Universidade Federal do Maranhão
Departamento de Matemática / CCET
Cálculo Vetorial e Geometria Analítica DEMA0340 / 2025.2
Prof. Ermerson Araujo

Nome:

Matrícula:

2ª AVALIAÇÃO – 26/10/2025

LEIA COM ATENÇÃO

- Todas as respostas devem estar legíveis, com seu nome em todas as páginas.
- O objetivo desta atividade é avaliar a argumentação lógica do(a) aluno(a). Por esse motivo, questões desorganizadas e/ou contendo cálculos sem **JUSTIFICATIVA** detalhada sofrerão penalidades.
- A atividade é manuscrita.
- A avaliação será anulada se o aparelho celular não estiver guardado durante a prova (aparelho visível, mesmo que desligado), e se o aluno utilizar qualquer folha que não foi distribuída pelo docente.

Questão 1 (4 PONTOS).

(a) Encontre as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A(1,-1,2)$ e $B(0,1,-1)$

(b) Encontre a equação geral do plano π que passa pelo ponto $A(-1,1,2)$ e tem $\vec{n}=(3,2,0)$ como vetor normal.

Solução:

(a) Para determinar as equações paramétricas da reta r que passa pelos pontos $A(1,-1,2)$ e $B(0,1,-1)$, precisamos de um ponto (usaremos A) e um vetor diretor $\vec{v}$. O vetor diretor é dado por $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=B-A=(0-1,1-(-1),-1-2)=(-1,2,-3)$. Assim, usando o ponto $A(1,-1,2)$ e o vetor diretor $\vec{v}=(-1,2,-3)$, as equações paramétricas da reta são

$$r:\begin{cases} x=1-t \\ y=-1+2t \\ z=2-3t \end{cases} \quad , \quad t\in\mathbb{R}.$$

(b) A equação geral do plano π é da forma $ax+by+cz+d=0$. O vetor normal fornecido é $\vec{n}=(3,2,0)$, o que implica que $a=3$, $b=2$ e $c=0$. Substituindo na equação, vem

$$(3)x+(2)y+(0)z+d=0 \Rightarrow 3x+2y+d=0.$$

Para encontrar d, usamos o fato de que o ponto $A(-1,1,2)\in\pi$, então suas coordenadas satisfazem a equação. Assim,

$$0=3(-1)+2(1)+d=-3+2+d\Rightarrow -1+d=0\Rightarrow d=1.$$

Portanto, a equação geral do plano π é $3x+2y+1=0$.

Questão 2 (4 PONTOS). Determine se as retas abaixo são coplanares ou reversas. Caso sejam coplanares, determine se são concorrentes ou paralelas. Por fim, caso sejam concorrentes, determine seu ponto de interseção.

$$r_1 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4} \quad \text{e} \quad r_2 : \begin{cases} x = -1+h \\ y = 4-h \\ z = -8+3h \end{cases}$$

Solução: Note que

- **Reta r_1:** A equação simétrica $\frac{x-3}{2} = \frac{y+1}{-3} = \frac{z-2}{4}$ nos fornece um ponto $A(3,-1,2)$ e um vetor diretor $\vec{v}_1 = (2,-3,4)$.
- **Reta r_2:** A equação paramétrica $\begin{cases} x = -1+h \\ y = 4-h \\ z = -8+3h \end{cases}$ nos fornece um ponto $B(-1,4,-8)$ e um vetor diretor $\vec{v}_2 = (1,-1,3)$.

Coplanaridade ou reversidade: Considere o vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja,

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-1-3, 4-(-1), -8-2) = (-4, 5, -10).$$

As retas são coplanares se, e somente se, o produto misto $(\overrightarrow{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2)$ for zero. Ora,

$$(\overrightarrow{AB}, \vec{v}_1, \vec{v}_2) = \det \begin{bmatrix} -4 & 5 & -10 \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix} = 0.$$

Logo, os vetores são coplanares e, consequentemente, as retas r_1 e r_2 são **coplanares**.

Paralelismo ou Concorrência: Note que os vetores diretores não são múltiplos, pois $\frac{2}{1} \neq \frac{-3}{-1}$. Portanto, $\vec{v}_1 \nparallel \vec{v}_2$, e as retas são **concorrentes**.

