

# Laboratório de Controle e Automação I

## Projeto Desafio: Rotor Duplo

Emerson Alves  
Victor Moraes

**Resumo**—Este relatório descreve a prática de controle da planta de um rotor duplo. O sistema é composto por duas hélices, semelhante a um helicóptero, sendo uma no sentido horizontal e outra no vertical. O intuito do presente trabalho foi realizar o controle de ambos graus de liberdade da planta: ângulos de arfagem e de guinada. Para tal, realizou-se identificação do sistema para cada entrada e para cada saída. Assim foram obtidas quatro funções de transferência que aproxima o sistema real. Tal modelo foi validado por meio de simulações na planta. Foi realizado o projeto de um desacoplador e controladores PID foram projetados para controle de arfagem e guinada. Esses controladores foram simulados nos modelos e posteriormente testado na planta.

### I. INTRODUÇÃO

Uma das aplicações de controle na aeronáutica mais importantes é o controle da orientação espacial de uma aeronave, a fim de alterar a trajetória do veículo em voo. Os ângulos controlados são: em relação ao eixo horizontal, ângulo de arfagem; em relação ao eixo vertical: ângulo de guinada; e em relação ao sentido longitudinal da aeronave, o ângulo de rolagem. Em helicópteros comerciais tais controles são realizados atuando na velocidade dos rotores e ângulos das pás, controlando empuxo, arfagem e guinada.

O dispositivo didático utilizada nesta prática é o sistema rotor duplo de múltiplas entradas e múltiplas saídas (MIMO), que é uma simplificação de um helicóptero e produzida pela *Feedback*. O controle de tal planta deve possuir dois controladores, sendo cada um dependente de ambas entradas. Contudo, é possível desacoplar as entradas e eliminar o efeito cruzado, isto é, o efeito em que uma entrada, afeta a saída oposta, permitindo o controle de um sistema MIMO.

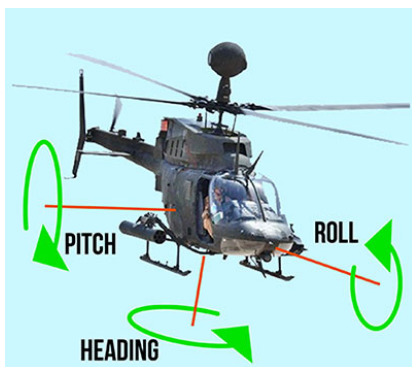


Figura 1: Orientação espacial de uma aeronave: arfagem (*pitch*), rolagem (*roll*) e guinada (*heading*).

### II. DESCRIÇÃO DA PLANTA

O sistema é composto por dois rotores de velocidade variáveis, sendo uma hélice horizontal e outra vertical, acoplado em uma haste com dois graus de liberdade que por sua vez está conectada a uma outra haste com contra-peso. A planta possui duas variáveis de entrada, que são as tensões de alimentação de cada rotor, fornecidas pela unidade eletrônica, que recebe uma referência de  $-2.5$  a  $2.5$  V do controlador. Também possui duas variáveis a serem controladas, correspondente aos dois graus de liberdade: ângulo de arfagem e ângulo de guinada, sendo sensoreadas, cada uma, por *encoders* incrementais, lidos pela unidade de aquisição de dados e enviados ao controlador [?].

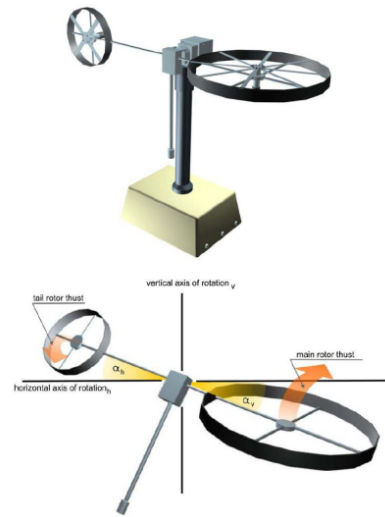


Figura 2: Dispositivo *Twin rotor MIMO System*.

No sistema físico está presente a perturbação de fluxos de ar externos e turbulências. Como não-linearidades, tem-se o atraso da aceleração do rotor e de seu empuxo. O torque de arfagem depende de forma não-linear da orientação espacial.

Tem-se como variável controlada o ângulo de arfagem (*pitch angle*), responsável pelo movimento vertical do rotor dianteiro. A tensão aplicada ao rotor é a variável manipulada. O *set-point* ou referência é o ângulo de arfagem desejado, que nessa prática foi expresso em sinais do tipo degrau, senoide e rampa. A variável medida foi o ângulo de arfagem real do rotor (resposta do sistema).

### III. ESPECIFICAÇÃO DO DESEMPENHO DESEJADO

Os requisitos de desempenho no domínio do tempo adotados para o controle de pitch foram:

- 1) *Overshoot* máximo percentual:  $M_p \leq 30\%$ ;
- 2) Tempo de acomodação:  $t_{2\%} \leq 20$  s; e
- 3) Erro nulo em estado estacionário para entradas do tipo degrau.

Os requisitos de desempenho no domínio do tempo adotados para o controle de yaw foram:

- 1) *Overshoot* máximo percentual:  $M_p \leq 20\%$ ;
- 2) Tempo de acomodação:  $t_{2\%} \leq 10$  s; e
- 3) Erro nulo em estado estacionário para entradas do tipo degrau.

Tais requisitos introduziram restrições que delimitaram uma região de suposto desempenho satisfatório no plano complexo  $s$ , e foram consideradas no projeto dos controladores.

#### IV. MODELAGEM MATEMÁTICA DA PLANTA

Os modelos matemáticos que descrevem o comportamento do ângulo de arfagem (*pitch*), ângulo de guinada (*yaw*), *cross-pitch* e *cross-yaw*, foram obtidos pelo método de identificação em malha aberta. Que consiste na aplicação de um sinal de excitação na planta e coleta e análise de sua resposta a essa entrada. O modelo matemático é então obtido relacionando-se o sinal de saída com o sinal de entrada por meio de um sistema padrão de 2ª ordem ou modificações dele.

Como se trata de um sistema MIMO, foi necessário identificar quatro FTs, a saber: a do ângulo de arfagem  $G_\psi$  (*pitch*), a do ângulo de guinada  $G_\Psi$  (*yaw*), a do *cross-pitch*  $G_{cp}$  e a do *cross-yaw*  $G_{cy}$ . A representação do sistema em diagrama de blocos é mostrada na Figura 3.

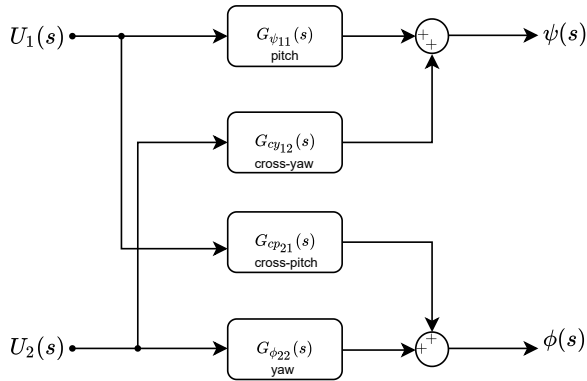


Figura 3: Diagrama de blocos do sistema MIMO.

onde  $U_1(s)$  e  $U_2(s)$  representam as tensões aplicadas nos motores que controlam os rotores do *pitch* e do *yaw*, e  $\Phi(s)$  e  $\Psi(s)$  os ângulos de arfagem e de guinada, respectivamente.

