UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO

CCET - DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CÁLCULO III

PROFESSOR: ITALO AUGUSTO

DISCENTE:——————————————————-

AVALIAÇÃO Nº 02

1- Considere o campo vetorial $\overrightarrow{F} = (-2y, 3z, x)$ e C a curva interseção das superfícies $x^2 + 4y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$ com $y, z \geqslant 0$, percorrida uma vez do ponto $(1, 0, 0)$ ao ponto $(-1, 0, 0)$. Encontre $W = \int_C \overrightarrow{F} ds$

2- Calcule $\oint_C \overrightarrow{F} ds$ onde $\overrightarrow{F}(x, y) = (\frac{y}{x} + x, e^y + \ln x)$ e C é a ciclóide parametrizada por $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$.

3 - Deseja-se pintar ambos os lados de uma cerca cuja base está dada pela curva parametrizada por $\gamma(t) = (20\cos^3 t, 20\sin^3 t)$, $t \in [0, \pi/2]$. A altura em cada ponto é dado pela função real $f(x, y) = y$, em metros. Se é cobrado R reais por metro quadrado de tinta, quanto será gasto para pontar toda a cerca?

4 - Considere a circunferência $C : (x - a)^2 + y^2 = R^2$ e o campo vetorial:

$$\overrightarrow{F}(x, y) = (0, x^2 - y \tan y).$$

Encontre o trabalho realizado por uma partícula atuando na circunferência C com força aplicada $\overrightarrow{F}(x, y)$.

5. Fazer o cálculo $\oint_C \overrightarrow{F} ds$ onde $\overrightarrow{F} = (\frac{2xy}{(x^2 + y^2)}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)})$ e C é uma curva qualquer fechada, simples e positivamente orientada que envolve a origem.

BOA PROVA A TODOS! OS CÁLCULOS DEVEM ESTAR CLAROS E BEM EXPLICADOS!!

SÃO LUÍS - 2024

Cálculo 3 - Segunda avaliação 24/07/24

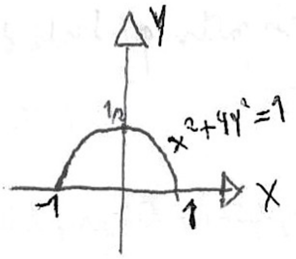
professor: Itala Augusta

1) Considere o campo vetorial $\vec{F} = (-2Y, 3Z, X)$ e C a curva interseção das superfícies $X^2+4Y^2=1$ e $X^2+Z^2=1$ com $Y, Z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(1,0,0)$ ao ponto $(-1,0,0)$. Encontre $W = \int_C \vec{F}\, ds$.

R: $A1 = (1,0,0)$

$A2 = (-1,0,0)$

$A3 = (0, \frac{1}{2}, 1)$



$$\begin{cases} X^2 + \dfrac{Y^2}{\frac{1}{4}} = 1 ; Y \geq 0 \\ X^2+Z^2 = 1 ; Z \geq 0 \end{cases} \to \begin{cases} X = \cos t \\ Y = \dfrac{\operatorname{sen} t}{2} \\ Z = \sqrt{1-x^2} \to \sqrt{1-\cos^2 t} \\ Z = \sqrt{\operatorname{sen}^2 t} \to Z = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

assim, $\gamma(t) = (\cos t, \frac{1}{2}\operatorname{sen} t, \operatorname{sen} t)$; $0 \leq t \leq \pi$; é uma parametrização de C orientada de A_1 para A_2

$$\begin{cases} dx = -\operatorname{sen} t\, dt \\ dy = \frac{1}{2}\cos t\, dt \\ dz = \cos t\, dt \end{cases}$$

Então, $W = \int_C -2Y\,dx + 3Z\,dy + X\,dz$

$$W = \int_0^\pi [(-2 \cdot \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + (3\operatorname{sen} t)\tfrac{1}{2}\cos t + (\cos t)(\cos t)]\,dt = \int_0^\pi (\operatorname{sen}^2 t + \tfrac{3}{2}\operatorname{sen} t \cos t + \cos^2 t)\,dt$$

$$W = \int_0^\pi (1 + \tfrac{3}{2}\operatorname{sen} t \cos t)\,dt = \left[t + \tfrac{3}{2}\cdot\tfrac{\operatorname{sen}^2 t}{2}\right]_0^\pi = \pi$$

$$W = \pi //$$

2) Calcule $\oint_C \vec{F}\,ds$ onde $\vec{F}(x,y) = (\frac{y}{x}+x, e^y + \ln x)$ e C é a ciclóide parametrizada por $\gamma(t) = (t - \operatorname{sen} t, 1-\cos t)$, $t \in [\pi, 2\pi]$