Ponto de interseção: A reta r_1 na forma paramétrica (com parâmetro t) é da forma

$$r_1 : \begin{cases} x = 3+2t \\ y = -1-3t \\ z = 2+4t \end{cases}$$

Igualando as coordenadas de r_1 e r_2 vem

$$3+2t = -1+h \Rightarrow 2t - h = -4 \qquad (1)$$
$$-1-3t = 4-h \Rightarrow -3t + h = 5 \qquad (2)$$
$$2+4t = -8+3h \Rightarrow 4t - 3h = -10 \qquad (3)$$

Somando (1) e (2) vem:

$$(2t-h) + (-3t+h) = -4+5$$
$$-t = 1 \Rightarrow t = -1$$

Substituindo $t = -1$ em (1) temos:

$$2(-1) - h = -4$$
$$-2 - h = -4$$
$$-h = -2 \Rightarrow h = 2$$

Substituindo $t = -1$ na equação de r_1 (ou $h = 2$ na equação r_2) temos

$$P : \begin{cases} x = 3+2(-1) = 1 \\ y = -1-3(-1) = 2 \\ z = 2+4(-1) = -2 \end{cases}.$$

Portanto, o ponto de interseção é $\mathbf{P(1,2,-2)}$.

Questão 3 (5 PONTOS). As retas abaixo são coplanares. Determine se são concorrentes ou paralelas. Além disso, encontre a equação geral do plano que as contém.

$$r_1 : \begin{cases} y = 2x - 3 \\ z = -x + 2 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{z-1}{-1} \\ y = -1 \end{cases}$$

Solução: Primeiramente iremos colocar as equações das retas na forma paramétrica.

- Para a reta r_1, tomando $x = t$, obtemos

$$r_1 : (x, y, z) = (t,\ 2t - 3,\ -t + 2) = (0, -3, 2) + t(1, 2, -1).$$

Assim, seu vetor diretor é $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$, e um ponto de r_1 é $A(0, -3, 2)$.

- Para a reta r_2, consideramos $\frac{x-1}{3} = \frac{z-1}{-1} = s$. Daí,

$$r_2 : (x, y, z) = (1 + 3s,\ -1,\ 1 - s) = (1, -1, 1) + s(3, 0, -1).$$

Logo, seu vetor diretor é $\vec{v}_2 = (3, 0, -1)$, e um ponto de r_2 é $B(1, -1, 1)$.

Paralelismo ou concorrência: Como os vetores diretores $\vec{v}_1 = (1, 2, -1)$ e $\vec{v}_2 = (3, 0, -1)$ não são múltiplos, segue que as retas não são paralelas. Portanto, são concorrentes.

Ponto de interseção: Procedendo exatamente como na questão anterior encontramos $t = 1$ e $s = 0$. Assim,

$$P : \begin{cases} x = 0 + 1(1) = 1 \\ y = -3 + 2(1) = -1 \\ z = 2 + (-1)(1) = 1 \end{cases}.$$

Portanto, o ponto de interseção é $\mathbf{P(1, -1, 1)}$.

Equação do plano que contém as duas retas: Como o plano contém as retas, então os vetores diretores $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ são paralelos ao plano. Um vetor normal pode ser obtido pelo produto vetorial, assim

$$\vec{n} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1, 2, -1) \times (3, 0, -1) = (-2, -2, -6) = -2(1, 1, 3).$$

Logo, podemos tomar $\vec{n} = (1, 1, 3)$ como vetor normal ao plano. Uma vez que temos o vetor normal, para encontrar a equação geral do plano só precisamos de um ponto do plano. Para isso, podemos considerar qualquer ponto que pertença a uma das retas, por exemplo, vamos usar o ponto de interseção $P(1, -1, 1)$. A equação é dada pela relação $0 = \langle (1, 1, 3), (x - 1, y + 1, z - 1) \rangle = (x - 1) + (y + 1) + 3(z - 1)$. Portanto, $x + y + 3z - 3 = 0$ é a equação geral do plano.

> "Com quantos quilos de medo se faz uma tradição?..."
> **Senhor cidadão – Tom Zé**