##### A. Modelagem do ângulo de arfagem (*pitch*)

Para identificar o modelo do ângulo de arfagem, foram aplicados dois degraus, um de amplitude 1.36 V e outro de amplitude 0.34 V. A soma dessas amplitudes corresponde à tensão que deixa o rotor paralelo ao chão. A resposta do ângulo do rotor a essa entrada é mostrada na Figura 4.

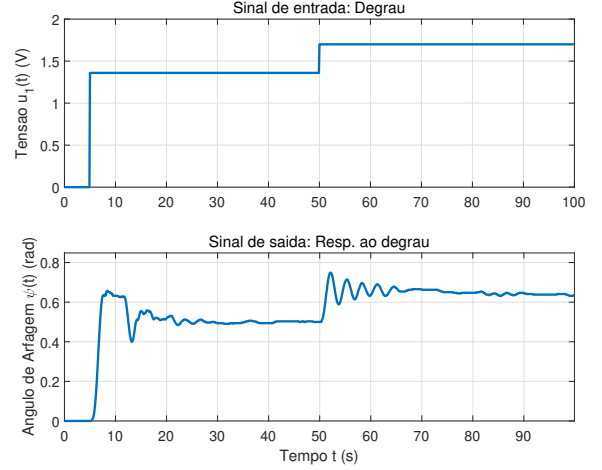


Figura 4: Identificação do modelo do ângulo de arfagem (*pitch*).

Para a identificação do modelo, apenas a resposta ao segundo degrau foi considerada. Pois, para variações de baixa amplitude, o sistema não sai do entorno de seu ponto de operação e responde, portanto, de forma linear.

A resposta obtida é típica de um sistema padrão de segunda ordem subamortecido ( $0 < \zeta \leq 1$ ). Considerando a existência de tempo-morto, a função de transferência de interesse é da forma

$$G_\psi(s) = \frac{\Psi(s)}{U_1(s)} = \frac{k w_n^2 e^{-\tau_d s}}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (1)$$

onde  $k$  é o ganho estático,  $w_n$  a frequência natural de oscilação (em rad/s),  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento e  $\tau_d$  o tempo-morto em s.

Com  $t_i$  e  $t_{i+1}$  os instantes de tempo em que ocorrem dois picos consecutivos na resposta, a frequência amortecida pode ser aproximada por

$$w_d = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{t_{i+1} - t_i} = \frac{2\pi}{30.2 - 27.1} = 2.0268 \text{ rad/s}$$

já um valor inicial para  $\zeta$ , de acordo com [Aguirre, 2004], pode ser obtido contando-se o número  $N$  de picos visíveis na resposta

$$\zeta \approx \frac{0.6}{N} = \frac{0.6}{5} = 0.12$$

e o ganho estático

$$k = \frac{\Delta\psi}{\Delta u_1} = \frac{0.7486 - 0.7148}{0.34} = 0.0994$$

Após sobrepor as respostas da planta e do modelo, removendo a condição inicial (deslocado para a origem), tal como mostrado na Figura 5, os valores do coeficiente de amortecimento e do ganho foram ajustados para

$$\zeta = 0.06 \quad \text{e} \quad k = 0.462$$

e para esse novo valor de  $\zeta$ , obteve-se

$$w_n = \frac{w_d}{\sqrt{1 - \zeta^2}} = 2.03049 \text{ rad/s}$$

O valor do atraso foi obtido por inspeção:  $\tau_d \approx 0.5$  s.

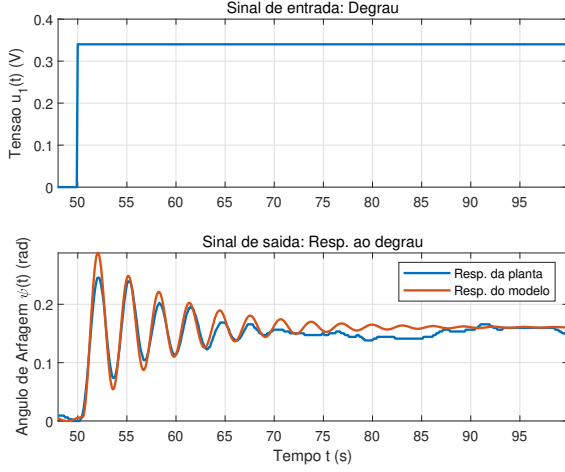


Figura 5: Sinal original e modelo identificado para o ângulo de arfagem (*pitch*).

Assim, o modelo matemático que descreve o comportamento do ângulo de arfagem é dado por

$$G_{\psi}(s) = \frac{\Psi(s)}{U_1(s)} = \frac{1.905e^{-0.5s}}{s^2 + 0.2437s + 4.123} \quad (2)$$

### B. Modelagem do ângulo de guinada (*yaw*)

Para identificar o modelo do ângulo de guinada, foi aplicado um degrau de amplitude 0.6 V. Um valor baixo de tensão foi necessário devido a excursão limitada da rotação do eixo do rotor da cauda, impedindo que se chegasse ao fim de curso e prejudicasse a qualidade do sinal medido do ângulo. A resposta do ângulo do rotor da cauda a essa entrada é mostrada na Figura 6.

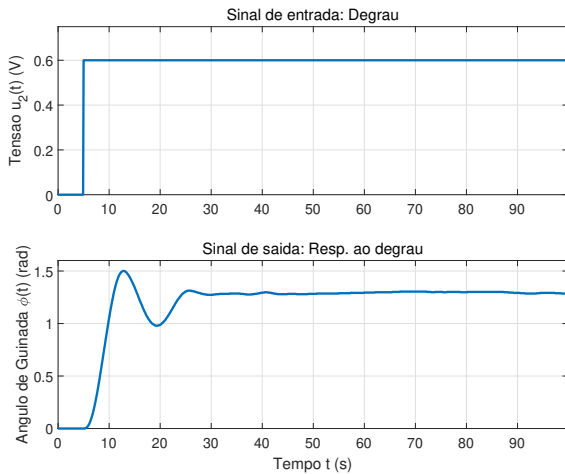


Figura 6: Identificação do modelo do ângulo de guinada (*yaw*).

A resposta obtida é, novamente, típica de um sistema padrão de segunda ordem subamortecido ( $0 < \zeta \leq 1$ ). Considerando a existência de tempo-morto, a função de transferência de interesse é da forma

$$G_{\phi}(s) = \frac{\Phi(s)}{U_2(s)} = \frac{k w_n^2 e^{-\tau_d s}}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (3)$$

onde  $k$  é o ganho estático,  $w_n$  a frequência natural de oscilação (em rad/s),  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento e  $\tau_d$  o tempo-morto em s.

Com  $t_i$  e  $t_{i+1}$  os instantes de tempo em que ocorrem dois picos consecutivos no ângulo de guinada, a frequência amortecida foi aproximada por

$$w_d = \frac{2\pi}{T} \approx \frac{2\pi}{t_{i+1} - t_i} = \frac{2\pi}{25.5 - 12.8} = 0.5026 \text{ rad/s}$$

o valor inicial para  $\zeta$ , [Aguirre, 2004], foi obtido a partir do número  $N$  de picos visíveis no sinal de saída

$$\zeta \approx \frac{0.6}{N} = \frac{0.6}{2} = 0.3$$

já o ganho estático

$$k = \frac{\Delta\phi}{\Delta u_2} = \frac{1.5 - 1.285}{0.6} = 0.3583$$

Esses parâmetros foram então ajustados por meio da sobreposição das respostas da planta e do modelo, a fim de se obter um melhor ajuste. Os valores finais para  $\zeta$ ,  $w_n$ ,  $k$  foram

$$\zeta = 0.42 \quad \text{e} \quad k = 1.65 \quad \text{e} \quad w_n = 0.47 \text{ rad/s}$$

O valor do atraso, obtido por inspeção, foi  $\tau_d \approx 0.5$  s.

