# Algoritmos y Estructura de Datos III

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

## Trabajo Práctico 2

**Grupo 1**



| Integrante | LU | Correo electrónico |
|---|---|---|
| Hernandez, Nicolas | 122/13 | nicoh22@hotmail.com |
| Kapobel, Rodrigo | 695/12 | rok_35@live.com.ar |
| Rey, Esteban | 657/10 | estebanlucianorey@gmail.com |
| Tripodi, Guido | 843/10 | guido.tripodi@hotmail.com |



**Reservado para la cátedra**

| Instancia | Docente | Nota |
|---|---|---|
| Primera entrega | | |
| Segunda entrega | | |

# Contents

# 1 Informe de correcciones

## 1.1 Descripción de correcciones

**Ejercicio 1**

- Se rehicieron las experimentaciones para este nuevo algoritmo obteniendo nuevas conclusiones

**Ejercicio 2**

- Se rehicieron las experimentaciones para este nuevo algoritmo obteniendo nuevas conclusiones

**Ejercicio 3**

- Se rehicieron las experimentaciones para este nuevo algoritmo obteniendo nuevas conclusiones

# 2 Ejercicio 1

## 2.1 Descripción de problema

Luego de haber estado llenando las mochilas, Indiana y el equipo encuentra un mapa, dicho mapa es muy parecido a un laberinto el cual indica donde estaban y una X muy curiosa, marcada en el mapa. El equipo decidió cruzar el laberinto, como cuentan con pico y pala puede romper paredes. Su único problema es el cansancio que traen a cuestas luego de todo lo hecho hasta ahora.
Es por esto que nuestra objetivo será brindarles el menor camino posible teniendo en cuenta la cantidad de paredes que pueden llegar a romper.

## 2.2 Explicación de resolución del problema

El enunciado presenta el problema de hallar el camino entre 2 puntos que se pueda recorrer en el menor tiempo posible, dandonos un escenario en donde los caminos presentan paredes que podemos atravezar rompiendolas, teniendo a la vez, una determinada cantidad de rupturas a poder realizar. La solución buscada será entre todos los caminos posibles desde el origen al destino, el que resulte mínimo.

Cada camino esta compuesto de unas unidades "caminables", que las llamaremos baldozas. Ir de una baldoza a otra consume la misma cantidad de tiempo en todos los casos. Por otro lado, hay baldozas que demandan romper una pared para ser caminadas, con lo cual el camino que se esta transitando debe gastar 1 unidad de esfuerzo en romperla, factor que no influye en el tiempo del recorrido.

Si caracterizamos cada baldoza con un nodo, y la posibilidad de ir de una baldoza a otra como una arista, entonces podemos modelar el problema con un grafo. Como el factor tiempo es constante en cada traslado entre baldozas, las aristas tendrán todas el mismo peso.

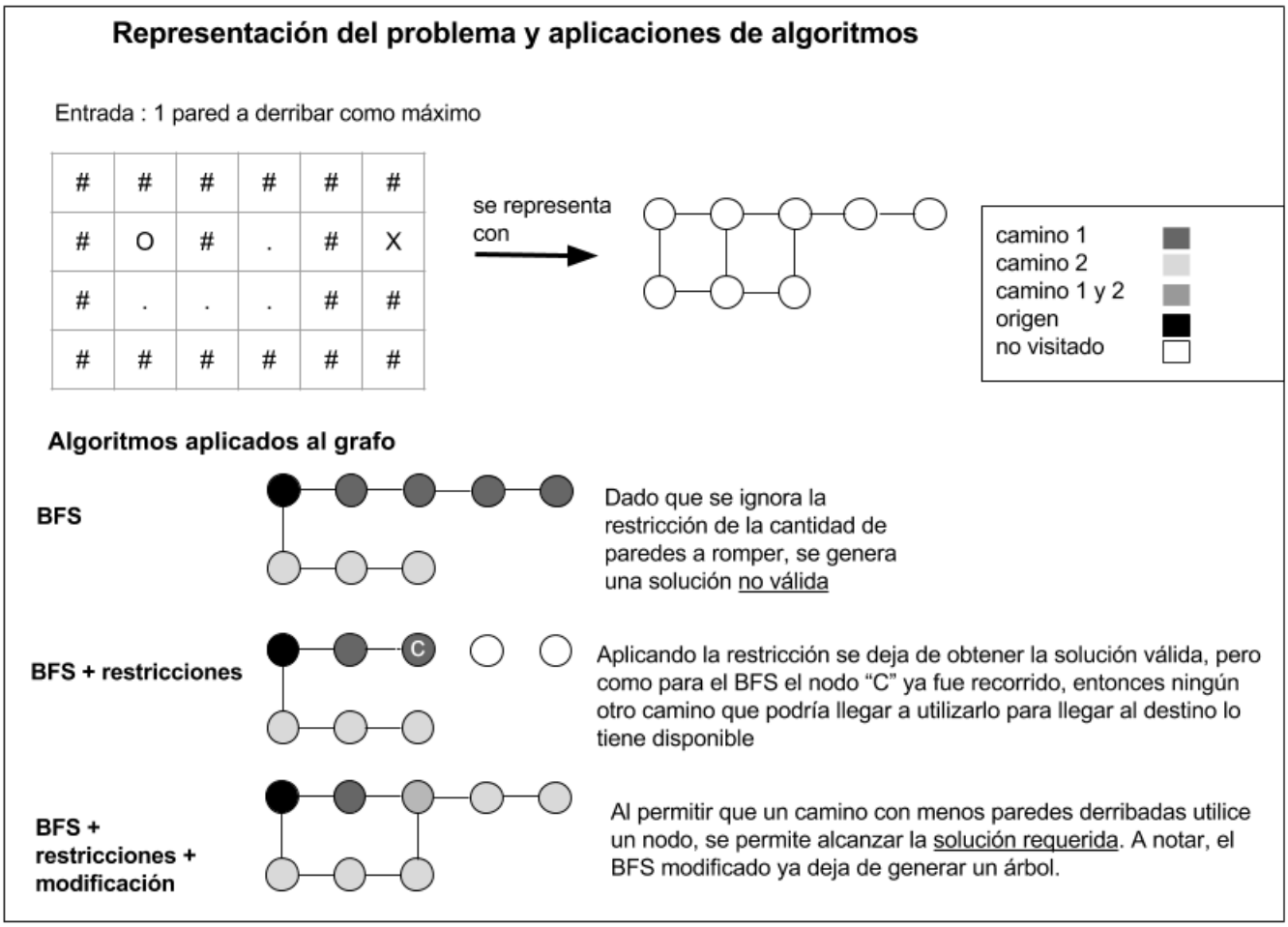
A partir de este grafo, sacar el camino mínimo del nodo origen al destino se puede realizar utilizando el algoritmo de busqueda por anchura, el cual permite saber la distancia (o tiempo) a la que se encuentra determinado nodo con cada uno de los demas. Para ello el BFS utiliza una cola donde introduce nodos que aún no fueron marcados como visitados, para luego extraerlos de a uno y encolar las repectivas adyacencias que aún no fueron visitadas. Cada nodo pusheado a la cola representa, de esta manera, la cabeza de cada camino que forma el BFS para formar el árbol.

Como no hay ninguna otra restricción para encolar un nodo (y así descubrir un camino), de aplicar el BFS sin modificaciones se perdería la restricción de paredes para romper: por esto se debe

agregar una validación al introducir un nodo a la cola del algoritmo, que impida pushear un nodo que demande romper más paredes de las parametrizadas.

Dado que al marcar un nodo como visitado se lo esta excluyendo de ser incluido en la cola nuevamente, de haber otro camino que lo necesite utilizar, el mismo no podrá contar con él. De suceder, se podría estar desestimando caminos que lleguen a la solución: Si llamamos $C_0$ al primer camino que paso por el nodo $v_0$ con tiempo 5 y paredes rotas 4, siendo el máximo 4 y $C_1$ a un camino más lento, con tiempo 10 pero con 0 paredes rotas, que está pasando por $v_0$, entonces en la evaluación de agregar o no al nodo se optará por no, ya que fue visitado. No obstante, si para llegar al destino final se debe romper 1 pared más, $C_0$ nunca podrá llegar, y $C_1$ que hubiese llegado, fue desestimado anteiormente, perdiendo de esta forma la solución factible.

Para solucionar este problema se redefine la condición de visitado que utiliza el BFS:




Se considerará que la condición de visitado dependa de cada camino, es decir:

- Los nodos guardarán como datos propios el tiempo en el que fueron alcanzados y la cantidad de paredes que fueron destruidas para llegar a él en ese tiempo (es decir, los datos del camino que paso por él). Al inicio, ambos parámetros serán marcados como no determinados.
- Al ser chequeados por primera vez, al detectarse de que no tienen datos, entonces se les asignará el tiempo en el que fueron alcanzados (como en el algoritmo BFS original) y la cantidad de paredes derribadas para alcanzarlos.
- Si al chequearlos nuevamente se ve que ya fueron recorridos (es decir que el tiempo y paredes se encuentran determinados) entonces se evaluará si por el camino actual **se mejora la condición del alcance del nodo** , de ser asi, se encola.

- En todos los casos, si al chequear un nodo, se detecta que hay que romper una pared, y el camino actual no posee más derribos posibles, entonces no se lo pushea a la cola.
- Si el nodo es el destino buscado, se lo marca con el tiempo y paredes logradas y se **finaliza el algoritmo**.

**Condición de alcance del nodo**

Se considera una mejor condición de alcance para un nodo si se cumple lo siguiente:

- El nodo no tiene datos determinados, es decir nunca fue pusheado a la cola.
- La cantidad de paredes para llegar a él es menor estricta que la lograda anteriormente para llegar al nodo.

## 2.3 Algoritmos

**función** *main()*
encolo nodo origen en una cola de nodos — O(1)
**Mientras** ¬ *cola vacia* **hacer** — ciclo: O(F ∗ C ∗ P)
Nodo actual ← tope cola — O(1)
procesar vecinos — O(4)
**fin ciclo**
**total: O(F ∗ C ∗ P)**

**fin función**

**función** *procesarNodo(Nodo nod)*
Nodo nod es un vecino de actual en el Mapa
**si** # *paredes rotas hasta actual + esPared(nod) < # paredes rotas hasta actual nod* **entonces** — guarda: O(1)
para distancia hasta nod ← distancia hasta actual + 1 — O(1)
para # paredes rotas hasta nod ← # paredes rotas hasta actual + esPared(nod) — O(1)
**si** *nod = nodo destino* **entonces** — guarda: O(1)
devolver distancia hasta nodo destino y terminar — O(1)
**fin si**
**si** # *paredes rotas hasta nod* ≤ *Pmax* **entonces** — guarda: O(1)
encolar nod — O(1)
**fin si**
**fin si**
**total: O(1)**

**fin función**

**Aclaraciones de variables y transformación de entrada**

- F = cantidad de filas, C = cantidad de columnas
- **Variable Mapa**: la matriz $(F * C)$ de nodos.
- **Tipo Nodo**: Dicho tipo, fue creado para contener más información de cada nodo, el mismo esta compuesto por posición i, j del nodo en el Mapa, si es pared o no y por último la cantidad de paredes destruidas y la distancia recorrida hasta dicho nodo.

- **cola**: Como la palabra lo indica, en esta cola se irán encolando los nodos.

