运筹学第一章习题

2018 年 10 月 25 日

1. 证明凸集表示定理：设$\mathcal{S} = \{x|Ax = b, x \geq 0\}$为非空多面集，则有

   (1) 极点集非空且有限

   (2) 极方向集合为空集的充要条件是$\mathcal{S}$有界

   (3) 若$\mathcal{S}$无界，则存在有限个极方向

   (4) $x \in \mathcal{S}$的充要条件是

   $$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j d^{(j)} \tag{1}$$

   其中$\lambda_i \geq 0, i = 1, \ldots, k, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1, \mu_j \geq 0, j = 1, \ldots, \ell$。

   也可以参考*Linear Programming and Network Flows*

   证明. (1) 令y为$\mathcal{S}$中0分量最多的一点，即

   $$\#\{i|y_i = 0\} \geq \max_{x \in \mathcal{S}} \#\{j|x_j = 0\}$$

   下证明y为$\mathcal{S}$的极点。

   若不然，存在$x^{(1)} \neq x^{(2)} \in \mathcal{S}, \lambda \in (0,1)$使得$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = y$。由于$x^{(1)}, x^{(2)} \geq 0$，对$i$使得$y_i = 0$，必有$x_i^{(l)} = 0, l = 1, 2$。令$\alpha = x^{(2)} - x^{(1)}$，易见$A\alpha = 0$。令$r$满足

   $$|\frac{y_r}{\alpha_r}| = \min\{|\frac{y_j}{\alpha_j}|\,|\,\alpha_j \neq 0\}$$

   则$y' = y - \frac{y_r}{\alpha_r}\alpha \in \mathcal{S}$，且$y'_r = 0$；对$i$使得$y_i = 0$，亦有$y'_i = 0$。这与$y$的定义矛盾。因此$y$是极点。这就证明了极点集非空。

由第3题，极点与可行基解一一对应，而可行基解的数量不多于$\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix}$，因此极点集有限。

(2)

(3) 考察

$$\mathcal{S}_0 = \{x|Ax = 0, x \geq 0, \sum_{i=1}^{n} x_i = 1\}$$

及标准化后的方向集

$$\mathcal{D} = \{\frac{d}{\|d\|_1}|d\text{为}\mathcal{S}\text{的方向}\}$$

可以看出$\mathcal{S}_0 = \mathcal{D}$，因此$\mathcal{D}$是多面集。下证$\mathcal{S}$标准化后的极方向与$\mathcal{D}$的极点一一对应。

设d为$\mathcal{D}$的极点，并假设$d = \lambda_1 d^{(1)} + \lambda_2 d^{(2)}$，$\lambda_1, \lambda_2 > 0$。因为

$$d = \lambda_1 \|d^{(1)}\|_1 \frac{d^{(1)}}{\|d^{(1)}\|_1} + \lambda_2 \|d^{(2)}\|_1 \frac{d^{(2)}}{\|d^{(2)}\|_1}$$

我们不妨直接假设$\|d^{(j)}\|_1 = 1, j = 1, 2$。于是

$$1 = \|d\|_1 = \lambda_1 \|d^{(1)}\|_1 + \lambda_2 \|d^{(2)}\|_1 = \lambda_1 + \lambda_2$$

即d是$\mathcal{D}$上两点的凸组合。由d为极点知$d^{(1)} = d^{(2)} = d$，因此d是$\mathcal{S}$的极方向。

设d为$\mathcal{S}$的极方向，并且$\|d\|_1 = 1$。若有$d^{(1)}, d^{(2)} \in \mathcal{D}$及$\lambda \in (0, 1)$使得$d = \lambda d^{(1)} + (1 - \lambda) d^{(2)}$，因为这是两个方向的正线性组合，因此有$d = d^{(1)} = d^{(2)}$，故$d$是$\mathcal{D}$的极点。

若$\mathcal{S}_0$为空集，则任意x满足$Ax = 0$且$\|x\|_1 = 1$都具有负分量。令

$$\delta = -\max\{\sum_{i:x_i<0} x_i | Ax = 0, \|x\|_1 = 1\}$$

因为$\{x|Ax = 0, \|x\|_1\}$是一个有界闭集，因此最大值可以取到并严格大于0。$\mathcal{S}$非空，设$y \in \mathcal{S}$，则

$$\mathcal{S} \subseteq y + \{\lambda x | Ax = 0, \|x\|_1 = 1, \lambda \in [0, \frac{\|y\|_1}{\delta}]\}$$

即$\mathcal{S}$有界。

因此，$\mathcal{S}$无界则有$\mathcal{S}_0$非空。由(1)知$\mathcal{S}_0$有极点，因此$\mathcal{S}$有极方向。进一步，极点个数有限即得极方向个数有限。

