Solução de EDOs utilizando métodos de Euler e Range Kutta

Guilherme Zamberlam Pomini[1]

[1]Departamento de Informática – Universidade Estadual de Maringá (UEM)
87.020-900 – Maringá – PR – Brasil

ra99345@uem.br

1. Introdução

Equações Diferenciais são equações que envolvem uma ou mais derivadas de funções desconhecidas como variáveis em relação a uma ou mais variáveis. Dentro das Equações Diferenciais existem as Equações Diferenciais Ordinárias que são Equações Diferenciais que só possuem derivadas ordinárias de uma ou mais funções desconhecidas em relação a uma única variável. Um exemplo de EDO pode ser o seguinte:

$$y'' + y' + 5y = 0 \tag{1}$$

A solução de uma EDO pode ser dada por métodos analíticos como a Diferenciação Exata, Fator Integrante e outros, mas também pode ser solucionada numericamente com métodos com os de Euler ou Range Kutta.

EDOs são utilizadas para resolver diversos problema reais como o do Decaimento Radioativo, do Crescimento Populacional Exponencial, de Transmissão de Doenças, Resfriamento de um Corpo, Corpo em Queda Livre, Rabo de Foguete, entre inúmeros outros.

Este trabalho tem como objetivo implementar as abordagens de Euler e de Range Kutta para a resolução o problema do Rabo de Foguete através da sua Equadção Diferencial Ordinária e analisar a precisão e o tempo de execução de cada método.

2. Metodologia

Todos os métodos implementados resolveram a EDO do problema do Rabo de Foguete. O problema consiste em determinar a velocidade v de um foguente lançado verticalmente em um instante de tempo t em segundos qualquer. A velocidade pode ser calculada pela fórmula padrão:

$$v(t) = 10t - 40\frac{t^2}{40} \tag{2}$$

Contudo, também é possível chegar em uma solução a partir da EDO:

$$y' = \frac{2000 - 2y}{200 - t} \tag{3}$$

onde $y' = v(t)$.

Ainda, para todos os métodos, o valor do passo de X_{k+1} é dado por $X_K + h$, sendo h o valor do passo. Cada método foi executado duas vezes, a primeira com o valor do passo sendo 0.5,e a segunda com o passo sendo 1.

2.1. Método de Euler

O Método de Euler se baseia em aproximar o valor desejado através de uma reta tangente, utilizando passos para percorrer a reta. É um método de primeira ordem, logo o erro local (ou erro por passo) é proporcional ao quadrado do tamanho do passo e o erro global é proporcional ao tamanho do passo.

A aplicação do Método de Euler se dá a partir dos valores iniciais de x e y, bem como o tamanho do passo h, utilizando a fórmula:

$$Y_{n+1} = Y_n + hf(X_n, Y_n) \tag{4}$$

2.2. Euler Modificado

Fazendo uma modificação no Método do Euler é possível chegar na fórmula:

$$Y_{n+} = Yn + h\frac{f(X_n, Y_n) + f(X_{n+1}, Y^*_{n+1})}{2} \tag{5}$$

onde o valor de Y^*_{n+1} é calculado utilizando o método de Euler normal.

2.3. Método de Range Kutta

O método de Range Kutta de quarta ordem é baseado na série de Taylor e assim como o método de Euler, para calcular os próximos valores de X_{n+1} e Y_{n+1} somente é necessário os valores de X_n e Y_n. O método utiliza variáveis auxiliares para facilitar o seu entendimento, da forma:

$$K_1 = f(X_k, Y_k) \tag{6}$$

$$K_2 = f(X_k + \frac{h}{2}, Y_k + \frac{hK_1}{2}) \tag{7}$$

$$K_3 = f(X_k + \frac{h}{2}, Y_k + \frac{hK_2}{2}) \tag{8}$$

$$K_4 = f(X_k + h, Y_k + hK_3) \tag{9}$$

O cálculo principal é dado pela fórmula:

$$Y_{k+1} = Y_k + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \tag{10}$$

3. Análise dos Resultados

Para o passo = 0.5 foi obtida a seguinte tabela de valores com o tempo variando de 1 a 10:

Tempo	Euler	Euler Melhorado	Range Kutta	Esperado
1	9,987468672	9,974968711	9,97499999995086	9,975
2	19,92481203	19,89993758	19,8999999999014	19,9
3	29,81203008	29,7749066	29,7749999998518	29,775
4	39,64912281	39,59987578	39,5999999998019	39,6
5	49,43609023	49,37484512	49,3749999997517	49,375
6	59,17293233	59,09981461	59,0999999997012	59,1
7	68,85964912	68,77478426	68,7749999996504	68,775
8	78,4962406	78,39975406	78,3999999995993	78,4
9	88,08270677	87,97472402	87,9749999995479	87,975
10	97,61904762	97,49969414	97,4999999994962	97,5

