i)t}=e^t-e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t).$$

方法二：注意到$p^3+p^3+3p-5=(p-1)(p+1+2i)(p+1-2i)$。有三个奇点，$1,-1+2i.-1-2i$ 都为一阶极点。

$$Res[L(p)e^{pt},1]=e^t.$$

$$Res[L(p)e^{pt},-1+2i]=\frac{(p+7)e^{pt}}{3p^2+2p+3}|_{p=-1+2i}=-(\frac{1}{2}-\frac{i}{4})e^{-t+2it}=-e^{-t}(\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t)-ie^{-t}(\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t).$$

$$Res[L(p)e^{pt},-1-2i]=-e^{-t}(\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{4}\sin 2t)+ie^{-t}(\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{4}\cos 2t).$$

所以本函数

$$f(t)=e^t-e^{-t}(\cos 2t+\frac{1}{2}\sin 2t).$$

例子5. 求$f(t)=L^{-1}[\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}]$.

解. 方法一：当然可以用待定系数法，不妨设

$$L(p)=\frac{A}{p+1}+\frac{B}{p+3}+\frac{C}{(p+3)^2}+\frac{D}{(p+3)^3}.$$

解得$A=1,B=-\frac{1}{2}-\frac{i}{4},C=-\frac{1}{2}+\frac{i}{4}$。解起来很麻烦，我们就不解了。还有一种凑的办法，不停把分子凑成$p+1,p+3$ 的组合，一直到如上待定系数的形式。

$$\begin{aligned}\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}&=\frac{2p(p+1)+(p+3)}{(p+1)(p+3)^3}\\&=\frac{2p}{(p+3)^3}+\frac{1}{(p+1)(p+3)^2}\\&=\frac{2(p+3)-6}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\frac{(p+3)-(p+1)}{(p+1)(p+3)^2}\\&=\frac{2}{(p+3)^2}-\frac{6}{(p+3)^3}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p+1)(p+3)}-\frac{1}{(p+3)^2}\right)\\&=\frac{3/2}{(p+3)^2}-\frac{6}{(p+3)^3}+\frac{1/4}{p+1}-\frac{1/4}{p+3}.\end{aligned}$$

所以

$$f(t)=e^{-3t}(\frac{3}{2}t-3t^2-\frac{1}{4})+\frac{1}{4}e^{-t}.$$

方法二：$L(p)$ 有两个个奇点，$-1,-3$，分别为一阶极点和三阶极点。

$$Res[L(p)e^{pt},-1]=\frac{1}{4}e^{-t}.$$

$$Res[L(p)e^{pt},-3]=\frac{1}{2}\lim_{p\to-3}\left(\frac{2p^2+3p+3}{(p+1)(p+3)^3}(p+3)^3e^{pt}\right)''=e^{-3t}(\frac{3}{2}t-3t^2-\frac{1}{4}).$$

所以本函数

$$f(t) = e^{-3t}(\frac{3}{2}t - 3t^2 - \frac{1}{4}) + \frac{1}{4}e^{-t}.$$

例子6. 解方程组：

$$\begin{cases} x' - x - 2y = t, \\ -2x + y' - y = t, \\ x(0) = 2.y(0) = 4. \end{cases}$$

解. 不妨设$L_1(p) = L[x(t)], L_2(p) = L[y(t)]$。则

$$\begin{cases} pL_1 - 2 - L_1 - 2L_2 = \frac{1}{p}, \\ -2L_1 + pL_2 - 4 - L_2 = \frac{1}{p}. \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} L_1 = \frac{2p^3+6p^2+p+1}{p^2(p+1)(p-3)} = \frac{28}{9} \times \frac{1}{p-3} - \frac{1}{p+1} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2}, \\ L_2 = \frac{28}{9} \times \frac{1}{p-3} + \frac{1}{p+1} - \frac{1}{9} \times \frac{1}{p} - \frac{1}{3} \times \frac{1}{p^2}. \end{cases}$$

所以

$$\begin{cases} x(t) = \frac{28}{9}e^{3t} - e^{-t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3}, \\ L_2 = \frac{28}{9}e^{3t} + e^{-t} - \frac{1}{9} - \frac{t}{3}. \end{cases}$$

课程总结：

第一章： 复数的表示（代数表示、向量表示、指数表示、三角表示）；复数的基本运算（加、减、乘、除、根号、乘幂等）；

第二章： C-R方程（实可微加上$u_x = v_y, u_y = -v_x$）；初等函数及其相关计算、方程（对数、指数、三角、双曲、乘幂等）；

第三章： **参数法计算积分**（$dz(t) = z'(t)dt$）；柯西定理、公式；**已知解析函数的实部（虚部），求解析函数（例如已知u，求$f = u + iv$，经常会涉及调和函数性质）；常见解析函数的原函数、用原函数计算积分**；

第四章： 幂级数基本性质；**常见解析函数的泰勒展开、零点性质；洛朗展开**；孤立奇点（类型判断，极点的阶数判断、可去奇点与极点的性质）；

第五章： **用留数定理计算积分；各种形式积分的计算（可以记住公式、也可以现场发挥）**；辐角原理；**儒歇定理判断零点个数**；

第七章： **用拉普拉斯变换求解常微分方程（组）**。