中 国 科 学 技 术 大 学

2016 – 2017 学年第二学期期终考试 A 卷

课程编号 001511　　考试科目: **计算方法(B)**　　2017.4.23

所在院系 ____________　学号 ______________　姓名 _____________

题号	一	二	三	四	五	六	七	总分
得分								
评卷人								

（所有计算保留 4 位小数）

一．填空题（36 分）

1. 写出 $x = 0.000714247$ 的五位有效数字的近似值 $\underline{\quad x = 0.00071425 \quad}$。

2. 已知 $A = \begin{pmatrix} 1 & 7 & -9 \\ 0 & -13 & -10 \\ 0 & 21 & 16 \end{pmatrix}$，则 $\|A\|_1 = \underline{\quad 41 \quad}$，$\|A\|_\infty = \underline{\quad 37 \quad}$，$\rho(A) = \underline{\ 2\ }$

3．计算矩阵按模最大特征值的方法是__幂法__，计算矩阵按模最小特征值的方法是__反幂法__，计算实对称矩阵全部特征值的方法是__Jacobi__。

4. 设 $l_0(x), l_1(x), l_2(x), l_3(x)$ 是以互异的 x_0, x_1, x_2, x_3 为节点的 Lagrange 插值基函数则

$$\sum_{i=0}^{3} l_i(x)(x_i+2)^3 = \underline{(x+2)^3}$$

5．设 $f(x)$ 为 n 次多项式，$n > 5$，由数据 $f(0), f'(0), f(1), f'(1), f''(1)$，构造插值多项式的插值余项为 $\underline{\dfrac{f^{(5)}(\xi)}{5!} x^2 (x-1)^3}$

6．n 个节点的数值积分公式至多可以达到 __2n-1__ 阶代数精度。

7．完成下列差商表

i	x_i	$f(x_i)$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$
0	−1	−5			
1	0	−7	−2		
2	1	−3	4	3	
3	2	13	16	6	1

二（12 分）给出下列数据

x_i	1.10	1.20	1.30	1.50
y_i	1.21	2.37	3.52	4.29
$\ln(y_i)$	0.19	0.86	1.26	1.46

解： 用最小二乘法求形如 $y(x)=ae^{bx}$ 的经验公式。

$$\begin{pmatrix} 4 & 5.1 \\ 5.1 & 6.59 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ln a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3.77 \\ 5.069 \end{pmatrix}$$

$$\ln a=-2.8788, b=2.9971, a=e^{-2.8788}=0.0562$$

$$y(x)=0.0562e^{2.9971}$$

三．（12 分）设函数由下表给出

x	1.20	1.25	1.30	1.50	1.70	1.75	1.80
$f(x)$	3.90	4.20	3.70	4.30	5.10	5.60	4.90

写出复化 Simpson（辛普森）公式，并用复化辛普森公式计算 $\int_{1.2}^{1.8} f(x)dx$

解 $$S_n(f)=\frac{h}{3}\left[f(a)+4\sum_{i=0}^{m-1} f(x_{2i+1})+2\sum_{i=1}^{m-1} f(x_{2i})+f(b)\right]$$

$$\int_{1.2}^{1.8} f(x)dx=\int_{1.2}^{1.3} f(x)dx+\int_{1.3}^{1.7} f(x)dx+\int_{1.7}^{1.8} f(x)dx$$
$$=\frac{0.05}{3}[3.90+4\cdot 4.20+3.70]+\frac{0.2}{3}[3.90+4\cdot 4.20+3.70]$$
$$\frac{0.05}{3}[3.90+4\cdot 4.20+3.70]=2.68$$

四．（15 分）已知方程组 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & \alpha \\ 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$

(1) 写出解方程组 Jacobi 迭代格式； (2) 写出解方程组 Gauss-Seidel 迭代格式；

(3) 求出 Gauss-Seidel 迭代矩阵； (4) 讨论 Gauss-Seidel 迭代收敛的充要条件.

（1）$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & & x_2^{(k)} & -\alpha x_3^{(k)} & +b_1 \\ x_2^{(k+1)} = & -x_1^{(k)} & & & +b_2 \\ x_3^{(k+1)} = & -\alpha x_1^{(k)} & & & +b_3 \end{cases}$ （3 分）

(2) $\begin{cases} x_1^{(k+1)} = & & x_2^{(k)} & -\alpha x_3^{(k)} & +b_1 \\ x_2^{(k+1)} = & -x_1^{(k+1)} & & & +b_2 \\ x_3^{(k+1)} = & -\alpha x_1^{(k+1)} & & & +b_3 \end{cases}$ （3 分）

(3) $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -\alpha \\ 0 & -1 & \alpha \\ 0 & -\alpha & \alpha^2 \end{pmatrix}$ （4 分）

