UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO Centro de Ciências Exatas e Tecnologia		Departamento de Informática - DEINF Internet: www.deinf.ufma.br	3a AVALIAÇÃO	
			P	5,5
Disciplina: Matemática Discreta e Lógica		Curso: CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO	T	
Código 5595.8	Carga Horária: 60 horas	Créditos: 4.0.0	MEDIA	
Professor: Luciano Reis Coutinho		Email: lrc@deinf.ufma.br		

+1,0 (listas exercícios)

6,5

Terceira Avaliação: Prova Escrita **Data: 07 de dezembro de 2023.**

Aluno : ______________________ **Código:** ______________

INSTRUÇÕES

- Cada questão consiste de enunciado e requisitos. Dentre os requisitos, encontra-se apresentar a devida justificativa para cada resposta apresentada. Respostas não atendendo aos requisitos podem em última instância ser desconsideradas durante a correção.
- A interpretação das questões faz parte da avaliação. Caso ache um enunciado ambíguo ou impreciso escreva na folha de resposta sua interpretação e correspondente resposta. Todas as questões devem ser interpretadas tendo em vista que foi discutido nas aulas de Matemática Discreta e Lógica.
- O tempo total de prova é de 100 min. Tem **início** às 14h00 e **término** às 15h40.

QUESTÕES

1. (2,0 pontos) Utilizando o **princípio de indução matemática**, demonstre o teorema de De Moivre,

$$\left(\cos x + i \sin x\right)^n = \cos nx + i \sin nx,$$

para todo n ≥ 1. **Dica**: Utilize as fórmulas da trigonometria

$$\cos(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \cos \mathrm{a}.\cos \mathrm{b} - \mathrm{sen\,a}.\,\mathrm{sen\,b}$$
$$\mathrm{sen}(\mathrm{a} + \mathrm{b}) = \mathrm{sen\,a}.\cos \mathrm{b} + \mathrm{sen\,b}.\cos \mathrm{a}$$

bem como o fato de que $i * i = -1$. **Lembrete**: primeiro, prove a proposição para $n = 1$ (passo base); em seguida, prove que se a proposição é verdadeira para um valor $n = k$ arbitrário, então ela também é verdadeira para $n = k + 1$ (passo de indução).

2. (1,5 ponto) Uma coleção S de cadeias de caracteres (strings) é definida recursivamente por: (i) "a" e "b" pertencem a S; (ii) se X pertence a S, então "Xb" pertence a S. Quais das seguintes cadeias pertencem a S. Para as que pertencem, explique como podem ser obtidas a partir das regras (i) e (ii).
a) "a" b) "ab" c) "aba" d) "aaab" e) "bbbbb"

3. (1,0 ponto) A, B, C e D são nodos (nós) de uma rede de computadores. Existem dois caminhos entre A e C, dois entre B e D, três entre A e B e quatro entre C e D. Por quantos caminhos diferentes uma mensagem de A para D pode ser enviada? Justifique sua resposta apontando que **princípios de contagem** discutidos em sala de aula foram utilizados na resolução do problema.

4. (1,0 ponto) Um conectivo lógico binário (como E, OU) pode ser definido fornecendo sua tabela-verdade. **Pergunta-se**: Quantos conectivos lógicos diferentes podem ser definidos. Justifique sua resposta apontando que **princípios de contagem** discutidos em sala de aula foram utilizados na resolução do problema.

5. (1,0 ponto) Em um grupo de 25 pessoas podemos afirmar que existem pelo menos 3 que nasceram no mesmo mês? Se sim, como podemos justificar tal afirmação usando explicitamente o **princípio da casa de pombo?**

6. Seja R uma relação binária sobre um conjunto S. Definam-se as seguintes propriedades:
R é **irreflexiva** quando $\forall x \in S.\ (x,x) \notin R$.
R é **assimétrica** quando $\forall x \in S. \forall y \in S.\ \ (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \notin R$.

(a) (1,0 ponto) Apresente uma relação binária R sobre S = {1,2,3} que não seja reflexiva e nem irreflexiva. Justifique sua resposta.

(b) (1,0 ponto) Apresente uma relação binária R sobre S = {1,2,3} que não seja simétrica e nem assimétrica. Justifique sua resposta.

7. (1,5 ponto) Seja R a relação binária sobre o conjunto de pares ordenados de inteiros positivos tais que ((a,b), (c,d)) ∈R se e somente se ad=bc. Mostre que R é uma **relação de equivalência**, ou seja, que é ao mesmo tempo reflexiva, simétrica e transitiva.

Boa Sorte!

07 / 12 / 23

5) Seja o número de ~~alunos~~ pessoas igual ao número de pombos, e o de meses igual ao de casas, tem-se:

N = pombos

meses = casas = 12

ocorrências = 3

$\left\lceil \frac{N}{12} \right\rceil \geq 3$

$N = 25$

com 25 pessoas é possível garantir que pelo menos três nasceram no mesmo mês.

