一、计算以下问题：（每小题6分，共60分）

1、信号 $x(t)$ 的傅里叶频谱为 $X(j\omega)$，那么信号 $x(t)$ 的偶分量 $x_e(t)$、奇分量 $x_o(t)$ 各自的频谱与 $X(j\omega)$ 有什么关系？

2、信号 $x(t)$ 为实的因果信号且在 $t=0$ 时不包含 $\delta(t)$ 及其导数项，它的傅里叶频谱按实部虚部表示为 $X(j\omega)=R(j\omega)+jI(j\omega)$，请问 $R(j\omega)$、$I(j\omega)$ 各自有何特性？$R(j\omega)$ 与 $I(j\omega)$ 有何联系？

3、微分方程 $y'(t)+2y(t)=x(t)$ 描述一个起始松弛的连续时间系统，试求当输入信号 $x(t)=\cos(2t),\ -\infty<t<\infty$ 时系统的输出 $y(t)$。

4、信号 $x(t)$ 的傅里叶频谱函数为 $X(j\omega)=-j\operatorname{sgn}(\omega)=\begin{cases}-j,\omega>0\\ j,\ \omega<0\end{cases}$，试求 $x(t)$。

5、利用傅里叶变换求 $\int_0^\infty \cos(\omega t)d\omega$ 的积分值。

6、试画出信号 $x(t)=\dfrac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}+\dfrac{\sin(\pi t/2-\pi)}{\pi t-2\pi}$ 的幅度频谱曲线 $|X(\omega)|$ 和相位频谱曲线 $\varphi(\omega)$，并求出对这个信号进行采样的奈奎斯特间隔 T_s。

7、试求频率响应为 $H(\omega)=\dfrac{\omega^2}{5-\omega^2+2j\omega}$ 的连续时间因果 LTI 系统的单位阶跃响应 $s(t)$。

8、已知 $X(z)$ 为序列 $x[n]$ 的 Z 变换，$X(z)=Z\{x[n]\}$。试求以下序列的 Z 变换，要求用 $X(z)$ 表达：1）$x[-n]$；2）$x^*[n]$。

9、已知序列 $x[n]=r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$，$-\infty<n<+\infty$。求 $x[n]$ 的 Z 变换 $X(z)$，并给出相应的收敛域。

10、试求信号 $x(t)=e^{-\pi t^2}$ 的自相关函数 $R_x(t)$、信号 $x(t)$ 的能量 E_x 及其能量谱密度函数 $\psi_x(\omega)$。可能利用的数学式：$\int_0^{\infty} e^{-(t/\tau)^2}dt=\sqrt{\pi}\tau/2$

二、信号 $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\alpha^{|k|}e^{jk(2\pi/T)t}$，$0<\alpha<1$ **通过频率响应** $H(\omega)=\begin{cases}1, & |\omega|<W\\0, & |\omega|>W\end{cases}$ **的 LTI 系统。试确定** W **值取多大时，才能确保系统输出信号** $y(t)$ **的平均功率至少是输入信号** $x(t)$ **平均功率的** 80%。　　（10 分）

三、已知 $x[n]$ **是周期为 4 的周期序列，对序列** $x[n]$ **在** $0\le n\le 7$ **做 8 点 DFT 运算，得到 DFT 系数为：** $X(0)=X(2)=X(4)=X(6)=1$，$X(1)=X(3)=X(5)=X(7)=0$。**试求：**　　（共 15 分）

1. 周期序列 $x[n]$，并概画出它的序列图形；（5 分）
2. 该周期序列 $x[n]$ 通过单位冲激响应为 $h[n]=(-1)^n\dfrac{\sin^2(\pi n/2)}{\pi^2 n^2}$ 的数字滤波器后的输出 $y[n]$，并概画出它的序列图形。（10 分）

四、微分方程 $y''(t)+5y'(t)+6y(t)=x''(t)-3x'(t)+2x(t)$ **所描述的因果连续时间系统的起始条件为** $y(0_-)=1,\ y'(0_-)=-1$。　　（共 15 分）

1. 试求该微分方程所描述的 LTI 系统的系统函数 $H(s)$，并画出 $H(s)$ 在 s 平面的零极点分布和收敛域；（5 分）
2. 画出该 LTI 系统的幅频响应特性曲线；（2 分）
3. 当输入 $x(t)=e^{-2t}u(t)$ 时，试求系统的零输入响应 $y_{zi}(t), t\ge 0$、零状态响应 $y_{zs}(t), t\ge 0$。（8 分）

