装订线 答题时不要超过此线

# 中 国 科 学 技 术 大 学
## 2015-2016学年第二学期考试试卷

课程名称：__________　　　课程代码：__________

开课院系：__________　　　考试形式：__________

姓名：参考答案 学号：__________　专业：__________

一、 选择题（每题3分，共30分，请将答案填入下表中）

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C | B | A | C | B | B | B | A | C | B |

1．卢瑟福根据α粒子散射实验的结果提出了原子的核式结构模型，否定了“葡萄干布丁模型”，主要依据是

A．α粒子很容易穿透金属箔　　B．实验中应用了盖革计数器

C．只有集中在很小空间范围内的正电荷才能使α粒子产生大角散射

D．只有在金属箔中经过多次散射的α粒子才可能有大于90°的散射角

2．根据玻尔模型，若记氦（He）的里德伯常数为$R_A$，则正一价氦离子（$He^+$）从第一激发态向基态跃迁，发出的光谱线的波长为

A．$\frac{4}{3R_A}$　　B．$\frac{1}{3R_A}$　　C．$\frac{1}{2R_A}$　　D．$\frac{1}{R_A}$

3．根据玻尔模型，正二价锂离子的电子在$n = 3$的轨道，其角动量为

A．$3\hbar$　　B．$\hbar$　　C．$\frac{\hbar}{3}$　　D．$\frac{\hbar}{9}$

4．弗兰克-赫兹实验中，当加速电压为 4.9V 时，回路中的电流强度显著下降，这时若做光谱测量，能够测得光谱线的波长为

A．184.9nm　　B．120.9nm　　C．253.7nm　　D．108.6nm

5．在斯特恩-格拉赫实验中，若使1束具有相同速度的基态的氢原子通过有梯度的磁场（原子速度方向与磁场梯度方向垂直），会发现通过磁场的原子

A．均匀散开　　B．仍为1束　　C．分为2束　　D．分为3束

6．Li（锂）原子能量最低的两个能级的原子态为

A．$^1S_0$，$^1P_1$　　B．$^2S_{1/2}$，$^2P_{1/2}$　　C．$^2S_{1/2}$，$^2P_{3/2}$　　D．$^1S_0$，$^3P_2$

7．Ba（钡）原子的6s6p电子组态按照LS耦合的方式形成原子态，其能量从低到高的次序为

A．$^1P_1$，$^3P_0$，$^3P_1$，$^3P_2$　　B．$^3P_0$，$^3P_1$，$^3P_2$，$^1P_1$

C．$^3P_2$，$^3P_1$，$^3P_0$，$^1P_1$　　D．$^1P_1$，$^3P_2$，$^3P_1$，$^3P_0$

8．氢原子电子的波函数为$\psi(r,\theta,\varphi)=\dfrac{1}{54\sqrt{\pi}}(\dfrac{1}{a_1})^{\frac{3}{2}}(\dfrac{r}{a_1})^2 e^{-\frac{r}{3a_1}}\sin^2\theta e^{i2\varphi}$，式中$a_1$为第一玻尔半径．则该电子的轨道角动量在 z 方向的分量为

A． 2h　　B． $\sqrt{6}$h　　C． h　　D． $\sqrt{2}$h

9．基态 Ca（钙）原子核外电子组态为[Ar]$4s^2$，其中的 1 个 4s 可被激发到 4p、3d、5s 等轨道，从而形成单重态和三重态。若 Ca 的某一个三重态能级比基态能级分别高 20335.4$cm^{-1}$，20349.3$cm^{-1}$，20371.0$cm^{-1}$，则形成该三重态的电子组态为

A．$4s^2$　　B．4s4p　　C． 4s3d　　D．4s5s

10．Zn（锌）原子的电子组态从 4s4d 跃迁到 4s4p，发出的波长不同的光谱线的数目为

A．6　　B．7　　C．8　　D．9

## 二、 填空题（每空 3 分，共 30 分，请将答案直接填在本试卷中）

1．基态碳原子，核外电子组态为 $1s^22s^22p^2$，其中的电子进行 LS 耦合，所能够形成的原子态用符号表示为 $2^1S_0$ ，$2^3P_{2,1,0}$ ，$2^1D_2$ ＿＿＿＿＿．