若极方向集合非空，则$\mathcal{S}$显然是无界的。

(4) 充分性显然。

必要性：对$\mathcal{S}$中元素的正分量个数进行归纳。

由(1)知正分量个数最少的一点（零分量最多的一点）为极点。

假设正分量个数小于t的点都具有(1)表示。设x的正分量个数等于t，不妨设

$$x = (x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0)$$

若$x_1, \dots, x_t$对应A中的列向量$a_1, \dots, a_t$线性无关，则由$Rank(A) = m$，可以再选$m - t$列构成A的一个可逆子矩阵$B = (a_1, \dots, a_m)$，知x是可行基解，亦为极点。

我这里写麻烦了.
直接"若 $a_1, \cdots, a_t$ 线性相关，则设 $d_1 a_1 + \cdots + d_t a_t = 0$，$d_1, \cdots, d_t$ 不全为零 且 至少有一个是正数" 框内的内容删去.

若$a_1, \dots, a_t$线性相关，不妨设$a_{s+1}, \dots, a_t$为它们的最大线性无关组，则a_1具有表示

$$a_1 = \mu_{s+1} a_{s+1} + \dots + \mu_t a_t$$

在A的其余列中选择$m + s - t$列构成可逆阵B，不妨记为

$$B = (a_{s+1}, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{s+m})$$

令$d_N = (1, 0, \dots, 0)$，$d_B = -B^{-1} N d_N$，构成的d满足$Ad = 0$。于是

$$Ad = a_1 + d_2 a_2 + \dots + d_n a_n = a_1 + d_{s+1} a_{s+1} + \dots + d_{s+m} a_{s+m} = 0$$

即

$$a_1 = -d_{s+1} a_{s+1} - \dots + d_{s+m} a_{s+m}$$

代入上上式得

$$(\mu_{s+1} + d_{s+1}) a_{s+1} + \dots + (\mu_t + d_t) a_t + d_{t+1} a_{t+1} + \dots + d_{s+m} a_{s+m} = 0$$

故$d_{t+1} = \dots = d_{s+m} = 0$.

- 若$d \geq 0$，令

$$\theta = \min_{1 \leq i \leq t} \{ \frac{x_i}{d_i} | d_i > 0 \} = \frac{x_l}{d_l} > 0$$

并令$x' = x - \theta D$，则x'为可行解，$x'_l = 0$。故x'前k个分量中至少有一个为0，而后$n-t$个分量等于0，因此由归纳假设，

$$x' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^{(i)} + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j d^{(j)}$$

而$\frac{d}{\|d\|_1}$为$\mathcal{S}_0$上的一点，由讲义的结论2，有界多面集内任意一点可以表示为极点的凸组合，故θd可以表示为极方向的正线性组合。故$x = x' + \theta d$满足假设。

- 若d中有分量小于0，则令

$$\theta_1 = \min_{1\le i\le t}\{\frac{x_i}{d_i}|d_i > 0\}$$

$$\theta_2 = \min_{1\le i\le t}\{\frac{x_i}{-d_i}|d_i < 0\}$$

并令$x' = x - \theta_1 d, x'' = x + \theta_2 d$，则$x', x''$的正分量个数都小于$k$，由归纳假设

$$x' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(1)} x^{(i)} + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j^{(1)} d^{(j)}$$

$$x'' = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(2)} x^{(i)} + \sum_{j=1}^{\ell} \mu_j^{(2)} d^{(j)}$$

又由

$$x = \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2} x' + \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2} x''$$

得

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda'_i x^{(i)} + \sum_{j=1}^{\ell} \mu'_j d^{(j)}$$

其中

$$\lambda'_i = \frac{\theta_2\lambda_i^{(1)} + \theta_1\lambda_i^{(2)}}{\theta_1+\theta_2} \ge 0$$

$$\sum_i \lambda'_i = \frac{\theta_2}{\theta_1+\theta_2}\sum_i \lambda_i^{(1)} + \frac{\theta_1}{\theta_1+\theta_2}\sum_i \lambda_i^{(2)} = 1$$

$$\mu'_i = \frac{\theta_2\mu_i^{(1)} + \theta_1\mu_i^{(2)}}{\theta_1+\theta_2} \ge 0$$

即对x假设成立。

由数学归纳法原理，证毕。

□

2. 试给出

$$\min -x_1+3x_2$$
$$\text{s.t. } x_1+x_2\le 8$$
$$x_2\le 2$$
$$x_1,x_2\ge 0$$

所有极点和可行解。

解 将原问题标准化，

$$\min\ -x_1+3x_2$$
$$\text{s.t. } x_1+2x_2+x_3=8$$
$$x_2+x_4=2$$
$$x_1,x_2,x_3,x_4\ge 0$$

