Estatística Computacional - Lista de Exercícios 1

Aluno: Guilherme Barão

Dre: 121062490

In [1]:
```
import numpy as np
import pandas as pd
from random import seed
from random import random
import plotly.express as px
import matplotlib.pyplot as plt
import plotly.graph_objects as go
from plotly.subplots import make_subplots
```

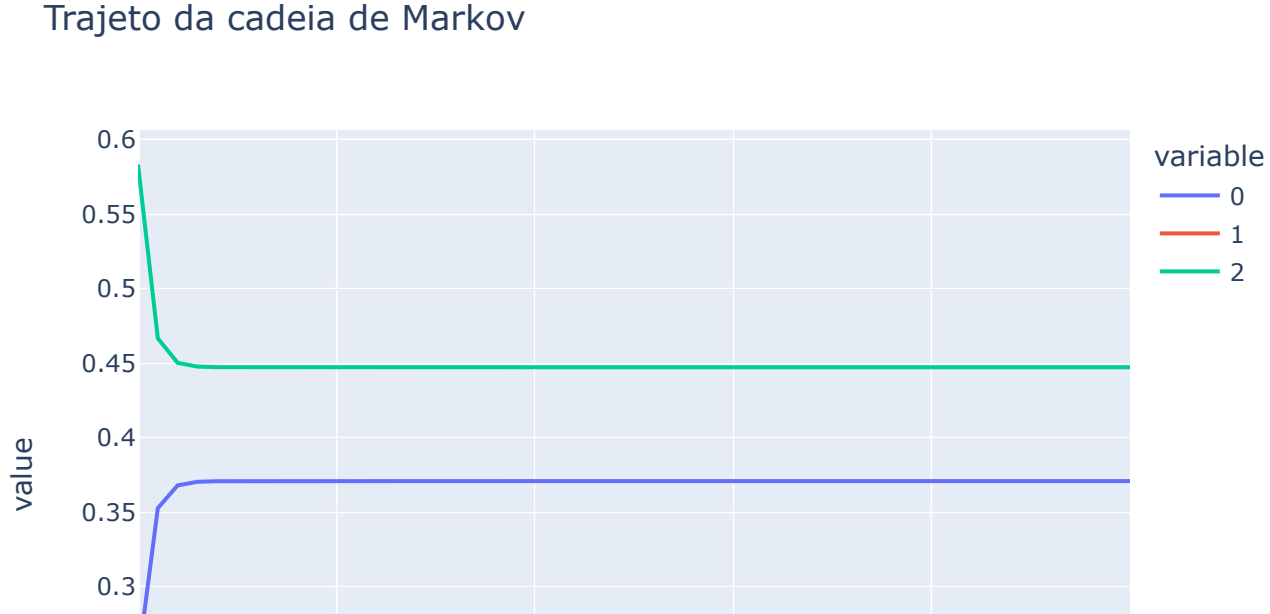
Garantindo que os valores serão replicáveis:

In [2]:
```
rng = np.random.default_rng(seed=1)
```

Questão 1:

In [3]:
```
matriz_prob = np.array([[1/2, 1/6, 1/3],
                                                [1/5, 1/4, 11/20],
                                                [1/3, 1/6, 1/2]])
dist_inicial = np.array([[1/4, 1/6, 7/12]])
```

In [4]:
```
estado = dist_inicial
estados = dist_inicial
for x in range(50):
        estado = np.dot(estado, matriz_prob)
        estados = np.append(estados, estado, axis=0)
        historico = pd.DataFrame(estados)
px.line(historico, title='Trajeto da cadeia de Markov')
```



Questão 2/3:

Alt text

Pelo método da transformação inversa:

$f(x) = \frac{1}{2}e^{|-x|}$

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, se\ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2}e^{x}, se\ x \geq 0 \end{cases}$$

$U = F(x) \qquad F(x) = \frac{1}{2}$ quando $x = 0$

$$x = \begin{cases} \ln(2U), se\ U < \frac{1}{2} \\ -\ln(2-2U), se\ U \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

In [5]:
```
U = rng.uniform(low=0,high=1,size=1000)
laplace_inversa = []
for u in U:
        if u < 0.5  :
                laplace_inversa.append(np.log(2*u))
        else:
                laplace_inversa.append(-np.log(2-(2*u)))
```

Pelo método de aceitação/rejeição:

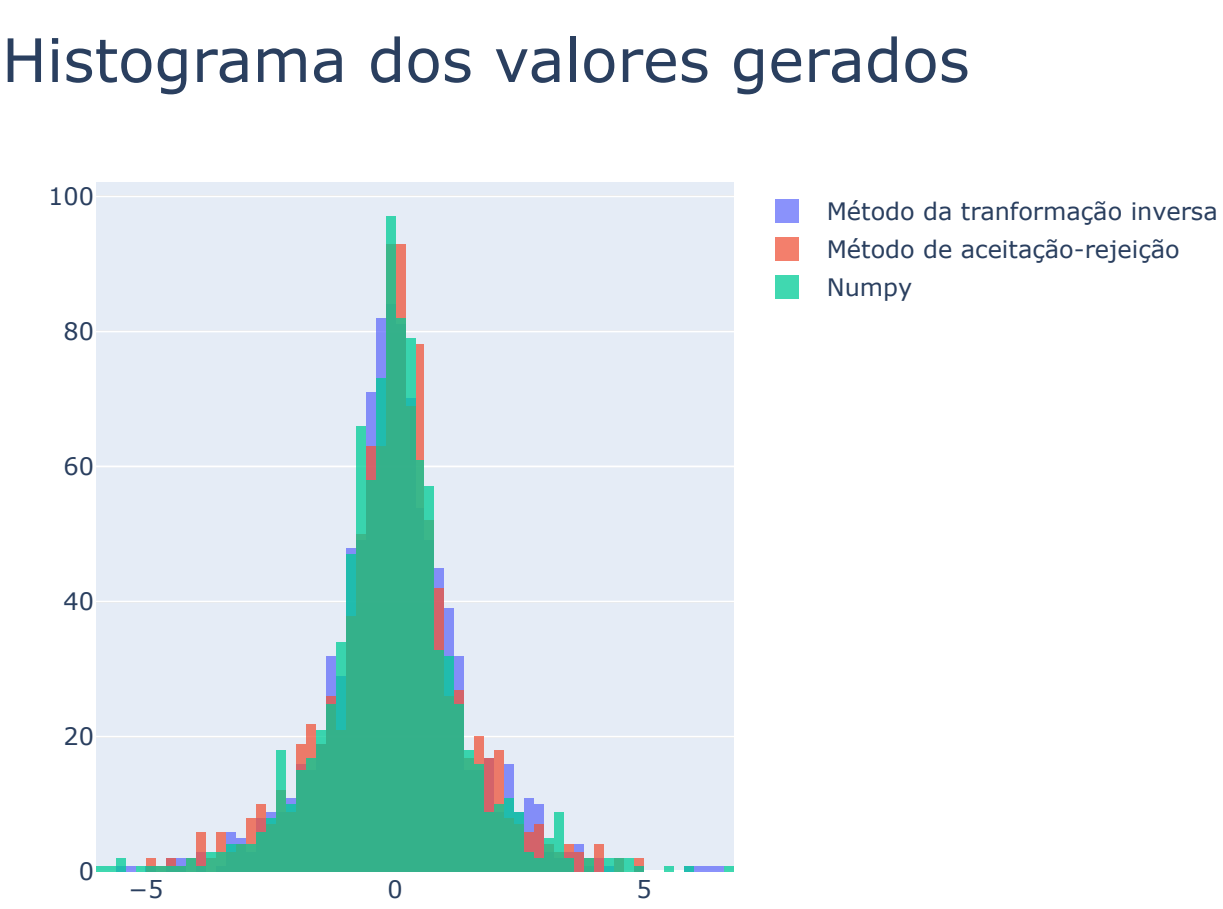
$max(f(x)) = \frac{1}{2}$, tomando $-5 \leq x \leq 5$ como domínio:

In [6]:
```
laplace_AR = []
while len(laplace_AR) < 1000:
        Ux = rng.uniform(low=-5,high=5,size=1)
        Uy = rng.uniform(low=0,high=1/2,size=1)
        f_u = 1/2*(np.exp(-np.abs(Ux)))
        if Uy < f_u:
                laplace_AR.append(float(Ux))
```

In [7]:
```
original = rng.laplace(loc=0.0, scale=1.0, size=1000)
```

In [8]:
```
fig = go.Figure()
fig.add_trace(go.Histogram(x=laplace_inversa, name='Método da tranformação inversa'))
fig.add_trace(go.Histogram(x=laplace_AR, name='Método de aceitação-rejeição'))
fig.add_trace(go.Histogram(x=original, name='Numpy'))
```

```
fig.update_layout(barmode='overlay', title=dict(text='Histograma dos valores gerados', f
# Reduce opacity to see both histograms
fig.update_traces(opacity=0.75)
fig.show()
```



Podemos ver que ambos os métodos geram um histograma parecido com o dos valores gerados pelo Numpy, indicando uma boa aproximação.

Questão 4/5

Como a Lognormal é a exponencial de uma distribuição normal, podemos utilizar o método Box-Muller para gerar amostras da distribuição normal e transformá-las em Lognormal.