答 $3P_0$ 也可以。多写扣 1 分。

2．考虑能级的精细结构，氢原子的核外电子在$n=3$的壳层，所形成的原子态为 $3^2S_{1/2}$，$3^2P_{1/2}$，$3^2P_{3/2}$， $3^2D_{3/2}$，$3^2D_{5/2}$，＿＿＿＿＿；在$n=2$的壳层，所形成的原子态为 $2^2S_{1/2}$，$2^2P_{1/2}$，$2^2P_{3/2}$＿＿＿．若不考虑兰姆移位，电子从$n=3$的壳层向$n=2$的壳层跃迁，能够发出的波长不同的光谱线的数目为＿＿5＿＿＿．

3．电子自旋的朗德因子$g_s=$＿＿2＿＿＿，轨道的朗德因子$g_l=$＿＿1＿＿＿．

4．若阴极射线管的电压为 10kV，管中电子的 de Broglie（德布罗意）波长最短为＿＿0.0123＿＿＿nm；若电子撞击阳极的瞬间，将其动能全部转化为电磁辐射，则所发出的电磁波最短波长为＿＿0.124＿＿＿nm．（不考虑相对论效应）

数量级错扣 1 分，两个空写反扣 3 分。

5．黑体在加热过程中，其辐射本领最大的波长，由0.60μm变成了0.40μm．则总辐射本领增加了＿＿4.0625＿＿＿倍.

或 65/16. 未减 1 扣 1 分；(3/2)^4 扣 1 分。

6．波长为 2000Å 的光照在铝表面上．已知铝的脱出功为 4.2eV，则光电效应的遏止电压为＿＿2 V＿＿.

-2V 扣 1 分；2eV 扣 1 分。

三、(10%) 自旋轨道耦合能

$$\widehat{W}=-\hat{\vec{\mu}}_s\cdot\hat{\vec{B}}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\vec{L}}$$

计算此力学量与总角动量算符$\hat{J}_k$以及轨道角动量算符$\hat{L}_k$的对易子，

$$\left[\hat{J}_k,\widehat{W}\right]=?\quad\left[\hat{L}_k,\widehat{W}\right]=?$$

解：

$$\left[\hat{J}_k,f(r)\right]=\left[\hat{L}_k,f(r)\right]=\left[-i\hbar\varepsilon_{klm}r_k\frac{\partial}{\partial r_m},f(r)\right]=-i\hbar\varepsilon_{klm}r_k\left[\frac{\partial}{\partial r_m},r\right]$$
$$=-i\hbar\varepsilon_{klm}r_k\frac{r_m}{r}=0$$

$$\left[\hat{J}_k,\widehat{W}\right]=\left[\hat{J}_k,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\vec{L}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\left[\hat{J}_k,\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\vec{L}}\right]=$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\left(\hat{s}_l\left[\hat{J}_k,\hat{L}_l\right]+\left[\hat{J}_k,\hat{s}_l\right]\hat{L}_l\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\left(\hat{s}_l i\varepsilon_{klm}\hat{L}_m+\mathrm{i}\varepsilon_{klm}\hat{s}_m\hat{L}_l\right)$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}i\left(\varepsilon_{klm}\hat{s}_l\hat{L}_m+\varepsilon_{klm}\hat{s}_m\hat{L}_l\right)=0$$

$$\left[\hat{L}_k,\widehat{W}\right]=\left[\hat{L}_k,\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\vec{L}}\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\left[\hat{L}_k,\hat{\vec{s}}\cdot\hat{\vec{L}}\right]$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\hat{s}_l\left[\hat{L}_k,\hat{L}_l\right]=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}\hat{s}_l i\varepsilon_{klm}\hat{L}_m$$
$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{2m_e^2c^2r^3}i\left(\hat{\vec{s}}\times\hat{\vec{L}}\right)_k$$

四、(10%) 考虑宽度为$a$的一维无限深势阱

$$V(x)=\begin{cases}0, & \text{if } |x|<\dfrac{a}{2};\\ +\infty, & \text{if } |x|\ge\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

$t=0$时在$x=0$处释放一个点粒子.

（1）求粒子处于第二激发态和基态的几率之比.