令$A=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&1&0&1\end{pmatrix}$，$x=(x_1,x_2,x_3,x_4)^T$，$b=\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$，则变成

$$\min\ -x_1+3x_2$$
$$\text{s.t. } Ax=b$$
$$x\ge 0$$

取B为A的二阶可逆子阵，得到

$$\begin{aligned}x^{(1)}&=(4,2,0,0)^T\\x^{(2)}&=(8,0,0,2)^T\\x^{(3)}&=(0,2,4,0)^T\\x^{(4)}&=(0,4,0,-2)^T\ (\text{舍去})\\x^{(5)}&=(0,0,8,2)^T\end{aligned}$$

至于解集的极点，应该画图后标出。

3. 证明极点集-可行基解集等价定理。

证明. $\Leftarrow$: 令$x = \begin{pmatrix} x_B \\ x_N \end{pmatrix}$为可行基解，即$x_N = 0$，$B$可逆。设$x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathcal{S}, \lambda \in (0,1)$使得$\lambda x^{(1)} + (1-\lambda)x^{(2)} = x$。由于$x^{(1)}, x^{(2)} \geq 0$，而$x_N = 0$，故$x_N^{(1)} = x_N^{(2)} = 0$，于是$x_B^{(1)} = B^{-1} = x_B^{(2)} = x_B$，即$x^{(1)} = x^{(2)} = x$，这说明$x$是一个极点。

$\Rightarrow$: 令x为一个极点。令$x_{p_1}, x_{p_2}, \ldots, x_{p_k}$为$x$中非零分量，对应$A$中$a_{p_1}, \ldots, a_{p_k}$列。

断言：$a_{p_1}, \ldots, a_{p_k}$线性无关。

若$\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_k$不全为0使得$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_{p_i} = 0$，令$x_{p_i}^{(1)} = x_{p_i} + \delta\lambda_i$，$x_{p_i}^{(2)} = x_{p_i} - \delta\lambda_i$，$i = 1, \ldots, k$，$x^{(1)}$与$x^{(2)}$其余分量均为0，那么由于$x_{p_i} > 0$，取$|\delta|$足够小，有$Ax^{(l)} = b, x^{(l)} \geq 0, l = 1, 2$，且$\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)} = x$，这与$x$为极点矛盾。这就证明了断言。

由断言可知$k \leq m$。在x的其余分量中选择$n-k$个分量，使得A对应的列向量$a_{p_{k+1}}, \ldots, a_{p_m}$与$a_{p_1}, \ldots, a_{p_k}$线性无关（由Rank($A$)=$m$保证）。令$B = (a_{p_1}, \ldots, a_{p_m})$，则$B \begin{pmatrix} x_{p_1} \\ \vdots \\ x_{p_m} \end{pmatrix} = b$，而且$x_i = 0, \forall i \notin \{p_1, \ldots, p_m\}$，故$x$是可行基解。

□

若x非可行基解，包含两种情况：$x_N \neq 0$或者B不可逆。

4. 证明

$$x = (x_{B_1}, \ldots, x_{B_{r-1}}, 0, x_{B_{r+1}}, \ldots, x_{B_m}, 0, \ldots, x_p, \ldots, 0)^T$$

是可行基解。

证明. 只需要证明A中对应的列$a_{B_1}, \ldots, a_{B_{r-1}}, a_{B_{r+1}}, \ldots, a_{B_m}, a_p$线性无关。

若它们线性相关，设$a_p=\lambda_1 a_{B_1}+\ldots+\lambda_{r-1}a_{B_{r-1}}+\lambda_{r+1}a_{B_{r+1}}+\ldots+\lambda_m a_{B_m}$。由$B^{-1}a_p=\begin{pmatrix} y_{1p}\\ \vdots \\ y_{mp}\end{pmatrix}$且$y_{rp}>0$，得到$a_p=\sum_{i=1}^m y_{ip}a_{B_i}$，综合以上两式得到

$$(\lambda_1-y_{ip})a_{B_1}+\ldots+(\lambda_{r-1}-y_{r-1,p})a_{B_{r-1}}-y_{rp}a_{B_r}$$

$$+(\lambda_{r+1}-y_{r+1,p})a_{B_{r+1}}+\ldots+(\lambda_m-y_{mp})a_{B_m}=0$$

其中$y_{rp}\neq 0$，与B可逆矛盾。 □

5. 先列出单纯形法的计算步骤，然后求解线性规划问题：

$$\begin{aligned}\min\ & -4x_1-x_2\\ \text{s.t.}\ & -x_1+2x_2\leq 4\\ & 2x_1+3x_2\\ & x_1-x_2\leq 3\\ & x_1,x_2\geq 0\end{aligned}$$

