Aproximação do cálculo de $sin(x)$ por Taylor e Chebychev

Guilherme Zamberlam Pomini[1]

[1]Departamento de Informática – Universidade Estadual de Maringá (UEM)
87.020-900 – Maringá – PR – Brasil

ra99345@uem.br

1. Introdução

Funções trigonométricas são extremamente importantes não só na matemática mas no dia-a-dia, estando presentes em diversos mecanismos. Devido a essa importância, deseja-se encontrar maneiras de resolvê-las que gastem o menor tempo possível e que garantam uma precisão satisfatória.

Existem diversas formas de se aproximar o cálculo de uma função trigonométrica, como por exemplo, por séries polinomiais, interpolação, relações matemáticas e relações comutacionais. O objetivo deste trabalho é implementar as aproximações do cálculo da função $sen(x)$ da série Taylor(solução polinomial) e por Chebyshev(solução por interpolação) e comparar as duas abordagens na precisão e no tempo de execução.

2. Metodologia

A série de Taylor para o cálculo do $seno(x)$ é da forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \tag{1}$$

E a série de Taylor para o $coseno(x)$ que também é necessária é da forma:

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{2}$$

Nesta implementação foram utilizados os seis primeiros termos da série ficando da forma:

$$seno(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} \tag{3}$$

$$coseno(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} - \frac{x^{10}}{10!} \tag{4}$$

O cálculo de $seno(x)$ por Chebyshev foi obtido pela série:

$$\sum_{k=0}^{11} C_i(x)T_i(x) \tag{5}$$

Na implementação do cálculo por Chebyshev os valores de $C_i(x)$ foram previamente calculados e armazenados em uma tabela, bem como cada um dos polinômiso de Chebyshev até o grau 11.

Como se deseja obter um cálculo correto do $seno(x)$ no intervalo de $[-2\pi, 2\pi]$ primeiro é necessário fazer uma redução do valor do argumento para o intervalo $[-\pi/4, \pi/4]$. Tal redução foi feita da seguinte forma:

$$\frac{\pi}{4} < x \leq \frac{\pi}{2} = coseno(\pi/2 - x) \tag{6}$$

$$\frac{\pi}{2} < x \leq \frac{3\pi}{4} = coseno(x - \pi/2) \tag{7}$$

$$\frac{3\pi}{4} < x \leq \pi = seno(\pi - x) \tag{8}$$

$$\pi < x \leq \frac{5\pi}{4} = -seno(x = \pi) \tag{9}$$

$$\frac{5\pi}{4} < x \leq \frac{3\pi}{2} = -coseno(3\pi/2 - x) \tag{10}$$

$$\frac{3\pi}{2} < x \leq \frac{7\pi}{4} = -coseno(x - \pi/2) \tag{11}$$

$$\frac{7\pi}{4} < x \leq 2\pi = -seno(2\pi - x) \tag{12}$$

3. Análise dos Resultados

Foram gerados os valores da função $seno(x)$ para o intervalo $[-2\pi, 2\pi]$ para Taylor e Chebyshev, bem como o cálculo da função $seno(x)$ pronta da linguagem Java. Com os valores foi produzido a seguinte tabela:

Ângulo (rad)	Seno Computador	Chebyshev	Taylor
-2π	2,45E-16	0	0
$-7\pi/4$	0,7071067812	0,7071067812	0,7071067811
$-3\pi/2$	1	1,000000101	1
$-5\pi/4$	0,7071067812	0,7071220454	0,7071067812
$-\pi$	-1,22E-16	-3,13E-04	0
$-3\pi/4$	-0,7071067812	-0,7071220454	-0,7071067811
$-\pi/2$	-1	-1,000000101	-1
$-\pi/4$	-0,7071067812	-0,7071067812	-0,7071067812
0	0	0	0
$\pi/4$	0,7071067812	0,7071067812	0,7071067812
$\pi/2$	1	1,000000101	1
$3\pi/4$	0,7071067812	0,7071220454	0,7071067811
π	1,22E-16	3,13E-04	0
$5\pi/4$	-0,7071067812	-0,7071220454	-0,7071067812
$3\pi/2$	-1	-1,000000101	-1
$7\pi/4$	-0,7071067812	-0,7071067812	-0,7071067811
2π	-2,45E-16	0	0

Tabela 1. Valores Calculados com Taylor e Chebyshev

É possível notar que os valores da tabela para cada intervalo são extremamente próximos, tendo diferenças somente em casas decimais, ou nenhuma diferença. Tal proximidade de valores pode ser melhor observada no gráfico gerado a partir da tabela exposto na Figura 1.

