

# Control del Péndulo Invertido mediante Lógica Difusa

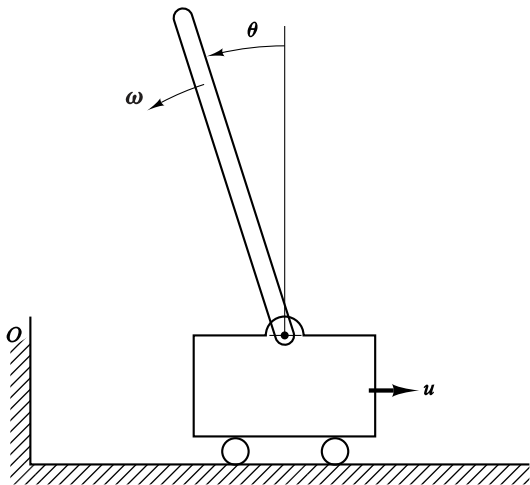
Guido Valenzano

Facultad de Ingeniería  
Universidad Nacional de Asunción

23 de febrero de 2017

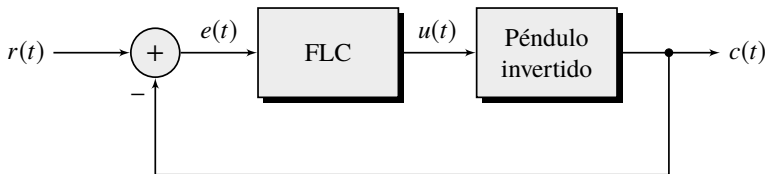
# El Péndulo Invertido

## Representación esquemática

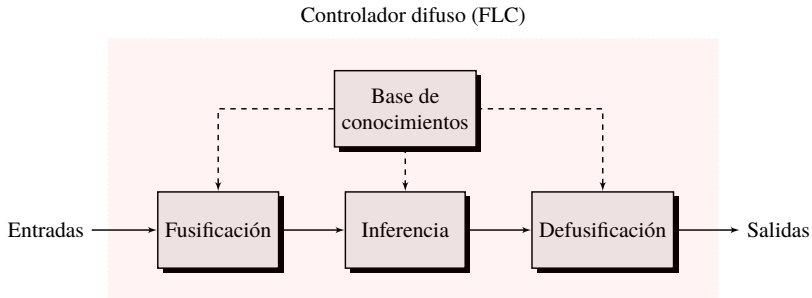


# Diseño del Controlador

## Diagrama de bloques del sistema en lazo cerrado



# Diagrama de bloques del FLC



## Pasos para el diseño de un FLC

- ▶ Selección de las variables de entrada y control. Definir que estados serán observados y que acciones de control serán consideradas.
- ▶ Elección de la forma en que las observaciones del proceso serán expresadas como conjuntos difusos.
- ▶ Diseño de las reglas. Determinar que reglas serán utilizadas y bajo que condiciones.
- ▶ Diseño de la unidad computacional, es decir, proveer los algoritmos para realizar los cálculos difusos.
- ▶ Definición de los mecanismos mediante los cuales las decisiones de control difuso pueden transformarse en acciones de control “clásico”.

## Pasos para el diseño de un FLC

- ▶ Selección de las variables de entrada y control. Definir que estados serán observados y que acciones de control serán consideradas.
- ▶ Elección de la forma en que las observaciones del proceso serán expresadas como conjuntos difusos.
- ▶ Diseño de las reglas. Determinar que reglas serán utilizadas y bajo que condiciones.
- ▶ Diseño de la unidad computacional, es decir, proveer los algoritmos para realizar los cálculos difusos.
- ▶ Definición de los mecanismos mediante los cuales las decisiones de control difuso pueden transformarse en acciones de control “clásico”.



## Pasos para el diseño de un FLC

- ▶ Selección de las variables de entrada y control. Definir que estados serán observados y que acciones de control serán consideradas.
- ▶ Elección de la forma en que las observaciones del proceso serán expresadas como conjuntos difusos.
- ▶ **Diseño de las reglas. Determinar que reglas serán utilizadas y bajo que condiciones.**
- ▶ Diseño de la unidad computacional, es decir, proveer los algoritmos para realizar los cálculos difusos.
- ▶ Definición de los mecanismos mediante los cuales las decisiones de control difuso pueden transformarse en acciones de control “clásico”.

## Pasos para el diseño de un FLC

- ▶ Selección de las variables de entrada y control. Definir que estados serán observados y que acciones de control serán consideradas.
- ▶ Elección de la forma en que las observaciones del proceso serán expresadas como conjuntos difusos.
- ▶ Diseño de las reglas. Determinar que reglas serán utilizadas y bajo que condiciones.
- ▶ Diseño de la unidad computacional, es decir, proveer los algoritmos para realizar los cálculos difusos.
- ▶ Definición de los mecanismos mediante los cuales las decisiones de control difuso pueden transformarse en acciones de control “clásico”.

## Pasos para el diseño de un FLC

- ▶ Selección de las variables de entrada y control. Definir que estados serán observados y que acciones de control serán consideradas.
- ▶ Elección de la forma en que las observaciones del proceso serán expresadas como conjuntos difusos.
- ▶ Diseño de las reglas. Determinar que reglas serán utilizadas y bajo que condiciones.
- ▶ Diseño de la unidad computacional, es decir, proveer los algoritmos para realizar los cálculos difusos.
- ▶ Definición de los mecanismos mediante los cuales las decisiones de control difuso pueden transformarse en acciones de control "clásico".

# Paso 1

## Paso 1

Selección de las variables de entrada y control. Definir que estados serán observados y que acciones de control serán consideradas.

### Entradas

- Posición angular  $\theta$
- Velocidad angular  $\omega$

### Salida de control

- Fuerza  $F$



# Paso 2

## Paso 2

Elección de la forma en que las observaciones del proceso serán expresadas como conjuntos difusos.

