中 国 科 学 技 术 大 学

2020—2021学年第一学期期中试卷

考试科目 <u>概率论与数理统计</u>　　　得分 ________

所在系 ______　　姓名 ________　　学号 ________

考试时间: 2020年11月26日上午9:45—11:45;　使用简单计算器

装 ………… 订 ………… 线

一. 填空判断选择题(每题3分,答题请写在试卷上):

1 设一次试验中A发生的概率为p, 现独立重复进行n次，则A至少发生一次的概率为__________, 至多发生一次的概率为__________.

2 已知随机事件A 的概率$P(A)=0.5$, 随机事件B 的概率$P(B)=0.6$ 及条件概率$P(B\mid A)=0.8$, 则和事件$A\cup B$ 的概率$P(A\cup B)=$__________.

3 设随机变量 X 和 Y 都服从正态分布, 且他们不相关, 则________.

(A) X 与Y一定独立　　(B) (X,Y)服从二元正态

(C) X和Y未必独立　　(D) $X+Y$服从一维正态分布

4 设$F_1(x)$ 与$F_2(x)$ 分别为随机变量X_1 与X_2 的分布函数. 为使$F(x)=aF_1(x)-bF_2(x)$ 是某一随机变量的分布函数，在下列给定的各组数值中应取

(A) $a=\frac{3}{5}$,　$b=-\frac{2}{5}$.　　(B) $a=\frac{2}{3}$,　$b=\frac{2}{3}$.

(C) $a=-\frac{1}{2}$,　$b=\frac{3}{2}$.　　(D) $a=\frac{1}{2}$,　$b=-\frac{3}{2}$.

5 设随机变量X 服从正态分布N$(0,1)$, 对给定的$\alpha(0<\alpha<1)$, 数u_α 满足$P\{X>u_\alpha\}=\alpha$, 若$P\{\mid X\mid<x\}=\alpha$, 则x 等于__________.

(A) $u_{\frac{\alpha}{2}}$　(B) $u_{\frac{1-\alpha}{2}}$　(C) $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$　(D) $u_{1-\alpha}$.

6 设随机变量X 服从正态分布$N\left(\mu,\sigma^2\right)(\sigma>0)$, 且二次方程$y^2+4y+X=0$ 无实根的概率为$\frac{1}{2}$, 则$\mu=$__________.

7 一实习生用同一台机器接连独立地制造3 个同种零件，第i 个零件是不合格品的概率$p_i=\frac{1}{i+1}$(i $=1,2,3$), 以X 表示3 个零件中合格品的个数, 则$P(X=2)=$__________.

8 设随机变量X 和Y 相互独立, 同分布于期望为$\frac{1}{\lambda}$ 的指数分布,则$\min\{X,Y\}$ 服从参数为__________ 的__________ 分布.

9 设 $\operatorname{Var}(\mathrm{X})=\operatorname{Var}(\mathrm{Z}), \operatorname{Var}(\mathrm{Y})=4\operatorname{Var}(\mathrm{X})$, 相关系数$\rho_{X,Y}=-1, \rho_{X,Z}=1/2$, 则$\rho_{X,Y+Z}=$__________.

10 设$f(x)$ 和$g(x)$ 为两个概率密度函数，则$af(x)+bg(x)$也是概率密度函数的充要条件为__________.

二. 假定某种病菌在全人口中的带菌率为10%, 又在检测时. 带菌者呈阳、阴性反应的概率为0.95 和0.05, 而不带菌者呈阳、阴性反应的概率则为0.01 和0.99.

(1). 现某人被测出呈阳性反应, 则该人确为带菌者的概率多少？

(2). 今某人又独立地检测两次，发现1次呈阳性反应, 1次呈阴性反应. 问在三次检测中2次阳性1次阴性的情况下, “该人为带菌者”的概率是多少?

三. 二维随机变量(X, Y) 的密度函数为:

$$f(x, y)=\begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & (x>0, y>0) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

(1) 试求系数$A=$?

(2)X 与Y 是否独立?

(3) 试求$Z=X+Y$ 的密度函数$f_Z(z)$;

(4) 试求$\operatorname{Var}(X \mid X+Y=1)$.

四. 在一家保险公司里有10000 个老人参加保险，每人每年付200元保险费，在一年内一个人死亡的概率为0.017, 死亡时其家属可向保险公司领取10000元的保险金，问:

(1) 保险公司亏本的概率多大?

(2) 保险公司一年的利润不少于10万元且不超过20万元的概率多大?

以下两题选做一题, 只算一题得分

五. 设某两个风险(X, Y) 服从二元正态分布$N\left(\mu, 2\mu, \sigma^2, 2\sigma^2, \sqrt{2}/4\right)$, 某投资者购买了一个基于这两只风险和的金融衍生品(欧式看涨期权), 即到期收益为

$$(X+Y-3\mu)_+=\max\{X+Y-3\mu, 0\}.$$

(1) 求到期收益的均值$\mathbb{E}\left[(X+Y-3\mu)_+\right]$.

(2) 求到期收益的方差$\operatorname{Var}\left[(X+Y-3\mu)_+\right]$.

六. 记 $U_1, \cdots, U_n$ 为在 $(0,1)$ 中均匀分布的独立随机变量. 对 $0<x<1$ 定义

$$I(X \leq x)=\begin{cases} 1, & X \leq x, \\ 0, & X>x, \end{cases}$$

并记 $F_n(x)=\dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^n I(U_k \leq x)$, $0 \leq x \leq 1$, 这是 $U_1, \cdots, U_n$ 的经验分布函数。试求

(1) $F_n(x)$的均值和方差.

(2) $F_n(x)$与$F_n(y)$的协方差$(0<x, y<1)$.

附录 分布及分位数: $\Phi(0.77)=0.78$, $\Phi(1.55)=0.94$, $\Phi(2.32)=0.99$