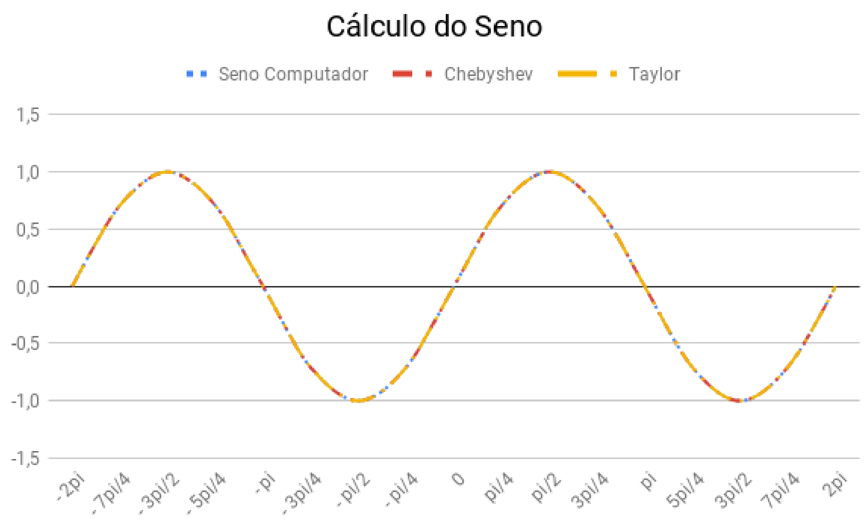

Figura 1. Valores calculados da função $seno(x)$

É fácil notar a partir da Figura 1 que os valores calculados pelos três métodos compartilham a mesma linha, não havendo oscilações aparentes, indicando uma grande proximidade dos valores. No entanto, tal gráfico não serve para mostrar a diferença de valores do cálculo de Taylor e Chebyshev. A partir da tabela de valores foi gerada uma nova tabela, desta vez com os valores endo o erro comparado com a função pronta da linguagem.

Ângulo (rad)	**Chebyshev**	**Taylor**
-2π	2,45E-16	2,45E-16
$-7\pi/4$	5,43E-10	1,62E-08
$-3\pi/2$	1,01E-05	0
$-5\pi/4$	0,002158683127	9,80E-10
$-\pi$	2,56E+14	1,22E-16
$-3\pi/4$	0,002158683127	1,62E-08
$-\pi/2$	1,01E-05	0,00E+00
$-\pi/4$	5,43E-10	9,80E-10
0	0	0
$\pi/4$	5,43E-10	9,80E-10
$\pi/2$	1,01E-05	0
$3\pi/4$	0,002158683127	1,62E-08
π	2,56E+14	1,22E-16
$5\pi/4$	0,002158683127	9,80E-10
$3\pi/2$	1,01E-05	0
$7\pi/4$	5,43E-10	1,62E-08
2π	2,45E-16	-2,45E-16

Tabela 2. Erro de Chebyshev e Taylor em Porcentagem

A partir da tabela foi possível gerar um gráfico de erro:

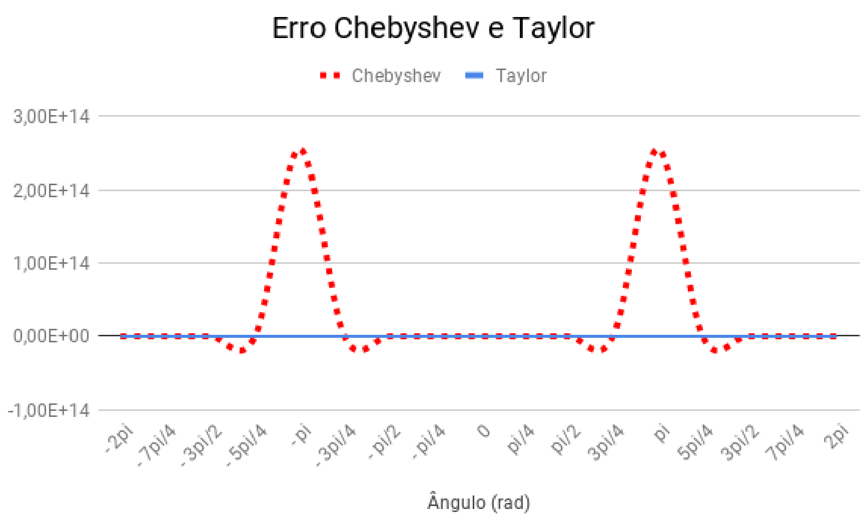

Figura 2. Erro de Taylor e Chebyshev

Com o gráfico da Figura 2 é possíve notar que a função de cálculo por Chebyshev possui um comportamento próximo do cálculo por Taylor, tendo uma oscilação em torno do intervalo de $[-5\pi/4, -3\pi/4]$ e $[5\pi/4, 3\pi/4]$. Contudo, o erro das duas funções ainda é baixo, corroborando o comportamente próximo ao esperado já computado.