（2）这个比值是否会随时间改变？

解：基态波函数

$$u_1(x)=\begin{cases}0, & \text{if } |x|\ge\dfrac{a}{2};\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\cos\dfrac{\pi}{a}x, & \text{if } |x|<\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

第二激发态波函数

$$u_3(x)=\begin{cases}0, & \text{if } |x|\ge\dfrac{a}{2};\\ \sqrt{\dfrac{2}{a}}\cos\dfrac{3\pi}{a}x, & \text{if } |x|<\dfrac{a}{2}.\end{cases}$$

初态

$$\psi(x,t=0)=\delta(x)$$

处于基态的几率幅为

$$A_1=(u_1,\psi)=\int_{-\infty}^{+\infty}u_1^*(x)\delta(x)dx=u_1^*(0)=\sqrt{\frac{2}{a}}$$

处于第二激发态的几率幅为

$$A_3=(u_3,\psi)=u_3^*(0)=\sqrt{\frac{2}{a}}$$

几率之比为$\left|\frac{A_1}{A_3}\right|^2=1.$

比值不随时间变化，原因是$t$时刻的波函数为

$$\psi(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}A_n u_n(x)e^{-\frac{iE_nt}{\hbar}}$$

几率幅不变。

装订线 答题时不要超过此线

五、(10%)钠原子从 $3^2P_{1/2}\rightarrow 3^2S_{1/2}$ 跃迁的光谱线波长为 589.6nm, 在 $B=2.5\mathrm{T}$的磁场中发生塞曼分裂. 问从垂直于磁场的方向观察，其分裂为多少条谱线，并给出各谱线波长.

P168 4.14

$$g=1+(g_s-1)\frac{J(J+1)-L(L+1)+S(S+1)}{2J(J+1)}$$

$$h\nu'=E_2'-E_1'=\left(E_2+g_2\mu_B B_0 M_{J_2}\right)-\left(E_1+g_1\mu_B B_0 M_{J_1}\right)=h\nu+\mu_B B_0\left(g_2 M_{J_2}-g_1 M_{J_1}\right)$$

$$g_2\text{: L}=0,\text{S}=\frac{1}{2},\text{J}=\frac{1}{2}\Rightarrow g_2=2$$

$$g_1\text{: }L=1,S=\frac{1}{2},J=\frac{1}{2}\Rightarrow g_1=\frac{2}{3}$$

$$\Delta\frac{1}{\lambda}=\left(g_2 M_{J_2}-g_1 M_{J_1}\right)\frac{\mu_B B_0}{hc}=\left(\pm 1\pm\frac{1}{3}\right)\frac{eB_0}{4\pi m_e c}$$

$$\Delta\lambda=\left(g_2 M_{J_2}-g_1 M_{J_1}\right)\frac{\mu_B B_0}{hc}\lambda^2=\left(\pm 1\pm\frac{1}{3}\right)\times 0.0406\mathrm{nm}$$
$$=589.546,589.573,589.627,589.654\mathrm{nm}$$

4 条，589.546nm，589.573nm，589.627nm，589.654nm

六、(10%)能量为 0.41MeV 的 X 射线光子，与静止的自由电子碰撞，反冲电子的速度为光速的 0.6 倍. 求散射光的波长以及散射角.

解：由能量守恒

$$h\nu_0+m_0c^2=h\nu+mc^2$$
$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-v^2/c^2}}=\frac{m_0}{\sqrt{1-0.6^2}}=1.25m_0$$

得散射光子能量

$$h\nu=h\nu_0+m_0c^2-mc^2=0.41\mathrm{MeV}+0.511\mathrm{MeV}\times(1-1.25)=0.28\mathrm{MeV}$$

散射光波长为

$$\lambda=\frac{c}{\nu}=\frac{hc}{h\nu}=\frac{1.24\times 10^{-6}\mathrm{m}\cdot\mathrm{eV}}{0.28\mathrm{MeV}}=0.044\text{Å}$$

动量守恒

$$\frac{h\nu_0}{c}\vec{k}_0=\frac{h\nu}{c}\vec{k}+m\vec{v}$$

其中$\vec{k}_0,\vec{k}$为单位矢量，是光的入射方向和出射方向。可得

$$\left(\frac{h\nu_0}{c}\vec{k}_0-\frac{h\nu}{c}\vec{k}\right)^2=m^2\vec{v}^2$$

$$(h\nu_0)^2+(h\nu)^2-2h\nu_0 h\nu\cos\theta=\frac{m_0^2c^2v^2}{1-v^2/c^2}=m_0c^2mc^2\frac{v^2/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}$$

$$0.41^2+0.28225^2-2\times 0.41\times 0.28225\times\cos\theta=0.511^2\times 1.25\times\frac{0.6^2}{0.8}$$

$$\cos\theta=0.436,\qquad \theta=1.12=64^\circ$$

## 可能会用到的公式及物理常数

光速$c = 2.99792458 \times 10^8 \mathrm{m/s}$　Planck 常数$h = 6.626069 \times 10^{-34} \mathrm{J \cdot s}$