### Entradas

- Posición angular  $\theta$

$$< \mathcal{X}_\theta, T_\theta(\mathcal{X}_\theta), U_\theta, G_\theta, M_\theta >$$

- Velocidad angular  $\omega$

$$< \mathcal{X}_\omega, T_\omega(\mathcal{X}_\omega), U_\omega, G_\omega, M_\omega >$$

### Salida de control

- Fuerza  $F$

$$< \mathcal{X}_F, T_F(\mathcal{X}_F), U_F, G_F, M_F >$$

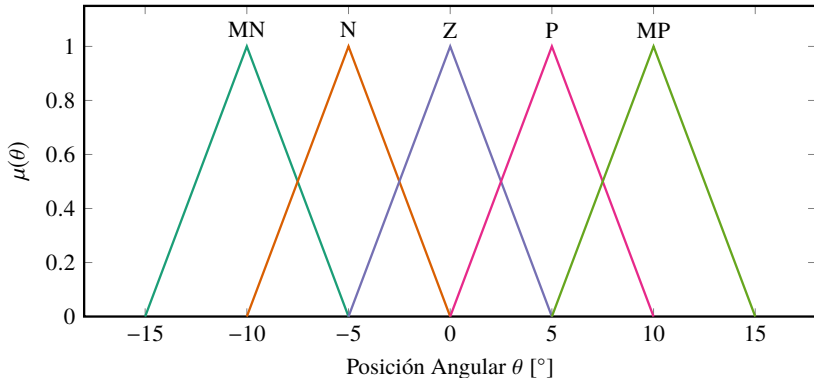
## Entradas: Posición angular

$\chi_\theta$  Posición angular  $\theta$

$T_\theta(\chi_\theta)$  Muy negativo, Negativo, Cero, Positivo, Muy positivo

$U_\theta$   $[-15^\circ, 15^\circ]$

$G_\theta, M_\theta$





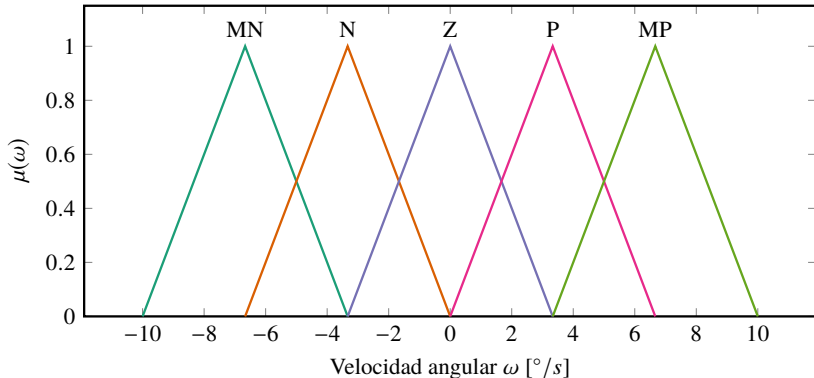
## Entradas: Velocidad angular

$\chi_\omega$  Velocidad angular  $\omega$

$T_\omega(\chi_\omega)$  Muy negativo, Negativo, Cero, Positivo, Muy positivo

$U_\omega$   $[-10^\circ, 10^\circ]$

$G_\omega, M_\omega$



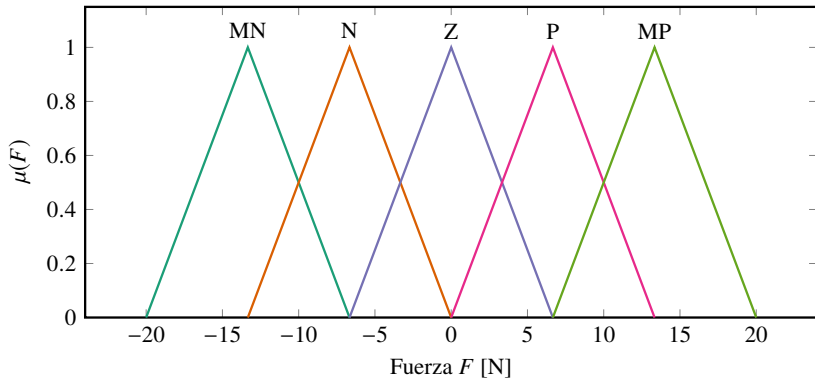
## Salida: Fuerza

$\mathcal{X}_F$  Fuerza  $F$

$T_3(\mathcal{X}_F)$  Muy negativo, Negativo, Cero, Positivo, Muy positivo

$U_F$   $[-20, 20]$  N

$G_F, M_F$



# Paso 3

## Paso 3

Diseño de las reglas. Determinar que reglas serán utilizadas y bajo que condiciones.

		$\theta$				
		<b>MN</b>	<b>N</b>	<b>Z</b>	<b>P</b>	<b>MP</b>
$\omega$	<b>MN</b>	MN	MN	N	Z	P
	<b>N</b>	MN	MN	Z	P	P
	<b>Z</b>	MN	N	Z	P	MP
	<b>P</b>	N	N	Z	MP	MP
	<b>MP</b>	N	Z	P	MP	MP

# Paso 4

## Paso 4

Diseño de la unidad computacional, es decir, proveer los algoritmos para realizar los cálculos difusos.

Inferencia Mamdani

Implicación Mínimo

Composición Máximo

# Paso 5

Definición de los mecanismos mediante los cuales las decisiones de control difuso pueden transformarse en acciones de control “clásico”.

### Método de defuzzificación

- Método de la Altura (HM) o Promedio Ponderado

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n c_i(\tilde{F}) \mu_i(\tilde{F})}{\sum_{i=1}^n \mu_i(\tilde{F})}$$



Ejemplo

## Ejemplo

Si las entradas del sistema son:

$$\theta = 3.2^\circ$$

$$\omega = -4^\circ/\text{s}$$

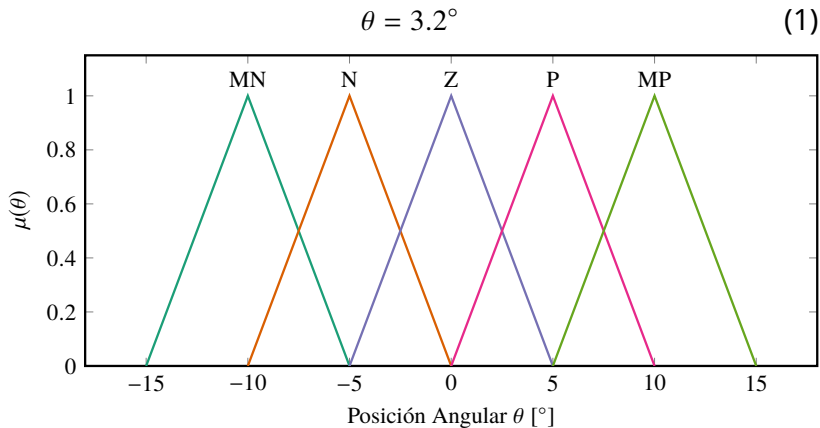
Encontrar:

- ▶ Las entradas difusas  $\tilde{\theta}$  y  $\tilde{\omega}$
- ▶ Las reglas que fueron activadas
- ▶ La salida difusa  $\tilde{F}$
- ▶ La salida de control clásico  $F$

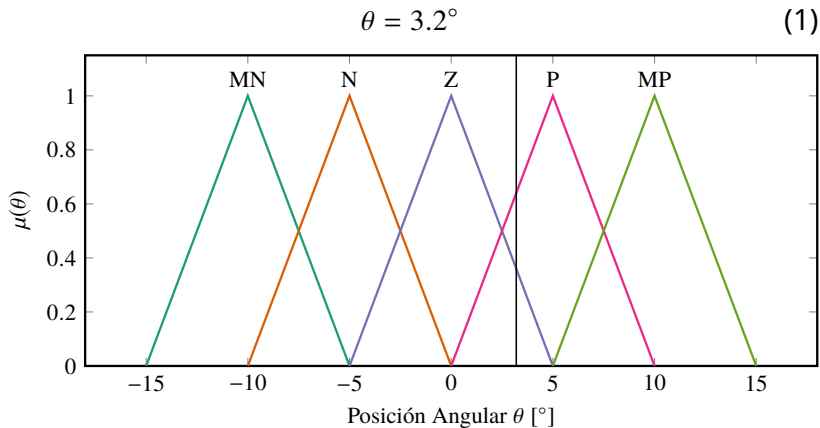
## Fuzzificación: Posición angular

$$\theta = 3.2^{\circ} \quad (1)$$

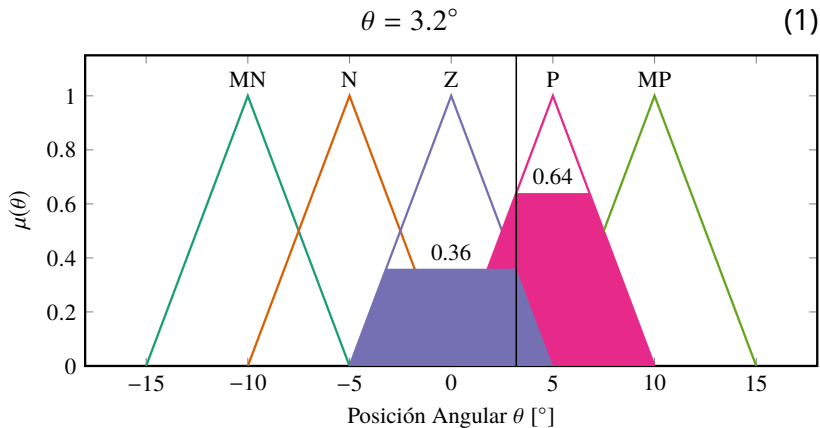
## Fuzzificación: Posición angular



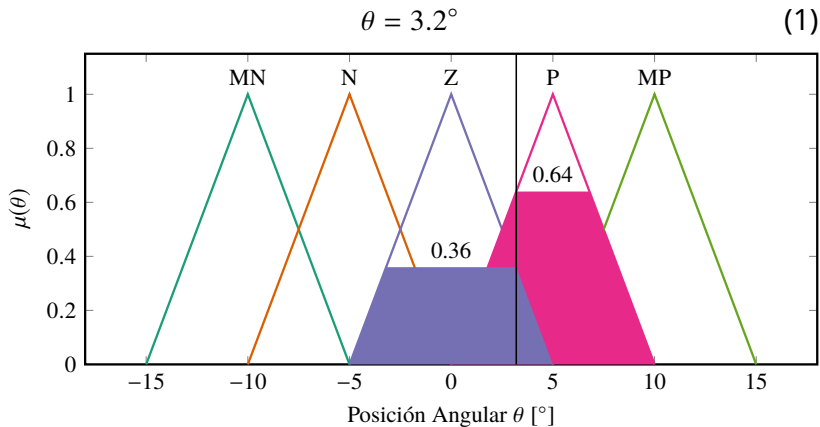
## Fuzzificación: Posición angular



## Fuzzificación: Posición angular



## Fuzzificación: Posición angular



$$\tilde{\theta}_{3.2} = \frac{0.36}{Z} + \frac{0.64}{P} \quad (2)$$

## Fuzzificación: Velocidad angular

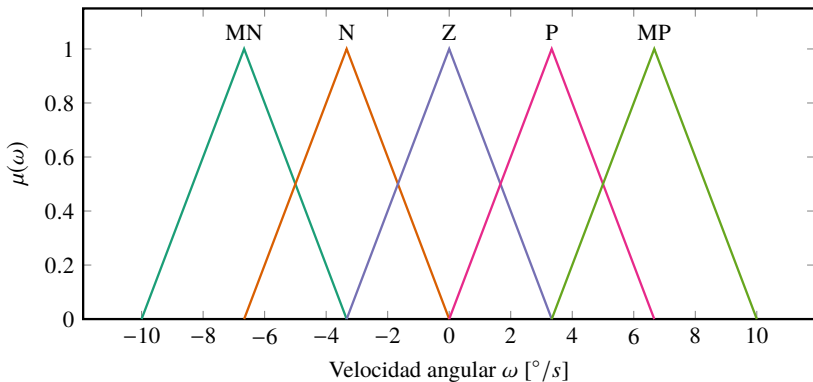
$$\omega = -4^{\circ}/s \quad (3)$$



## Fuzzificación: Velocidad angular

$$\omega = -4^{\circ}/s$$

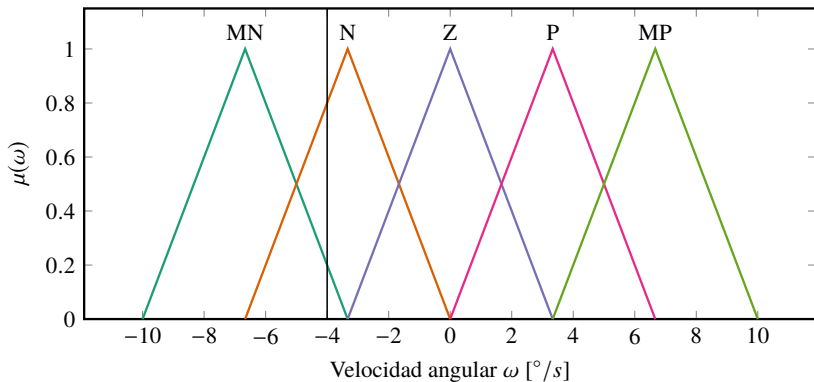
(3)