Assim, o modelo matemático que descreve o comportamento do ângulo de guinada é dado por

$$G_{\phi}(s) = \frac{\Phi(s)}{U_2(s)} = \frac{0.3645e^{-0.5s}}{s^2 + 0.3948s + 0.2209} \quad (4)$$

O resultado da sobreposição do modelo identificado com o sinal original do ângulo de guinada é mostrado na Figura 7.

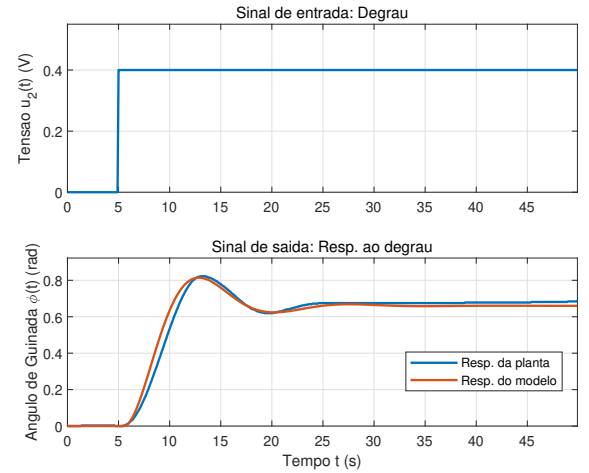


Figura 7: Sinal original e modelo identificado para o ângulo de guinada (*yaw*).

### C. Modelagem do *cross-pitch*

Para identificação do modelo do *cross-pitch*, que relaciona a tensão aplicada no rotor dianteiro (principal) com a variação do ângulo de guinada (*yaw*), foi aplicada uma tensão em  $u_1$  (rotor dianteiro), na forma de um degrau de amplitude 1 V. Esse sinal de entrada e a resposta do ângulo *yaw*, para  $u_2 = 0$ , tensão no rotor da cauda nula, são mostradas na Figura 8.

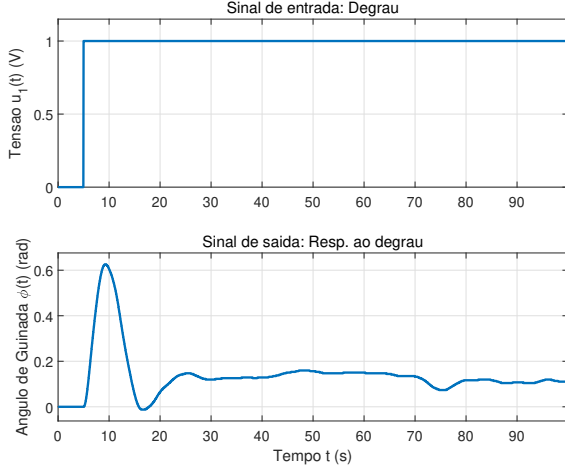


Figura 8: Identificação do modelo do *cross-pitch*.

Para relacionar esses sinais, buscou-se identificar um modelo da forma

$$G_{cp}(s) = \frac{\Phi(s)}{U_1(s)} = \frac{k w_n^2 (a_1 s + a_0) e^{-\tau_d s}}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (5)$$

onde  $k$  é o ganho estático,  $w_n$  a frequência natural de oscilação (em rad/s),  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento,  $\tau_d$  o tempo-morto em s e  $a_1$  e  $a_0$  são os coeficientes do numerador.

Para tanto, foi utilizada a ferramenta de identificação *Ident* do *Matlab*. A partir dos sinais de entrada e saída fornecidos, obteve-se o seguinte modelo para a FT do *cross-pitch*

$$G_{cp}(s) = \frac{\Phi(s)}{U_1(s)} = \frac{0.3025(s + 0.06162)e^{-s}}{s^2 + 0.2574s + 0.1437} \quad (6)$$

O resultado da sobreposição do modelo identificado na equação (6) com o sinal original do *cross-pitch* é mostrado na Figura 9.

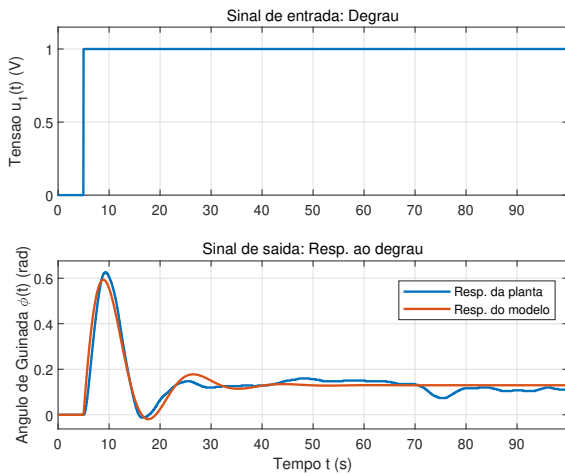


Figura 9: Sinal original e modelo identificado para o *cross-pitch*.

#### D. Modelagem do *cross-yaw*

Já a identificação do modelo do *cross-yaw*, que busca relacionar a tensão aplicada no rotor da cauda com a variação

do ângulo de arfagem (*pitch*), se valeu da aplicação de uma tensão em  $u_2$  (rotor da cauda), na forma de um degrau com amplitude 0.6 V. A Figura 10 mostra o sinal de entrada da tensão aplicada e a resposta do ângulo *pitch* para essa entrada, com  $u_1 = 0$ , tensão no rotor dianteiro nula.

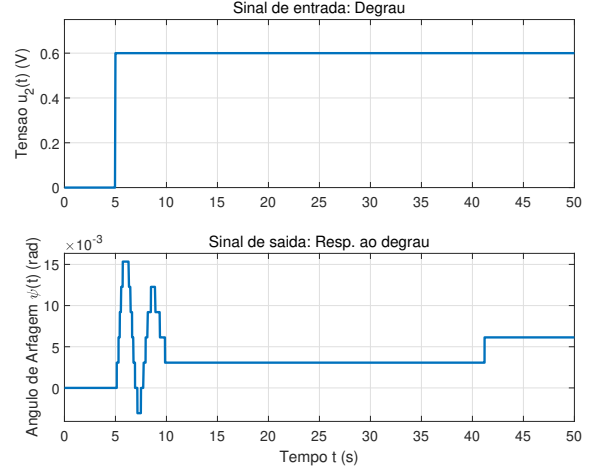


Figura 10: Identificação do modelo do *cross-yaw*.

O modelo utilizado para relacionar esses sinais foi da forma

$$G_{cy}(s) = \frac{\Psi(s)}{U_2(s)} = \frac{k w_n^2 (a_1 s + a_0) e^{-\tau_d s}}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \quad (7)$$

onde  $k$  é o ganho estático,  $w_n$  a frequência natural de oscilação (em rad/s),  $\zeta$  é o coeficiente de amortecimento,  $\tau_d$  o tempo-morto em s e  $a_1$  e  $a_0$  são os coeficientes do numerador.

Utilizando-se novamente a ferramenta de identificação do *Matlab*, obteve-se o seguinte modelo para a FT do *cross-yaw*, para os sinais de entrada e saída fornecidos

$$G_{cy}(s) = \frac{\Psi(s)}{U_2(s)} = \frac{0.0476(s + 1.2945)e^{-0.13s}}{s^2 + 0.6339s + 4.262} \quad (8)$$

A Figura 11 mostra o resultado da sobreposição do modelo identificado na equação (8) com o sinal original do *cross-yaw*.