É possível notar que conforme foi aumentando o tempo, a precisão dos três métodos foi decaindo. No entando, somente o Range Kutta foi capaz de calcular exatamente a resposta esperada. A partir da tabela foi possível plotar um gráfico de erro de cada método comparado com a solução esperada, ilustrado na Figura

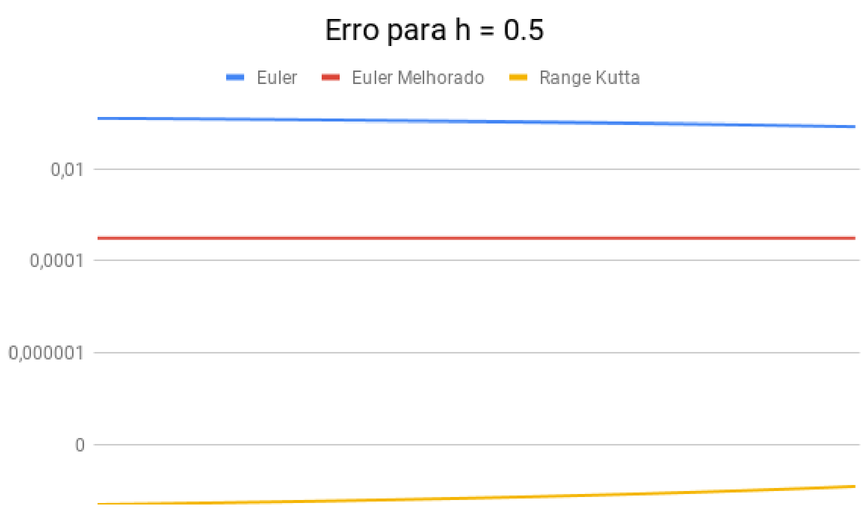

Figura 1. Gráfico de erros para passo h = 0.5

A partir do gráfico fica fácil notar que o comportamento próximo da solução esperada do Range Kutta e a maior taxa de erro nos métodos de Euler, em especial, o Euler normal possuindo o maior erro em todas as execuções.

Para o valor do passo = 1 foram obtidos os seguintes valores e o gráfico de erro:

Tempo	Euler	Euler Melhorado	Range Kutta	Esperado
1	10	9,974874372	9,974999999	9,975
2	19,94974874	19,89974937	19,8999999984176	19,9
3	29,84924623	29,77462499	29,7749999976202	29,775
4	39,69849246	39,59950124	39,5999999968185	39,6
5	49,49748744	49,37437811	49,3749999960123	49,375
6	59,24623116	59,0992556	59,0999999952014	59,1
7	68,94472362	68,77413372	68,77499999	68,775
8	78,59296482	78,39901247	78,39999999	78,4
9	88,19095477	87,97389184	87,97499999	87,975
10	97,73869347	97,49877183	97,49999999	97,5

Figura 2. Gráfico de erros para passo h = 1

Como a Figura 2 mostra, a taxa de erro dos métodos foi maior do que para o passo h = 0.5, comprovando que quanto maior o passo dado pelo método, maior é o erro gerado. Contudo, as aproximações ainda são satisfatórias para o Euler Melhorado e em especial o Range Kutta. O comportamento do Euler normal também é digno de nota apesar de ser o que possui maior taxa de erro, no entanto, tal taxa não passa de 0.1%.

3.1. Tempo de Execução

Foi gerado um gráfico com o tempo médio de cada um dos métodos e o da solução analítica (fórmula inicial sem a EDO), como mostra a Figura 3