## 2.4 Análisis de complejidades

El algoritmo BFS original, tiene una complejidad de O($|V| + |E|$), siendo V el conjunto de nodos y $E$ el de aristas del grafo que se le pasa como parámetro. El sumando $|V|$ es obtenido a partir de que se encolan necesariamente cada uno de los $|V|$ nodos **1 sola vez**. Por otro lado, como cada nodo chequea 1 vez cada una de sus adyacencias (para ver si las encola o no), entonces cada nodo n es chequeado $d(n)$ veces (es decir hay O(|E|) chequeos en total).

Siendo la entrada una matriz de $F \times C = N$ (donde F es la cantidad de filas y C la cantidad de columnas), cada celda es transformada en un nodo, con lo cual el grafo resultante tendrá N nodos. Cada baldosa puede recorrerse a lo sumo en 2 direcciones y 4 sentidos distintos, es decir, los nodos que las representan tienen grado menor o igual a 4, osea orden constante. De aplicar BFS sobre el grafo de nuestro problema, la complejidad sería O($N + 4N$) $\subseteq$ O($N$). No obstante, al modificar el BFS permitiendo que se puedan "visitar nodos ya visitados", la complejidad se ve afectada, ya que en la cola que guarda los nodos a evaluar permite reencolar a cada uno varias veces (permitiendo su reevaluaci
on).

La cantidad de veces en la que es posible reencolar cada nodo, esta dada por la cantidad de caminos que pasen por él, los cuales comparten la caracteristica de que cada uno de ellos mejora la cantidad de paredes a romper necesarias para alcanzarlo. Como ningún camino puede derribar más de "P" paredes y bajo la lógica de que un camino podrá revisitar a un nodo (por lo tanto reencolarlo) si lo alcanza con una menor cantidad de paredes derribadas que el camino anterior, entonces solo P caminos podrán mejorar la condición de acceso al nodo. Por lo tanto la cantidad de veces que se encolarán nodos sera O($N \times P$) determinando ,de esta forma, la compliejidad del algoritmo propuesto.

## 2.5 Demostración de correctitud

Para demostrar que nuestro algoritmo es válido para solucionar el problema en cuestión, tendremos que probar las siguientes condiciones:

- El algoritmo finaliza siempre.
- De haber solución, el algoritmo la encuentra.
- El camino resultante es el más corto dentro de los posibles.

### El algoritmo finaliza

Como nuestro algoritmo puede encolar nodos ya visitados, queremos ver que no se producen ciclos infinitos entre nodos con la condición mencionada. Como se vio en la sección de complejidad, la máxima cantidad de veces que cada nodo puede ser recorrido es "P", con lo cual, necesariamente el algoritmo termina.

### El algoritmo halla la solución

Como cada nodo se puede recorrer siempre y cuando se posea la cantidad de paredes a romper necesarias para alcanzarlo, entonces particualrmente, el nodo destino será alcanzado solo si existe un camino que rompa una cantidad menor o igual a la parametrizada, es decir, si existe solución a la instancia del problema.

**La solución encontrada es la mejor**

Al igual que el algoritmo $BFS$, el grafo se recorre en anchura, por lo tanto en la cola todos los nodos a una distancia $d > 1$ del origen estarán encolados de manera contigua, es decir, cuando se visita un nodo a distancia $d - 1$ del origen, se encolan los vecinos, que son los que están a distancia $d$ del nodo inicial, siempre y cuando la cantidad de paredes rotas para llegar a los mismos no exceda el límite. Si interpretamos a cada nodo encolado como la cabeza de un camino que empieza en el nodo origen, puede verse que en cada paso del algoritmo se están evaluando todos los caminos posibles de longitud creciente: de alcanzar en algún momento el nodo destino, por consiguiente, será a travez del camino más corto.

Como el procedimiento permite volver a recorrer nodos, es necesario que al alcanzar el nodo destino se finalice el algoritmo: de no suceder, puede existir otro camino que pueda volver a recorrer el destino con una menor cantidad de paredes rotas pero necesariamente con un mayor tiempo de recorrido, sobreescribiendo el tiempo logrado por el camino minimo y generando una solución que no es la mejor.

## 2.6 Experimientos y conclusiones

### 2.6.1 Test

Para estudiar el funcionamiento de nuestro algoritmo frente a la problematica planteada, elaboramos diversos tests que serán enunciados a continuación.

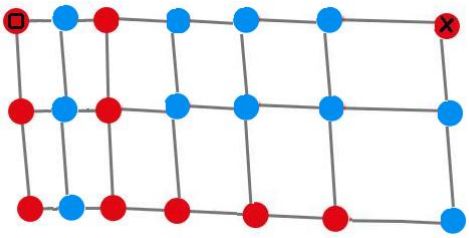
**Familia 1: No existe camino para atravezar el laberinto**

Para que no haya soluci ón asignamos un $P_{max}$ (la cantidad de paredes máxima a romper) inferior a la cantidad de paredes necesarias para llegar al nodo destino.

```
5 9 3
#########
#o#.###x#
#.#.#####
#.#....##
#########
```

*Ejemplo* 1.1 - *Caso Sin Soluci*ón

El grafo que representa a esta entrada es de la siguiente forma:



Representación 1.1 - *Caso Sin Solución*

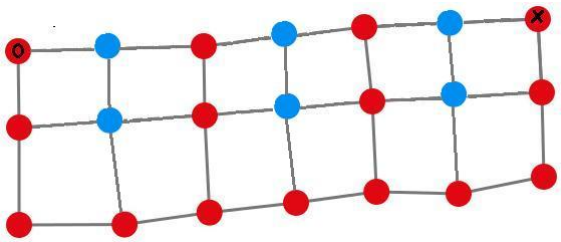
**Familia 2: Existe un camino sin atravesar paredes para recorrer todo el laberinto**

Se toma un $P_{max}$ igual a cero y se arma un camino puntual dentro del laberinto en el cual no es necesario atravezar ninguna pared para llegar a destino. El $P_{max}$ es cero para asegurarse que el algoritmo no intente romper paredes.

```
5 9 2
#########
#o#.#.#x#
#.#.#.#.#
#.......#
#########
```

*Ejemplo* 1.2 - *Caso Sin Romper Paredes*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:



Representación 1.2 - *Caso Sin Romper Paredes*

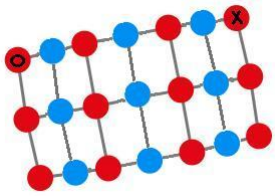
**Familia 3: Rompiendo todas las paredes posibles para pasar el laberinto**

El primer camino que recorre es el primero con $P_{max}$.

```
5 9 3
#########
#o#.#.#x#
#.#.#.#.#
#.#.#.#.#
#########
```

*Ejemplo* 1.3 - *Caso Rompiendo Todas Paredes Las Posibles*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:




Representación 1.3 - *Caso Rompiendo Todas Paredes Las Posibles*

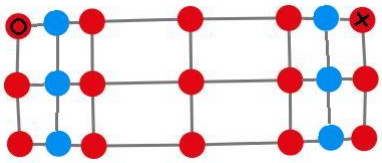
**Familia 4: Rompiendo una cantidad menor de paredes posibles para pasar el laberinto**

El primer camino que recorre rompe una cantidad de paredes menor a $P_{max}$.

```
5 9 5
#########
#o#...#x#
#.#...#.#
#.#...#.#
#########
```

*Ejemplo* 1.4 - *Caso con solución*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:



Representación 1.4 - *Caso con solución*

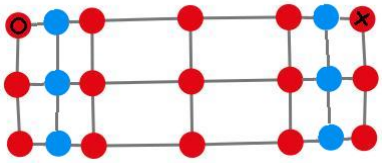
**Familia 5: Múltiples caminos llegan a destino**

Cualquier camino llega en la misma cantidad de pasos al destino.

```
5 9 5
#########
#o#...#x#
#.#...#.#
#.#...#.#
#########
```

*Ejemplo* 1.5 - *Caso con múltiples caminos*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:



Representación 1.5 - *Caso con múltiples caminos*

**Aclaraciones:**

- Nodo color celeste es una pared.
- Nodo color rojo es caminable.

### 2.6.2 Performance del algoritmo

Veremos que es lo que sucede al ir variando los parámetros de entrada para cada familia, de manera tal que, a medida que F y C crecen linealmente, podamos observar que sucede con cada familia de casos (es decir, las familias se mantienen, solo varia el tamaño de la entrada en todos los casos).
Se comienza, por lo tanto, con una entrada de 5 filas y columnas y se la aumenta en cada test en una fila y columna hasta llegar a una matriz de 50*50. De manera que no hay desigualdades y todas las familias se miden en instancias de igual tamaño.

El origen siempre estará en la primer columna posible y el destino en la última. A medida que la matriz crezca, las posiciones de los mismos no serán alteradas y la cantidad de paredes, disposición de las mismas y como varie el $P_{max}$ en cada caso, serán acordes para que siempre se encuentren dentro de la misma familia. Esto último es clave para poder analizar familias de casos diferentes a medida que la matriz crece.

Para obtener dichas instancias se realizaron aproximadamente unas 20 corridas con el mismo input y se tomó el promedio de las mismas en cada instancia para obtener un valor más cercano a la media.

Se puede observar en el gráfico 1.1, cinco funciones, que representan el tiempo de ejecución de las familias de casos mencionadas en el apartado anterior:

1. No existe camino para atravezar el laberinto
2. Existe un camino sin atravesar paredes para recorrer todo el laberinto
3. Rompiendo todas las paredes posibles para pasar el laberinto
4. Rompiendo una cantidad menor de paredes posibles para pasar el laberinto
5. Múltiples caminos para llegar a destino