一、计算以下问题：（每小题 6 分，共 60 分）

1. 求信号 $x(t)=e^{-2t}u(t)+e^{-3t+1}\delta(t)$ 通过微分器的输出信号 $y(t)$。

2. 对于长度为 N 的有限长序列 $x[n],\ n=0,1,2,\cdots,N-1$，试问对 $x[n]$ 进行 N 点 DFT 运算所得到的序列 $X(k)$ 与 $x[n]$ 的傅里叶频谱 $X(e^{j\Omega})$ 有何关系？对该序列 $x[n]$ 以周期 N 左右无限延拓构成周期序列 $\tilde{x}[n]$，试问 $\tilde{x}[n]$ 的傅里叶级数系数 F_k 与 $X(k)$ 有何关系？

3. 试求图 1.3 所示的半波正弦脉冲信号 $x(t)$ 的拉普拉斯变换和傅里叶变换。

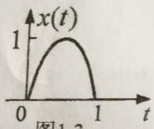


图1.3

4. 对信号 $x(t)=[\sin(5\pi t)/(\pi t)]^2$ 进行采样的奈奎斯特频率 ω_s 和奈奎斯特间隔 T_s 分别是多少？

5. 试求升余弦脉冲信号 $x(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\tau}[1+\cos(\dfrac{\pi}{\tau}t)], & |t|<\tau \\ 0, & |t|>\tau\end{cases}$ 的频谱。

6. 对于系统函数为 $H(s)=\dfrac{s+2}{s^2+7s+12},-4<\mathrm{Re}\{s\}<-3$ 的某一个连续时间 LTI 系统，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

7. 试分别求如下拉普拉斯变换和 Z 变换的反变换 $f(t)$ 和 $f[n]$，
$F(s)=\ln(1+as^{-1}),\ a>0,\ \mathrm{Re}\{s\}>0$ 和 $F(z)=\ln(1+az^{-1}),\ |z|>|a|$

8. 已知 $H(z)$ 为一个稳定的因果系统的系统函数，$h[n]$ 为其单位冲激响应。试证明 $\lim\limits_{n\to\infty}h[n]=\lim\limits_{z\to 1}(z-1)H(z)$，给出推导过程。

9. 微分方程 $y'(t)+3y(t)=2x(t)$ 描述一个起始松弛的连续时间系统，试求当输入信号 $x(t)=e^{2t}$，$-\infty<t<\infty$ 时系统的输出 $y(t)$。

10. 已知系统的频率响应 $H(\mathrm{j}\omega)=\dfrac{\omega e^{-\mathrm{j}(\omega-3\pi/2)}}{10-\omega^2+6\mathrm{j}\omega}$，求它的单位冲激响应 $h(t)$。

二、实序列 $x[n]$ 的离散时间傅里叶变换为 $X(e^{j\Omega})$，试确定满足下列 4 个条件的序列 $x[n]$：（1）$x[n]$ 在 $n>0$ 时等于 0；（2）在 $n=0$ 时 $x[0]>0$；（3）$\int_0^{2\pi}\left|X(\mathrm{e}^{j\Omega})\right|^2\mathrm{d}\Omega=12\pi$；（4）$X(e^{j\Omega})=\mathrm{Re}[X(e^{j\Omega})]+j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})]$，其中 $\mathrm{Im}[X(e^{j\Omega})]=\sin\Omega-\sin(2\Omega)$。（10 分）

三、由差分方程 $y[n]+0.75y[n-1]+0.125y[n-2]=x[n]+3x[n-1]$ 表示的因果系统，已知其附加条件为 $y[0]=1, y[-1]=-6$。（15 分）

1. 求系统函数 $H(z)$，画出 $H(z)$ 在 z 平面上零极点分布和收敛域；（5 分）
2. 试画出用最少数目的三种离散时间基本单元（离散时间数乘器、相加器和单位延时器）实现该系统的规范型实现结构；（4 分）
3. 当输入 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，求该系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$。（6 分）

四、在图 4 所示的离散时间系统中，子系统 $H_1(e^{j\Omega})$ 的单位冲激响应为 $h_1[n]=[\sin(\pi n/3)\sin(\pi n/6)]/(\pi n^2)$。（共 15 分）