## Fuzzificación: Velocidad angular

$$\omega = -4^{\circ}/s$$

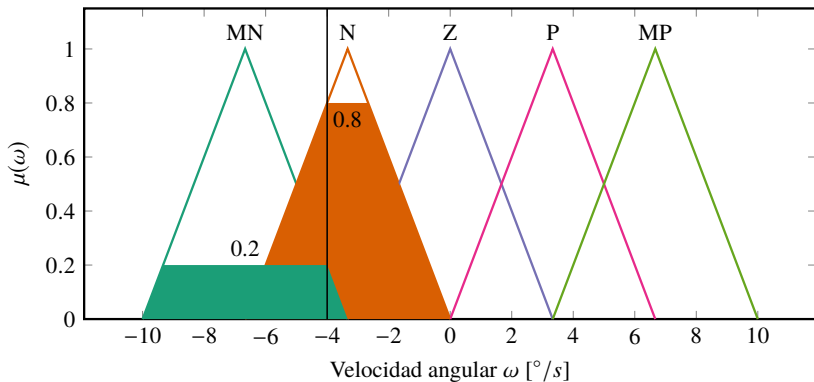
(3)



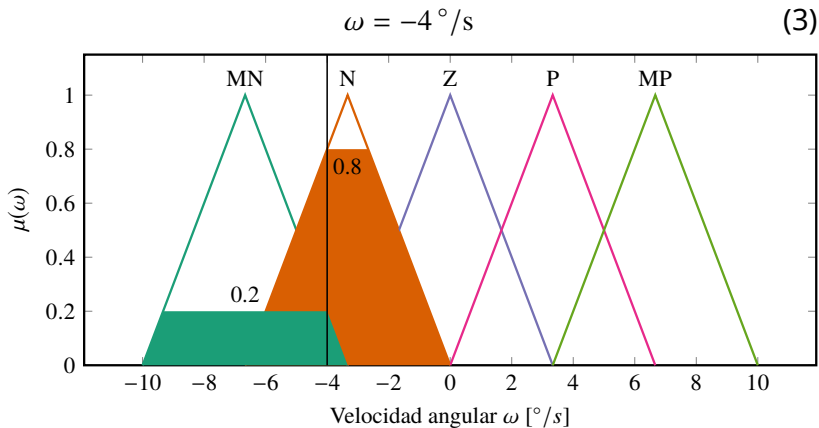
## Fuzzificación: Velocidad angular

$$\omega = -4^{\circ}/s$$

(3)



## Fuzzificación: Velocidad angular



$$\tilde{\omega}_{-4} = \frac{0.2}{\text{MN}} + \frac{0.8}{\text{N}} \quad (4)$$

$$\tilde{\theta}_{3.2} = \frac{0.36}{Z} + \frac{0.64}{P}$$

$$\tilde{\omega}_{-4} = \frac{0.2}{MN} + \frac{0.8}{N}$$

		$\theta$				
		<b>MN</b>	<b>N</b>	<b>Z</b>	<b>P</b>	<b>MP</b>
$\omega$	<b>MN</b>	MN	MN	N	Z	P
	<b>N</b>	MN	MN	Z	P	P
	<b>Z</b>	MN	N	Z	P	MP
	<b>P</b>	N	N	Z	MP	MP
	<b>MP</b>	N	Z	P	MP	MP

$$\tilde{\theta}_{3.2} = \frac{0.36}{Z} + \frac{0.64}{P}$$

$$\tilde{\omega}_{-4} = \frac{0.2}{MN} + \frac{0.8}{N}$$

		$\theta$				
		<b>MN</b>	<b>N</b>	<b>Z</b>	<b>P</b>	<b>MP</b>
$\omega$	<b>MN</b>	MN	MN	N	Z	P
	<b>N</b>	MN	MN	Z	P	P
	<b>Z</b>	MN	N	Z	P	MP
	<b>P</b>	N	N	Z	MP	MP
	<b>MP</b>	N	Z	P	MP	MP

$$\tilde{F} = \overline{N} + \overline{Z} + \overline{P}$$

### Valor Negativo

$$\text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} \quad \text{and} \quad \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} \quad \text{then} \quad \tilde{F} = \frac{\min(0.36, 0.2)}{N} = \frac{0.2}{N}$$

### Valor Negativo

$$\text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} \quad \text{and} \quad \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} \quad \text{then} \quad \tilde{F} = \frac{\min(0.36, 0.2)}{N} = \frac{0.2}{N}$$

### Valor Positivo

$$\text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.64}{P} \quad \text{and} \quad \tilde{\omega} = \frac{0.8}{N} \quad \text{then} \quad \tilde{F} = \frac{\min(0.64, 0.8)}{P} = \frac{0.64}{P}$$



## Valor Negativo

$$\text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} \text{ and } \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} \text{ then } \tilde{F} = \frac{\min(0.36, 0.2)}{N} = \frac{0.2}{N}$$

## Valor Positivo

$$\text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.64}{P} \text{ and } \tilde{\omega} = \frac{0.8}{N} \text{ then } \tilde{F} = \frac{\min(0.64, 0.8)}{P} = \frac{0.64}{P}$$