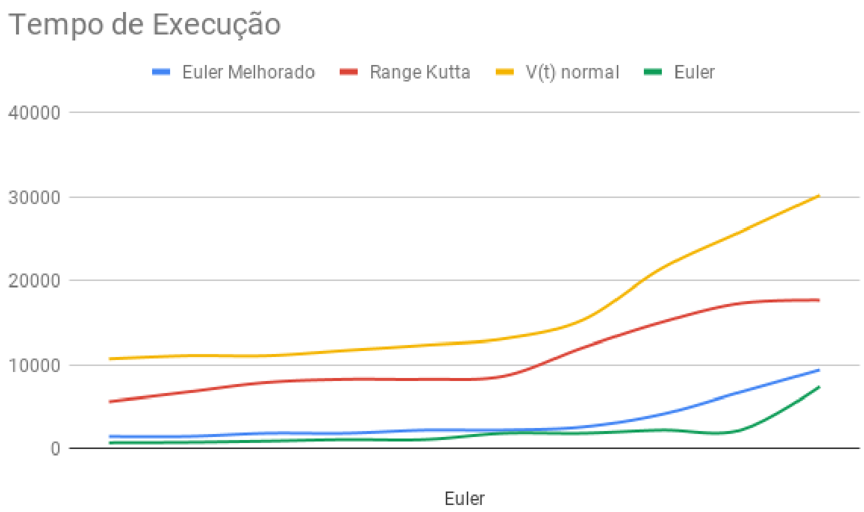

Figura 3. Tempo de Execução Médio

Nota-se que o mais demorado é a solução normal pela equação, seguida pelo método de Range Kutta. Tal demora se da a maior quantidade de multiplicações e divisões no método, em comparação com a simplicidade dos métodos do Euler, tendo o Euler tradicional o menor tempo de execução.

4. Conclusão

Uma Equação Diferencial Ordinária possui diversos métodos de resolução, dentre os métodos de resolução númerica se destacam os de Euler, Euler Modificado e Runge Kutta.

Foi implementado cada um dos três métodos para resolver uma mesma EDO, resolvendo a mesma duas vezes para uma faixa de valores, na primeira vez utilizando um passo de 0.5 e na segunda um passo de 1.0.

Foi possível verificar que os três métodos possuem um desempenho satisfatório na aproximação do resultado esperado, em especial o método de Range Kutta é quem possui maior precisão, mesmo fazendo mais operações que poderiam propagar o erro mais rapidamente. Em segundo lugar está o método de Euler Modificado que possui um desempenho intermediário e melhor que o seu método tradicional de Euler que vem em último lugar. Embora o método de Euler possua a maior taxa de erro, tal erro não ultrapassou 0.1% em 100 execuções diferentes e com o maior passo. Também foi possível confirmar que quanto maior o passo, mais erros são propagados, para uma aproximação mais precisa seria necessário passos menores.

Em termos de tempo de execução, entre os métodos o mais demorado é o de Runge Kutta devido a sua maior quantidade de operações matemáticas, em especial multiplicações e divisões. Em segundo lugar vem o Euler Modificado que possui as mesmas operações do Euler normal com multiplicações a mais, portanto o método de Euler normal é o mais rápido. Contudo, a solução pela fórmula de velocidade tradicional demora mais do que os três métodos, tornando os as soluções de Range Kutta e Euler preferíveis a solução tradicional em termos de tempo de execução.

Pode-se concluir que se o foco seja uma solução mais precisa deve-se usar o método de Runge Kutta, caso se aceite perder um pouco da precisão em troca de tempo, o método de Euler Modificado seria o escolhido já que o seu tempo de execução não é muito diferente do do Euler normal e precisão é maior.

Referências

[Leonardo Gonçalves Brito 2012] Leonardo Gonçalves Brito, T. R. d. A. (2012). Método de euler e runge-kutta para solução de equações diferenciais ordinárias. *Congresso de Matemática Aplicada*, page N12.


```java
public double f(double t, double y){
      return (2000 - 2 * y) / (200 - t);}

  public double Euler(double h, double estimar){
      double xk = 0, yk = 0;
      while(xk < estimar){
          yk = yk + h * f(xk,yk);
          xk = xk + h;
      }
      return yk;
  }

  public double EulerMelhorado(double h, double estimar){
      double xk = 0, yk = 0;
      while(xk < estimar){
          yk = yk + h * ((f(xk,yk) + f(xk+h, yk + h* f(xk,yk))) / 2);
          xk = xk + h;
      }
      return yk;
  }

  public double RangeKutta(double h, double estimar){
      double k1,k2,k3,k4, xk = 0, yk = 0;
      while(xk < estimar){
          k1 = f(xk,yk);
          k2 = f(xk + h/2, yk + (h*k1)/2);
          k3 = f(xk + h/2, yk + (h*k2)/2);
          k4 = f(xk + h, yk + h * k3);
          yk = yk + (h/6) * (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4);
          xk = xk + h;
      }
      return yk;
  }

  public double solucaoFoguete(double x){
      return (10 * x) - (Math.pow(x,2)/40);}
```