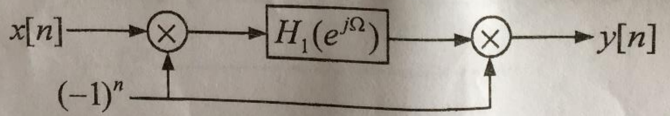


图 4

1. 求整个系统的单位冲激响应 $h[n]$；（4 分）
2. 画出整个系统频率响应 $H(e^{j\Omega})$ 的频率响应特性曲线，并判断它是什么类型（低通、高通、带通等）的滤波器；（5 分）
3. 当系统的输入 $x[n]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[n-2k]\mathrm{e}^{jk\pi}+\sum_{k=0}^{2}2^{-k}\cos(\pi kn/3)+\sin\left(\dfrac{(31n-1)\pi}{12}\right)$ 时，求系统的输出 $y[n]$。（6 分）

一、计算以下问题：（每小题 8 分，共 56 分）

1. 试判断下列信号是否是周期信号？若是，给出其基本周期。

1） $x(t)=\cos(3t+\pi/4)$　　2） $x[n]=\cos(\frac{n}{4})\cos(\frac{\pi n}{4})$

2. 已知信号 $x(t)$ 如图 1.2 所示，画出 $x(2-\frac{t}{2})$ 的波形图和 $\frac{d}{dt}x(t)$ 的波形图。

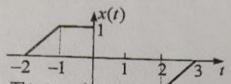


图1.2

3. 对于以输入输出关系 $y(t)=e^{2t}\int_{-\infty}^{t}(e^{-\tau})^2x(\tau)d\tau$ 描述的系统，判断系统的记忆性、线性、时不变性、因果性、稳定性以及可逆性；如果系统是可逆的，试求它的逆系统的单位冲激响应。

4. 对于起始松弛的离散时间 LTI 系统，当输入为 $x[n]=(0.5)^n u[n]$ 时，系统的输出为 $y[n]=(0.5)^n\{u[n-2]-u[n-5]\}$，求系统的单位冲激响应 $h[n]$。

5. 已知离散时间因果稳定的 LTI 系统单位冲激响应为 $h[n]=\sum_{k=0}^{\infty}h_k\delta[n-k]$，它的逆系统是因果稳定 LTI 系统，其单位冲激响应为 $h_{inv}[n]=\sum_{k=0}^{\infty}g_k\delta[n-k]$。试确定 g_k 满足的代数方程并找出计算的递推算法。

6. 求信号 $x(t)=u(t)-u(t-2)$ 与 $y(t)=\cos(\pi t)[u(t)-u(t-2)]$ 的互相关函数 $R_{xy}(t)$。

7. 对方程 $y[n]-0.25y[n-2]=x[n]-x[n-1]$ 和起始条件 $y[-1]=8, y[-2]=-4$ 表示的离散时间因果系统，用递推方法计算输入 $x[n]=\cos(\pi n/2)u[n]$ 时系统的零状态响应 $y_{zs}[n]$ 和零输入响应 $y_{zi}[n]$，分别计算前 4 个序列值。

二、某系统当输入$x(t)=\begin{cases}1,\ 0<t<2\\0,\ 其它\end{cases}$时，输出为$y(t)=\begin{cases}1-\cos\pi t,\ 0\le t\le 2\\0,\ 其它\end{cases}$。已知该系统是因果的连续时间 LTI 系统。试求： （共 16 分）

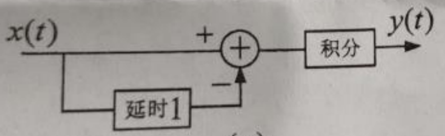
1. 该系统的单位冲激响应$h(t)$，并概画出$h(t)$的波形；（10 分）
2. 试求该系统对于输入信号为$x_1(t)=u(t)-u(t-1)$时系统的响应$y_1(t)$，并概画出$y_1(t)$的波形。（6 分）

三、微分方程$y'(t)+2y(t)=x'(t)-x(t)$表示因果 LTI 系统。试求：（共 16 分）

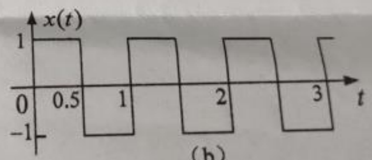
1. 该系统的单位冲激响应$h(t)$和单位阶跃响应$s(t)$；（12 分）
2. 用最少的基本单元（积分器、相加器、数乘器）实现该系统。（4 分）

四、某系统如图 4（a）所示。试求： （共 12 分）

1. 求系统的单位阶跃响应$s(t)$，并画出$s(t)$的波形；（6 分）
2. 当系统输入信号$x(t)$如图 4（b）所示，求系统的响应$y(t)$，并画出$y(t)$的波形。（6 分）