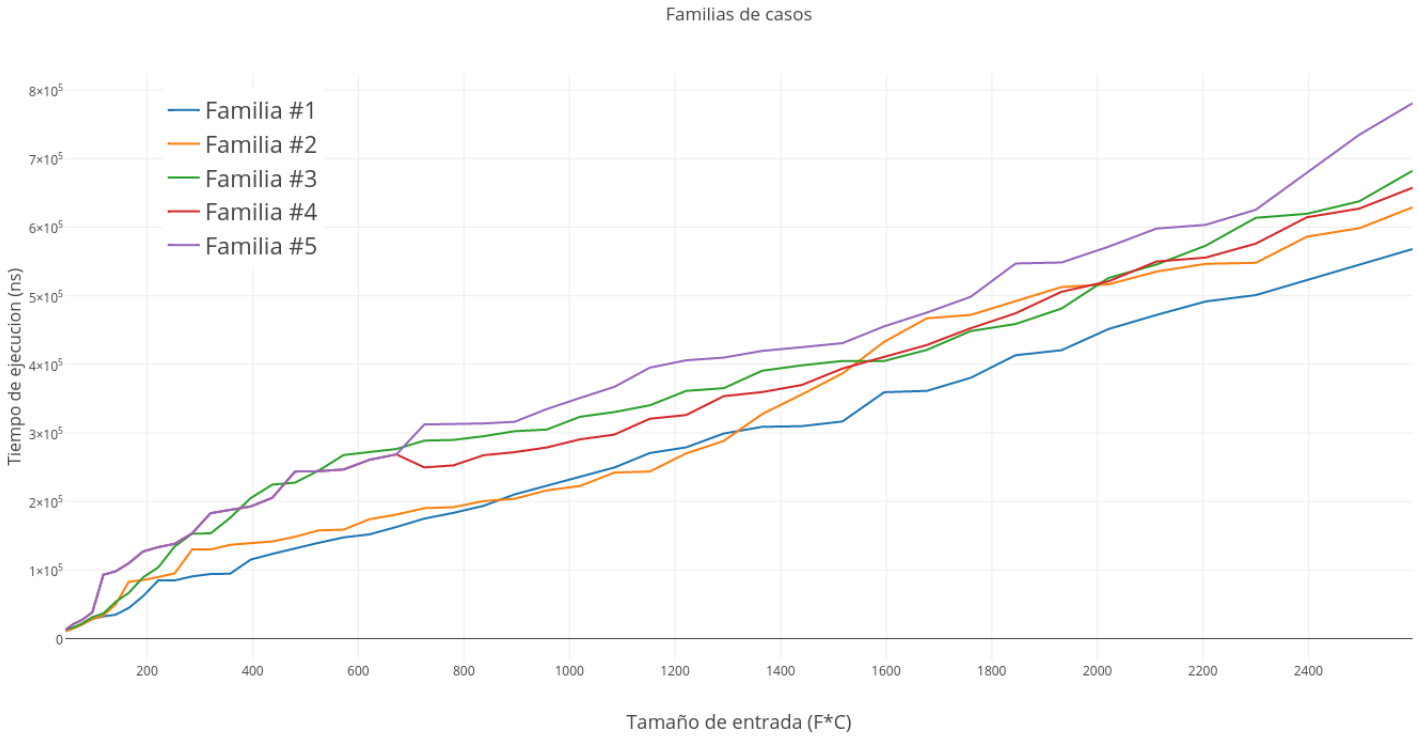
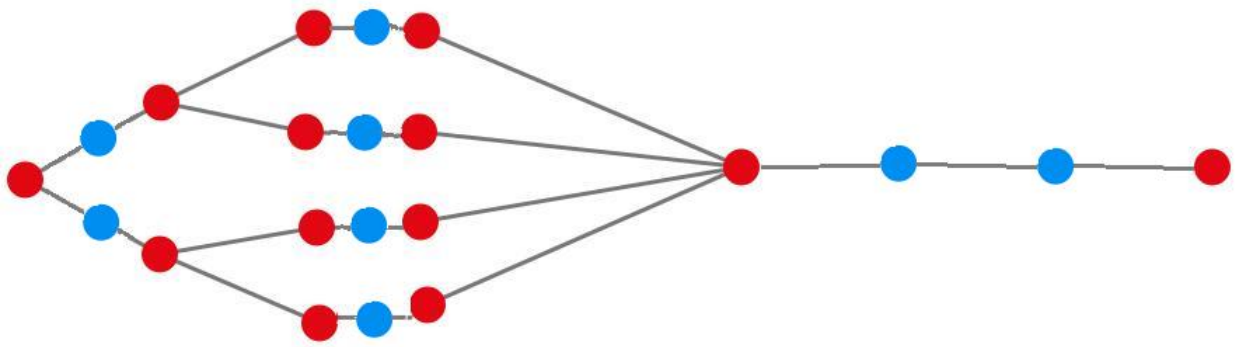


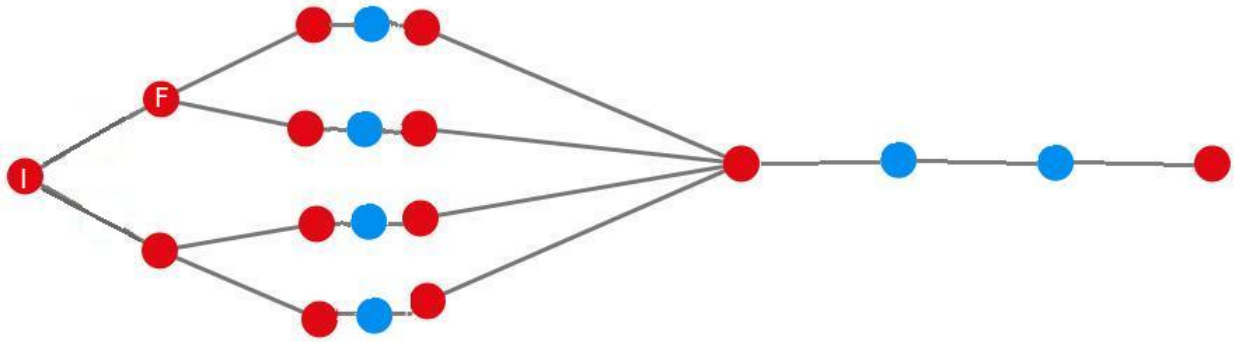

Gráfico 1.1 - *Comparativo*

Se puede notar que la familia 1 "**No existe camino para atravezar el laberinto**", presenta una mejor performance en relación a las otras. Esto se puede deber a dos motivos, o bien en el

primer paso no puede salir por ningún camino posible o bien su adyacente es el nodo destino, por lo tanto chequea solo los nodos adyacentes al origen y finaliza su ejecución. Con lo cual esta familia representa el mejor caso en performance para el algoritmo.



Grafo 1.1 - *Con* $P = 0$ Termina sin poder romper paredes en una iteracion




Grafo 1.1 - *Con* $P = 0$ Nodo destino (f) vecino a nodo inicio (i)

Uno de los peores casos para nuestro algoritmo es la familia 5 "**Múltiples caminos para llegar a destino**", que sucede cuando por ejemplo, todos los caminos tienen igual longitud. Esto se da así ya que nuestro algoritmo chequea todos los caminos posibles y como todos pueden ser solución posible avanza por todos y llega al final del laberinto con el mismo valor en todos los posibles caminos.

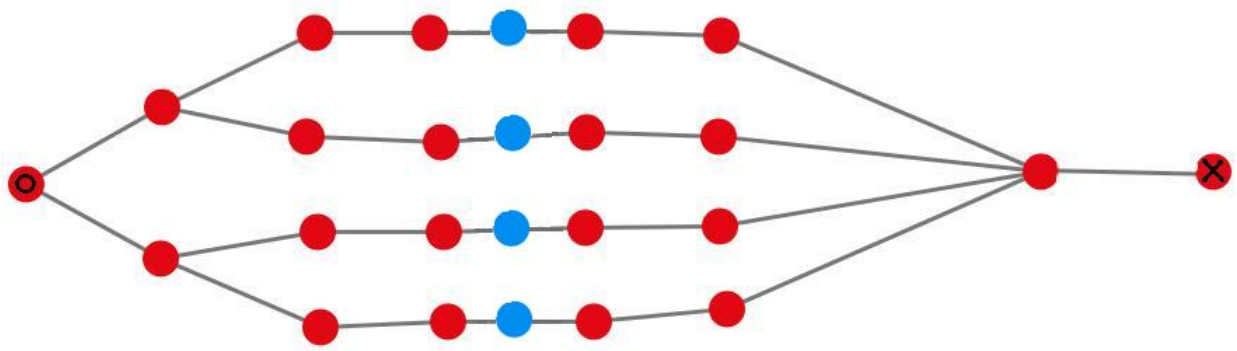


Gráfico 1.2 - Múltiples caminos para llegar a destino de misma longitud

Para observar con mejor detalle la diferencia entre el mejor y peor caso exponemos el siguiente gráfico sin las demás familias:

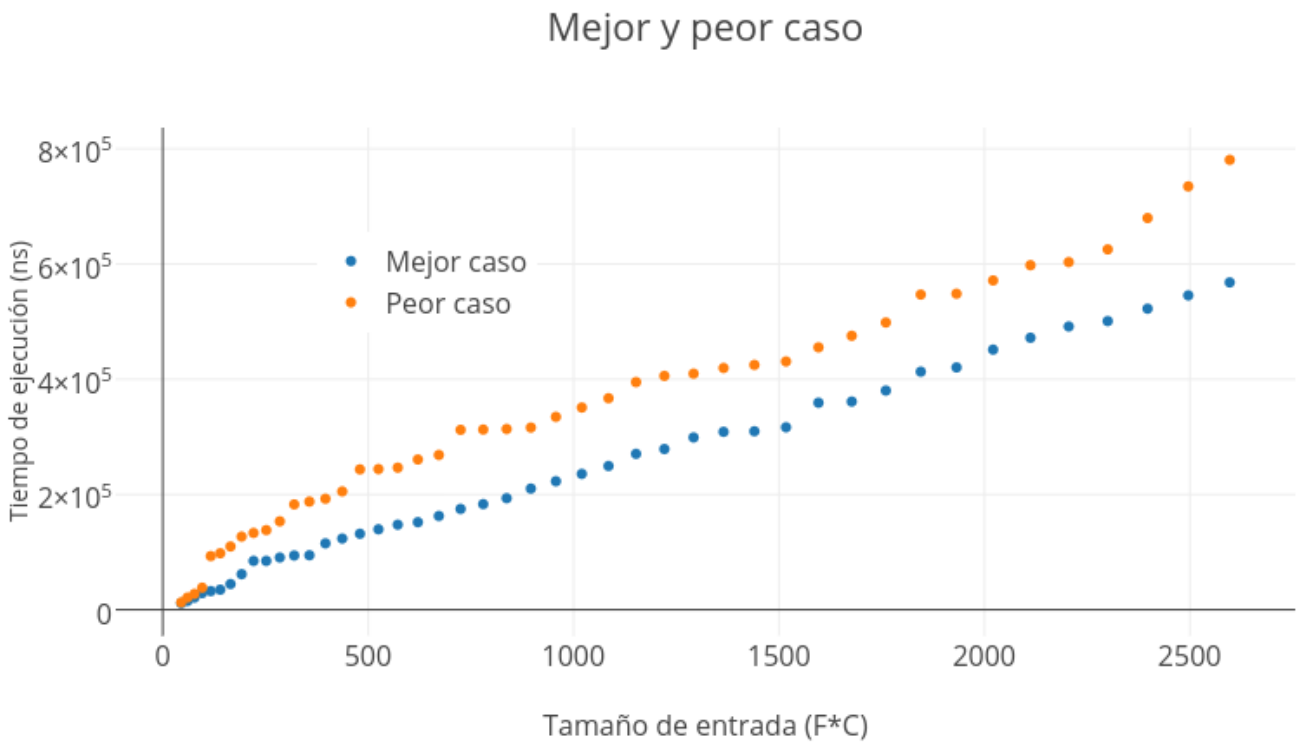



Gráfico 1.5 - *Comparativo*

Al ser O(F*C*P) una complejidad pseudo polinomial, se hace dificil analizar esta cota variando todos los parametros, dado que los resultados como pudimos observar cambian mucho dependiendo de que familia de casos se esté dando por la configuración de paredes que posea la matriz, es decir, para un tamaño de matriz fijo y un mismo $P_{max}$ se pueden obtener diferentes configuraciones de una matriz que darían resultados muy diferentes. Por esto mismo, se decidió no realizar un gráfico comparativo con la complejidad, ya que entendemos que la misma no tiene una forma clara por pertenecer a una clase de complejidad pseudo polinomial y no poder reflejar en la misma las diferentes configuraciones posibles de paredes que existen.

Como se suele hacer en este tipo de coplejidades, se trata de fijar un parámetro para poder analizar que sucede cuando el otro varia. Como los valores relevantes de $P_{max}$ están acotados por F*C, es decir, a lo sumo se pueden romper F*C paredes, se evaluará la variación de este parámetro en una matriz de tamaño fijo y cantidad y disposición de paredes fijas, de manera que cualquier cambio este correlacionado con el valor de $P_{max}$ en ese instante. El caso contrario, en donde se fija $P_{max}$ y se fija el tamaño de la matriz variando la cantidad y disposición de paredes, no será analizado ya que al hacer esto, se obtendrían resultados para diferentes familias según la configuración de paredes que se realice y esto sería es equivalente al análisis estudiado en el tests de familias.