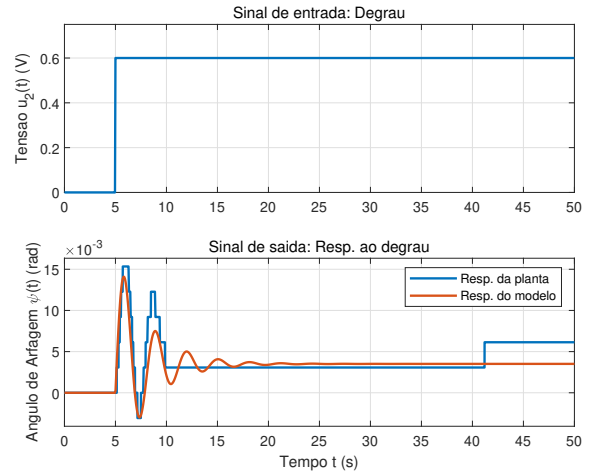


Figura 11: Sinal original e modelo identificado para o *cross-yaw*.

### E. Modelos Identificados

Um resumo das FTs identificadas para os ângulos de arfagem, guinada, além do *cross-pitch* e *cross-yaw*, respectivamente, são mostradas nas equações a seguir:

$$G_{\psi}(s) = \frac{\Psi(s)}{U_1(s)} = \frac{1.905e^{-0.5s}}{s^2 + 0.2437s + 4.123} \quad (2)$$

$$G_{\phi}(s) = \frac{\Phi(s)}{U_2(s)} = \frac{0.3645e^{-0.5s}}{s^2 + 0.3948s + 0.2209} \quad (4)$$

$$G_{cp21}(s) = \frac{\Phi(s)}{U_1(s)} = \frac{0.3025(s + 0.06162)e^{-s}}{s^2 + 0.2574s + 0.1437} \quad (6)$$

$$G_{cy12}(s) = \frac{\Psi(s)}{U_2(s)} = \frac{0.0476(s + 1.2945)e^{-0.13s}}{s^2 + 0.6339s + 4.262} \quad (8)$$

Na próxima seção esses modelos são validados para outros sinais de entrada, ou seja, sinais com características diferentes dos utilizados na fase de identificação.

## V. VALIDAÇÃO DO MODELO

Nesta seção são mostrados os resultados da validação dos modelos obtidos, equações (2), (4), (6) e (8), para diferentes sinais de entrada.

### A. Validação do Modelo do pitch

A validação do modelo obtido para o ângulo *pitch*, para sinais de entrada com características diferentes dos utilizados na fase de identificação são mostrados nas Figuras 12 e 13.

A Figura 12 apresenta a resposta da planta e do modelo a um degrau de amplitude 0.7 V aplicado no instante  $t = 75$  s.

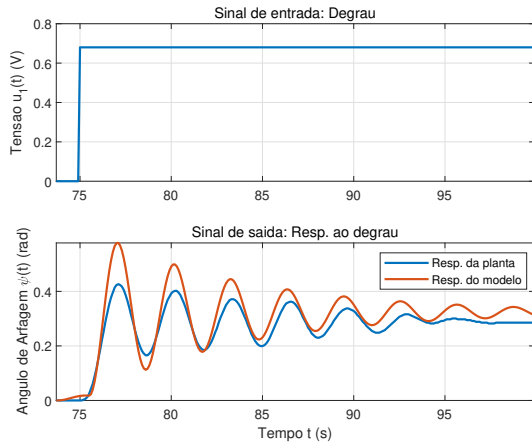


Figura 12: *Pitch*: Sinal de entrada em degrau e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Já a Figura 13 mostra a resposta a uma entrada senoidal de amplitude 0.34 V e frequência 0.1 Hz.

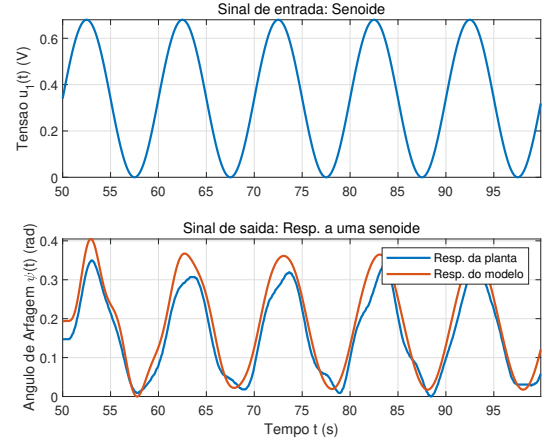


Figura 13: *Pitch*: Sinal de entrada senoidal e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Pode-se observar pelas respostas obtidas que o modelo se aproxima de forma satisfatória do comportamento da planta, com amplitude, frequência de oscilação e amortecimentos próximos.

### B. Validação do Modelo do yaw

O modelo obtido para o ângulo *yaw* foi validado também para sinais de entrada do tipo pulso e senoide. Os quais são mostrados nas Figuras 14 e 15.

Na Figura 14, aplicou-se um pulso de amplitude 0.6 V, com período de  $T = 50$  s.

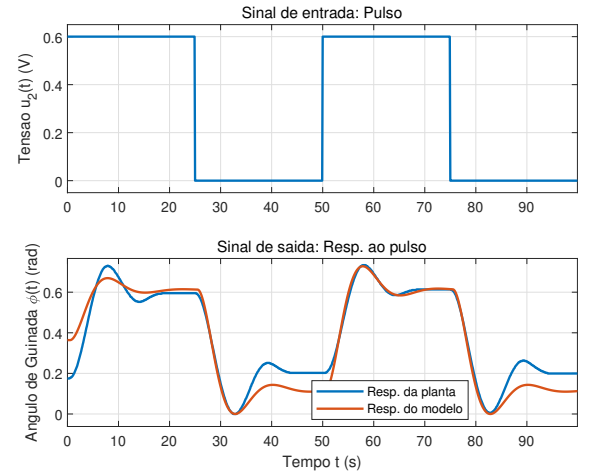


Figura 14: *Yaw*: Sinal de entrada em pulso e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Pode-se observar que o modelo foi capaz de modelar corretamente o comportamento do ângulo de guinada, principalmente em se tratando de degraus positivos, nos quais tanto a amplitude quanto o amortecimento e a frequência ficaram bem ajustados.

Na Figura 15, o modelo para o *yaw* é validado para uma entrada senoidal de amplitude  $\pm 0.3$  V, com período de  $T = 20$  s.

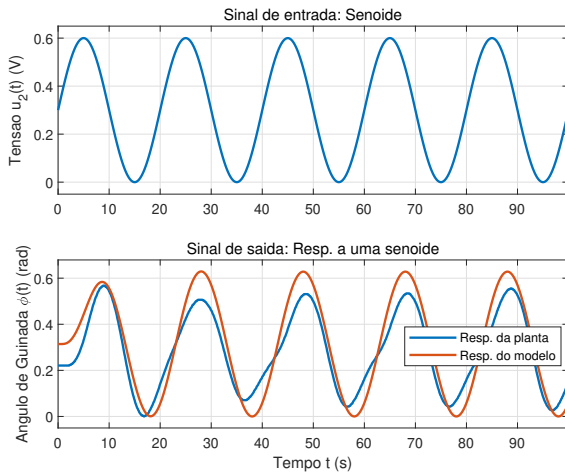


Figura 15: *Yaw*: Sinal de entrada senoidal e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Observa-se que o modelo seguiu o comportamento original da planta, em termos de frequência de oscilação, destoando um pouco apenas na amplitude.

### C. Validação do Modelo do *cross-pitch*

A validação do modelo obtido para o *cross-pitch* para sinais de entrada do tipo pulso e senoidal, são apresentados nas Figuras 16 e 17.