（a）



（b）

图 4

3．已知信号 $x(t)$ 的傅里叶频谱 $X(j\omega)$ 如图 1.3 所示，试求 $x(t)$。

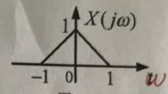


图1.3

解：$X'(j\omega)=u(\omega+1)-2u(\omega)+u(\omega-1)\xrightarrow{CFT^{-1}}-jtx(t)$

$X''(j\omega)=\delta(\omega+1)-2\delta(\omega)+\delta(\omega-1)\xrightarrow{CFT^{-1}}-t^2x(t)$

由于 $e^{j\omega_0 t}\xrightarrow{CFT}2\pi\delta(\omega-\omega_0)$，则

$$\delta(\omega+1)-2\delta(\omega)+\delta(\omega-1)\xrightarrow{CFT^{-1}}\frac{1}{2\pi}(e^{-jt}-2+e^{jt})=\frac{(\cos t)-2}{\pi}$$

$x(t)=(2-\cos t)/(\pi t^2)=\frac{2}{2\pi}Sa^2(\frac{t}{2})\cdot\frac{1}{2\pi}\quad\frac{1}{2\pi}\frac{\sin^2\frac{t}{2}}{\frac{t^2}{4}}$ （6 分）

4. 试求 $X(z)=(z^2+1)/(z^2+z-2)$，$1<|z|<2$ 的逆 Z 变换。

解：将 $X(z)$ 改写成关于 z^{-1} 的有理多项式，即

$$X(z)=\frac{z^2+1}{z^2+z-2}=\frac{1+z^{-2}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}=1+\frac{-z^{-1}+3z^{-2}}{1+z^{-1}-2z^{-2}}=1+\frac{-z^{-1}+3z^{-2}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}$$

$$=1+z^{-1}\frac{-1+3z^{-1}}{(1+2z^{-1})(1-z^{-1})}=1+\frac{(-5/3)z^{-1}}{1+2z^{-1}}+\frac{(2/3)z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

考虑到 $1<|z|<2$，则 $\frac{-(5/3)z^{-1}}{1+2z^{-1}}+\frac{(2/3)z^{-1}}{1-z^{-1}}\xrightarrow{L^{-1}}\frac{2}{3}u[n-1]+\frac{5}{3}(-2)^{n-1}u[-n]$

$x[n]=\delta[n]+\frac{2}{3}u[n-1]+\frac{5}{3}(-2)^{n-1}u[-n]=-\frac{1}{2}\delta[n]+\frac{2}{3}u[n]-\frac{5}{6}(-2)^n u[-n-1]$ （6 分）

$=\frac{1}{3}u[n]+\frac{1}{3}u[n-2]-\frac{2}{3}(-2)^n u[-n-1]-\frac{2}{3}(-2)^{n-2}u[-n+1]$

5. 差分方程 $y[n]-0.5y[n-1]=x[n]$ 描述一个起始松弛的离散时间系统，试求当输入信号 $x[n]=1+(-1)^n$，$-\infty<n<\infty$ 时系统的输出 $y[n]$。

解：该差分方程描述的离散时间 LTI 系统的频率响应为 $H(e^{j\Omega})=1/(1-0.5e^{-j\Omega})$

根据 LTI 系统的特征函数特征值关系：$e^{j\Omega_0 n}\xrightarrow{H(e^{j\Omega_0})}H(e^{j\Omega_0})e^{j\Omega_0 n}$

输入信号可以表示为 $x[n]=1+(-1)^n=e^{j0\times n}+e^{j\pi\times n}$，$-\infty<n<\infty$，则

$y[n]=H(e^{j0})e^{j0\times n}+H(e^{j\pi})e^{j\pi\times n}$

$=\frac{1}{1-0.5e^{-j0}}e^{j0\times n}+\frac{1}{1-0.5e^{-j\pi}}e^{j\pi\times n}=2+\frac{2}{3}(-1)^n$ （6 分）

6、某一个实的连续时间因果稳定系统具有最小相移，其频率响应 $H(\omega)$ 满足关系 $|H(\omega)|^2=\frac{\omega^2+9}{\omega^4+5\omega^2+4}$，试求系统函数 $H(s)$，并概画出零极点图和收敛域。