## Valor Cero

$$\left. \begin{array}{l} \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} \text{ and } \tilde{\omega} = \frac{0.8}{N} \text{ then } \tilde{F} = \frac{\min(0.36, 0.8)}{Z} = \frac{0.36}{Z} \\ \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.64}{P} \text{ and } \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} \text{ then } \tilde{F} = \frac{\min(0.64, 0.2)}{Z} = \frac{0.2}{Z} \end{array} \right\}$$

### Valor Cero

$$\left. \begin{array}{ll} \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} & \text{and } \tilde{\omega} = \frac{0.8}{N} & \text{then } \tilde{F} = \frac{\text{mín}(0.36, 0.8)}{Z} = \frac{0.36}{Z} \\ \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.64}{P} & \text{and } \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} & \text{then } \tilde{F} = \frac{\text{mín}(0.64, 0.2)}{Z} = \frac{0.2}{Z} \end{array} \right\}$$

## Valor Cero

$$\left. \begin{array}{ll} \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} & \text{and } \tilde{\omega} = \frac{0.8}{N} & \text{then } \tilde{F} = \frac{\text{mín}(0.36, 0.8)}{Z} = \frac{0.36}{Z} \\ \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.64}{P} & \text{and } \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} & \text{then } \tilde{F} = \frac{\text{mín}(0.64, 0.2)}{Z} = \frac{0.2}{Z} \end{array} \right\}$$

$$\tilde{F} = \frac{\text{máx}(0.36, 0.2)}{Z} = \frac{0.36}{Z}$$

## Valor Cero

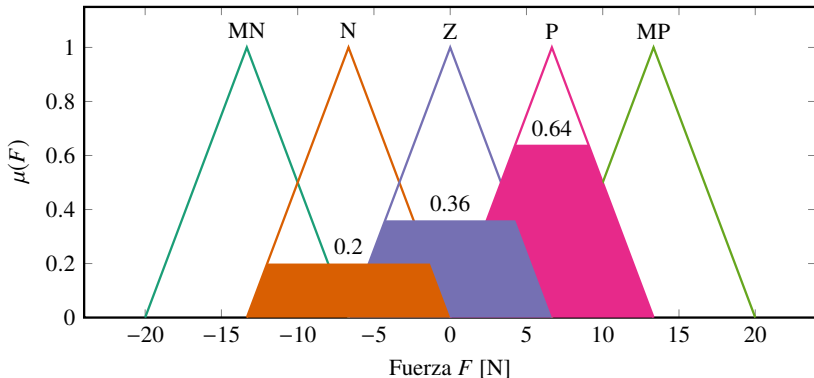
$$\left. \begin{array}{ll} \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.36}{Z} & \text{and } \tilde{\omega} = \frac{0.8}{N} & \text{then } \tilde{F} = \frac{\text{mín}(0.36, 0.8)}{Z} = \frac{0.36}{Z} \\ \text{if } \tilde{\theta} = \frac{0.64}{P} & \text{and } \tilde{\omega} = \frac{0.2}{MN} & \text{then } \tilde{F} = \frac{\text{mín}(0.64, 0.2)}{Z} = \frac{0.2}{Z} \end{array} \right\}$$

$$\tilde{F} = \frac{\text{máx}(0.36, 0.2)}{Z} = \frac{0.36}{Z}$$

## Valor final

$$\tilde{F} = \frac{0.2}{N} + \frac{0.36}{Z} + \frac{0.64}{P} \quad (5)$$

$$\tilde{F} = \frac{0.2}{N} + \frac{0.36}{Z} + \frac{0.64}{P}$$



$$F = \frac{\sum_{i=1}^n c_i(\tilde{F}) \mu_i(\tilde{F})}{\sum_{i=1}^n \mu_i(\tilde{F})}$$

$$F = \frac{\sum_{i=1}^n c_i(\tilde{F}) \mu_i(\tilde{F})}{\sum_{i=1}^n \mu_i(\tilde{F})}$$

$$F = \frac{-\frac{20}{3} \times 0.2 + 0 \times 0.36 + \frac{20}{3} \times 0.64}{0.2 + 0.36 + 0.64} = \frac{22}{9}$$

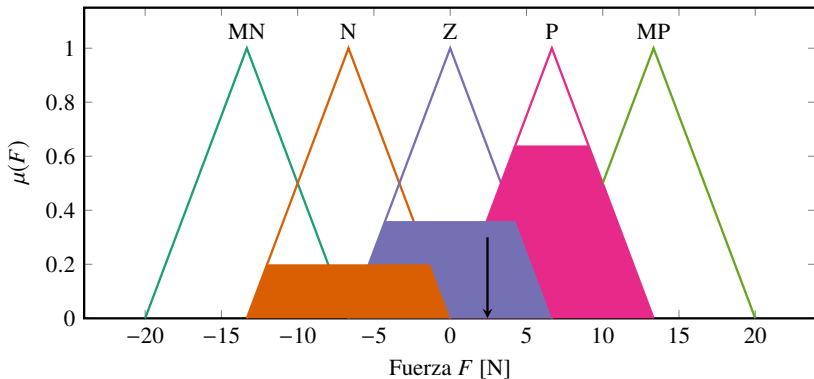
$$F = \frac{\sum_{i=1}^n c_i(\tilde{F}) \mu_i(\tilde{F})}{\sum_{i=1}^n \mu_i(\tilde{F})}$$

$$F = \frac{-\frac{20}{3} \times 0.2 + 0 \times 0.36 + \frac{20}{3} \times 0.64}{0.2 + 0.36 + 0.64} = \frac{22}{9}$$