3.1. Tempo de Execução

Foi gerado um gráfico com o tempo médio de cada um dos métodos como mostra a Figura 3.

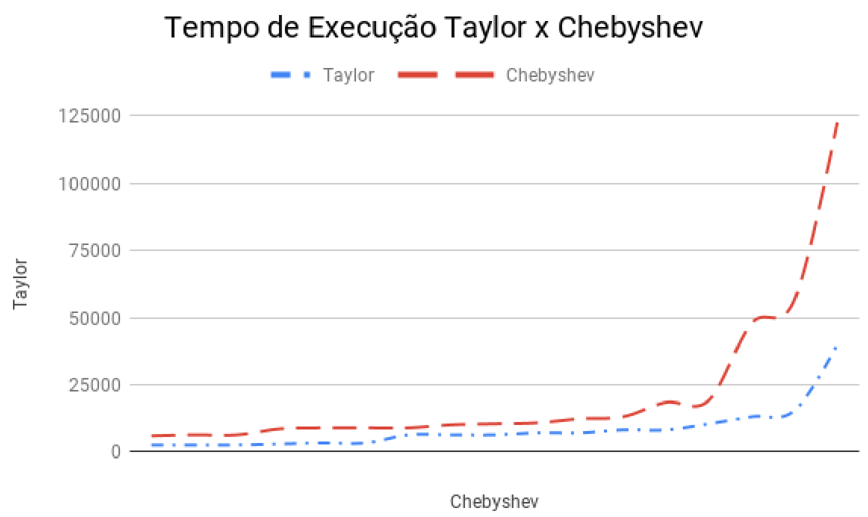

Figura 3. Tempo de Execução Médio de Taylor e Chebyshev

Nota-se que o método de Chebyshev é o mais demorado, tendo por vezes demorado mais do que o dobro do tempo de Taylor. Tal comportamente se deve grande quantidade de multiplicaçõe e exponenciações de Chebyshev, principalmente para o cálculo de cada um de seus polinômios, chegando a fazer exponenciação de $x^1 1$. Como não foi utilizado um método que realize exponenciações e multiplicações com menor custo, tal diferença no tempo de execução se tornou muito visível.

4. Conclusão

O cálculo de funções trigonométricas como o Seno e o Coseno pode ser aproximado utilizando séries matemáticas. Duas formas de aproximação do cálculo do seno e o coseno são pela Série de Taylor e por Polinôminos de Chebychev.

Foi implementado duas aproximações do cálculo da função seno(x), a primeira utilizando a Série de Taylor até o sétimo termo e a segunda utlizando Polinômios de Chebychev até o décimo primeiro.

Foi possível notar que ambas as aproximações fornecem resultados extremamente próximos do resultado esperado, tão próximos que são a mesma linha em um gráfico. O método de Taylor tem uma ligeira maior precisão, contudo ambos os resultados são muito próximos.

A diferença entre os dois métodos se dá mais no tempo de execução, onde o cálculo por Chebychev demorou em média duas vezes mais do que o cálculo por Taylor.

Tal diferença se dá na maior quantidade de exponenciações e multiplicações do cálculo de Chebychev, principalmente no cálculo de cada polinômio, tais cálculos poderiam ser melhorados utilizando técnicas para diminuir quantidade de operações mas a série de Taylor continuaria sendo mais rápida devido a menor quantidade de operações custosas.