De esta forma el análisis de complejidad será reducido a estudiar el comportamiento de $P_{max}$ con un laberinto fijo que tendrá una forma particular.

### Variando $P_{max}$ en un laberinto

Para el siguiente test vamos a trabajar con un laberinto de tamaño fijo, con el origen en la segunda columna y el destino en la penultima (misma fila), que además en cada posición **solo tiene paredes**. Siendo el laberinto de tamaño 100*100 habrá 96 paredes por fila (sin contar los bordes). Mostraremos a continuación que sucede al variar $P_{max}$ desde 0 hasta 96 linealmente.

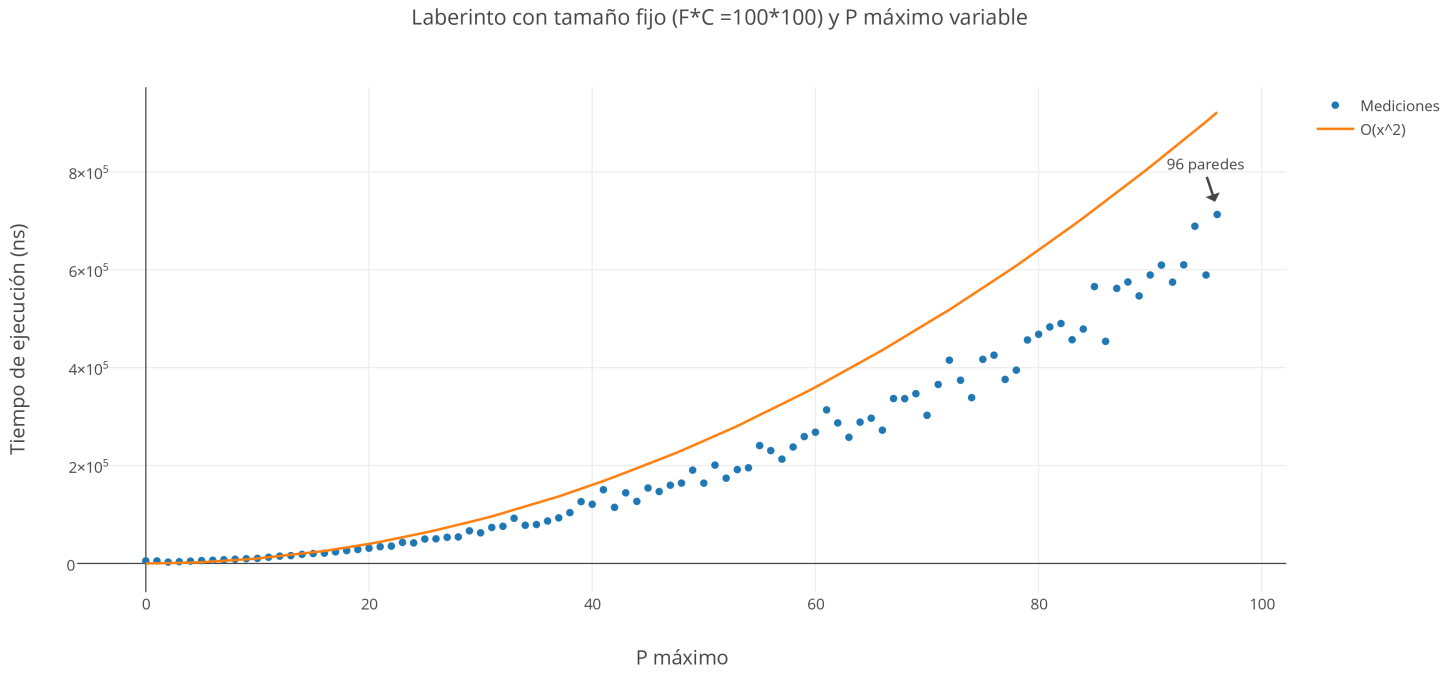



Gráfico 1.6 - *$P$ variable y $F, C$ fijos*

Se puede observar en el gráfico 1.6 como al aumentar $P_{max}$, aumenta cuadráticamente el tiempo de resolución, ya que lo que sucede es que al aumentar el $P_{max}$ el algoritmo solo puede chequear en una sub matriz de $P_{max}^2$ caminos posibles a destino y como en cada posición solo hay paredes, no se podrá recorrer una distancia mayor a $P_{max}$ en ninguna dirección.
Al ser un algoritmo con espirutu $BFS$, recorre en anchura estas sub matrices, probando todas las posibilidades sin seguir un camino particular. De esta manera, que haya un camino directo a destino, rompiendo exactamente 96 paredes, no influye sobre el resultado. Ya que para llegar a destino, serán analizadas todas las posibilidades.

Conociendo aproximadamente la dirección del mejor camino, si el algoritmo recorriera en profundidad (como un $DFS$), y además, el primer vecino analizado fuera el derecho (en dirección al destino), podría obtenerse un mejor resultado, ya que el camino elegido sería el directo al destino. Por lo tanto fué modificado el algoritmo para utilizar una pila en lugar de una cola, y además apilar los vecinos de manera tal que el último en apilarse sea el derecho, obteniendo de esta manera un pseudo $DFS$ que nos permite corroborar este hecho.

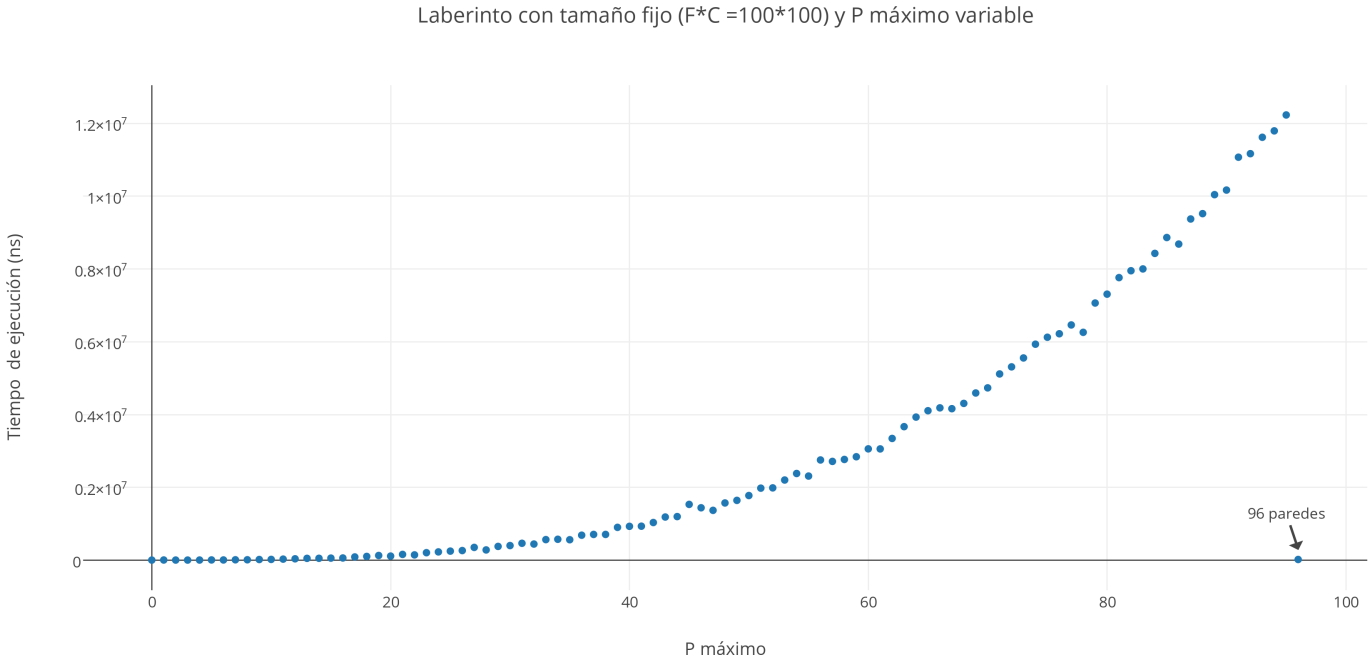



Gráfico 1.7 - *P variable y F, C fijos*

Podemos observar en el gráfico 1.7 que el caso con $P_{max} = 96$ hay solución, y se obtiene muy rapidamente debido a que el camino elegido es el directo a destino. Veamos que sucede en comparación al algoritmo original

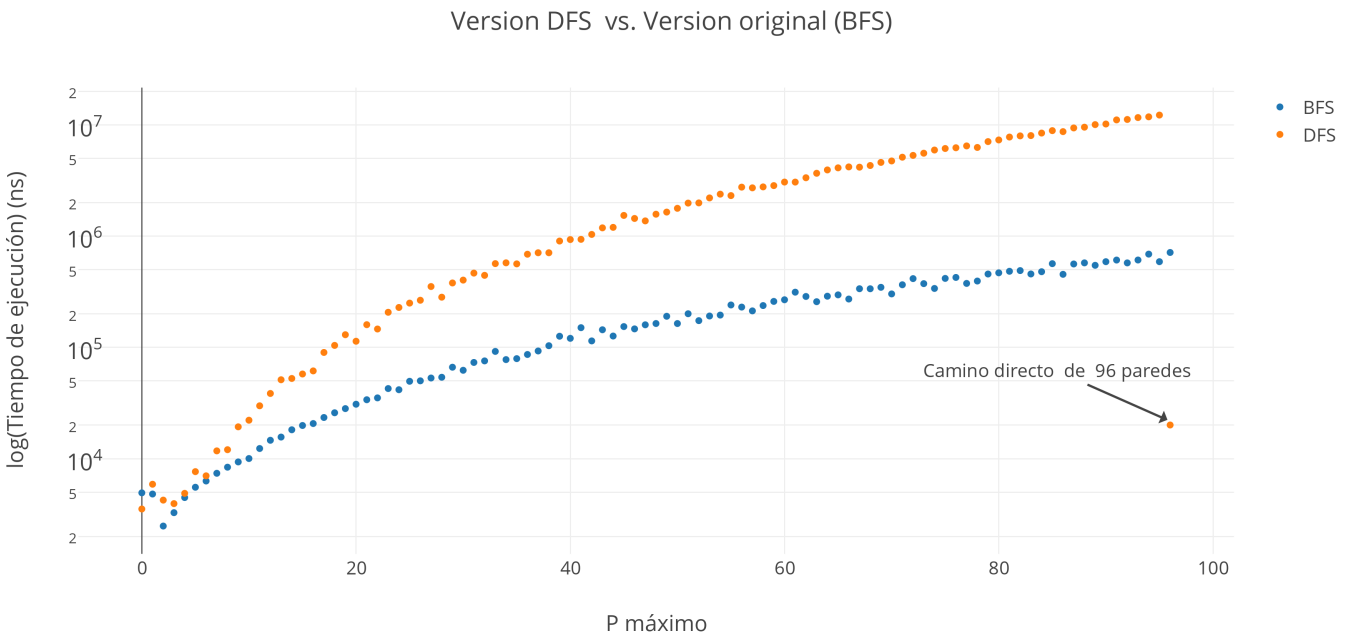



Gráfico 1.8 - *P variable y F, C fijos*

Podemos observar claramente, que bajo las condiciones planteadas para esta modificación, es un factor muy imporante saber en que dirección guiar la busqueda de este $DFS$. En el gráfico 1.8 podemos ver claramente como con $DFS$ se obtiene un resultado mucho mejor que el algoritmoo original ($BFS$). Concluyendo así lo supuesto al realizar los tests.