$$F = 2.4444 \text{ N}$$



$$F = 2.4444 \text{ N}$$

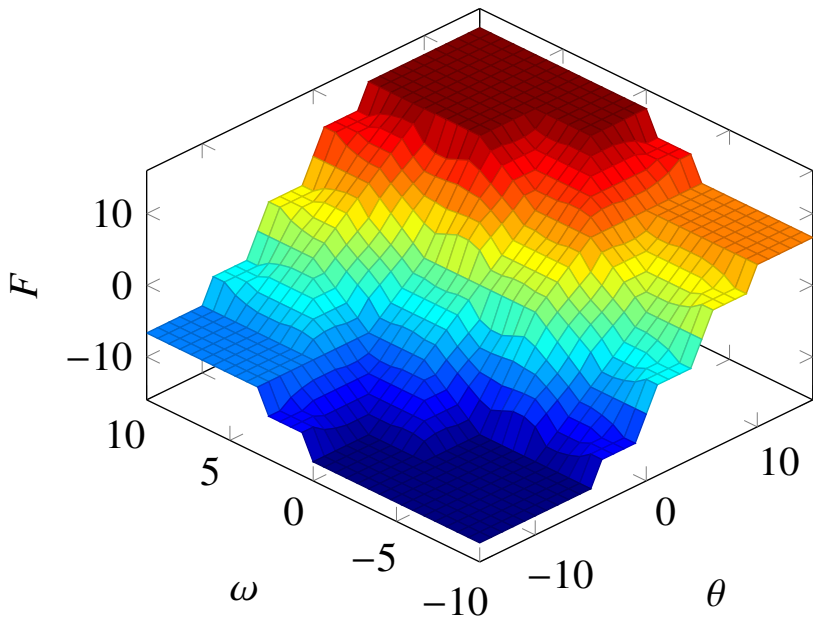


# Discusión: Defuzzificación

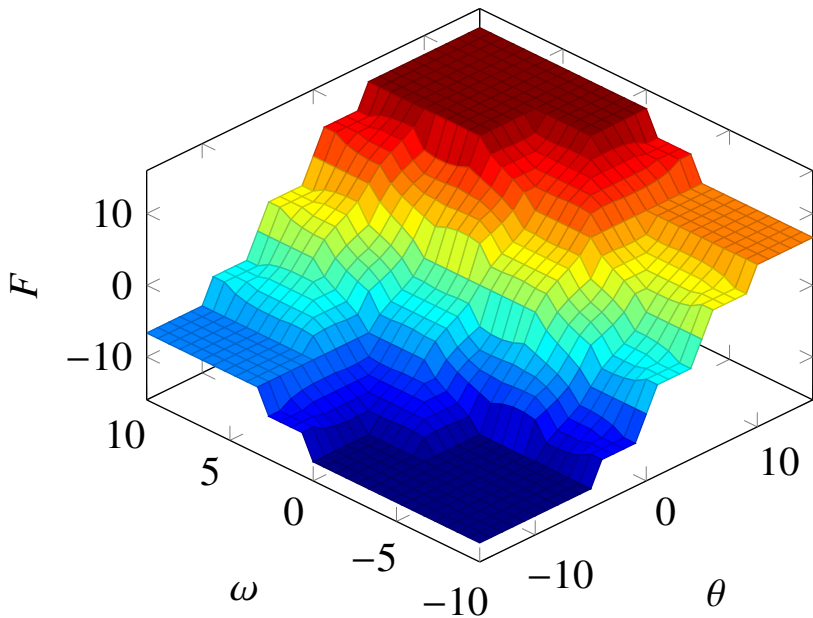
## Métodos de defuzzificación

Promedio ponderado	$F = 2.4444 \text{ N}$
Centro de sumas	$F = 1.8688 \text{ N}$
Primero del máximo	$F = 4.2667 \text{ N}$
Centro del máximo	$F = 6.6667 \text{ N}$
Último del máximo	$F = 9.0667 \text{ N}$