1,0

6) a. se $\forall x (x,x) \in R$ = reflexiva e $\forall x (x,x) \notin R$ = irreflexiva, então, uma relação que satisfaz essa ~~relação~~ condição de não ser reflexiva nem irreflexiva é: $R = \{(1,1),(2,2)\}$; $\exists x\ (x,x) \notin R \rightarrow$ não é reflexiva

$\exists x\ (x,x) \in R \rightarrow$ não é irreflexiva.

1,0

b. se $\forall x \forall y (x,y) \rightarrow (y,x) \in R$ = simétrica e $\forall x \forall y (x,y) \rightarrow (y,x) \in R$ = assimétrica, a única relação que satisfaz a condição de não ser simétrica e nem assimétrica é: $R = \{\emptyset\}$ pois qualquer outro conjunto de pares resulta em uma relação simétrica ou assimétrica.

7) R é uma relação de equivalência pois é reflexiva, simétrica e transitiva:

- $\forall (a,b) \in R, ((a,b),(a,b)) \rightarrow$ é reflexiva
  $(ab = ba)$

- $\forall (a,b) \forall (c,d), ((a,b),(c,d)) \rightarrow ((c,d),(a,b))$ é simétrica
  $(ad = bc) \rightarrow (cb = da)$

- $\forall (a,b) \forall (c,d) \forall (e,f), ((a,b),(c,d)) \wedge ((c,d),(e,f)) \rightarrow ((a,b),(e,f))$ é transitiva
  $(ad = bc) \wedge (cf = de) \rightarrow (af = be)$

1,0

mais explicação

07 / 12 / 23

3) Utilizando o princípio multiplicativo, iremos multiplicar a quantidade de possibilidades para cada etapa e multiplicar a quantidade total.

C

$$\frac{AC}{2} \cdot \frac{BD}{2} \cdot \frac{AB}{3} \cdot \frac{CD}{4} = 48$$

Existem 48 caminhos diferentes que a mensagem pode percorrer no sistema.

4) Utilizando os princípios multiplicativo e aditivo, uma tabela verdade com duas entradas e uma saída possui a seguinte forma:

p	q	resultado	
$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$= 2^3$
$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$= 2^3$
$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$= 2^3$
$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$\underline{\ \ }_2$	$= 2^3$

O total de operadores possíveis é a quantidade de formas que pode ser organizada a partir dessa tabela verdade, ou seja:

E

$$T = 2^3 + 2^3 + 2^3 + 2^3 = 24$$

Existem 24 operadores binários diferentes.

2) a) "a" pertence ao conjunto S
regra (i) define
"a" ∈ S

b) "ab" ∈ S
(i) "a" ∈ S
(ii) $x \in S \to$ "xb" ∈ S
"a" ∈ S → "ab" ∈ S

c) "aba" ∉ S

d) "aaab" ∉ S

e) "bbbbb" ∈ S
(i) "b" ∈ S
(ii) $x \in S \to$ "xb" ∈ S
"b" ∈ S → "bb" ∈ S
"bb" ∈ S → "bbb" ∈ S
"bbb" ∈ S → "bbbb" ∈ S
"bbbb" ∈ S → "bbbbb" ∈ S

1,5

07 / 12 / 23

1) passo base: provar P(1)

$$P(1) = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^1 = \cos 1x + i \operatorname{sen} 1x$$

$$P(1) = \cos x + i \operatorname{sen} x = \cos x + i \operatorname{sen} x$$

P(1) é verdadeira

0,5

passo indutivo: provar que $P(k) \to P(k+1)$

I) assumir que P(k) é verdadeira (H I)

$$P(k) = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^k = \cos kx + i \operatorname{sen} kx$$

II) definir P(k+1)

$$P(k+1) = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^{k+1} = \cos(k+1)x + i \operatorname{sen}(k+1)x$$

$$= \cos(kx+x) + i \operatorname{sen}(kx+x),$$

$$= \cos kx \cos x - \operatorname{sen} kx \operatorname{sen} x + i \operatorname{sen} kx \cos x + \operatorname{sen} x \cos kx$$

III) somar $(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ em ambos lados da H I

E

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^k + (\cos x + i \operatorname{sen} x) = (\cos kx + i \operatorname{sen} kx) + (\cos x + i \operatorname{sen} x)$$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{k+1} = \cos kx + \cos x + i \operatorname{sen} kx + i \operatorname{sen} x$$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{k+1} = \cos kx + \cos x + i(\operatorname{sen} kx + \operatorname{sen} x)$$

$$(\cos x + i \operatorname{sen} x)^{k+1} = \cos(kx+x) + i \operatorname{sen}(kx+x)$$

IV) somando $(\cos x + i \operatorname{sen} x)$ à H I prova-se que $P(k) \to P(k+1)$

V) se P(k) é verdadeira, então P(k+1) também é, provando que $P(k) \to P(k+1)$ é verdadeira.