解 最优解$(\frac{21}{5},\frac{6}{5})^T$，最优值$-18$，过程略。

6. 证明在执行主元消去法前后两个不同可行基下的判别系数和目标函数值有如下关系

$$\begin{aligned}(z_j-c_j)^{new}=&(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rp}}(z_p-c_p)\\ (c_B^TB^{-1}b)^{new}=&c_B^TB^{-1}b-\frac{\bar{b}_r}{y_{rp}}(z_p-c_p)\end{aligned}$$

证明. $B^{new}=(a_{B_1},\ldots,a_{B_{r-1}},a_p,a_{B_{r+1}},\ldots,a_{B_m})$，于是

$$B^{-1}B^{new}=(e_1,\ldots,e_{r-1},y_p,e_{r+1},\ldots,e_m)$$

$$
\begin{aligned}
(z_j - c_j)^{new} - (z_j - c_j) =& (c_B^{new})^T (B^{new})^{-1} a_j - c_B^T B^{-1} a_j \\
=& ((c_B^{new})^T - c_B^T)(B^{new})^{-1} a_j \\
& + c_B^T ((B^{new})^{-1} - B^{-1}) a_j \\
=& (0, \ldots, 0, c_p - c_{B_r}, 0, \ldots, 0)(B^{new})^{-1} a_j \\
& + c_B^T (0, \ldots, 0, e_r - y_p, 0, \ldots, 0)(B^{new})^{-1} a_j \\
=& (0, \ldots, 0, c_p - c_{B_r}, 0, \ldots, 0)(B^{new})^{-1} a_j \\
& + (0, \ldots, 0, c_{B_r} - c_B^T y_p, 0, \ldots, 0)(B^{new})^{-1} a_j
\end{aligned}
$$

注意到$(B^{new})^{-1}$的第r行与B^{-1}的第r行只相差$\frac{\det B}{\det B^{new}}$倍（伴随矩阵），即

$$(B^{new})_r^{-1} = \frac{\det B}{\det B^{new}} (B^{-1})_r$$

而

$$\frac{\det B}{\det B^{new}} = \frac{\det B^{-1} \det B}{\det B^{-1} \det B^{new}} = \frac{\det B^{-1} B}{\det B^{-1} B^{new}} = \frac{1}{y_{rp}}$$

故

$$
\begin{aligned}
=& (c_p - c_{B_r}) \frac{1}{y_{rp}} (B_{r1}^{-1}, \ldots, B_{rm}^{-1}) a_j \\
& + (c_{B_r} - c_B^T y_p) \frac{1}{y_{rp}} (B_{r1}^{-1}, \ldots, B_{rm}^{-1}) a_j \\
=& (c_p - z_p) \frac{y_{rj}}{y_{rp}}
\end{aligned}
$$

而$(c_B^T B^{-1} b)^{new} = c^T x^{new}$其中$x_{B_r} = 0, x_p = \Delta = \frac{\bar{b}_r}{y_{rp}}$，于是由讲义式(19)知$c^T x^{new} = z_0 + (c_p - z_p)\Delta = c_B^T B^{-1} b - \frac{\bar{b}_r}{y_{rp}} (z_p - c_p)$. □

7. 证明对偶定理。

证明.

$$
(LP) \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & Ax \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}
\qquad\qquad
(DP) \quad \begin{array}{ll} \max & b^T w \\ \text{s.t.} & A^T w \leq c \\ & w \geq 0 \end{array}
$$

先将(LP)标准化

$$
(LP') \quad \begin{array}{ll} \min & c^T x \\ \text{s.t.} & (A \ \ -I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = b \\ & x, y \geq 0 \end{array}
$$

令$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$为$(LP')$的最优解，并考虑$\begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix}$对应的可行基矩阵分解$B, N$。对任意$j \in N$，有$c_B^T B^{-1} a_j - c_j \le 0$；对任意$j \in B$有$c_B^T B^{-1} a_j = c_j$。（对$j > n$，记$c_j = 0,\ a_j = -e_{j-n}$）总之有

$$c_B^T B^{-1} a_j - c_j \le 0$$

令$w = (c_B^T B^{-1})^T$，则对$1 \le j \le n$

$$w^T a_j - c_j \le 0 \Leftrightarrow a_j^T w \le c_j$$

$$\Rightarrow A^T w \le c$$

对$n + 1 \le j \le m$

$$w^T a_j \le 0 \Leftrightarrow -w_j \le 0$$

$$\Rightarrow w \ge 0$$

因此w是(DP)的一个可行解。又

$$b^T w = w^T b = c_B^T B^{-1} b = (c^T\ 0) \begin{pmatrix} x^* \\ y^* \end{pmatrix} = c^T x^*$$

由弱对偶定理知w为(DP)的最优解。

由(DP)最优解推出(LP)最优解的过程类似，不再赘述。 $\square$