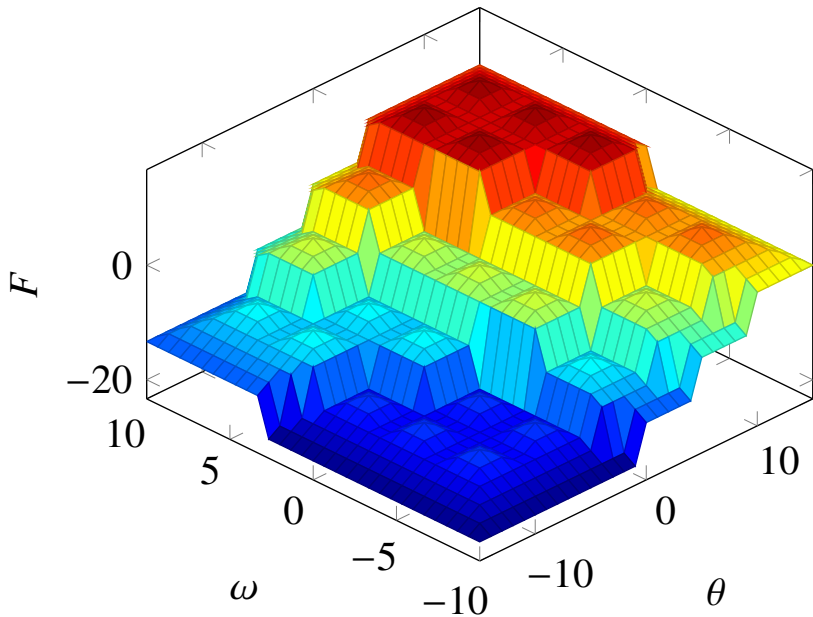
## Promedio ponderado



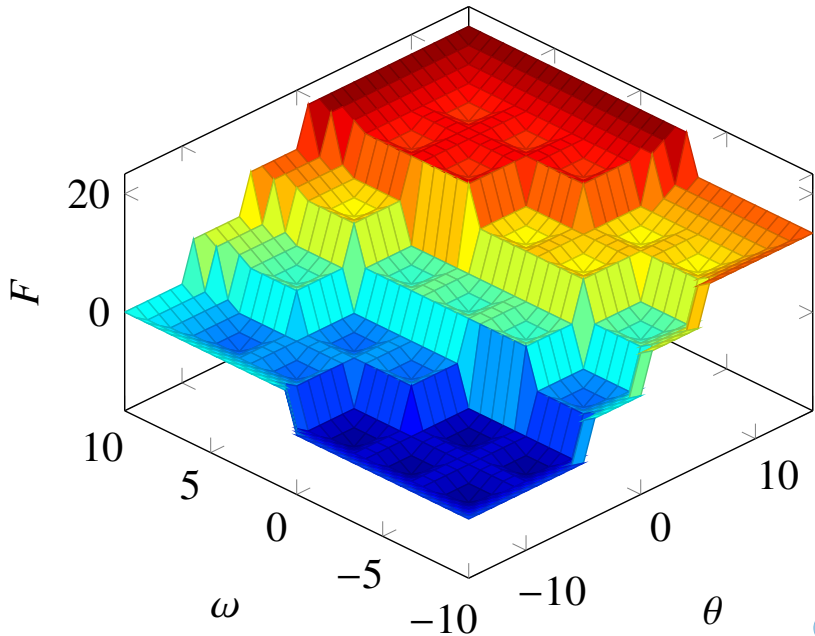
## Centro de sumas



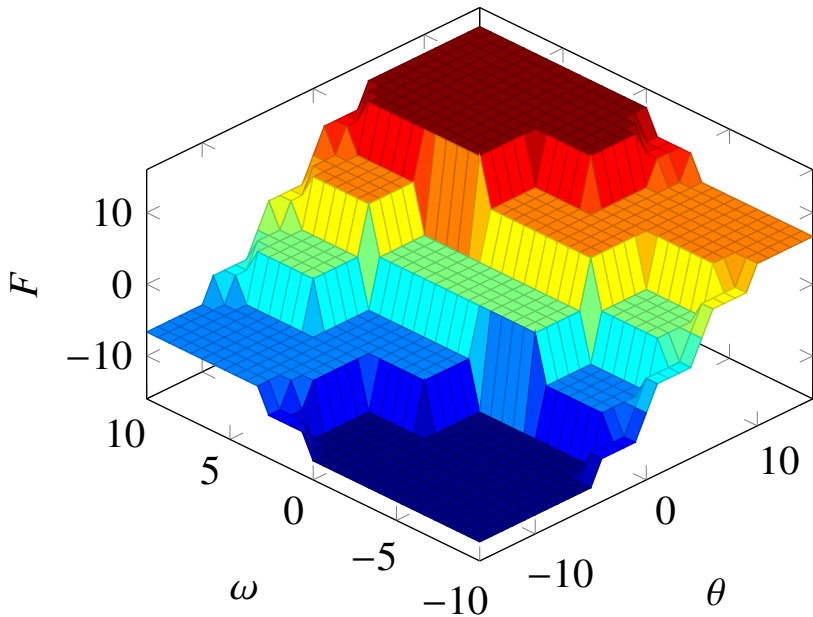
## Primero del máximo



## Último del máximo



## Centro del máximo



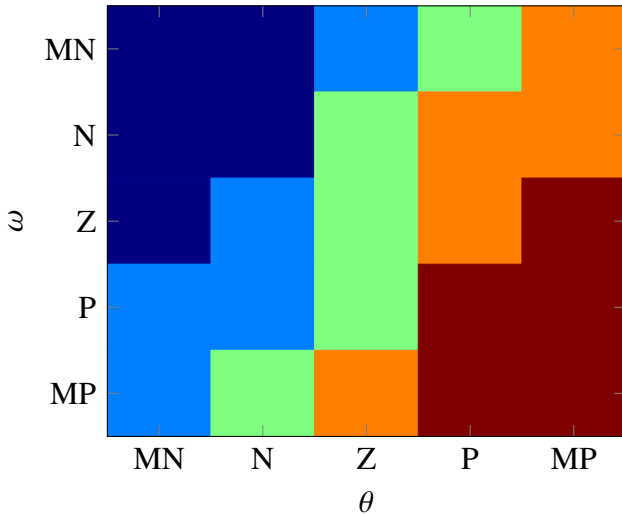


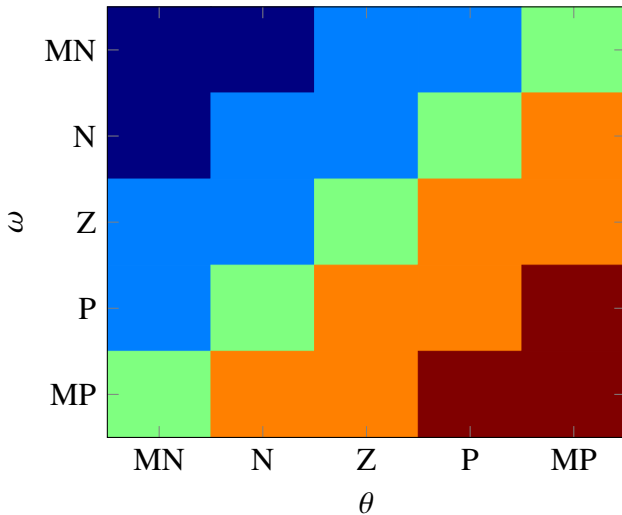
## Valores máximos y mínimos

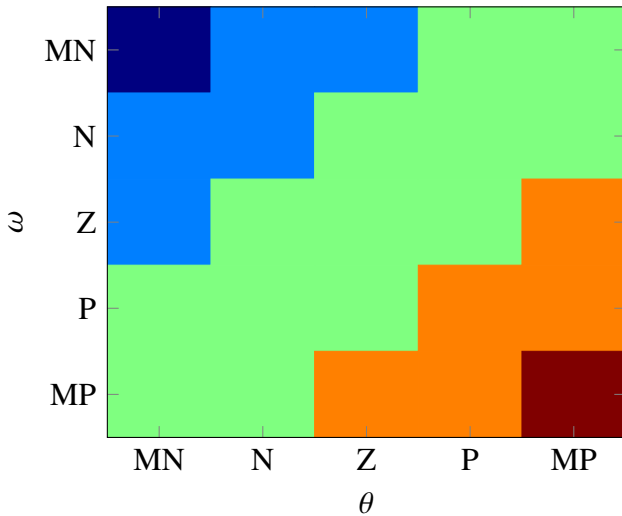
<b>Método</b>	<b>Mínimo</b>	<b>Máximo</b>
Promedio ponderado	-13.333	13.333
Centro de sumas	-13.333	13.333
Centro del máximo	-13.333	13.333
Primero del máximo	-13.333	19.999
Último del máximo	-19.999	13.333

# Discusión: Reglas

		$\theta$				
		<b>MN</b>	<b>N</b>	<b>Z</b>	<b>P</b>	<b>MP</b>
$\omega$	<b>MN</b>	MN	MN	N	Z	P
	<b>N</b>	MN	MN	Z	P	P
	<b>Z</b>	MN	N	Z	P	MP
	<b>P</b>	N	N	Z	MP	MP
	<b>MP</b>	N	Z	P	MP	MP

