UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
Disciplina: Álgebra Linear
Aluno(a):

9,0

Segundo exercício

Atenção: Resolva até **5 (cinco)** questões dentre as questões abaixo. Resolução de questão ou item excedente será desconsiderada, respeitando-se a ordem de apresentação das soluções.

1. (2,5 pontos) Determine $(F)_B$, em que $F \in L(\mathbb{R}^2)$ é dado por $F(x, y) = (x, 0)$ e $B = \{(1, -1), (1, 0)\}$.

2. (2,5 pontos) Obtenha o operador linear F sobre $\mathbb{R}^2$ cuja matriz na base $B = \{(1, 1), (1, 0)\}$ é dada por $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

3. Seja A uma matriz fixa de $M_n(\mathbb{R})$.

   (a) (1,5 ponto) Verifique que $F : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $F(X) = AX$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$ é uma transformação linear.

   (b) (1,5 ponto) Se $A \neq 0$, mostre que $G : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ dada por $G(X) = A + X$, $\forall X \in M_n(\mathbb{R})$ não é uma transformação linear.

4. (2,5 pontos) Dada a aplicação linear $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $F(x, y) = x - y$, determine uma base e a dimensão do núcleo e da imagem.

5. (2,5 pontos) Determine um operador linear $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cuja imagem é gerada por $(1, 0, 1)$ e $(-1, 1, 0)$.

6. (2,5 pontos) Determine um operador linear de $\mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado por $(1, 0, 1, 0)$ e $(0, 1, 1, -1)$.

7. (2,5 pontos) Chama-se *traço* de uma matriz $A = (a_{ij})$, quadrada de ordem n, a soma dos termos da sua diagonal principal e o denotamos por $\operatorname{tr}(A)$. Assim,

$$\operatorname{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

   Sendo $V = M_n(\mathbb{R})$, então $\langle A, B\rangle = \operatorname{tr}(B^t A)$ define um produto interno sobre V.

   Considerando $V = M_2(\mathbb{R})$, munido desse produto interno, calcule $\langle A, B\rangle$, $\|A\|$, $\|B\|$, onde A e B são as matrizes $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

São Luís, 16 de novembro de 2023.

1) $F(x,y)=(x,0)$, $B=\{(1,-1),(1,0)\}$ $C=\{(1,0),(0,1)\}$

$\frac{1,8}{1}$

$F(1,-1)=(1,0) \to 1(1,0)+0(0,1)$
$= 0\cdot(1,-1)+1(1,0)$

$F(1,0)=(1,0) \to 1(1,0)+0(0,1)$
$= 0\cdot(1,-1)+1\cdot(1,0)$

$(F)_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ //

$(F)_B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

Esta matriz é $(F)_{B,C}$, em que C é a base canônica

~~2) $(F)_B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\{(1,1),(1,0)\}$~~

~~$F(x,y)=1(1,1)+0(1,0)=(1,1)$~~

~~$F(x,y)=2(1,1)+(-1)(1,0)=(1,2)$~~

3) a. $AX=F(X), \forall X \in M_n(\mathbb{R})$ é operador linear?

I) $F(X+Y)=F(X)+F(Y)$
$A(X+Y)=AX+AY$
$AX+AY=AX+AY$
$F(X+Y)=F(X)+F(Y)$
válida

II) $F(\alpha X)=\alpha F(X)$
$A(\alpha X)=\alpha AX$
$\alpha AX=\alpha AX$
$F(\alpha X)=\alpha F(X)$
válida

$F(X)=AX$ é operador linear //

$\frac{3,0}{1}$

b. para $A\neq 0$, $G(X)=A+X$ não é operador linear?

I) $G(X+Y)=G(X)+G(Y)$
$A+(X+Y)=A+X+A+Y$
$A+X+Y=2A+X+Y$
$G(X+Y)\neq G(X)+G(Y)$
não é válida

II) $G(\alpha X)=\alpha G(X)$
$A+\alpha X=\alpha(A+X)$
$G(\alpha X)\neq \alpha G(X)$
não é válida

$G(X)=A+X$ não é operador linear se $A\neq 0$ //

4) $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $F(x,y)=x-y$, base e dimensão do núcleo e da imagem.

$\frac{1,5}{}$

$N(F)=\vec{0}$
$F(x,y)=0$
$x-y=0$
$x=y$ $\Rightarrow N(F)=\{(x,x)/\ x\in\mathbb{R}\}=[(1,1)]$

$F(x,x)=x-x$
$F(x,x)=\vec{0}$

$\dim U=\dim N(F)+\dim ImF$
$2=0+2 \to \dim ImF=2$ //

A aplicação é injetora e sobrejetora

~~$N(F)=\{(x,x)/x\in\mathbb{R}\}$~~ $N(F)=\{(0,0)\}$ E

~~$N(F)=\mathbb{R}^2$~~

~~$B=[(1,0),(0,1)]$~~

$B=[\vec{0}]$ // $\dim N(F)=0$ //

$B_{ImF}=[(1,0),(0,1)]$ //

Não são vetores de da imagem: $ImF\subseteq\mathbb{R}$.

7) $\langle A,B\rangle = tr(B^tA)$, $A=\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$; $\langle A,B\rangle, ||A||, ||B||$?

$tr A = a_{11}+a_{22}+\dots+a_{mn}$

$||A|| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \cancel{\sqrt{tr(A^2)}} = \cancel{\sqrt{1}} \cancel{=1}$

$\cancel{||A||=1}$

$B^t = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$

$B^tA = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+0&-1+0\\0+0&0+0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}$

$||B|| = \sqrt{\langle B,B\rangle} = \cancel{\sqrt{tr(B^2)}} = \sqrt{tr(B^tB)} = \sqrt{2}$

$||B|| = \sqrt{2}$ //

$\langle A,B\rangle = tr(B^tA) = 1+0 = 1$

$||A|| = \sqrt{\langle A,A\rangle} = \sqrt{tr(A^tA)} = \sqrt{2}$

$\langle A,B\rangle = 1$ //

$||A|| = \sqrt{2}$ //

2,5

$\cancel{A^2 = \begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix}}$

$A^t = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}$ $\quad A^tA = \begin{pmatrix}1&0\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&-1\\-1&1\end{pmatrix} \to tr(A^tA) = 1+1 = 2$

$B^tB = \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix} = B^2 = \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} \to tr(B^tB) = 1+1 = 2$

6) $F \in \mathbb{R}^4$ cujo núcleo é gerado por $(1,0,1,0)$ e $(0,1,1,1)$

$F(x,y,z,t) = \vec{0}$

$4 = 0+4$

$\to \dim Im F = 4$ $\quad$ F é injetora e sobrejetora

$x(1,0,1,0)+y(0,1,1,-1) = 0$

$(x, y, x+y, -y) = 0$ $\quad\quad F(x,y,z,t) = (x, y, x+y, -y)$ //

$\begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x+y=0 \\ -y=0 \end{cases}$ $\quad N(F) = \vec{0}$

$\dim N(F) = 0$

E

É preciso determinar F numa base de $\mathbb{R}^4$ e, para isso, deve-se complementar $\{(1,0,1,0),(0,1,1,-1)\}$ para obter uma base e só depois definir F.