Exercise 2.1: 依据对偶理论，给出最短路径问题的一种求解方法。

最短路径问题的对偶问题为：

$$\begin{aligned} &\max\ y_s - y_t \\ &\text{s.t. } y_i - y_j \le c_{ij}\ \forall (i,j) \in E \end{aligned}$$

对于基变量x_{ij}，$y_i - y_j = c_{ij}$，即$\sigma_{ij} = y_i - y_j - c_{ij} = 0.$

对于非基变量x_{ij}而言，若$\sigma_{ij} = y_i - y_j - c_{ij} \le 0.$ 则已经对偶可行；若$\sigma_{ij} = y_i - y_j - c_{ij} > 0$, 则非对偶可行，需要引进基。

求解步骤类似于单纯形法求解运输模型：

1. 选取一组路径，作为初始可行基解。
2. 检验当前解是否可以改进，如果可改进，则引入一个非基变量进行步3，否则停止。
3. 当把步2中挑选的变量引进时，确定哪个路径应当由基解中退出。
4. 调整其他基本路径的流量（满足可行性），返回步2。

Exercise 2.2: 证明最大流最小割定理：任意一个流网络的最大流量等于该网络的最小割的容量。

由Exercise 2.3知若可行流x为最大流，则不存在关于x的流扩充路，否则可以找到更大的可行流。

已知不存在关于x的流扩充路，寻找截集(S,T)，使得$x(s) = U(S,T)$:

令$s \in S$，若$i \in S$，且$x(i,j) < u(i,j)$，则令$j \in S$；若$i \in S$，且$x(i,j) > 0$，则令$j \in S$。

因为不存在关于x的流扩充路，所以$t \notin S$。令$T = V/S$，

$$x(i,j) = \begin{cases} u(i,j) & (i,j) \in (S,T) \\ 0 & (i,j) \in (T,S) \end{cases}$$

则有$x(s) = \tilde{U}(S,T)$。

下证$\tilde{U}(S,T)$是最小割：

由割集定义，$x(s) \le U(S,T)$，$U(S,T)$为V的分割。所以$\max x(s) \le \min U(S,T)$，又有$x(s) = \tilde{U}(S,T)$，所以$\tilde{U}(S,T)$为最小割。

综上，任一流网络的最大流量等于该网络最小割的容量。

Exercise 2.3: 验证(63)式给出的x'是原网络$\mathcal{N}$的可行流，并且其流值为$x'(s) = x(s) + \Delta$.

因为π之外的边无流量变化，所以为验证新的流是可行流，需要对π验证两点：流量限制和流量守恒。

流量限制：对于由Rule1生成的边：

$$0 \le x(e) \le x(e) + \Delta \le x(e) + min\{u(e) - x(e) | e \in \pi\} \le x(e) + u(e) - x(e) = u(e)$$

对于由Rule2生成的边：

$$0 = x(e) - x(e) \leq x(e) - min\{x(e)|e \in \pi\} \leq x(e) - \Delta \leq x(e) \leq u(e)$$

流量守恒：分类讨论。$\forall v \in \pi, v \neq s, v \neq t$，考虑生成$v$在$\pi$上入边和出边的规则。

入边和出边均由Rule1生成

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in Out(v)} x'(e) - \sum_{e\in In(v)} x'(e) &= \left(\sum_{e\in Out(v)} x(e) + \Delta\right) - \left(\sum_{e\in In(v)} x(e) + \Delta\right) \\
&= \sum_{e\in Out(v)} x(e) - \sum_{e\in In(v)} x(e) \\
&= 0
\end{aligned}$$

入边和出边均有Rule2生成

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in Out(v)} x'(e) - \sum_{e\in In(v)} x'(e) &= \left(\sum_{e\in Out(v)} x(e) - \Delta\right) - \left(\sum_{e\in In(v)} x(e) - \Delta\right) \\
&= \sum_{e\in Out(v)} x(e) - \sum_{e\in In(v)} x(e) \\
&= 0
\end{aligned}$$

入边由Rule1生成，出边由Rule2生成

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in Out(v)} x'(e) - \sum_{e\in In(v)} x'(e) &= \sum_{e\in Out(v)} x(e) - \left(\sum_{e\in In(v)} x(e) + \Delta - \Delta\right) \\
&= \sum_{e\in Out(v)} x(e) - \sum_{e\in In(v)} x(e) \\
&= 0
\end{aligned}$$