Na Figura 16, foi aplicado um pulso de amplitude  $\pm 0.5$  V, com frequência de  $f = 1/50 \text{ s} = 0.02 \text{ Hz}$ .

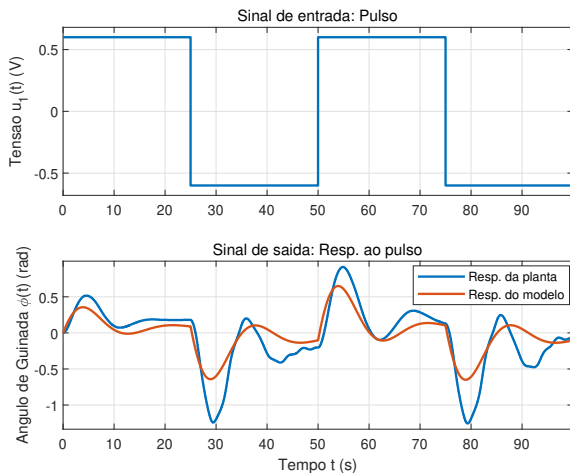


Figura 16: *Cross-pitch*: Sinal de entrada em pulso e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Para amplitudes positivas, o modelo se aproximou melhor do comportamento real do sinal.

Na Figura 17, foi aplicado um sinal senoidal de amplitude  $\pm 0.3$  V, com período de  $T = 50 \text{ s}$ .

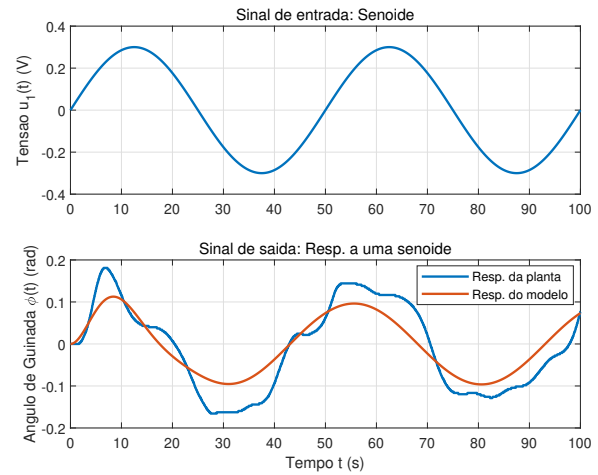


Figura 17: *Cross-pitch*: Sinal de entrada senoidal e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Apesar das oscilações apresentadas pelo sinal original da planta, observa-se que o modelo foi capaz de seguir de forma razoável a trajetória correta.

### D. Validação do Modelo do *cross-yaw*

Na Figura 18 é mostrada a resposta original da planta e a resposta do modelo para uma entrada em pulso com amplitude  $\pm 0.4$  V.

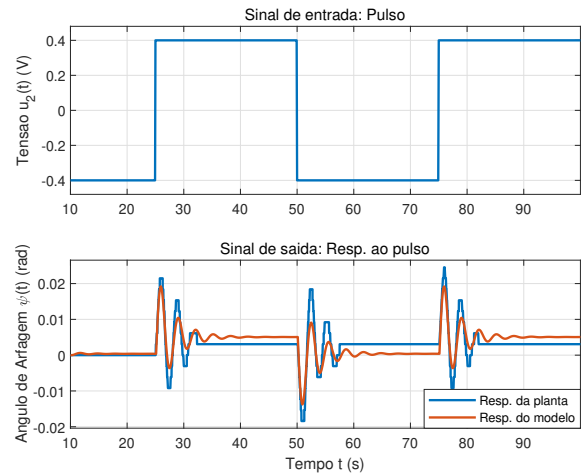


Figura 18: *Cross-yaw*: Sinal de entrada em pulso e resposta da planta e do modelo a essa entrada.

Devido a baixa amplitude da resposta, da ordem de  $10^{-3}$ , e a impossibilidade de se aumentar a amplitude do sinal de entrada, devido a excursão limitada do giro do rotor, outros sinais de entrada não foram testados. Além disso, o período de amostragem, de  $T_s = 0.001 \text{ s}$ , não pode ser reduzido ainda mais para se obter melhores resoluções, pois ao fazer isso, a quantidade de pontos de simulação era drasticamente reduzida.



## VI. DESACOPLAMENTO

Para que seja possível controlar os dois rotores por meio de controladores PID ou por realimentação de estados, é necessário desacoplar os sistemas. Isso é obtido reduzindo-se a influência que as FTs do *cross-pitch* e *cross-yaw* desempenham sobre o comportamento resultante dos ângulos de arfagem e guinada. Assim, esta seção busca descrever o projeto de desacoplamento adotado, bem como sua validação, em malha aberta, por meio de simulação.

### A. Projeto dos Desacopladores

De acordo com [Seborg et al., 2010], o desacoplamento dos sistemas pode ser realizado projetando-se FTs  $T_{12}(s)$  e  $T_{21}(s)$  de forma que, quando conectadas ao sistema, como mostrado na Figura 19, sejam cancelados ou atenuados os efeitos de  $G_{cp}(s)$  e de  $G_{cy}(s)$ .

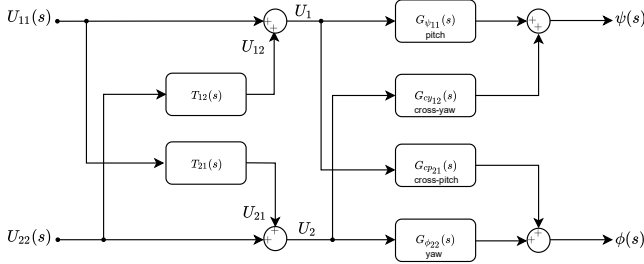


Figura 19: Diagrama de blocos do sistema MIMO com desacopladores.

Assumindo-se inicialmente, que  $U_{22} = 0$  e que  $U_{11} \neq 0$ , tem-se que

$$U_{21} = T_{21}U_{11} \quad (9)$$

para desacoplar  $G_{21}$ , deve-se obter

$$U_{11}G_{21} + U_{21}G_{22} = 0 \quad (10)$$

substituindo (9) em (10) e isolando-se  $T_{21}$ :

$$T_{21} = -\frac{G_{21}}{G_{22}} \quad (11)$$

Substituindo as FTs (6)  $G_{21}$  e (4)  $G_{22}$  em (12), obtém-se

$$T_{21} = -\frac{0.024987(s + 0.5231)(s^2 + 0.2437s + 4.123)}{s^2 + 0.6339s + 4.262} \quad (12)$$

Aplicando-se o mesmo processo, agora para  $U_{11} = 0$  e  $U_{22} \neq 0$ , é possível obter uma expressão para  $T_{12}$  que desacopla  $G_{12}$ :

$$U_{12} = T_{12}U_{22} \quad (13)$$

$$U_{22}G_{12} + U_{12}G_{11} = 0 \quad (14)$$

substituindo (13) em (14) e isolando-se  $T_{12}$ :

$$T_{12} = -\frac{G_{12}}{G_{11}} \quad (15)$$

Substituindo as FTs (8)  $G_{12}$  e (2)  $G_{11}$  em (16), obtém-se

$$T_{12} = -\frac{0.8299(s + 0.06236)(s^2 + 0.3948s + 0.2209)}{s^2 + 0.2574s + 0.1437} \quad (16)$$

Das equações (12) e (16) para  $T_{12}$  e  $T_{21}$ , vê-se que foram obtidas equações não realizáveis na prática. Com base nisso, buscou-se aproximar essas equações desacoplamento apenas pelo seus ganhos estáticos. O que é equivalente a desacoplar os sistemas em regime permanente [Seborg et al., 2010].

$$T_{21_k} = -0.024987 \quad (17)$$

$$T_{12_k} = -0.829900 \quad (18)$$

Após ajustes desses ganhos com objetivo de melhorar o desacoplamento, obteve-se

$$T_{21_k} = -0.05 \quad (19)$$

$$T_{12_k} = -0.07 \quad (20)$$

Esses valores foram utilizados nas simulações de validação do desacoplamento, cujos resultados são mostrados na próxima seção.

