UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E TECNOLOGIA

CURSO DE COMPUTAÇÃO

ALUNO(A):_ ______________________ **B**

Avaliação 2 de Cálculo Diferencial e Integral II

OBS. NÃO SERÃO CONSIDERADAS SOLUÇÕES SEM AS DEVIDAS JUSTIFICATIVAS! É PROIBIDO O USO DE LÁPIS OU AFINS.

01) (1,5) Verifique se a seguinte série é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{2^n}{n^3}$.

02) (1,5) Verifique se a seguinte série é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

03) (1,5) Determine o intervalo de convergência da seguinte série de potências: $\sum_{n=0}^{\infty} n!x^n$.

04) (1,5) Ache uma representação em série de MacLaurin para a função $f(x) = \operatorname{sen} x$.

05) (1,5) Mostre que não existe $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$.

06) (1,5) Dada a função $f(x,y) = 3xy + 6\cancel{x} - y^2$, use a definição para determinar $f_y(x,y)$.

07) (1,0) Dado que $u = x^2 - y^2$; $x = 3r - s$ e $y = r + 2s$, use a regra da cadeia para determinar $\frac{\partial u}{\partial r}$ e $\frac{\partial u}{\partial s}$

Boa Sorte!

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^3}$, determine se é convergente ou divergente:

para determinar a convergência ou divergência da série, tome $u_n = (-1)^n \frac{2^n}{n^3}$ e $u_{n+1} = (-1)^{n+1} \frac{2^{n+1}}{(n+1)^3}$. Usando o teste da razão: $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$, obtém-se:

$$\cancel{\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{(-1)^{n+1}\, 2^{n+1}}{(n+1)^3}\right|}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(-1)^{n+1}\, 2^{n+1}}{(n+1)^3}}{\frac{(-1)^n\, 2^n}{n^3}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| -\frac{2n^3}{(n+1)^3} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{2n^3}{(n+1)^3} = 2 \lim_{n\to+\infty} \frac{n^3}{(n+1)^3} = 2 \cdot 1 = 2$$

1,0

Como o limite calculado é diferente de 1, e não é $+\infty$, a série converge quando aplicado o teste da razão //

E

2) Verifique se é convergente ou divergente: $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{2n+3}{3n+2}\right)^n$.

determinaremos se a série converge ou não usando o teste da raiz: $\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{u} = c$, em que para $c>1$ a série diverge, $c<1$ ela converge, e $c=1$ torna o teste inconclusivo.

$f(k) = \left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k$; usaremos $f(k)$ para verificar o teste, logo:

$$\lim_{k\to+\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{2k+3}{3k+2}\right)^k} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2k+3}{3k+2} = \lim_{k\to+\infty} \frac{2+\frac{3}{k}}{3+\frac{2}{k}} = \frac{2}{3}$$

1,0

Como o teste da raiz retornou $\frac{2}{3}$, a série é divergente //

E

3) determine o intervalo de convergência: $\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$

para determinar o intervalo de convergência, usaremos o teste da razão.

seja $u_n = n!\,x^n$ e $u_{n+1} = n+1!\,x^{n+1}$; $\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|$ pode ser reescrita como:

0,75

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)!\,x^{n+1}}{n!\,x^n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \left|\frac{(n+1)\cancel{n!}\,\cancel{x^n}.x}{\cancel{n!}\,\cancel{x^n}}\right| = \lim_{n\to+\infty} |(n+1)x| = \lim_{n\to+\infty} |xn+x| = \lim_{n\to+\infty} \left|x + \frac{x}{n}\right| = |x|$$

$|x| < 1$ — para qualquer n, o limite é módulo de x, assim, essa função é convergente em qualquer

$|x| < R$ — $n \in \mathbb{R}$. Esse raio de convergência é $R=1$

$\sum_{n=0}^{+\infty} n!\,x^n$ converge em $(-\infty; +\infty) = \mathbb{R}$ //

4) Ache a série de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$

$f^{(1)}(x) = \cos x$ $\qquad f^{1}(0) = \cos 0 = 0$

$f^{(2)}(x) = -\operatorname{sen} x$ $\qquad f^{2}(0) = -\operatorname{sen} 0 = 0$