入边由Rule2生成，出边由Rule1生成

$$\begin{aligned}
\sum_{e\in Out(v)} x'(e) - \sum_{e\in In(v)} x'(e) &= \left(\sum_{e\in Out(v)} x(e) + \Delta - \Delta\right) - \sum_{e\in In(v)} x(e) \\
&= \sum_{e\in Out(v)} x(e) - \sum_{e\in In(v)} x(e) \\
&= 0
\end{aligned}$$

所以新的流是可行流，下面验证$x'(s) = x(s) + \Delta$.

$$\begin{aligned}
x'(s) &= \sum_{e\in Out(s)} x'(e) - \sum_{e\in In(s)} x'(e) \\
&= \left(\sum_{e\in Out(v)} x(e) + \Delta\right) - \sum_{e\in In(s)} x(e) \text{ (Rule1)} \\
&\quad \text{or} \sum_{e\in Out(s)} x(e) - \left(\sum_{e\in In(v)} x(e) - \Delta\right) \text{ (Rule 2)} \\
&= x(s) + \Delta
\end{aligned}$$

Exercise 2.4: 通过构造说明最小成本流问题作为其特殊情况包含：最短路问题和最大流问题。

最短路问题：考虑最短路问题网络$\mathcal{N}=(G,s,t,c)$, 引入哑元终点$\tilde{t}$和新边

$$(v,\tilde{t}\,)\ s.t.\ c(v,\tilde{t}\,)=0\ u(v,\tilde{t}\,)=1\ \forall v\in V$$

则最短路径问题的求解化为求解流值$f^*=n$的最大流问题，其中n为顶点数。

因为连接$\tilde{t}$与其他顶点的边容量均为1，且流值为$n=|V|$，所以由s到$\tilde{t}$的最小成本流使得s到各个顶点的成本最小，又因为原网络中各边容量为∞，所以为最短路径。

最大流问题：引入哑元始点$\tilde{s}$，添加新边：

$$(\tilde{s},s)\ s.t.\ c(\tilde{s},s)=0\ u(\tilde{s},s)=\infty$$
$$(\tilde{s},t)\ s.t.\ c(\tilde{s},t)=1\ u(\tilde{s},t)=\infty$$

令原网络中$c(e)=0,\forall e\in E$，令流值$f^*=\sum_{e\in E}u(e)$, 源点为$\tilde{s}$, 汇点为t，则最大流问题转化为求解$\tilde{s}$到t的最小成本流问题。

这是因为为使成本最小，尽量避免使流量直接从$\tilde{s}$到t，而是流经s到t，在原网络流量达到最大流后剩下的流量从$\tilde{s}$到t。

Exercise 2.5: 证明最小成本循环流问题与最小成本流问题具有等价的模型化能力。

最小成本流⇒最小成本循环流：考虑网络$\mathcal{N}=(G,s,t,c,u)$上的最小成本流问题，其流值

$$f^*=\sum_{e\in Out(s)}x(e)-\sum_{e\in In(s)}x(e)$$

添加汇点到源点的新边(t,s)并且令

$$\tilde{c}(t,s)=0,\tilde{l}\,(t,s)=\tilde{u}(t,s)=f^*.$$

在原网络中，令

$$\tilde{c}(e)=c(e),\tilde{l}\,(e)=0,\tilde{u}(e)=u(e)$$

则转化为最小成本循环流问题。

最小成本循环流⇒最小成本流：考虑网络$\mathcal{N}=(G,c,l,u)$上的最小成本循环流问题，$\forall v\in V$，令

$$f^*(v)=\sum_{e\in In(v)}l(e)-\sum_{e\in Out(v)}l(e)$$

对于$f^*(v)>0$，则令v为源点，$S=\{v|f^*(v)>0\}$; 对于$f^*(v)<0$，则令v为汇点，$T=\{v|f^*(v)<0\}$.

引入哑元始点$\tilde{s}$和哑元终点$\tilde{t}$，并加入新边

$$(\tilde{s},v)\ s.t.\ \tilde{c}(\tilde{s},v)=0\ \tilde{u}(\tilde{s},v)=f^*(v)\ \forall v\in S$$

$$(v,\tilde{t}\,)\ s.t.\ \tilde{c}(v,\tilde{t}\,)=0\ \tilde{u}(v,\tilde{t}\,)=-f^*(v)\forall v\in T$$

在原网络中，令

$$\tilde{u}(e) = u(e) - l(e)\ \tilde{c}(e) = c(e)$$
$$f^*(\tilde{s}) = \sum_{v \in S} f^*(v)$$
$$\tilde{x}(e) = x(e) - l(e)$$