Aunque este tipo de complejidades pseudo polinomiales es dificil de analizar, pudimos observar que sucede al variar los parámetros de entrada y obtener diferentes comportamientos y particularidades del algoritmo.

Podemos concluir además, luego de todo lo realizado, que el algoritmo propuesto resuelve efectivamente el problema enunciado.

# 3 Ejercicio 2

## 3.1 Descripción de problema

Una vez que el equipo fue avanzando por el laberinto en búsqueda de la X, se fueron encontrando con piezas de una tabla en el suelo, las cuales tenían un manuscrito antiguo. Por lo tanto, quisieron juntar todas las piezas que compoñían la tabla. Similar al punto anterior, encontraremos el camino posible realizando el menor esfuerzo para recorrer todas las salas y juntar las piezas para armar la tabla completa.

## 3.2 Explicación de resolución del problema

En esta ocasión se debe encontrar, dada una serie de habitaciones, la forma menos costosa de unirlas, teniendo que derribar determinadas paredes para lograrlo. Las mismas poseen un costo en energía que va del cero al nueve.

Dada 2 habitaciones: el muro menos costoso a derribar que une a las mismas será la elección a tomar para formar la solución.

Tenemos que tener en cuenta que hay muros que no son derribables. Estos se representan con un numeral ('#').

Para resolver este problema, caracterizaremos el mismo sobre un grafo que representa cada habitación como un conjunto de puntos caminables adyacentes entre si. Y a las paredes rompibles, es decir, las paredes numeradas como aristas entre los puntos caminables.
Las paredes irrompibles no conectarán habitaciones.

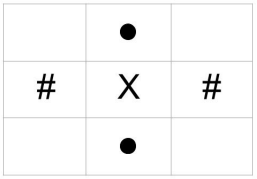
Lo que se busca entonces, es una forma de unir todas las habitaciones de la forma menos costosa.

Para que exista solución, tiene que haber una forma de cruzar de una habitación a otra. Por lo tanto, tiene que existir una pared rompible que las una. La misma conectará dos puntos caminables, uno en cada habitación.

Dentro de cada habitación, los puntos caminables estarán unidos por aristas de valor nulo.

Una pared numerada tiene que unir exactamente dos puntos de izquierda a derecha o de arriba hacia abajo. Por lo tanto, las direcciones no utilizadas tienen que estar ocupadas por paredes, ya que si no, existe ambigüedad para determinar que puntos conecta.

Como en este problema no existen movimientos en diagonal sobre el mapa, los únicos casos válidos serán:




Y el simétrico.

Para obtener la solución, se busca el arbol generador mínimo (AGM) del grafo planteado mediante el algoritmo de Kruskal.

A dicho AGM resultante del algoritmo se le calcula el esfuerzo total, que será la suma de todas las paredes destruidas para unir las habitaciones, es decir, la solución al problema planteado.

Para desarrollar el algoritmo de búsqueda del AGM del grafo, implementamos las funciones find y unión, las cuales se encargan de ir armando el arbol avanzando dentro de una habitación o cruzando a otra habitación rompiendo una pared.

## 3.3 Algoritmos

**función** *Kruskal*
ordenar aristas — $O(4 * F * C * \log(4 * F * C))$
representanteFinal ← -1 — $O(1)$
**Para cada** *Arista ar* ∈ *aristas* **hacer**
ciclo: $O(4 * F * C)$
**si** *Buscar(ar.inicio) = Buscar(ar.fin)* **entonces**
guarda: $O(2 * \log(4 * F * C))$
Unir(ar.inicio, ar.fin, ar.costo) — $O(1)$
**fin si**
**si** *representanteFinal* ≥ *0* **entonces**
finalizar ciclo — $O(1)$
**fin si**
**fin para**
**si** *representanteFinal* ≥ *0* **entonces**
devolver costCompLider[representanteFinal] — $O(1)$
**fin si**
**de lo contrario**
devolver sinSolucion — $O(1)$
**fin si**
**fin función**
**total: $O(F * C * \log(F * C))$**

**función** *Buscar(entero x)*
**si** *padre[x] = x* **entonces**
devolver x — $O(1)$
**fin si**
para entero p ← Buscar(padre[x]) — guarda: $O(\log(4 * F * C))$
para padre[x] asignar p — $O(1)$
devolver p — $O(1)$
**fin función**
**total: $O(\log(4 * F * C))$**

**función** *Unir(enteros x, y, costo)*

| | |
|---|---|
| para entero x asignar Buscar(X) | O(1) |
| para entero y asignar Buscar(Y) | O(1) |
| **si** *altura[x]* $\leq$ *altura[y]* **entonces** | |
| para padre[x] asignar y | O(1) |
| para cantAristas[y] asignar cantAristas[y] + cantAristas[x] +1 | O(1) |
| para costCompLider[y] asignar costCompLider[y] + costCompLider[x] + costo | O(1) |
| **si** *altura[x]* = *altura[y]* **entonces** | |
| para altura[x] incrementar 1 | O(1) |
| **fin si** | |
| **si** *cantAristas[y]* = *#nodos-1* **entonces** | |
| para representanteFinal asignar y | O(1) |
| **fin si** | |
| **de lo contrario** | |
| para padre[y] asignar x | O(1) |
| para cantAristas[x] asignar cantAristas[y] + cantAristas[x] +1 | O(1) |
| para costCompLider[x] asignar costCompLider[x] + costCompLider[y] + costo | O(1) |
| **si** *cantAristas[x]* = *#nodos-1* **entonces** | |
| para representanteFinal asignar x | O(1) |
| **fin si** | |
| **fin si** | |

**fin función**

**total: O(1)**

**Aclaraciones de variables y transformación de entrada**

- F = cantidad de filas, C = cantidad de columnas
- **Arreglo cantAristas**: guarda la cantidad de aristas que tiene el representante de una componente conexa.
- **Arreglo costCompLider**: guarda el costo total de una componente conexa por representante.
- **Arreglo padre**: para cada nodo, quien es su representante, es decir, en que componente conexa se encuentra.
- **Arreglo altura**: indica la altura de cada componente conexa.

## 3.4 Análisis de complejidades

Siendo $F$ la cantidad de filas y $C$ la cantidad de columnas de la entrada, $F*C$ es la cantidad de puntos caminables máximos que puede tener una instancia. El grafo implícito tiene entonces $V(G) = F * C$ nodos.

Dado que la implementación del algoritmo de Kruskal utiliza la técnica de union-find con tiempo de unión y búsqueda amortizados $E*log(E)$ siendo $E$ la cantidad de aristas del grafo y ordenamiento inicial de las aristas que se logra también en $E * log(E)$ la complejidad total será de $O(E * log(E))$.

Dado que el grafo más completo que puede ofrecer este problema es cuando se tiene una sola sala sin paredes, la cantidad de aristas total será $4*V(G) = 4*F * C$ dando como resultado un orden de complejidad $4 *F * C * log(4 * F * C) \subseteq O(F * C * log(F * C))$.

## 3.5 Demostración de correctitud

Necesitamos encontrar la forma de unir todas las habitaciones, es decir, lo que se necesita es encontrar en el grafo una única componente conexa.

Como en toda componente conexa tiene minimamente un arbol generador, de encontrarlo, se encuentra una posible solución al problema. Los únicos ejes del árbol a encontrar que tendrán peso serán aquellos que representan las paredes rompibles en el problema. Si pedimos que el peso del arbol a encontrar sea mínimo, entonces estaremos eligiendo las paredes con menor peso a romper para acceder entre habitaciones. Por lo tanto, el AGM producto de la aplicación del algoritmo de Kruskal sobre el grafo, representa una solución válida al problema propuesto, dado que garantiza que se utilizarán las paredes con menos peso posible para unir todas las habitaciones.

## 3.6 Experimientos y conclusiones

### 3.6.1 Test

Nos interesa estudiar el comportamiento de nuestro algoritmo frente a la problematica planteada, elaboramos diversos tests que serán enunciados a continuación.

**Familia 1: No existe arbol que conecte todas las salas**

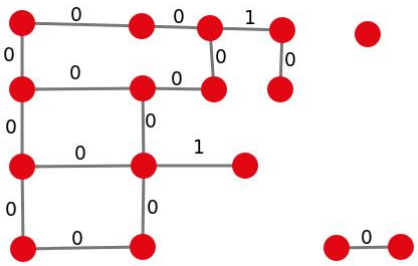
Este caso se da cuando en cualquier camino nos encontramos con paredes irrompibles sin la posibilidad de esquivarlas

Para este tipo de testeo mostraremos a continuación un ejemplo del mismo.

```
6 9
#########
#...1.#2#
#...#.###
#..1.####
#..###..#
#########
```

*Ejemplo* 2.1 - *Caso Sin Soluci*ón

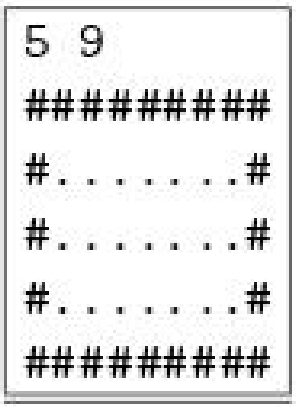
El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:



Representación 2.1 - *Caso Sin Solución*

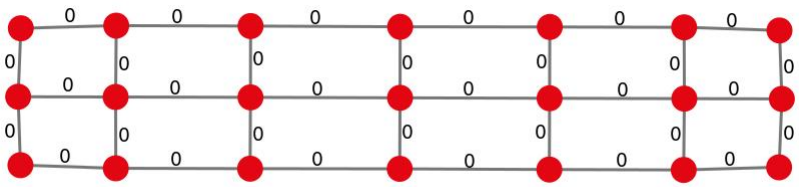
**Familia 2: Existe un camino que conecta todas las salas de esfuerzo 0**

Esta versión se da cuando la suma de los pesos de las aristas del AGM obtenido es 0.
Para este tipo de testeo mostraremos a continuación un ejemplo del mismo.




*Ejemplo* 2.2 - *Caso Sin Romper Paredes*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:



Representación 2.2 - *Caso Sin Romper Paredes*

**Familia 3: El AGM es todo el grafo**

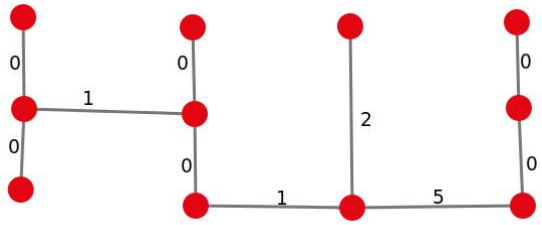
Este caso se da cuando el laberinto no presenta varios caminos para poder ir a las salas sino un único camino.

Aquí veremos, un ejemplo del conjunto de test de este tipo.

```
5 9
#########
#.#.#.#.#
#.1.#2#.#
#.#.1.5.#
#########
```

*Ejemplo* 2.3 - *Caso AGM = GRAFO*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:




Representación 2.3 - *Caso AGM = GRAFO*

**Familia 4: Sin ejes**

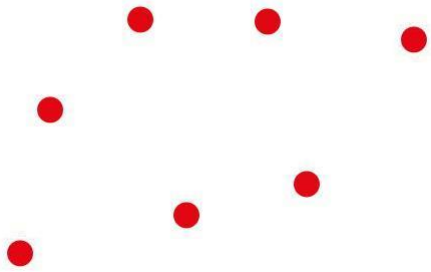
Este caso se da cuando todas las salas presentan paredes irrompibles sin la posiblidad de conectarse generando así un grafo sin aristas.