解：由于实系统的频谱响应满足共轭对称性，即 $H^*(\omega)=H(-\omega)$，则

$|H(\omega)|^2=H(\omega)H^*(\omega)=H(\omega)H(-\omega)$

由于系统是稳定的，所以 $H(\omega)=H(s)|_{s=j\omega}$，或者 $H(s)=H(\omega)|_{j\omega=s}$

得到 $|H(s)|^2=H(s)H(-s)$

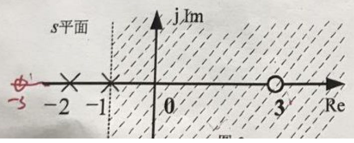
$|H(\omega)|^2=\frac{\omega^2+9}{\omega^4+5\omega^2+4}=\frac{9-(j\omega)^2}{4-5(j\omega)^2+(j\omega)^4}$，将 $s=j\omega$ 代入

$$|H(s)|^2=\frac{9-s^2}{4-5s^2+s^4}=\frac{(3+s)(3-s)}{(s+2)(s-2)(s+1)(s-1)}=\frac{(3+s)(3-s)}{(s+2)(-s+2)(s+1)(-s+1)}$$

从而得到 $H(s)=\frac{s+3}{(s+2)(s+1)}$ （3 分）

由于系统是因果的，故收敛域 Roc: $\text{Re}\{s\}>-1$ （1 分）

该系统的零极点图和收敛域如图 6.2 所示



7. 已知$x(t)=\dfrac{\sin(\pi t)}{\pi t}$, $y(t)=\left[\dfrac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}\right]^2$，求$x(t)$和$y(t)$的互相关函数$R_{xy}(t)$。

解：$R_{xy}(t)=x(t)*y^*(-t)$,因为$y(t)$是实偶函数，故$y^*(-t)=y(t)$，则

$$R_{xy}(t)=x(t)*y(t)\xrightarrow{CFT}F\{R_{xy}(t)\}=X(j\omega)Y(j\omega)$$

$$x(t)=\sin(\pi t)/(\pi t)\xrightarrow{\text{CFT}}X(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1,-\pi<\omega<\pi\\0,\ \text{其它}\end{cases}$$

再看 $y_0(t)=\sin(\pi t/2)/(\pi t)\xrightarrow{\text{CFT}}Y_0(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}1,\ -\pi/2<\omega<\pi/2\\0,\ \text{其它}\end{cases}$ +2)

$$y(t)=y_0(t)\times y_0(t)\xrightarrow{\text{CFT}}Y(\mathrm{j}\omega)=Y_0(\mathrm{j}\omega)*Y_0(\mathrm{j}\omega)/2\pi$$

$Y(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}(\omega+\pi)/(2\pi),\ -\pi<\omega<0\\-(\omega-\pi)/(2\pi),\ 0<\omega<\pi\\0,\ \text{其它}\end{cases}$，而$X(\mathrm{j}\omega)$具有$[-\pi,\pi]$理想低通特性 +2)

$X(\mathrm{j}\omega)Y(\mathrm{j}\omega)=\overset{R}{\cancel{Y}}(\mathrm{j}\omega)$，对其求反变换得到$R_{xy}(t)$：

$$R_{xy}(t)=F^{-1}\{X(j\omega)Y(j\omega)\}=F^{-1}\{Y(j\omega)\}=y(t)=\left[\frac{\sin(\pi t/2)}{\pi t}\right]^2$$ （6分）

8. 试求信号$x(t)=e^{-\pi t^2}$的自相关函数$R_x(t)$、信号$x(t)$的能量E_x及其能量谱密度函数$\psi_x(\omega)$。

解：$R_x(t)=x(t)*x^*(-t)=e^{-\pi t^2}*e^{-\pi t^2}$

利用高斯函数的傅里叶变换对：$e^{-(t/\tau)^2}\xrightarrow{CFT}\sqrt{\pi}\tau e^{-(\omega\tau/2)^2}$

可得：$e^{-\pi t^2}\xrightarrow{\text{CFT}}e^{-\omega^2/(4\pi)}$

$$R_x(t)=e^{-\pi t^2}*e^{-\pi t^2}\xrightarrow{\text{CFT}}e^{-\omega^2/(4\pi)}\times e^{-\omega^2/(4\pi)}=e^{-\omega^2/(2\pi)}=e^{-(\omega/2)^2\times(\sqrt{2}/\sqrt{\pi})^2}$$

取$\tau=\sqrt{2}/\sqrt{\pi}$，得到$R_x(t)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-(\sqrt{\pi}\,t/\sqrt{2})^2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{2}t^2}$ （3分）

信号$x(t)$的能量$E_x=R_x(0)=1/\sqrt{2}=\sqrt{2}/2$ （1分）

能量谱密度函数$\psi_x(\omega)=|X(\omega)|^2=[e^{-\omega^2/(4\pi)}]^2=e^{-2\omega^2/(4\pi)}=e^{-\omega^2/(2\pi)}$ （2分）