R: seja $\vec{F} = (P,Q) = (\frac{y}{x}+x, e^y+\ln x)$, um campo conservativo em U, as derivadas parciais em x e y para Q e P respectivamente são iguais a $\frac{1}{x}$

Usando o teorema das equivalências, existe a função potencial $\varphi(x,y)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = \dfrac{y}{x} \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = \ln x + e^y \end{cases} \xrightarrow{\text{integrando}} \begin{cases} \varphi(x,y) = y\ln x + \dfrac{x^2}{2} + F(y) \\ \varphi(x,y) = y\ln x + e^y + g(x) \end{cases}$$

sejam $F(y)$ e $g(x)$, "constantes" de integração. $F(y) = e^y$, $g(x) = \frac{x^2}{2}$

Então $\varphi(x,y) = y\ln x + \frac{x^2}{2} + e^y$ é uma função potencial de $\vec{F}$.

Usando o teorema fundamental do cálculo para integrais de linha, temos:

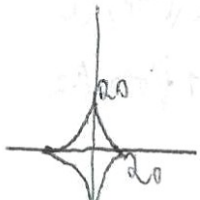
$$\int_C \vec{F}\, d\vec{r} = \varphi(\vec{r}(2\pi)) - \varphi(\vec{r}(\pi)) = \varphi(2\pi,0) - \varphi(\pi,2) = \left(\frac{4\pi^2}{2}, e^0\right) - \left(2\ln\pi + \frac{\pi^2}{2} + e^2\right)$$

$$= \frac{3\pi^2}{2} + 1 - 2\ln\pi - e^2 \quad //$$

3) Deseja-se pintar ambos os lados de uma cerca cuja base está dada pela curva parametrizada por $\gamma(t) = (20\cos^3 t, 20\,\text{sen}^3 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. A altura em cada ponto é dada pela função real $f(x,y) = y$, em metros. Se é cobrado R reais por metro quadrado de tinta, quanto será gasto para pintar a cerca?

R: $\gamma(t) = (20\cos^3 t, 20\,\text{sen}^3 t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$ é a parametrização da curva, sua altura é dada por

$f(x,y) = y$.



$f(\gamma(t)) = 20\,\text{sen}^3 t$

$\gamma'(t) = (-60\,\text{sen}^2 t \cos t, 60\cos^2 t\,\text{sen}\, t)$

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(-60\,\text{sen}^2 t\cos t)^2 + (60\cos^2 t\,\text{sen}\,t)^2}\, dt = \sqrt{(3600\,\text{sen}^4 t\cos^2 t) + (3600\cos^4 t\,\text{sen}^2 t)}$$

$$= \sqrt{3600\,\text{sen}^2 t\cos^2 t(\text{sen}^2 t + \cos^2 t)}\, dt = \sqrt{3600\,\text{sen}^2 t\cos^2 t}\, dt$$

$$= 60\,\text{sen}\,t\cos t\, dt$$

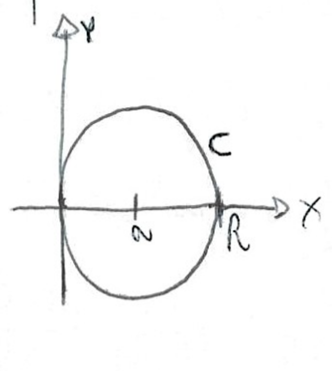
$$\text{Preço}(R) = \int_0^{\pi/2} 20\,\text{sen}^3 t \cdot 60\,\text{sen}\,t\cos t\, dt = 1200\int_0^{\pi/2} \text{sen}^4 t\cos t\, dt = 1200\int_0^{\pi/2} u^4\, du = 1200\left[\frac{\text{sen}^5 t}{5}\right]_0^{\pi/2}$$