Siguiendo el desarrollo de dicho informe a continuación mostraremos.

```
5 9
#########
#.#.#.#.#
##.#.#.##
#.#.#.#.#
#########
```

*Ejemplo* 2.4 - *Caso Sin Ejes*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:



Representación 2.4.2 - *Caso Sin Ejes*

### Familia 5: Camino por las salas random

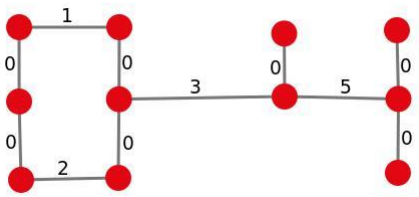
Este caso se da cuando hay posiblidad de conectar todas las salas rompiendo una cierta cantidad de paredes, también denominado caso random debido al desarrollo de nuestro algoritmo.

Siguiendo el desarrollo de dicho informe a continuación mostraremos.

```
5 9
#########
#.1.#.#.#
#.#.3.5.#
#.2.#.#.#
#########
```

*Ejemplo* 2.5 - *Caso Random*

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:




Representación 2.5.2 - *Caso Random*

**Aclaraciones:**

- Nodo aislado significa que esta rodeado de paredes irrompibles y no hay camino posible para conectar dicho nodo a la componente conexa.

### 3.6.2 Performance del algoritmo

En los siguientes tests queremos observar que sucede con cada familia de casos al ir variando los parámetros de entrada F, C de manera creciente y lineal y tomando los tiempos de corrida de cada input para poder compararlos.

Se comienza, por lo tanto, con una entrada de F*C = 25 y llega hasta 50*50 = 2500 haciendo crecer en uno las filas y columnas.

La cantidad de paredes depende del tipo de familia que se quiera mantener a medida que crece la entrada.

Para obtener dichas instancias se realizaron aproximadamente unas 20 corridas con el mismo input y se tomó el promedio de esas 20 corridas en cada instancia para obtener un valor más cercano a la media.

Se pueden observar en el gráfico 2.1, cinco funciones, que representan el tiempo de ejecución de las familias de casos mencionadas en el apartado anterior:

1. No existe árbol que conecte todas las salas
2. Existe un camino que conecta todas las salas de esfuerzo 0
3. El AGM es todo el grafo
4. Sin ejes
5. Camino por las salas random

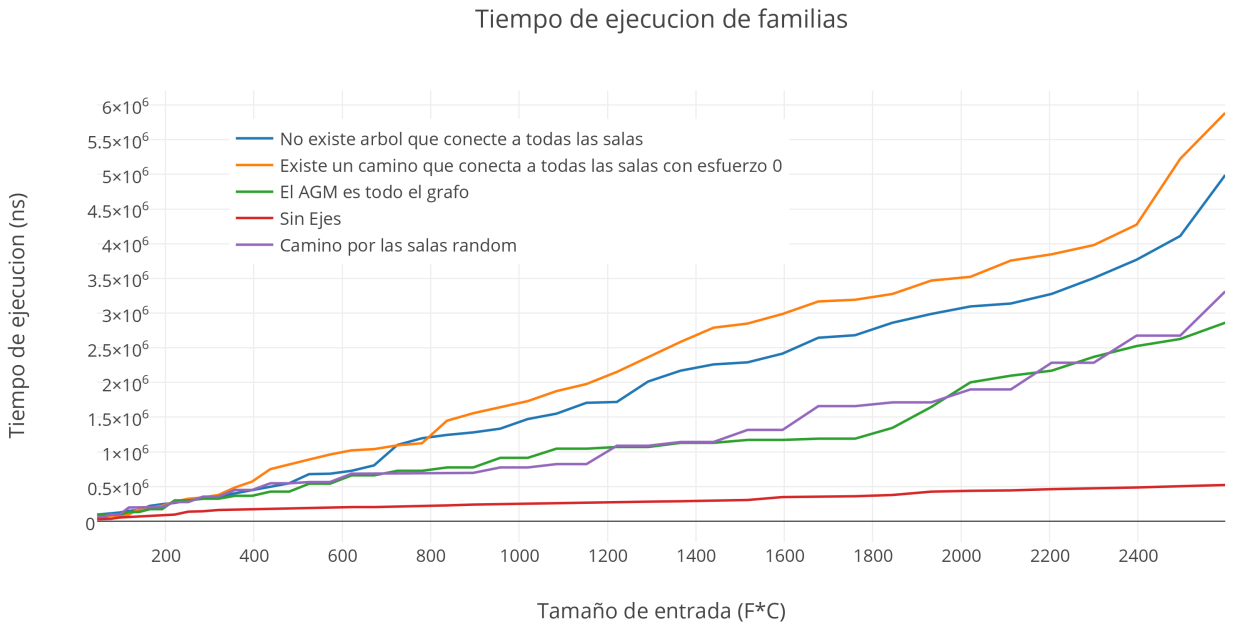
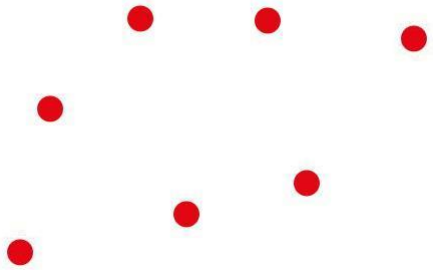



*Gráfico* 2.1 - *Comparativo*

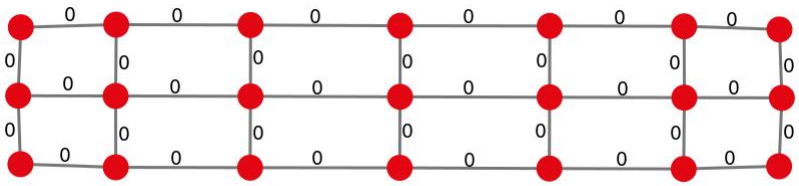
Como se observa en el gráfico la función representativa de la familia 4, presenta una mejor performance en relación a las otras. Esto se debe a que nuestro algoritmo al intentar chequear las aristas, observa que no hay ninguna y finaliza su ejecución insumiendo en tiempo unicamente la creación del grafo (nodos aislados).

Un grafo representativo de esta familia sería el siguiente:



*Grafo* 2.1 - *Mejor Caso*

Verificando el peor caso en el gráfico 2.1, llegamos a la conclusión que la familia de casos que hace que el algoritmo tenga más tiempo de cómputo será la familia 2 dado que el grafo que se obtiene de transformar el laberinto de entrada es aquel que presenta un ciclo por cada habitación posible, dandonos el siguiente grafo una vez transformado:



*Grafo* 2.2 - *Peor Caso*

Veamos en detalle como se comportan el mejor y peor caso con respecto a la complejidad teorica calculada.

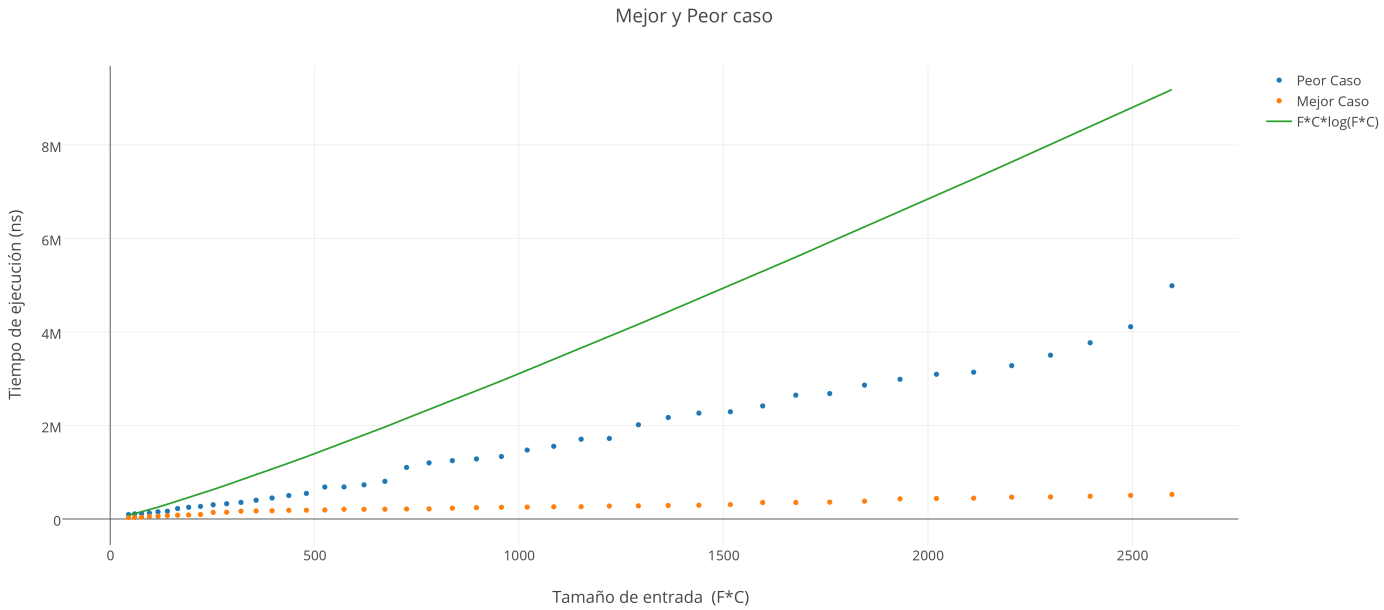



*Gráfico* 2.5 - *Comparativo*

Podemos ver como las familias están acotadas por la función de la complejidad teórica calculada. La misma se obtuvo realizando cuadrados mínimos con una función $a$*(N*log(N)) siendo N = F*C y $a$ el coeficiente aproximado por el método y luego ajustado para lograr la cota adecuada.

Luego de dichos experimentos y casos probados, se puede concluir que a pesar de poder tener ciclos en todas las salas del mapa y donde dichos ciclos presenten aristas con pesos iguales, generando al algoritmo la posibilidad de crear varias ramas de posibles soluciones, los tiempos se mantienen dentro de la complejidad propuesta.

Además, se puede concluir que el algoritmo de Kruskal utilizado para resolver el problema de recorrer todas las salas es una aplicación correcta del mismo, brindando siempre la mejor solución posible.

# 4 Ejercicio 3

## 4.1 Descripción de problema

Luego de haber conseguido todas las piezas, llegan a la cruz y se encuentran con unos carritos apoyados sobre unas vías las cuales al parecer llegan hasta afuera de la fortaleza. De un momento a otro, el equipo empieza a escuchar ruidos de adentro del laberinto, de tanto romper las paredes, la estructura se estaba desplomando, es por esto que deben conseguir un escape rápido, como al lado del carrito ven que se encuentra un mapa con estaciones y el final, nos solicitan ayuda para encontrar el camino mínimo de estaciones para llegar afuera de la forma más rápida y eficiente.

## 4.2 Explicación de resolución del problema

Dado un mapa con $N$ estaciones y el tiempo que toma viajar entre dos de ellas, debemos encontrar la forma más rapida de viajar entre la primera estación y la última. Para ello, decidimos representar el mapa como un grafo orientado con pesos en sus aristas, donde cada estación fue representada por un nodo y el camino de estación a estación por aristas. Dado este grafo (al cual decidimos implementar mediante listas de adyacencia) el problema se reduce a encontrar el camino mínimo sobre él.

Para lo enunciado, aplicamos el algoritmo de Dijkstra sobre nuestra representación del grafo.