二、在图 2 所示的多径信号影响消除系统中，含有信号 $x(t)$ 及其多径信号的模型为 $s(t)=x(t)+\alpha x(t-T_0)$，$0<|\alpha|<1$。已知 $x(t)$ 是带限于 ω_M 的带限信号；$\alpha x(t-T_0)$ 是从另一条路径传输来的信号，T_0 为路径延时；$H_L(\omega)=A[u(\omega+\pi/T_s)-u(\omega-\pi/T_s)]$。（16 分）

1. 假设路径延时 $T_0<\pi/\omega_M$，选择抽样间隔 $T_s=T_0$，试确定图 3 中离散时间滤波器的单位冲激响应 $h[n]$，以使得输出 $y(t)$ 与 $x(t)$ 成正比；（10 分）
2. 确定理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 的增益 A，以使得 $y(t)=x(t)$。（5 分）

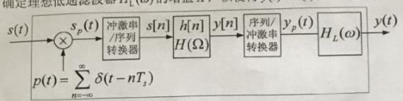


图 2

解：1. $s_p(t)=s(t)p(t)=s(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT_s)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}s(nT_s)\delta(t-nT_s)$

$x(t)$ 带限于 ω_M，$s(t)$ 只是 $x(t)$ 及其延时的线性组合，则 $s(t)$ 也带限于 ω_M。

由于 $T_s=T_0$，$T_0<\pi/\omega_M$，抽样频率 $\omega_s>2\omega_M$，$S_p(\omega)$ 的频谱不会混叠。

冲激串/序列转换就是将抽样信号的幅度值作为序列的幅度值，在转换过程中，对抽样间隔进行了归一化处理，即

$$s(t)|_{t=nT_s}=s(nT_s)|_{T_s=1}=s[n]$$

这样得到的 $s[n]$ 的频谱也不会有混叠失真。

由于 $s(t)=x(t)+\alpha x(t-T_0)$，而且 $T_s=T_0$

$$s[n]=s(nT_s)=x(nT_s)+\alpha x(nT_s-T_0)=x(nT_s)+\alpha x(nT_s-T_s)=x[n]+\alpha x[n-1]$$

则 $S(\Omega)=(1+\alpha e^{-j\Omega})X(\Omega)$

后续再将离散序列 $y[n]$ 转换为连续时间信号 $y(t)$，要使 $y(t)$ 与 $x(t)$ 成正比，只需使 $y[n]=x(nT_s)$ 或者 $y[n]=x[n]$ 即可。因此离散滤波器的频率响应为

$H(\Omega)=\dfrac{Y(\Omega)}{S(\Omega)}=\dfrac{X(\Omega)}{(1+\alpha e^{-j\Omega})X(\Omega)}=\dfrac{1}{1+\alpha e^{-j\Omega}}$，其单位冲激响应 $h[n]$ 为

$h[n]=(-\alpha)^n u[n]$ （10 分）

2. 在 $T_s=T_0$ 时，抽样信号 $s_p(t)$ 的频谱为 $S_p(\omega)=\dfrac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S(\omega-k\omega_s)$

经过冲激串/序列转换后，$s[n]$ 的频谱 $S(\Omega)$ 为

$$S(\Omega)=S_p(\Omega/T_s)=\frac{1}{T_s}\sum_{k=-\infty}^{\infty}S(\frac{\Omega-k2\pi}{T_s})$$

在一个 2π 主值区间，$S(\Omega)=\dfrac{1}{T_s}S(\dfrac{\Omega}{T_s}),\ |\Omega|\le\pi$

同样对于信号 $x(t)$ 对应的 $x[n]$，其频谱也存在关系：$X(\Omega)=\dfrac{1}{T_s}X(\dfrac{\Omega}{T_s}),\ |\Omega|\le\pi$

根据小题 1 的结果，$y[n]=x[n]$，以及离散滤波器的频域输入输出关系

$$Y(\Omega)=S(\Omega)H(\Omega)=X(\Omega)$$

$y[n]$ 经过序列/冲激串转换后得到 $y_p(t)$，其频谱 $Y_p(\omega)$ 与 $Y(\Omega)$ 的关系为

$$Y_p(\omega)=Y(\Omega)|_{\Omega=\omega T_s}=X(\Omega)|_{\Omega=\omega T_s}=X(\omega T_s)$$