### B. Validação do Desacoplamento

A validação do desacoplamento projetado foi realizada por meio da aplicação de dois sinais de entrada: um do tipo pulso e uma senoide. Foram analisados os sinais do *pitch* e *yaw*, *cross-pitch* e *cross-yaw*, assim como da soma de *cross-yaw* com *pitch* e *cross-pitch* com o *yaw*. A ideia foi a de mostrar que a influência das FTs do *cross-pitch* e *cross-yaw* foram reduzidas após a inserção dos desacopladores, fazendo com que o sinal proveniente da soma e o sinal direto ficassem mais próximos.

Na Figuras 20, 21, 22 e 23 são mostrados os resultados da aplicação dos sinais mencionados para o *pitch*, mostrando o comportamento dos sinais antes (acoplados) e após (desacoplados).

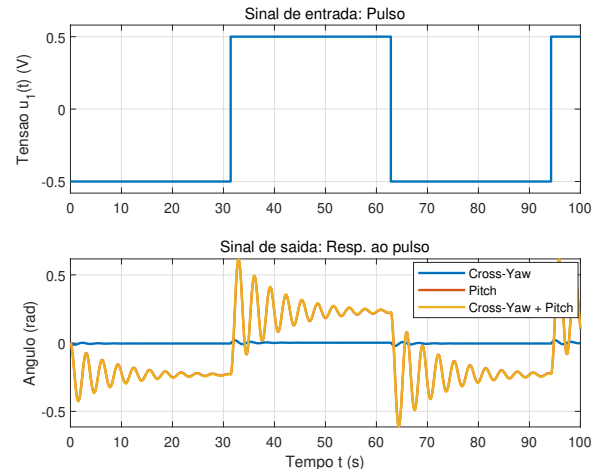


Figura 20: Ângulo do *pitch*: Acoplado.

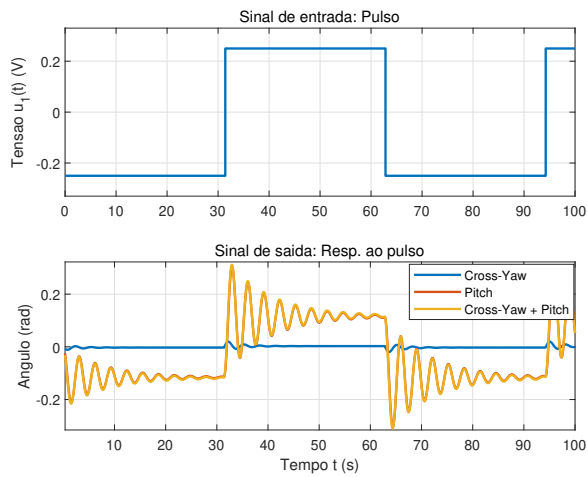


Figura 21: Ângulo do *pitch*: Desacoplado.

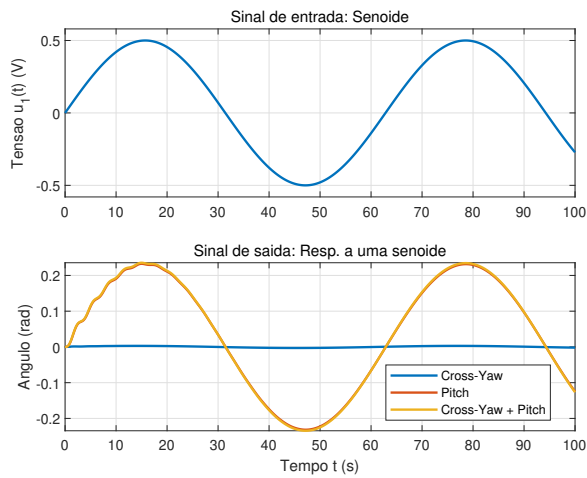


Figura 22: Ângulo do *pitch*: Acoplado.

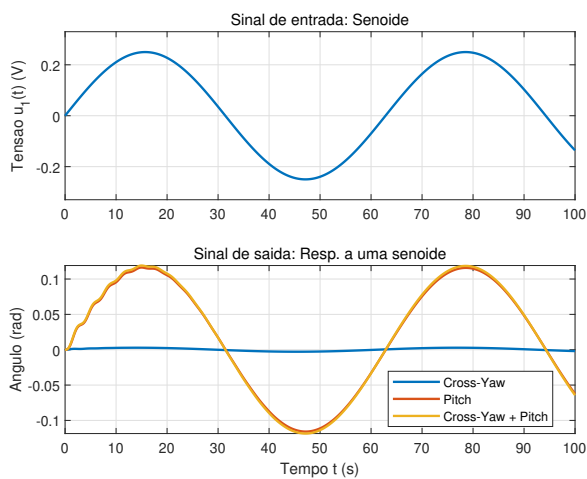


Figura 23: Ângulo do *pitch*: Desacoplado.

Para os dois tipos de sinais aplicados, vê-se que o comportamento do ângulo do *pitch* não melhorou de forma perceptiva.

Isso se deve ao fato de que a influência da FT do *cross-yaw* ser muito pequena, como pode ser observado nas Figuras 10 e 11, obtidas no processo de identificação do modelo, nas quais o ganho da FT é da ordem de  $1 \times 10^{-3}$ .

Na Figuras 24, 25, 26 e 27 são mostrados os resultados obtidos antes e após o desacoplamento dos ângulos.

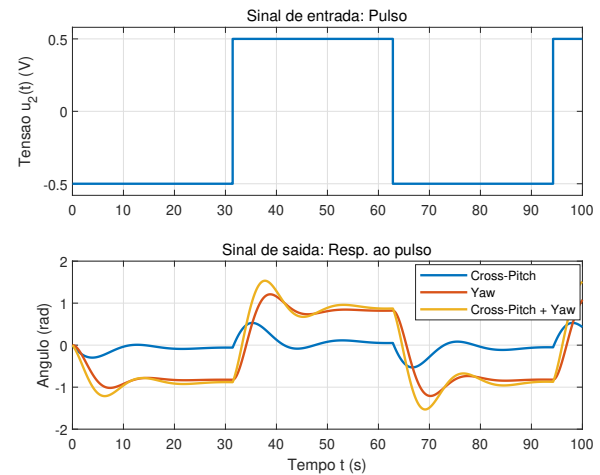


Figura 24: Ângulo do *yaw*: Acoplado.

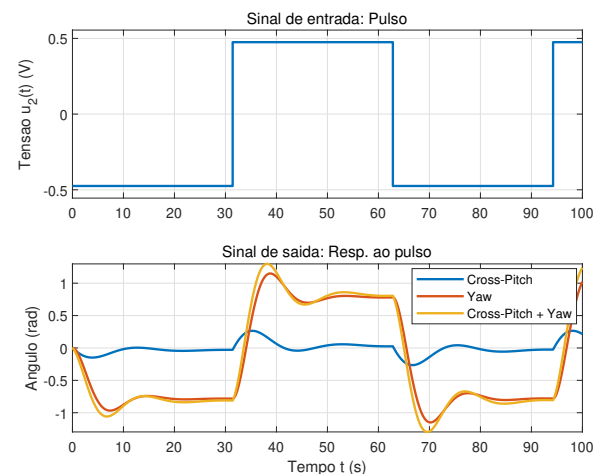


Figura 25: Ângulo do *yaw*: Desacoplado.