En el mismo se recorren los nodos del grafo teniendo en cuenta primero los más cercanos al origen, comenzando por el origen mismo. Un invariante de este algoritmo es que, para el conjunto de nodos ya visitados se conoce definitivamente el camino mínimo desde el origen hacia cualquier nodo perteneciente a dicho conjunto.
Cuando se visita un nodo se comprueba si se puede desde este nodo llegar más rapido a sus vecinos que lo calculado anteriormente. De ser así, se actualiza la distancia de ese vecino al origen y se guarda el nodo adyacente desde el cual se pudo conseguir dicha distancia. Cuando visitamos el nodo destino es porque se encontro el camino más corto a él.

Por último, solo resta recorrer desde el nodo salida y armar el camino mínimo a partir de los nodos previos que guardabamos cuando se iban actualizando las distancias parciales de estos.

## 4.3 Algoritmos

A continuación se detalla el pseudo-código de la parte principal del algoritmo:

**función** *Dijsktra(estaciones, vias)*
para Grafo fortaleza asignar grafo(estaciones,vias) O($N^2$)
**Para cada** *nodo* ∈ *fortaleza* **hacer**
Ciclo: O(N)
para nodo.distancia asignar invalido O(1)
para nodo.visitado asignar falso O(1)
**fin para**
**Mientras** ∃ *nodo alcanzable que no haya sido visitado* **hacer**
Ciclo: O(N) condicion: O(N)
para actual asignar masCercano(visitados, distancia, cantidadNodos) O(N)
para visitados[actual] asignar verdadero O(1)
para vecinos asignar vecinos(fortaleza,actual) O(1)
**Para cada** *arista* ∈ *vecinos* **hacer**
Ciclo: O(N)
para dist asignar distancia(actual) + peso(arista) O(1)
**si** *dist* < *distancia(arista.destino)* ∨ *distancia(arista.destino)* = *invalido* **entonces**
para distancia[v.destino] asignar dist O(1)
para previos[v.destino] asignar actual O(1)
**fin si**
**fin para**
**fin ciclo**
**fin función**

**Complejidad total del algoritmo: O($N^2$)** con N = cantidad de estaciones.
**Aclaraciones de variables y funciones**

- La función grafo, crea grafo uniendo las aristas con los respectivos nodos que son adyacentes.
- La función vecinos devuelve una lista de aristas correspondiente a los nodos adyacentens al vértice consultado
- La función masCercano devuelve el nodo con la menor distancia al origen, que no haya sido visitado.

## 4.4 Análisis de complejidades

La entrada de nuestro algoritmo tiene $m$ lineas. Estas representan las aristas que va a contener nuestro grafo. Cada arista es procesada y almacenada en nuestro grafo en tiempo constante. Sabemos que un digrafo tiene la cantidad de aristas acotadas por $n * (n-1)$ siendo $n$ la cantidad de nodos. Entonces construir nuestro grafo tiene una complejidad de $O(n^2)$.

Para el algoritmo de Dijkstra implementamos su cola de prioridad con dos arreglos, uno con la minima distancia encontrada hacia el nodo y otro que nos indica si un nodo fue visitado o no. Por lo tanto, conseguir el próximo nodo a visitar es recorrer uno por uno los elementos del arreglo de distancias y quedarnos con el índice del nodo con menor valor válido siempre que esté marcado como "no visitado" en el otro arreglo. Esta operación tiene costo lineal en la cantidad de nodos ($O(n)$) y se realiza en el peor caso $n$ veces caundo el último nodo que se visite es la salida, lo cual resulta en un costo cuadrático.

Luego se recorren los vecinos de un nodo y se actualizan sus distancias. Dada nuestra representación en arreglos, actualizar la distancia de cada vecino toma tiempo constante. Para los $n$

nodos se recorren sus vecinos, que en principio podrían ser $n-1$. Entonces, la complejidad de esta operación es $O(n^2)$.

Finalmente recorremos en complejidad $O(n)$ el arreglo *prev* donde se guardan los vecinos que realizan el camino mínimo a cada nodo. De esta manera construimos efectivamente el camino mínimo desde el destino hacia el origen y lo imprimimos.

Sumando estas operaciones nuestra complejidad final es:
$O(n^2) + O(n^2) + O(n^2) + O(n) = O(n^2)$

## 4.5 Demostración de correctitud

Nuestro problema plantea un escenario donde deseamos ir de la estacion 1 a la estacion $n$ en el menor tiempo posible. Tomamos cada estación como un nodo del grafo y el trayecto entre dos estaciones como una arista. Utilizamos como el peso de estas aristas el tiempo que toma ir de una estacion a otra. Luego, el tiempo que toma recorrer un camino entre estaciones es la suma del peso de sus aristas.

Teniendo en cuenta esto, podemos aplicar algún algoritmo que busque el camino mínimo en nuestro grafo. El algoritmo de Dijkstra nos va a permitir esto. Podemos aplicarlo al ser nuestro grafo dirigido y sin ejes negativos. Cada vez que visita un nodo nos asegura que ya encontro el camino mínimo al mismo, por lo tanto podemos dejar de buscar una vez que nuestro algoritmo visita el nodo que representa la salida de la fortaleza.

Para que el algoritmo pueda visitar un nodo tiene que ser el nodo no visitado con menor distancia al nodo origen. Esta distancia parcial se calcula con los caminos que se pueden formar con los nodos visitados. Si un nodo puede ser visitado entonces no es posible que exista un camino más corto hacia él, sino ese camino hubiera sido descubierto antes debido a que el algoritmo siempre visita los nodos más cercanos.

## 4.6 Experimientos y conclusiones

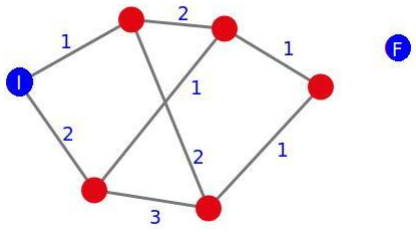
### 4.6.1 Test

Para corroborar el correcto funcionamiento de nuestro algoritmo implementado desarrollamos los siguientes tests:

**Caso 1: Sin solución**

Este caso se da cuando el nodo que representa a la estación final queda aislado

El grafo que representa a este tipo es de la siguiente forma:

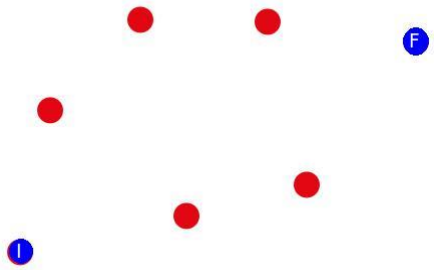



*Ejemplo* 3.1 - *Caso Sin Solución*

### Caso 2: Sin ejes

Esta familia de casos se da cuando todos los nodos que representa a la estaciones quedan aislados

El grafo que visualiza a este tipo presenta la siguiente forma:

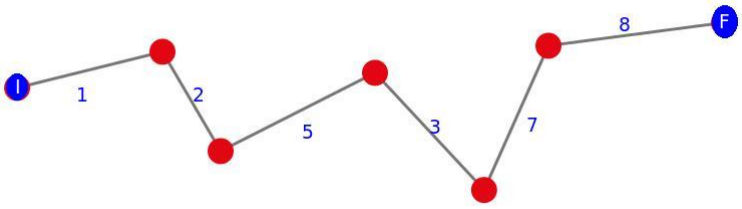



*Ejemplo* 3.2 - *Caso Sin Ejes*

### Caso 3: Camino simple

Este caso se da cuando el grafo que se recibe como parámetro ya presenta un camino simple armado desde la estación inicial a la final

El grafo que describe a esta familia de casos es el siguiente:

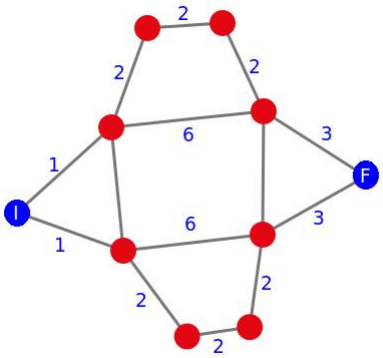



*Ejemplo* 3.3 - *Caso Camino Simple*

### Caso 4: Múltiples caminos de igual peso llegan a destino

Este caso se da cuando existen varios ramas dentro del grafo que van desde el nodo inicial hasta el último y la suma de dichos pesos termina siendo igual. Veremos más adelante que por la implementación y desarrollo de nuestro algoritmo este terminará siendo el peor caso.

El grafo que describe a esta familia de casos es el siguiente:




*Ejemplo* 3.4 - *Caso Con Multiples Caminos*

**Caso 5 Random**

Este caso se da cuando se recibe grafos con aristas y nodos sin ninguna particularidad.

### 4.6.2 Performance del algorítmo

Acorde a lo solicitado, mostraremos distintos tipos de familias de casos para nuestro algoritmo, y además, daremos el tiempo estimado según la complejidad del algoritmo calculada anteriormente.

Observemos que es lo que sucede al ir variando los parámetros de entrada para cada familia, de manera tal que, a medida que la cantidad de estaciones van creciendo linealmente, podamos observar que sucede con cada familia de casos (es decir, las familias se van a mantener, solo se estará modificando el tamaño de la entrada en todos los casos).

Se comienza, por lo tanto, con una entrada de 2 estaciones y se la aumenta en cada test en uno hasta llegar a una cantidad total de 50 estaciones. De manera que no hay desigualdades y todas las familias se miden en instancias de igual tamaño.
El origen siempre estará en la primer estación y el destino en la última. A medida que la cantidad de nodos crezcan, las posiciones de los mismos no serán alterados para que siempre se encuentren dentro de la misma familia.

Se desarrollaron un total de cinco familias de casos denominadas de la siguiente manera:

1. Sin solución
2. Sin ejes
3. Camino simple
4. Múltiples caminos de igual peso llegan a destino
5. Random

Se realizaron las mediciones pertinentes y se desarrollo el siguiente gráfico con las instancias de las familias enunciadas, el cual será mostrado a continuación:

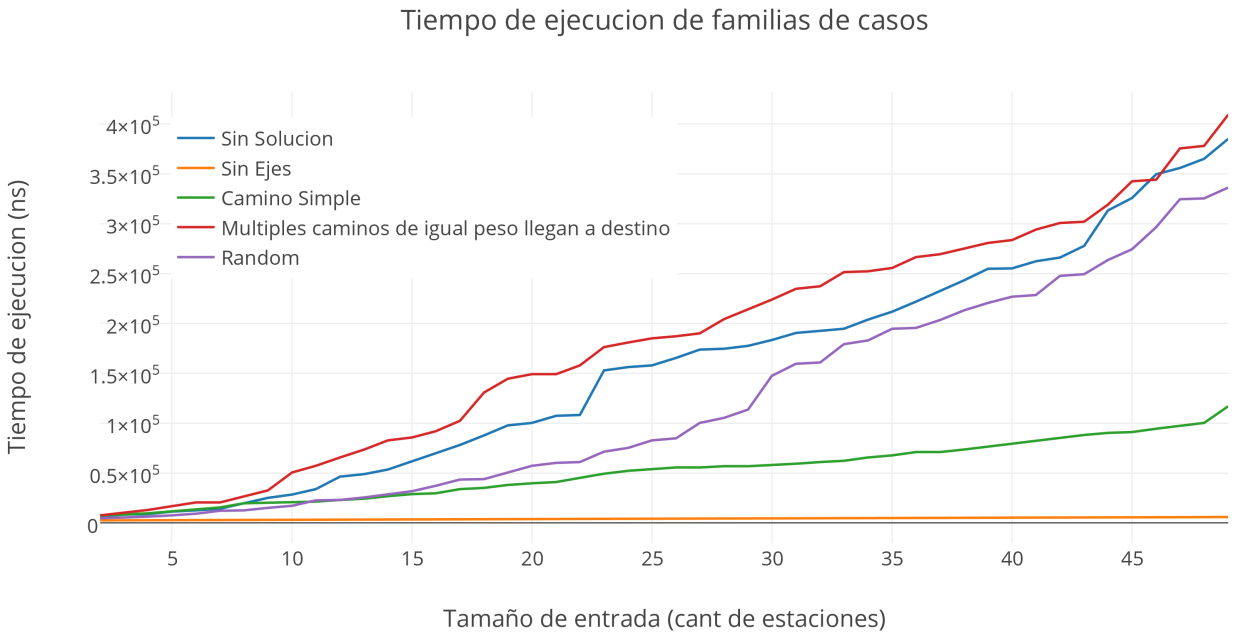
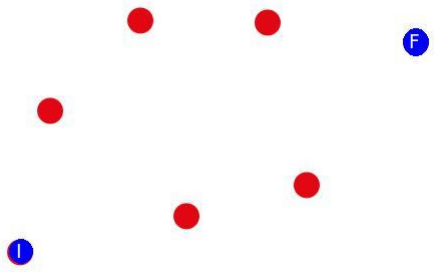