它通过理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 得到 $y(t)$ 的频谱为

$$Y(\omega)=Y_p(\omega)H_L(\omega)=AY_p(\omega)=\frac{A}{T_s}X(\omega)$$

理想低通滤波器 $H_L(\omega)$ 的增益 $A=T_s=T_0$，可得 $y(t)=x(t)$ （6 分）

三、电路如图 3 所示，图中 $R=1\Omega, L_1=2H, L_2=\dfrac{2}{3}H, C=\dfrac{3}{4}F$。$v_i(t)$ 和 $v_o(t)$ 分别是电路的输入输出电压信号。（16 分）

1. 求该电路的系统函数 $H(s)=V_o(s)/V_i(s)$ 及收敛域；（5 分）

2. 概画出 $H(s)$ 的零极点分布、收敛域，并粗略画出该系统的幅频响应特性曲线；（6 分）

3. 输入电压信号 $v_i(t)=5+0.1\sin(t\frac{\sqrt{2}}{2})+0.05\sin(t\sqrt{2})$（伏特）时，求系统的输出 $v_o(t)$。（5 分）

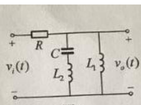


图3

解：1. 利用 s 域模型和电路元件互联及分压关系，可得该电路的系统函数为

$$H(s)=\frac{V_o(s)}{V_i(s)}=\frac{1\Big/\left(\frac{1}{sL_2+1/sC}+\frac{1}{sL_1}\right)}{R+1\Big/\left(\frac{1}{sL_2+1/sC}+\frac{1}{sL_1}\right)}=\frac{s(s^2+\frac{1}{L_2C})}{s^3+\frac{R(L_1+L_2)}{L_1L_2}s^2+\frac{1}{L_2C}s+\frac{R}{L_1L_2C}}$$

将元件参数代入则有

$$H(s)=\frac{s(s^2+2)}{s^3+2s^2+2s+1}=\frac{s(s^2+2)}{(s+1)(s^2+s+1)} \qquad （4 分）$$

由于该电路系统是因果系统，故其收敛域为 $\mathrm{Re}(s)>-0.5$ （1 分）

2. 系统函数的零点为 $z_1=0, z_2=j\sqrt{2}, z_3=-j\sqrt{2}$，极点为 $p_1=-1$，$p_2=-0.5+j\sqrt{3}/2, z_3=-0.5-j\sqrt{3}/2$，如图 3. 1 所示。（3 分）

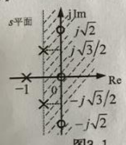


图3. 1

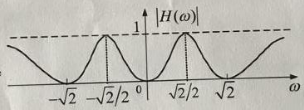


图3. 2

根据系统的零极点图粗略画出系统的幅频响应特性曲线如图 3.2 所示。（3 分）

3. 当输入电压信号 $v_i(t)=5+0.1\sin(t\sqrt{2}/2)+0.05\sin(t\sqrt{2})$（伏特）时，考虑到系统在 $\omega=0, \omega=\pm\sqrt{2}$ 的频率时系统的频率响应为零，故该输入中的直流分量和二次谐波分量 $0.05\sin(t\sqrt{2})$ 均不会产生输出。系统在 $\omega=\pm\sqrt{2}/2$ 的频率响应为：

$$H(\sqrt{2}/2)=H(s)|_{s=j\sqrt{2}/2}=\frac{s(s^2+2)}{(s+1)(s^2+s+1)}|_{s=j\sqrt{2}/2}=1，\quad H(-\sqrt{2}/2)=H(s)|_{s=-j\sqrt{2}/2}=1$$

$$v_o(t)=0.1\{\frac{e^{jt\sqrt{2}/2}}{2j}\times H(\sqrt{2}/2)-\frac{e^{-jt\sqrt{2}/2}}{2j}\times H(-\sqrt{2}/2)\}=0.1\sin(t\sqrt{2}/2) \text{（伏特）（5 分）}$$

四、某一个稳定的 LTI 系统，已知其系统函数 $H(z)$ 的零点为 $z_1=-4, z_2=2$，极点为 $p_1=-0.25,\ p_2=0.5$。而且该系统对于常数序列的放大系数为 -1。试求 （20 分）

1. 该系统所对应的差分方程，给出它由一阶系统级联实现的方框图； （4 分）
2. 概画该系统的幅频响应特性曲线和相频响应特性曲线； （6 分）
3. 当输入 $x[n]=(0.5)^{n-3}u[n]$ 时，已知 $y[0]=-4,\ y[-1]=8$，求该系统的零输入响应 $y_{zi}[n]$ 和零状态响应 $y_{zs}[n]$。 （10 分）