（4）$\rho(S) = |1-\alpha^2|$, $|1-\alpha^2| < 1$， （5 分）

$|\alpha| < \sqrt{2}, \alpha \neq 0$

五．（15 分）常微分方程初值问题 $\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y), & (a \le x \le b) \\ y(a) = y_0 \end{cases}$

用线性多步法构造 $p=3, q=2$ 的显式格式的求解公式。

解 按题意，积分区间为$[x_{n-3}, x_{n+1}]$；积分节点为$\{x_n, x_{n-1}, x_{n-2}\}$。

$$y_{n+1} = y_{n-3} + \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} [l_0(x) f(x_n, y(x_n)) + l_1(x) f(x_{n-1}, y(x_{n-1})) + l_1(x) f(x_{n-1}, y(x_{n-1}))] dx$$

$$y_{n+1} = y_{n-3} + h[a_0 f(x_n, y_n) + a_1 f(x_{n-1}, y_{n-1}) + a_2 f(x_{n-2}, y_{n-2})] \quad （5 分）$$

积分系数：

$$a_0 h = \int_{x_{n-3}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_{n-1})(x-x_{n-2})}{(x_n - x_{n-1})(x_n - x_{n-2})} dx = \frac{8}{3} h$$

$$a_1 h = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-2})}{(x_{n-1} - x_n)(x_{n-1} - x_{n-2})} dx = -\frac{4}{3} h$$

$$a_2 h = \int_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \frac{(x-x_n)(x-x_{n-1})}{(x_{n-2} - x_n)(x_{n-2} - x_{n-1})} dx = \frac{8}{3} h \quad （9 分）$$

计算格式：

$$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{h}{3}[8f(x_n,y_n)-4f(x_{n-1},y_{n-1})+8f(x_{n-2},y_{n-2})]$$

（1 分）

$$y_{n+1}=y_{n-3}+\frac{4h}{3}[2f(x_n,y_n)-f(x_{n-1},y_{n-1})+2f(x_{n-2},y_{n-2})]$$

六．（5 分） 推导用 Doolittle **分解**求解线性方程组 $Ax=b$ 的公式，

其中 A 是 n 阶方阵，$A=LU$，L 是单位下三角阵，U 是上三角阵

推导：计算 U 的第 k 行元素 $u_{kk},u_{k,k+1},\cdots,u_{k,n}$

$$a_{kj}=\sum_{r=1}^{n}l_{kr}u_{rj}=\begin{pmatrix}l_{k1} & l_{k2} & \dots & l_{k,k-1} & 1 & 0\dots0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{1j}\\ \vdots\\ u_{jj}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\sum_{r=1}^{k}l_{kr}u_{rj}=\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj}+u_{kj}$$

$$u_{kj}=a_{kj}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{kr}u_{rj},\ j=k,k+1,\cdots,n$$

计算 L 的第 k 列元素 $l_{k+1,k},l_{k+2,k},\cdots,l_{n,k}$

$$a_{ik}=\sum_{r=1}^{n}l_{ir}u_{rk}=(l_{i1},\cdots,l_{i,i-1},1,0,\cdots,0)\begin{pmatrix}u_{1k}\\ \vdots\\ u_{kk}\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}=\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk}+l_{ik}u_{kk}$$

$$l_{ik}=(a_{ik}-\sum_{r=1}^{k-1}l_{ir}u_{rk})\Big/u_{kk},\ i=k+1,k+2,\cdots,n$$

$$Ax=LUx=b,\quad Ly=b,Ux=y$$

解方程组 $LY=b$：　$y_i=b_i-\sum_{j=1}^{i-1}l_{ij}y_j\ ,i=1,2,\cdots,n$

解方程组 $UX=Y$：　$x_i=(y_i-\sum_{j=i+1}^{n}u_{ij}x_j)\Big/u_{ii}\ ,i=n,n-1,\cdots,1$

七．（5 分） 证明：求非线性方程 $f(x)=0$ 的根的牛顿迭代法是二阶方法。

证明：　$x_{k+1}=x_k-\dfrac{f(x_k)}{f'(x_k)}$ ，$k=1,2,\cdots$

迭代方程是 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,

$$\varphi'(x)=\frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2} \qquad \text{（1 分）}$$

$$\begin{aligned}x_{k+1}-\alpha&=\phi(x_k)-\phi(\alpha)\\&=\phi(\alpha)+(x_k-\alpha)\phi'(\alpha)+\frac{(x_k-\alpha)^2}{2!}\phi''(\xi)-\phi(\alpha)\\&=\frac{(x_k-\alpha)^2}{2!}\varphi''(\xi)\end{aligned} \qquad \text{（3 分）}$$

（ $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|e_{k+1}|}{|e_k|^n}=\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^n}=M$ ）

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{k+1}-\alpha|}{|x_k-\alpha|^2}=\lim_{k\to\infty}\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^2}=\varphi''(\alpha) \qquad \text{（1 分）}$$

求单根牛顿迭代是二阶迭代方法.