$f^{(3)}(x) = -\cos x$ $\qquad f^{3}(0) = -\cos 0 = 0$

para determinar a série de Maclaurin, é necessário tomar $a=0$, assim, calcula-se as derivadas n-ésimas de f no ponto 0, que nesse caso resultam em zero.

a série pode ser escrita como:

$$f(x) = \frac{f^{(0)}(0)}{1} \cdot x^{0} + \frac{f^{(1)}(0)}{1} x^{1} + \frac{f^{(2)}(0)}{2} x^{2} + \dots + \frac{f^{n}(0)}{x!} x^{2} \rightarrow f(x) = \frac{0}{1} \cdot 1 + \frac{0}{1} \cdot x + \frac{0}{2} x^{2} + \dots + \frac{0 \cdot x^{2}}{n!} = 0$$

a série de Maclaurin para $f(x) = \operatorname{sen} x$ é $f(x) = 0$ //

5) mostre que não existe $\lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$

para mostrar a existência ou não do limite, é preciso achar ao menos duas "formas" de calcular o limite de maneira isolada que resultem em pontos diferentes, usamos $x=0$ e $y=0$ para essa análise.

• $x = 0$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \to 0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{0}{0+y^2} = 0$$

• $y = 0$

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} \frac{x^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2}{x^2+0} = \frac{x^2}{x^2} = 1$$

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \to}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} f(x,y)$$

Como o limite para $x=0$ e $y=0$ não é igual, $\nexists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \frac{x^2}{x^2+y^2}$ //

caso ambos limites retornassem o mesmo valor, ainda não seria possível dizer se o limite geral existe ou sendo necessária outra análise nesse caso.

$$\lim_{\substack{x=0 \\ y \to 0}} f(x,y) \neq \lim_{\substack{x \to 0 \\ y=0}} f(x,y) \rightarrow \nexists \lim_{(x,y) \to (0,0)} f(x,y)$$

6) $f(x,y) = 3xy + 6x - y^2$, use a definição para ~~passar~~ determinar $f_y(x,y)$:

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

, usando a definição de derivada parcial, podemos substituir na fórmula para achar $f_y(x,y)$.

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x(y+\Delta y) + 6x - (y+\Delta y)^2 - (3xy + 6x - y^2)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\cancel{3xy} + 3x\Delta y + \cancel{6x} - \cancel{y^2} - 2y\Delta y - \Delta y^2 - \cancel{3xy} - \cancel{6x} + \cancel{y^2}}{\Delta y}$$

$$f_y = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{3x\Delta y - 2y\Delta y - \Delta y^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 3x - 2y - \cancel{\Delta y}^{0} = 3x - 2y$$

assim, usando a definição, tem-se que $f_y = 3x - 2y$,,

7) dada $u = x^2 - y^2$, $x = 3r - s$ e $y = r + 2s$, determine $\frac{\partial u}{\partial s}$ e $\frac{\partial u}{\partial r}$ pela regra da cadeia

para aplicar a regra da cadeia, precisamos encontrar as derivadas parciais de u, x e y para x, y, r e s, de acordo com a fórmula:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial s} \quad \text{e} \quad \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \; ; \; \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial x}{\partial s} = -1 \; ; \; \frac{\partial x}{\partial r} = 3$$

$$\frac{\partial y}{\partial s} = 2 \; ; \; \frac{\partial y}{\partial r} = 1$$

aplicando os valores nas fórmulas:

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 2x \cdot (-1) + (-2y) \cdot 2 = -2x - 4y$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = 2x \cdot 3 + (-2y) \cdot 1 = 6x - 2y$$

assim, $\frac{\partial u}{\partial s} = -2x - 4y$ e $\frac{\partial u}{\partial r} = 6x - 2y$ pela regra da cadeia,,