解：1. 系统函数 $H(z)=A\dfrac{1+4z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\times\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$，由于其为稳定的 LTI 系统，故收敛域包含单位圆，而两个极点都在单位圆内，所以其收敛域为 $|z|>\frac{1}{2}$

系统对于常数序列的放大系数为 -1，所以将 $z=1$ 代入 $H(z)$，得到 $A=\frac{1}{8}$

则 $H(z)=\dfrac{1}{8}\dfrac{1+4z^{-1}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}}\times\dfrac{1-2z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\dfrac{1+2z^{-1}-8z^{-2}}{8-2z^{-1}-z^{-2}}$，对应的差分方程为：

$8y[n]-2y[n-1]-y[n-2]=x[n]+2x[n-1]-8x[n-2]$ 或者

$y[n]-\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{1}{8}y[n-2]=\frac{1}{8}x[n]+\frac{1}{4}x[n-1]-x[n-2]$ （1 分）

该系统的一阶系统级联实现的方框图如图 4.1 所示（可以有其它变化）。

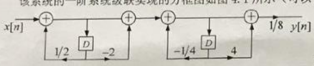


图 4.1 （3 分）

2. 由于系统的两对零极点 $\{z_1=-4,\ p_1=-1/4\},\{z_2=2,\ p_2=1/2\}$ 各自关于单位圆成反比例对称，可知系统是一个全通系统。

它的幅频响应特性曲线如图 4.2 左图所示。 （3 分）

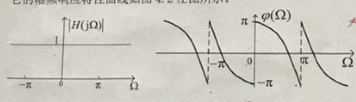


图 4.2

采用频率响应的几何求值法，得到相频响应曲线如图 5.2 右图所示。（3 分）

3. 对该系统的差分方程两边分别取单边 Z 变换，输入信号是因果信号，则：

$$Y_u(z)-\frac{1}{4}(Y_u(z)z^{-1}+y[-1])-\frac{1}{8}(Y_u(z)z^{-2}+y[-1]z^{-1}+y[-2])=\frac{1}{8}X_u(z)+\frac{1}{4}X_u(z)z^{-1}-X_u(z)z^{-2}$$

$$Y_u(z)=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}z^{-1}-z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}X_u(z)+\frac{\frac{1}{4}y[-1]+\frac{1}{8}y[-2]+\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}$$ +2

上式需用到 $y[-2]$ 的值，由于已知 $y[0]$ 和 $y[-1]$，可以用前推方程求得，即：

$y[n-2]=8y[n]-2y[n-1]-x[n]-2x[n-1]+8x[n-2]$

$y[-2]=8y[0]-2y[-1]-x[0]-2x[-1]+8x[-2]=8\times(-4)-2\times8-8=-56$

将 $y[-1]=8$，$y[-2]=-56$，以及 $X_u(z)=Z_u\{x[n]\}=8/(1-0.5z^{-1})$ 代入 $Y_u(z)$，分别得到零输入响应和零状态响应的单边 Z 变换为： +1

$$Y_{uzi}(z)=\frac{\frac{1}{4}y[-1]+\frac{1}{8}y[-2]+\frac{1}{8}y[-1]z^{-1}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}=\frac{\frac{1}{4}\times8+\frac{1}{8}\times(-56)+\frac{1}{8}\times8z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}=\frac{-5+z^{-1}}{(1+\frac{1}{4}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})}$$ +1

$$Y_{uzs}(z)=\frac{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}z^{-1}-z^{-2}}{1-\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{1}{8}z^{-2}}\cdot\frac{8}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{1+2z^{-1}-8z^{-2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})^2(1+\frac{1}{4}z^{-1})}$$ +1

把 $Y_{uzi}(z)$ 做部分分式展开，得到 $Y_{uzi}(z)=\dfrac{-3}{1+0.25z^{-1}}+\dfrac{-2}{1-0.5z^{-1}}$，再做单边 Z 变换的反变换，得到零输入响应 $y_{zi}[n]=-3(-\frac{1}{4})^n u[n]-2(\frac{1}{2})^n u[n]$ +2 （5 分）

把 $Y_{uzs}(z)$ 做部分分式展开，得到 $Y_{uzs}(z)=\dfrac{34}{1-0.5z^{-1}}-\dfrac{18}{(1-0.5z^{-1})^2}-\dfrac{15}{1+0.25z^{-1}}$，再做单边 Z 变换的反变换，得到零状态响应：

$y_{zs}[n]=34(\frac{1}{2})^n u[n]-18(n+1)(\frac{1}{2})^n u[n]-15(-\frac{1}{4})^n u[n]$ +2 （5 分）