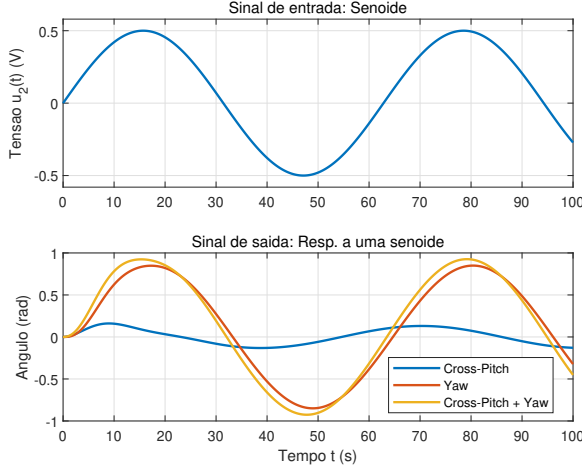


Figura 26: Ângulo do yaw: Acoplado.

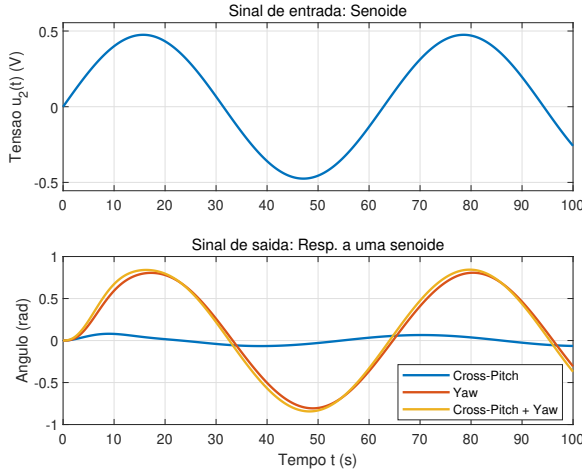


Figura 27: Ângulo do yaw: Desacoplado.

Ao contrário do observado para o *pitch*, vê-se que o desacoplamento foi capaz de reduzir a influência do *cross-pitch* à aproximadamente a metade, com seu valor máximo de pico reduzindo de  $\approx 0.5$  para  $\approx 0.25$  (Figuras 24 e 25). A redução do acoplamento é percebida também na aplicação do sinal senoidal.

## VII. CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO DE ESTADOS

Nesta seção são descritas as etapas do projeto de um controlador por realimentação de estados para uma representação do sistema MIMO em espaço de estados. Inicialmente, é mostrada a conversão do sistema de FTs para espaço de estados, seguida da alteração das matrizes  $C$  e  $D$  para permitir a realimentação de todos os estados. Em seguida, são especificados os polos de malha fechada desejados e um controlador por realimentação de estados é obtido.

Inicialmente, obteve-se a matriz de FT do sistema MIMO, dada por:

$$\begin{bmatrix} Y_p(s) \\ Y_Y(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{12} & G_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

Em seguida, obteve-se sua representação em espaço de estados, obtendo-se

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ Y &= Cx + Du \end{aligned}$$

onde

$$A = \begin{bmatrix} -0.2 & -2.1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.3 & -0.3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.6 & -2.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -0.4 & -0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0.25 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0.95 & 0 & 0 & 0.19 & 0.05 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.6 & 0.07 & 0 & 0 & 0 & 0.7 \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A resposta ao degrau do sistema em espaço de estados retornou o resultado mostrado na Figura 28.

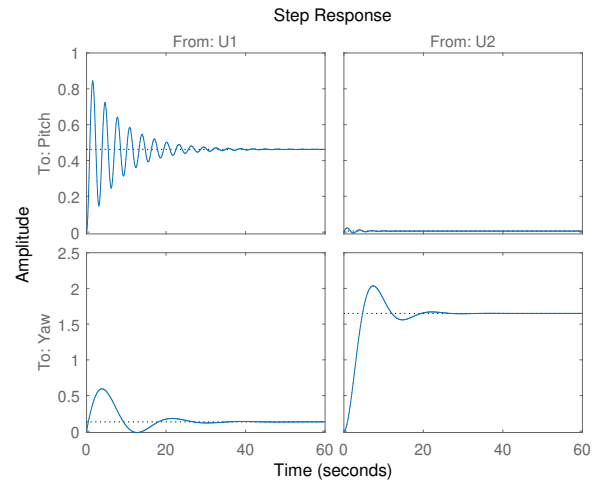


Figura 28: Resposta ao degrau do sistema MIMO em espaço de estados.

Um controlador por realimentação de estados requer que  $u = -Kx$ :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax - Bkx \\ \dot{x} &= (A - Bk)x \end{aligned}$$

onde  $k$  representa uma matriz de ganhos da realimentação.

Para obtê-la, foram definidos os polos desejados de MF, segundo as especificações. Os quais foram obtidos pela ferramenta *sisotool* do Matlab. A matriz de ganhos  $k$  foi então obtida por meio do comando *place()* do Matlab, passando-se as matrizes  $A$  e  $B$  e a matriz de polos desejados, obtendo-se

$$k = \begin{bmatrix} 3.12 & -0.15 & 0.01 & 0 & 0 & 0 & -0.06 & -0.18 \\ 0.15 & -0.03 & -0.2 & -0.04 & 0 & 0 & 2.9 & 6.8 \end{bmatrix}$$

Na Figura 29 é mostrada uma comparação entre a resposta do sistema MIMO a um degrau unitário em malha aberta e a resposta em malha fechada, a partir da realimentação de todos os estados com a matriz de ganho obtida.

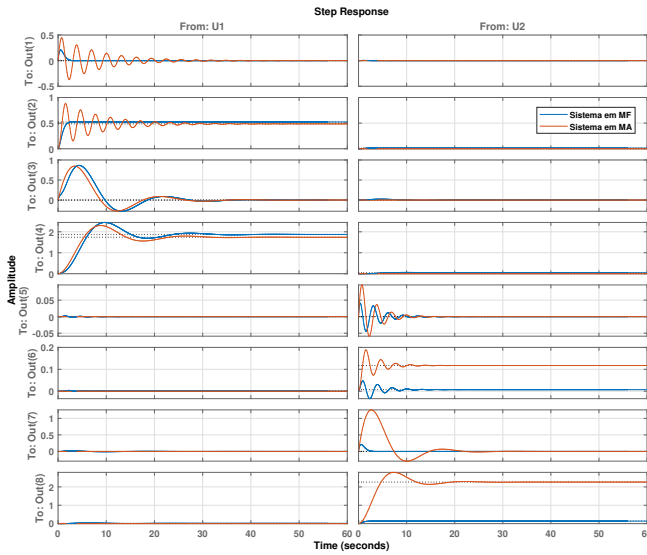


Figura 29: Resposta do sistema MIMO em MA e MF, considerando todos os estados da representação.

Para mapear de volta para as saídas desejadas, que relacionam o *pitch* e o *yaw* com as entradas  $u_1$  e  $u_2$ , basta utilizar os ganhos presentes na matriz  $B$ .

## VIII. CONTROLE PID

Considerando a influência do cross-pitch e cross-yaw, e implementando o desacoplamento, obtemos um diagrama de controle correspondente a figura 30. Para um sistema já desacoplado, resta realizar o controle isolado de cada grandeza a ser controlada da planta.