$\hbar = h/2\pi = 1.0545716 \times 10^{-34} \mathrm{J \cdot s} = 6.58212 \times 10^{-22} \mathrm{MeV \cdot s}$

$\hbar c = 197.3 \mathrm{MeV \cdot fm}$　　$hc = 1.24 \times 10^{-6} \mathrm{m \cdot eV}$

真空磁导率$\mu_0 = 4\pi{\times}10^{-7} \mathrm{N{\cdot}A^{-2}}$ 真空介电常数$\varepsilon_0 = 8.85{\times}10^{-12} \mathrm{C^2{\cdot}J^{-1}{\cdot}m^{-1}}$

阿伏伽德罗常数$\mathrm{N_A} = 6.022{\times}10^{23} \mathrm{mol^{-1}}$ 玻尔兹曼常数$k = 8.62{\times}10^{-5} \mathrm{eV{\cdot}K^{-1}}$

电荷单位$e = 1.602 \times 10^{-19} \mathrm{C}$　原子单位$1\mathrm{u} = 1.66{\times}10^{27} \mathrm{kg} = 931.5 \mathrm{MeV/c^2}$

电子质量$\mathrm{m_e} = 0.511 \mathrm{MeV/c^2} = 9.11 \times 10^{-31} \mathrm{kg}$

电子的经典半径$\mathrm{r_e} = \mathrm{e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_e c^2)} = 2.818 \times 10^{-15} \mathrm{m}$

精细结构常数$\alpha = \mathrm{e^2}/(4\pi\varepsilon_0 \hbar \mathrm{c}) \approx 1/137.036$

Stefan-Boltzmann 常数$\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \mathrm{W/(m^2 \cdot K^4)}$

Wien 位移定律常数$b = 2.898 \times 10^{-3} \mathrm{m \cdot K}$

类氢原子能级的精细结构修正$\Delta E_{nj} = E_n \frac{\alpha^2 Z^2}{n^2}\left(\frac{n}{j+1/2} - \frac{3}{4}\right)$

物质波 de Broglie 关系$E = h\nu$, $\vec{p} = \hbar\vec{k}$, $p = h/\lambda$

Einstein 质能关系$\mathrm{E = mc^2}$, $\mathrm{E^2 = p^2c^2 + m_0^2c^4}$

轨道角动量算符

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar\vec{r} \times \nabla, \qquad \hat{\vec{L}}^2 = -\hbar^2\left\{\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right\}$$

薛定谔方程$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi = \hat{H}\psi$

单粒子定态薛定谔方程$\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + V(\vec{r})\right)u(\vec{r}) = Eu(\vec{r})$

力学量随时间的演化$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{\partial\hat{A}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{A}(t), \hat{H}\right]$

测不准关系$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar/2$

Bohr 半径$a_\infty = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{\mathrm{m_e e^2}} = \mathrm{r_e}\alpha^{-2} = 0.529 \times 10^{-10} \mathrm{m}$

Bohr 磁子$\mu_B = \frac{\mathrm{e}\hbar}{2\mathrm{m_e}} = 0.927{\times}10^{-23} \mathrm{J{\cdot}T^{-1}} = 5.788{\times}10^{-5} \mathrm{eV{\cdot}T^{-1}}$

Rydberg 能量$\mathrm{hcR_\infty} = \mathrm{m_e c^2}\alpha^2/2 = 13.6 \mathrm{eV}$

Rydberg 常数$\mathrm{R_\infty} = 1.0973731534(13) \times 10^7 \mathrm{m^{-1}}$

单光子跃迁选择定则$\Delta l_i = \pm 1$, $\Delta m_i = 0, \pm 1$, $\Delta l_{j \neq i} = 0$

多电子原子 LS 耦合跃迁选择定则

$$\Delta S = 0;\ \Delta L = 0, \pm 1;\ \Delta J = 0, \pm 1 \left(J = 0 \to J = 0 \text{ 除外}\right); \Delta M_J = 0, \pm 1$$

朗德间隔定则$\mathrm{E_{J+1} - E_J} = \hbar^2 \zeta(\mathrm{L, S})(\mathrm{J} + 1)$

塞曼效应能级修正$E_{mag}^{(1)} = g_J \mu_B B_0 M_J$, $g = 1 + (g_s - 1)\frac{J(J+1) - L(L+1) + S(S+1)}{2J(J+1)}$