UNIVERSIDADE FEDERAL DO MARANHÃO - UFMA
Disciplina: Álgebra Linear
Aluno(a):

10,0

Primeiro exercício

Atenção: Resolva **até 4 (quatro)** questões dentre as 5 questões abaixo. Questão ou item excedentes serão desconsideradas, respeitando-se a ordem em que forem apresentadas na solução.

1. (2,0 pontos) Mostrar que se $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, então $A^2 - 6A + 5I_2 = O$, em que I_2 á matriz identidade de ordem 2 e O á matriz nula de ordem 2.

2. Quais dos seguintes conjuntos W abaixo são subespaços vetoriais do $\mathbb{R}^3$?

   (a) (1,5 ponto) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | z = 5\}$

   (c) (1,5 ponto) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x - 2z = 0\}$

3. Sejam U e V os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^5$:
   $U = \{(x, y, z, t, w) | y = t = w = 0\}$
   $V = \{(x, y, z, t, w) | x = z = 0\}$

   (a) (1,5 ponto) Verifique que $U + V = \mathbb{R}^5$.

   (b) (1,0 ponto) A soma é direta? Justifique.

4. Considere o sistema linear homogêneo

$$S = \begin{cases} x + y + z + w - t = 0 \\ x - y - z + 2w - t = 0 \end{cases}.$$

   (a) (2,0 pontos) Discuta e resolva o sistema S.

   (b) (2,0 pontos) Determine uma base e a dimensão do espaço solução de S.

5. Considere o subespaço $W = [(1, 0, 1, 0), (1, -2, 2, 1), (1, 2, 0, -1)]$ de $\mathbb{R}^4$.

   (a) (1,0 ponto) Obtenha uma base para W.

   (b) (0,5 ponto) Qual a dimensão de W?

   (c) (1,0 ponto) Determine uma base para $\mathbb{R}^4$ que contenha os vetores da base de W obtida no item (a).

São Luís, 05 de outubro de 2023.

1) $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$, $A^2-6A+5I_2=0$; $0=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$; $I_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$6A=\begin{pmatrix}12&18\\6&24\end{pmatrix}$

$5I_2=\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}4&9\\1&16\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&18\\6&24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}4-12+5&9-18+0\\1-6+0&16-24+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-3&-9\\-5&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$A=A.A=\begin{pmatrix}4+3&6+12\\2+4&3+16\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}7&18\\6&19\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}7&18\\6&19\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}12&18\\6&24\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}5&0\\0&5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-5+5&0+0\\0+0&-5+5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$ //

$A=\begin{pmatrix}2&3\\1&4\end{pmatrix}$ satisfaz a igualdade.

2,0

2) Quais são subespaços do $\mathbb{R}^3$?

a) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / z=5\}$ → não é subespaço vetorial

I) $\vec{0}\in W$ → inválida

$(x,y,5)=(0,0,0)$

$(0,0,5)\neq(0,0,0)$

$\vec{0}\notin W$

II) $u+v\in W$ → inválida

$(x_1+x_2, y_1+y_2, 5+5)$

$z=10$

$u+v\notin W$

1,5

III) $\alpha u\in W$ → inválida

$(\alpha x_1, \alpha y_1, \alpha.5)$

$\alpha.5=5$ se $\alpha=1$; $\forall\alpha\in\mathbb{R}, \alpha 5\neq 5$

W não é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$. //

b) $W=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 / x-2z=0\}$

I) $\vec{0}\in W$ → válida

$(x,y,z)=(0,0,0)$

$0-2.0=0 \to 0=0$

$x-2.z=0$

$\vec{0}\in W$

II) $u+v\in W$ → válida

$u=(2z_1,y_1,z_1)$

$v=(2z_2,y_2,z_2)$

$u+v=(2(z_1+z_2), y_1+y_2, z_1+z_2)$

$x=2z$

$(2z,y,z)=(2(z_1+z_2), y_1+y_2, z_1+z_2)$

$u+v\in W$

III) $\alpha u\in W$ → válida

1,5

$\alpha u=(\alpha 2z, \alpha y, \alpha z)$

$(2z,y,z)\Rightarrow\alpha(2z,y,z)$

α define os infinitos múltiplos membros do conjunto.

W é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ //

3) $U=\{(x,y,z,t,w) / y=t=w=0\}$, $V=\{(x,y,z,t,w) / x=z=0\}$

a) $U+V=\mathbb{R}^5$

$U=(x,0,z,0,0)$ $\quad U+V=(x,y,z,t,w)$

$V=(0,y,0,t,w)$ $\quad U+V=\mathbb{R}^5$ //

a soma de ambos subespaços gera todo $\mathbb{R}^5$

b) a soma é direta?

$U\cap V=\{0\}$

$(x,0,z,0,0)=U$

$(0,y,0,t,w)=V$

$U\cap V=\{(0,0,0,0,0)\}$

a soma é direta //

O único elemento que pertence aos dois subespaços é o vetor nulo, então a soma é direta

2,5

5) $W=[(1,0,1,0),(1,-2,2,1),(1,2,0,-1)]$ de $\mathbb{R}^4$.

a) base de W:

$$W_B=\begin{pmatrix}1&0&1&0\\1&-2&2&1\\1&2&0&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\1&2&0&-1\\1&0&1&0\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-L1\\-L1\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&4&-2&-2\\0&2&-1&-1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\-2L3\\\\\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&-2&2&1\\0&0&0&0\\0&2&-1&-1\end{pmatrix}$$

$W_B=[(1,-2,2,1),(0,2,-1,-1)]$ é a base de W //

1,0

b) a dimensão de W?

$W=[(1,0,1,0),(1,-2,2,1),(1,2,0,-1)]$

$W_{Dim}=3$ // ??

$W_B \dim = 2$

$B=[(1,-2,2,1),(0,2,-1,-$

a dimensão é seu número de elementos.

0,5

c) base para $\mathbb{R}^4$ a partir da base de W:

$B=\{(1,-2,2,1),(0,2,-1,-1),(0,1,0,0),(0,0,0,1)\}$ //

$(1+0,-2+2,2-1,1-1)=(1,0,1,0)$

$(1,0,1,0)+(0,1,0,1)=(1,1,1,1)=\mathbb{R}^4$ //

1,0