*Gráfico* 3.1 - *Comparativo*

Como se observa en el gráfico la función representativa de la familia número 2, presenta una mejor performance en relación a las otras. Esto se debe a que nuestro algoritmo intenta chequear las aristas para armar los caminos y como encuentra que no hay ningun camino de ningún nodo hacia otro finaliza su ejecución demandando unicamente la creación del grafo.

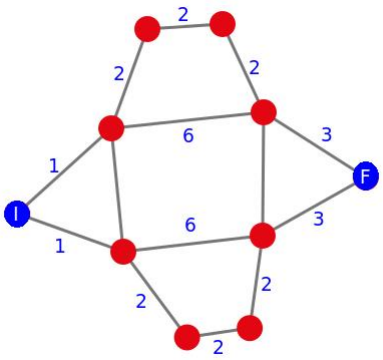
Luego de chequear dichas instancias, llegamos a la conclusión que la familia de casos que presenta una mejor performance para nuestro algoritmo es la familia número 2: **Sin ejes, todos los nodos desconectados**

Un grafo representativo de lo dicho sería el siguiente:




*Grafo* 3.1 - *Mejor caso, no tiene ejes todos las estaciones estan desconectadas*

Luego, verificando el peor caso, llegamos a la conclusión que la familia de casos en el que resulta menos beneficioso trabajar con nuestro algoritmo será la familia de casos número 4: **el grafo que se obtiene de transformar el circuito de estaciones de entrada es aquel que presenta multiples caminos para llegar a destino donde la suma de estos caminos presentan el mismo valor**, dandonos el siguiente grafo:




*Grafo* 3.2 - *Peor Caso*

Veamos en detalle como se comportan el mejor y peor caso con respecto a la complejidad calculada.

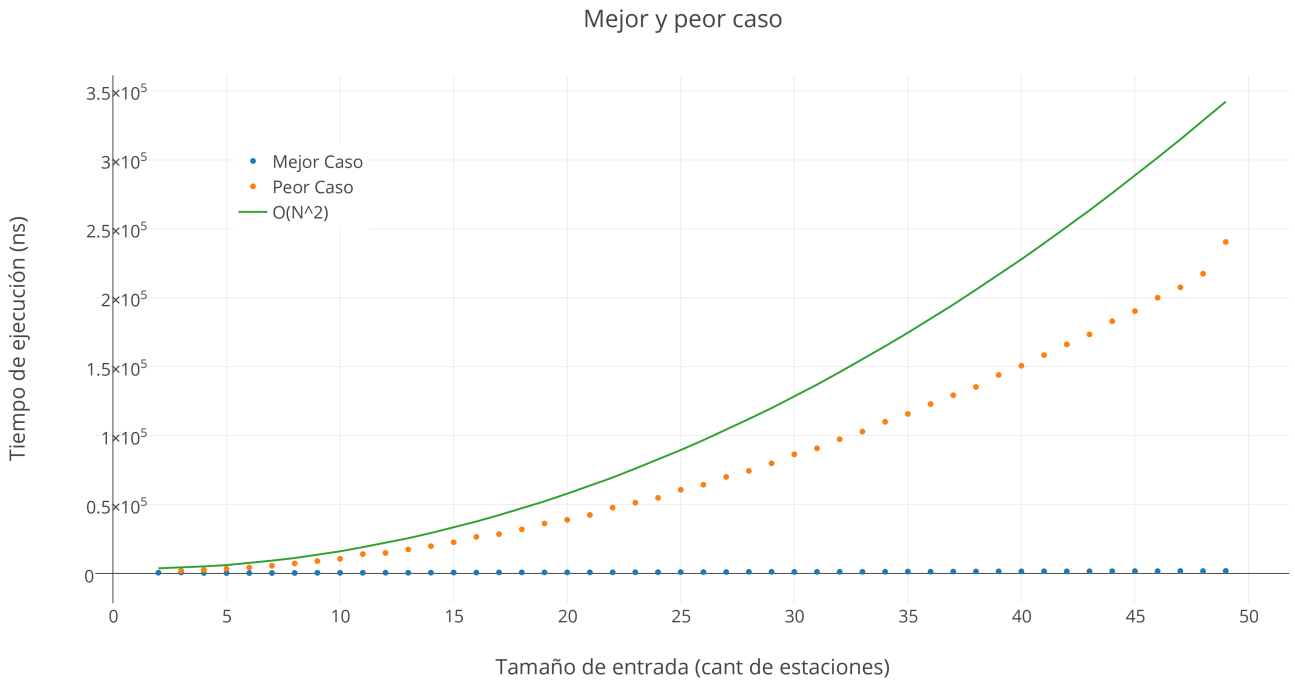



Gráfico 3.2 - *Comparativo*

Podemos ver en este gráfico comparativo como las familias están acotadas por la función de la complejidad teórica calculada.

La cota de la complejidad fue encontrada con una aproximación mediante cuadrados mínimos sobre una función cuadrática, y ajustando el coeficiente principal de forma que fuese suficiente para evidenciar la pertenencia a O($N^2$).

Dada la escala utilizada para el gráfico 3.2 la función del mejor caso se torna constante, dando a entender que todas las mediciones están en cero. Es por esto que desarrollamos otro gráfico para poder observar con mayor detenimiento dicha función. Además, como el mejor caso se da cuando no hay ejes, el costo total del algoritmo es O(N). Por lo tanto, mostraremos esto acotando los resultados por una función lineal que fue obtenida realizando cuadrados mínimos y buscando un valor adecuado para el coeficiente principal lo suficientemente grande para lograr la cota.

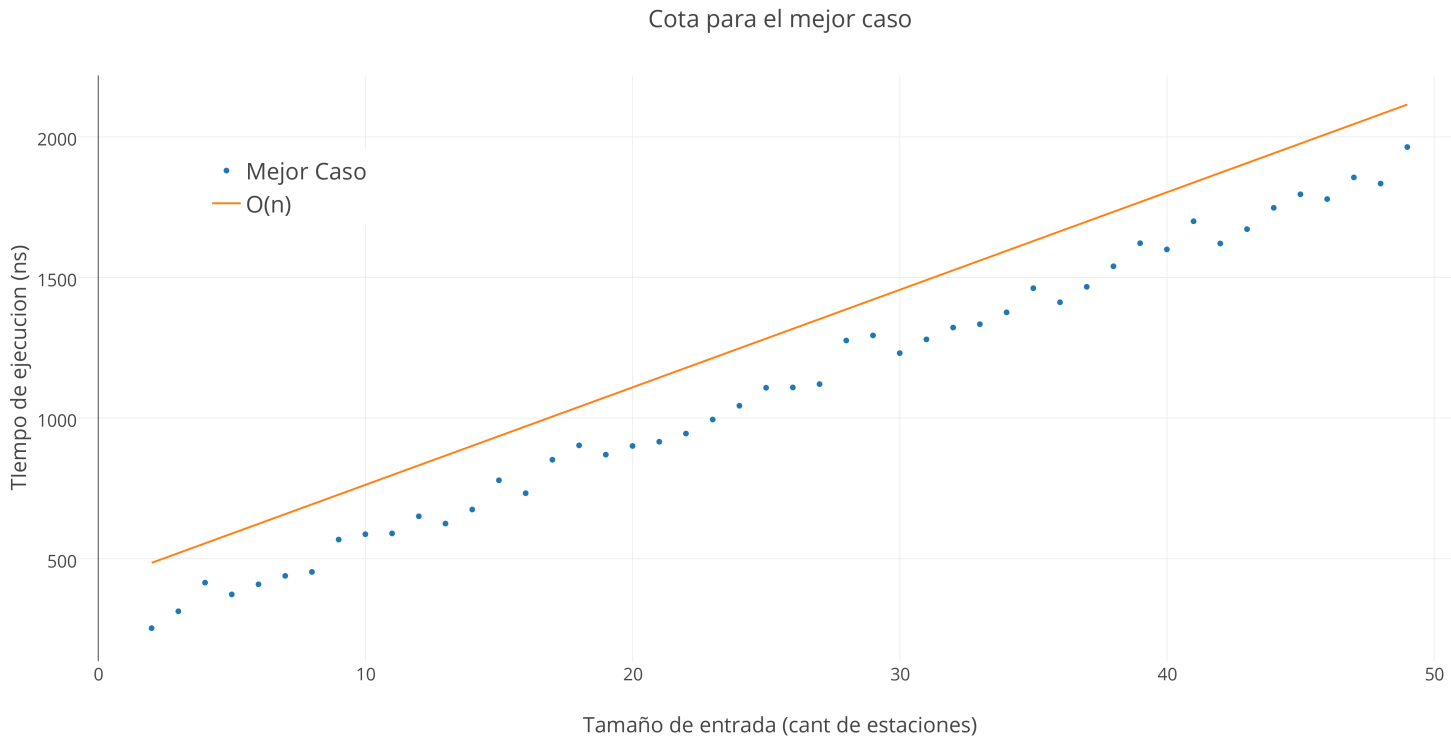



Gráfico 3.3 - *Mejor caso contra cota inferior*

Podemos concluir luego de los tests realizados, que el algoritmo se mantiene dentro de la cota de complejidad calculada.

Pudimos observar además, detalles relacionados al funcionamiento del algoritmo y que es lo que sucede cuando se presentan.

Concluimos finalmente, que el algoritmo resuelve el problema de las estaciones ofreciendo el mejor resultado para todos los casos.

# 5 Aclaraciones

## 5.1 Aclaraciones para correr las implementaciones

Cada ejercicio fue implementado con su propio Makefile para un correcto funcionamiento a la hora de utilizar el mismo.
El ejecutable para el ejercicio 1 sera ej1 el cual recibirá como se solicito entrada por stdin y emitirá su respectiva salida por stdout.
Tanto el ejercicio 2 como el 3, compilarán de la misma forma y podrán ser ejecutados con ej2 y ej3 respectivamente.
A su vez, para poder chequear las mediciones de tiempo y nuestros casos de testeo se creo una carpeta nueva por cada ejercicio. Dentro de cada una se cuenta con el respectivo makefile que compila todos los test pudiendo así probar cada uno por separado.