则网络$\mathcal{N} = (G, c, l, u)$上的最小成本循环流问题转化为$\tilde{\mathcal{N}} = (\tilde{G}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{c}, \tilde{U})$上的最小成本流问题，$\mathcal{N} = (G, c, l, u)$的最小成本 = $\tilde{\mathcal{N}} = (\tilde{G}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{c}, \tilde{U})$的最小成本 + $\sum_{e \in E} c(e)l(e)$。

Exercise 3.1 设现有一台2年龄的设备，另规定5年龄的设备必须更换。在规划期购置新设备的成本分别是

$$(p_1, p_2, p_3, p_4, p_5) = (100, 105, 110, 115, 120)$$

试构建如下设备更新的动态规划模型并求其最优更新策略。

设备年龄t	残值v_t	运行费用c_t
0	-	30
1	50	40
2	25	50
3	10	75
4	5	90
5	2	-

$$f_i(t) = max \begin{cases} -c_t + f_{i+1}(t+1) & \text{K} \\ -c_0 + v_t - p_i + f_{i+1}(1) & \text{R} \end{cases}$$

$$f_5(4) = max \begin{cases} -c_4 + f_6(5) & = -90 + 0 & = -90 & \text{K} \\ -c_0 + v_4 - p_5 + f_6(1) & = -30 + 5 - 120 + 0 & = -145 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_5(3) = max \begin{cases} \color{red}{-c_3 + f_6(4)} & \color{red}{= -75 + 0} & \color{red}{= -75} & \color{red}{\text{K}} \\ -c_0 + v_3 - p_5 + f_6(1) & = -30 + 10 - 120 + 0 & = -140 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_5(2) = max \begin{cases} -c_2 + f_6(3) & = -50 + 0 & = -50 & \text{K} \\ -c_0 + v_2 - p_5 + f_6(1) & = -30 + 25 - 120 + 0 & = -125 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_5(1) = max \begin{cases} -c_1 + f_6(2) & = -40 + 0 & = -40 & \text{K} \\ -c_0 + v_1 - p_5 + f_6(1) & = -30 + 50 - 120 + 0 & = -100 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_4(5) = -c_0 + v_5 - p_4 + f_5(1) = -30 + 2 - 115 + (-40) = -183$$

$$f_4(3) = max\begin{cases} -c_3 + f_5(4) & = -75 + (-90) & = -165 & \text{K} \\ -c_0 + v_3 - p_4 + f_5(1) & = -30 + 10 - 115 + (-40) & = -175 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_4(2) = max\begin{cases} -c_2 + f_5(3) & = -50 + (-75) & = -125 & \text{K} \\ -c_0 + v_2 - p_4 + f_5(1) & = -30 + 25 - 115 + (-40) & = -160 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_4(1) = max\begin{cases} -c_1 + f_5(2) & = -40 + (-50) & = -90 & \text{K} \\ -c_0 + v_1 - p_4 + f_5(1) & = -30 + 50 - 115 + (-40) & = -135 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_3(4) = max\begin{cases} -c_4 + f_4(5) & = -90 + (-183) & = -273 & \text{K} \\ -c_0 + v_4 - p_3 + f_4(1) & = -30 + 5 - 110 + (-90) & = -225 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_3(2) = max\begin{cases} -c_2 + f_4(3) & = -50 + (-165) & = -215 & \text{K} \\ -c_0 + v_2 - p_3 + f_4(1) & = -30 + 25 - 110 + (-90) & = -205 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_3(1) = max\begin{cases} -c_1 + f_4(2) & = -40 + (-125) & = -165 & \text{K} \\ -c_0 + v_1 - p_3 + f_4(1) & = -30 + 50 - 110 + (-90) & = -180 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_2(3) = max\begin{cases} -c_3 + f_3(4) & = -75 + (-225) & = -300 & \text{K} \\ -c_0 + v_3 - p_2 + f_3(1) & = -30 + 10 - 105 + (-165) & = -290 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_2(1) = max\begin{cases} -c_1 + f_3(2) & = -40 + (-205) & = -245 & \text{K} \\ -c_0 + v_1 - p_2 + f_3(1) & = -30 + 50 - 105 + (-165) & = -250 & \text{R} \end{cases}$$

$$f_1(2) = max\begin{cases} -c_2 + f_2(3) & = -50 + (-290) & = -340 & \text{K} \\ -c_0 + v_2 - p_1 + f_2(1) & = -30 + 25 - 100 + (-245) & = -350 & \text{R} \end{cases}$$

若第六年不出售设备，则最优更新策略为KRKKK，收益为-340；若考虑第六年卖出设备，则最优策略不变，收益为-335。