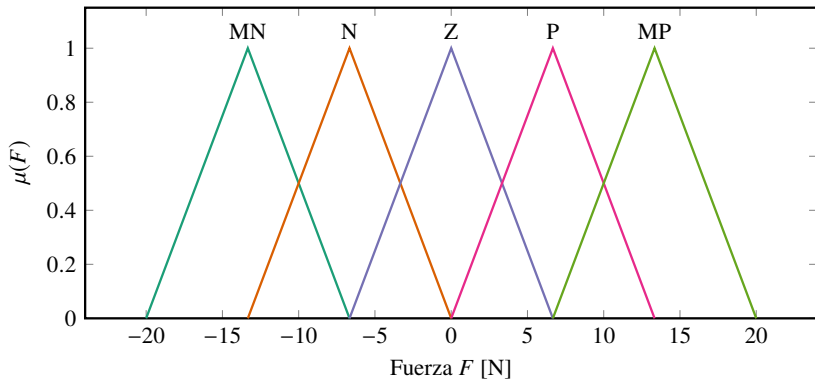






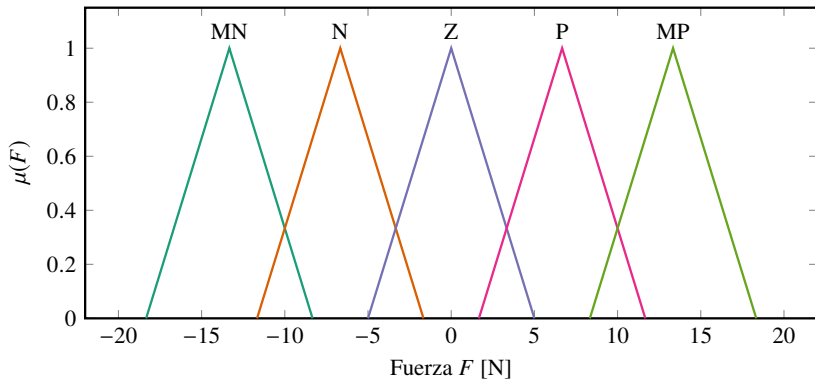
# Discusión: Conjuntos Difusos

## Elección inicial

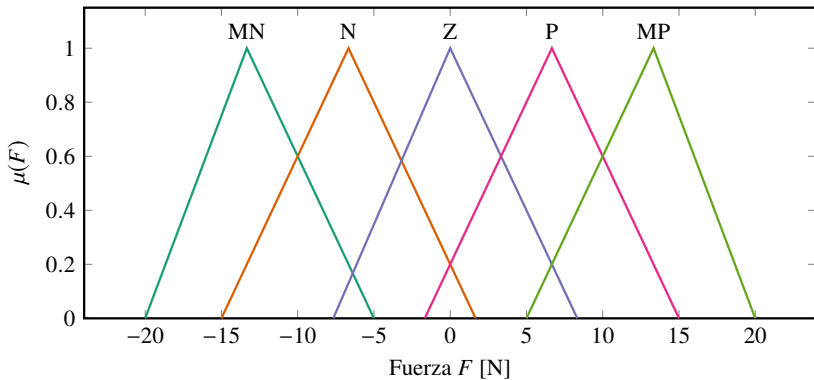




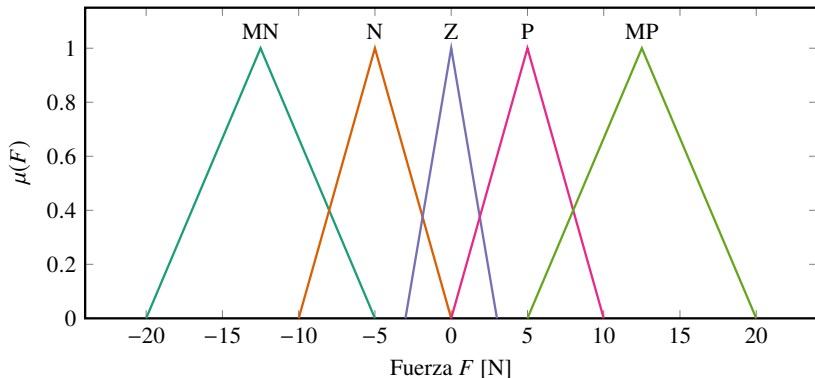
## Menor solapamiento



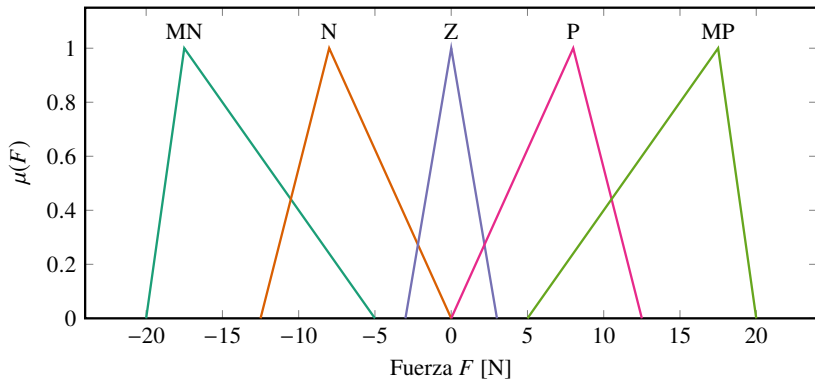
## Mayor solapamiento



## Distancias heterogéneas entre centros



## Funciones asimétricas



# Discusión: Algoritmos

## Métodos de inferencia

- ▶ Mamdani
- ▶ Larsen
- ▶ Takagi-Sugeno-Kang
- ▶ Tsukamoto

## Operadores de implicación

- ▶ Mínimo
- ▶ Producto

## Operadores de composición

- ▶ Máximo
- ▶ Suma

## Métodos de inferencia

- ▶ Mamdani
- ▶ Larsen
- ▶ Takagi-Sugeno-Kang
- ▶ Tsukamoto

## Lectura adicional

Pedro Ponce, p. 133.

## Operadores de implicación

- ▶ Mínimo
- ▶ Producto

## Operadores de composición

- ▶ Máximo
- ▶ Suma

Fin