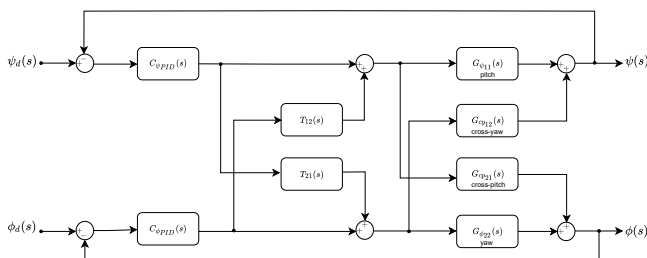


Figura 30: Diagrama de blocos do sistema MIMO com desacopladores e controladores PID para o *yaw* e o *pitch*.

Para realizar o controle de arfagem e guinada, projetou-se, por meio dos métodos do lugar das raízes, um controlador, seguindo os requisitos de desempenho apresentados na seção 2. O ganho foi ajustado iterativamente de forma a reduzir a ação de controle, via simulações, para que esta não atinja a saturação de 2.5V. As figuras 31 e 32 apresentam o lugar das raízes do PID para o controle de *pitch* e de *yaw*.

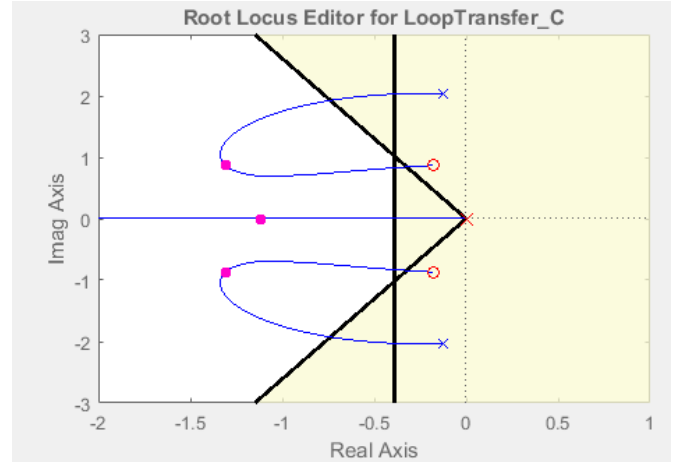


Figura 31: Lugar das raízes de um controlador PID para o controle do *pitch*.

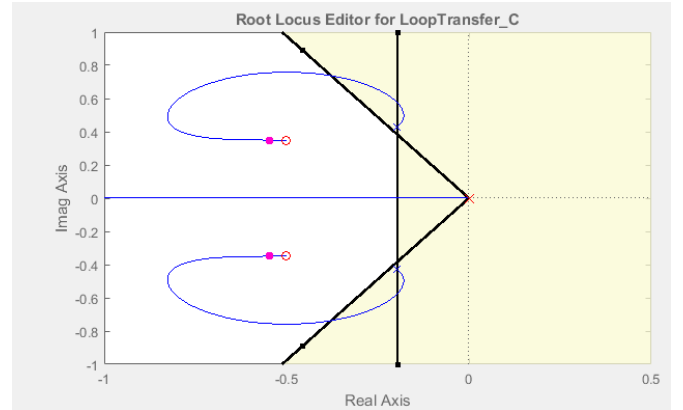


Figura 32: Lugar das raízes de um controlador PID para o controle do *pitch*.

O controlador PID obtido para o *pitch* é dado pela equação (21)

$$C(s) = \frac{1.8s^2 + 0.648s + 0.789}{s} \quad (21)$$

O controlador PID obtido para o *yaw* é dado pela equação (22)

$$C(s) = \frac{6.13s^2 + 6.13s + 3}{s} \quad (22)$$

## IX. RESULTADOS EXPERIMENTAIS EM MF

### A. Teste do Controlador na Planta

Simulamos os controladores, até que estivessem com um desempenho satisfatório. Então foram realizados ensaios com uma entrada variável, para realizar a observação de desempenho dos controles com desacoplamento, correspondentes às

figuras 34, 33. É possível observar que o desempenho foi satisfatório e condizente com os requisitos.

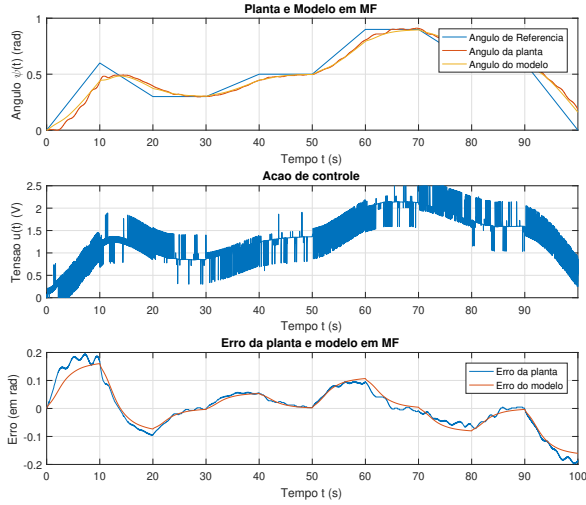


Figura 33: Validação de controle desacoplado de *pitch*.

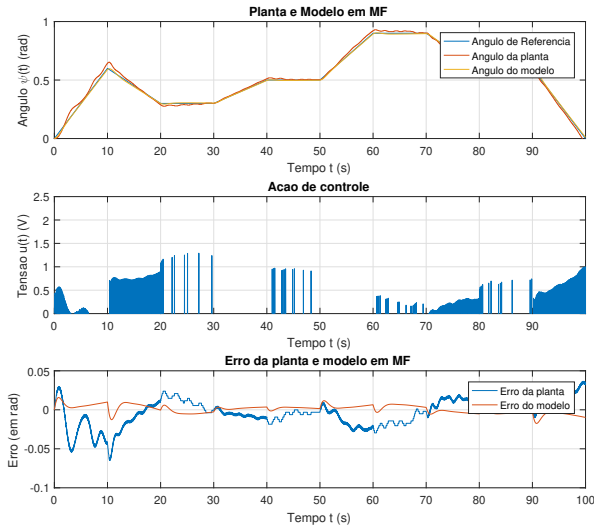


Figura 34: Validação de controle desacoplado de *yaw*.

### B. Análise de Desempenho

Para a avaliação de desempenho do sistema em malha fechada para a entrada variável mostrada na Figura ??, foi realizada utilizando-se dois índices de desempenho, a Integral do Erro Quadrático (*ISE* - *Integral Squared Error*) e a Integral do Erro Absoluto (*IAE* - *Integral Absolute Error*). Os quais foram calculados por meio das equações (23) e (24)

$$ISE = \int_0^T e^2(t)dt \quad (23)$$

$$IEA = \int_0^T |e(t)|dt \quad (24)$$

onde  $e$  é o erro, dado pela diferença entre o *set-point* e o ângulo medido e  $T$  representa a janela de tempo considerada.

Para o *yaw*, obtivemos os seguintes índices:

$$ISE = 2.8430$$

$$IAE = 450.3624$$

E para o *pitch*, obtivemos:

$$ISE = 507.7020$$

$$IAE = 5.5331 \times 10^3$$

## X. CONCLUSÕES

Por meio dessa prática, foi possível controlar, com desempenho satisfatório, uma planta do tipo MIMO, utilizando a técnica de desacoplamento, dessa forma possibilitando o controle para *yaw* e *pitch* independentemente.

## REFERÊNCIAS

- [Aguirre, 2004] Aguirre, L. A. (2004). *Introdução à identificação de sistemas-Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Editora UFMG.
- [Seborg et al., 2010] Seborg, D. E., Mellichamp, D. A., Edgar, T. F., and Doyle III, F. J. (2010). *Process dynamics and control*. John Wiley & Sons.