5. Implementação

```
public int fatorial(int x) {
        int resultado = 1;
        for (; x > 1; x--) {
            resultado *= x;
        }
        return resultado;
    }

    public double senoTaylor(double x) {
        double resultado = x;
        resultado += -(Math.pow(x, 3) / fatorial(3));
        resultado += (Math.pow(x, 5) / fatorial(5));
        resultado += -(Math.pow(x, 7) / fatorial(7));
        resultado += (Math.pow(x, 9) / fatorial(9));
        resultado += -(Math.pow(x, 11) / fatorial(11));
        return resultado;
    }

    public double cosenoTaylor(double x) {
        double resultado = 1;
        resultado += (-1) * (Math.pow(x, 2) / fatorial(2));
        resultado += (Math.pow(x, 4) / fatorial(4));
        resultado += (-1) * (Math.pow(x, 6) / fatorial(6));
        resultado += (Math.pow(x, 8) / fatorial(8));
        resultado += (-1) * (Math.pow(x, 10) / fatorial(10));
        return resultado;
    }

    public double reducaoArgumentoTaylor(double x) {
        double pi = Math.PI;
        double resultado;
        while (x > 2 * pi) {
            x = x - (2 * pi);
        }
        if(x >= -2 * pi && x < - pi/4){
            return - reducaoArgumentoTaylor(-x);
        }else if(x >= -pi/4 && x <= pi/4){
            return senoTaylor(x);
        }else if (x > pi / 4 && x <= pi / 2) {
```

```java
            resultado = cosenoTaylor(pi / 2 - x);
        } else if (x <= (3 * pi) / 4) {
            resultado = cosenoTaylor(x - pi / 2);
        } else if (x <= pi) {
            resultado = senoTaylor(pi - x);
        } else if (x <= (5 * pi) / 4) {
            resultado = -senoTaylor(x - pi);
        } else if (x <= (3 * pi) / 2) {
            resultado = -cosenoTaylor(((3 * pi) / 2) - x);
        } else if (x <= (7 * pi) / 4) {
            resultado = -cosenoTaylor(x - ((3 * pi) / 2));
        } else {
            resultado = -senoTaylor((2 * pi) - x);
        }
        return resultado;
    }

     public double reducaoArgumentoCheby(double x) {
        double resposta =0;
        double pi = Math.PI;
        while(x > 2 * pi){
            x = x - 2 * pi;
        }
        if(x >= -2 * pi && x < -pi /4){
            return -reducaoArgumentoCheby(-x);
        }else if(x <= pi) {
            resposta = senoCheby(x);
        }else if (x <= 2 * pi) {
            resposta = -senoCheby( (2 * pi) -x);
        }
        return resposta;
    }

    public double Tn(double x, int i){
        switch (i) {
            case 0:
                return 1;
            case 1:
                return x;
            case 2:
                return 2  * Math.pow(x, 2) -1;
            case 3:
                return 4 * Math.pow(x, 3) - 3 * x;
            case 4:
                return 8 * Math.pow(x, 4) - 8 * Math.pow(x, 2) + 1;
            case 5:
```

```
                return 16 * Math.pow(x, 5) -
                20 * Math.pow(x, 3) + 5 * x;
            case 6:
                return 32 * Math.pow(x, 6) -
                48 * Math.pow(x, 4) + 18 *
                Math.pow(x, 2) - 1;
            case 7:
                return 64 * Math.pow(x, 7) -
                112 * Math.pow(x, 5) + 56 * Math.pow(x, 3) - 7 * x;
            case 8:
                return 128 * Math.pow(x, 8) -
                256 * Math.pow(x, 6) +
                160 * Math.pow(x, 4) - 32 * Math.pow(x, 2) + 1;
            case 9:
                return 256 * Math.pow(x, 9) -
                576 * Math.pow(x, 7) + 432 * Math.pow(x, 5) -
                120 * Math.pow(x, 3) + 9 * x;
            case 10:
                return 512 * Math.pow(x, 10) -
                1280 * Math.pow(x, 8) +
                1120 * Math.pow(x, 6) - 400 * Math.pow(x, 4) +
                50 * Math.pow(x, 2) -1;
            case 11:
                return 1024 * Math.pow(x, 11) -
                2816 * Math.pow(x, 9) +
                2816 * Math.pow(x, 7) - 1232 * Math.pow(x, 5) +
                220 * Math.pow(x, 3) - 11 * x;
            default:
                return 0;
        }
    }

    public double w(double x){
        return 1 / Math.sqrt(1 - Math.pow(x, 2));
    }

    public double CiSeno(int i){
        if(i % 2 == 0){
            return 0;
        }else if(i == 1){
            return 0.8801011714897299;
        }else if(i == 3){
            return -0.03912670796533398;
        }else if(i == 5){
            return 0.0004995154592517784;
        }else if(i == 7){
```

```
        return -3.004652682298829E-06;
    }else if(i == 9){
        return 1.0499949590786636E-08;
    }else if(i == 11){
        return -2.1227908199943986E-11;
    }else{
        return 0;
    }
}

public double CiCoseno(int i){
    if(i % 2 > 0){
        return 0;
    }else if(i == 0){
        return 1.5303953731158757;
    }else if(i == 2){
        return -0.2298069698638014;
    }else if(i == 4){
        return 0.004953277928209125;
    }else if(i == 6){
        return -4.187667766754126E-05;
    }else if(i == 8){
        return 1.8844618339355993E-07;
    }else if(i == 10){
        return -5.266754015496207E-10;
    }else{
        return 0;
    }
}

public double cosenoCheby(double x){
    double resultado = 0;
    for(int i =0; i < 12; i++){
        resultado = resultado + CiCoseno(i -1) * Tn(x,i);
    }
    return resultado;
}

public double senoCheby(double x){
    double resultado = 0;
    for(int i =0; i < 12; i++){
        resultado = resultado + CiSeno(i) * Tn(x,i);
    }
    return resultado;
}
```