$u = \text{sen}\,t$
$du = \cos t\, dt$

$\text{Preço}(R) = 1200\left(\frac{1}{5} - 0\right) = 240 \cdot 2 \text{ lados} \cdot R = 480R$

$\text{Preço}(R) = 480R$ //

Sendo $C: (X-a)^2 + Y^2 = R^2$ e $\vec{F}(X,Y) = (0, X^2 - Y\,tgY)$, devemos encontrar a região D tal que $C = \partial D$



$$D = \{(X,Y) \,/\, a-R \leq X \leq a+R \,;\, -b \leq Y \leq b\}$$

$$(X-a)^2 + Y^2 \leq R^2 \rightarrow Y^2 \leq R^2 - (X-a)^2 \rightarrow |Y| \leq \sqrt{R^2-(X-a)^2}$$

$$b = \sqrt{R^2 - (X-a)^2}$$

$$\begin{cases} u = X - a \rightarrow X = u + a \\ v = Y \qquad\quad\;\; Y = v \end{cases} \rightarrow |J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Em coordenadas polares: $\begin{cases} u = r\cos\theta \\ v = r \,\text{sen}\,\theta \end{cases}$; $|J_2| = r$

$D1 := \{(u,v) \,/\, -R \leq u \leq R ,\, -\sqrt{R^2-u^2} \leq v \leq \sqrt{R^2-u^2}\}$; $D2 = \{0 \leq r \leq R ,\, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$

Aplicando teorema de green:

$$W = \oint_C \vec{F}\,ds = \iint_D \left[\frac{\partial F2}{\partial X} - \frac{\partial F1}{\partial Y}\right] dXdY = \iint_D [2X - 0]\,dXdY = 2\iint_D X\,dXdY = 2\iint_{D1} u + a \,dudv$$

$$W = 2\iint_{D2} (r\cos\theta + a)\, r\,drd\theta = 2\int_0^{2\pi}\int_0^R r^2\cos\theta + a\,r\,drd\theta = 2\int_0^{2\pi}\left[\frac{r^3}{3}\cos\theta + a\frac{r^2}{2}\right]_0^R d\theta$$

$$= 2\int_0^{2\pi} \frac{R^3}{3}\cos\theta + a\frac{R^2}{2}\,d\theta = 2\left[\frac{R^3}{3}\,\text{sen}\,\theta + a\,\theta\frac{R^2}{2}\right]_0^{2\pi} = 2\left[a\cancel{2}\pi\frac{R^2}{\cancel{2}} - 0\right]$$

$W = 2a\pi R^2$ u.W //

5) Seja $\vec{F} = \left(\frac{2XY}{X^2+Y^2}, \frac{Y^2-X^2}{X^2+Y^2}\right)$, pelo teorema de green temos que: $I = \iint_D \left[\frac{\partial F2}{\partial X} - \frac{\partial F1}{\partial Y}\right] dXdY$; $C = \partial D$

$$\frac{\partial F2}{\partial X} = \frac{-4XY^2}{(X^2+Y^2)}$$

$$\frac{\partial F1}{\partial Y} = \frac{2X\,(X^2-Y^2)}{(X^2+Y^2)^2}$$

$$I = \iint_D \left[\frac{-4XY^2}{(X^2+Y^2)} - \frac{2X(X^2-Y^2)}{(X^2+Y^2)^2}\right] dXdY = \iint_D \frac{-2XY^2 - 2X^3}{(X^2+Y^2)^2}\,dXdY$$

$$= -2\iint_D \frac{XY^2 + X^3}{(X^2+Y^2)^2}\,dXdY = -2\iint_D \frac{X}{X^2+Y^2}\,dXdY$$; em coordenadas polares: $\begin{cases} X = r\cos\theta \\ Y = r\,\text{sen}\,\theta \end{cases}$; $|J| = r$; como C é uma curva simples e fechada em volta da origem, vale: $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e $r_1 \leq r \leq r_2$ logo:

$$I = \iint_{Dr\theta} \frac{r\cos\theta}{r^2}\, r\,drd\theta = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{2\pi} \cos\theta\,d\theta\,dr = \int_{r_1}^{r_2} (\text{sen}\,\theta)_0^{2\pi}\,dr = \int_{r_1}^{r_2} 0\,dr = 0$$

$I = 0$ //