O método:

Ao obtermos a variável $Z_0 \sim N(0,1)$, podemos obter $X \sim Lognormal(\mu, \sigma)$ com a operação $X = e^{\mu+\sigma Z_0}$

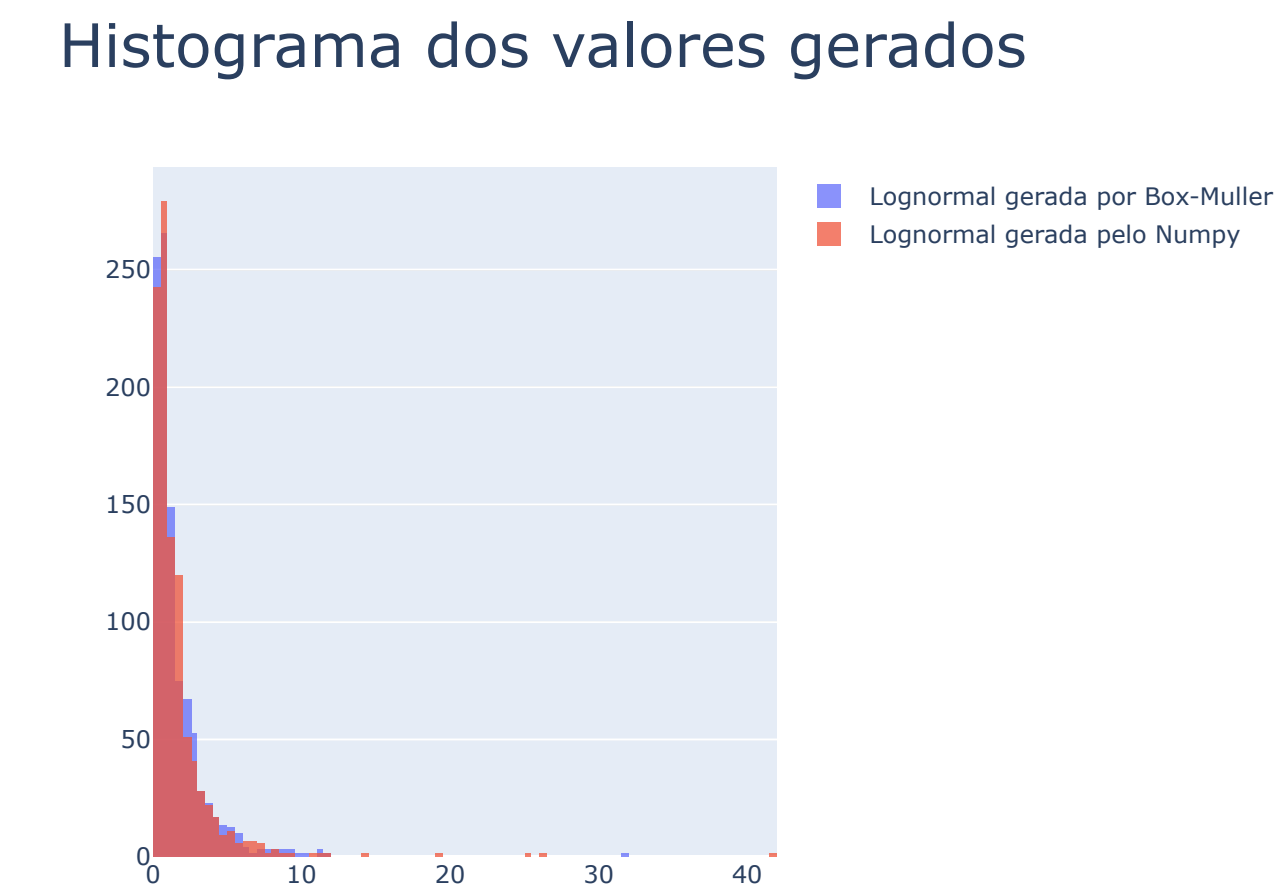
In [9]:
```
def lognormal(media, dp):
        U1 = np.random.uniform(size = 1000)
        U2 = np.random.uniform(size = 1000)
        R = np.sqrt(-2 * np.log(U1))
        theta = 2 * np.pi * U2
        Z0 = R * np.cos(theta)
```

```
        Z1 = R * np.sin(theta)
        X = np.exp(media + dp*Z0)
        return X

boxmuller = lognormal(0,1)
numpy = np.random.lognormal(mean=0,sigma=1, size=1000)
```

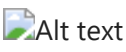
In [10]:
```
fig = go.Figure()
fig.add_trace(go.Histogram(x=boxmuller, name='Lognormal gerada por Box-Muller'))
fig.add_trace(go.Histogram(x=numpy, name='Lognormal gerada pelo Numpy'))

fig.update_layout(barmode='overlay', title=dict(text='Histograma dos valores gerados', f
# Reduce opacity to see both histograms
fig.update_traces(opacity=0.75)
fig.show()
```



Como podemos ver, os valores gerados pelo método se aproximam bastante dos valores gerados pelo Numpy.

Questão 6



Implementando o algoritmo:

In [11]:
```
def algoritmo(n,a,b):
        beta = []
        erros = []
```

```
        while len(beta) < n:
                U1 = np.random.uniform()
                U2 = np.random.uniform()

                Y1 = U1 ** (1/a)
                Y2 = U2 ** (1/b)
                x = Y1/(Y1+Y2)
                if Y1+Y2 <= 1:
                        x = Y1/(Y1+Y2)
                        beta.append(x)
                else:
                        erros.append(x)
        return beta
```

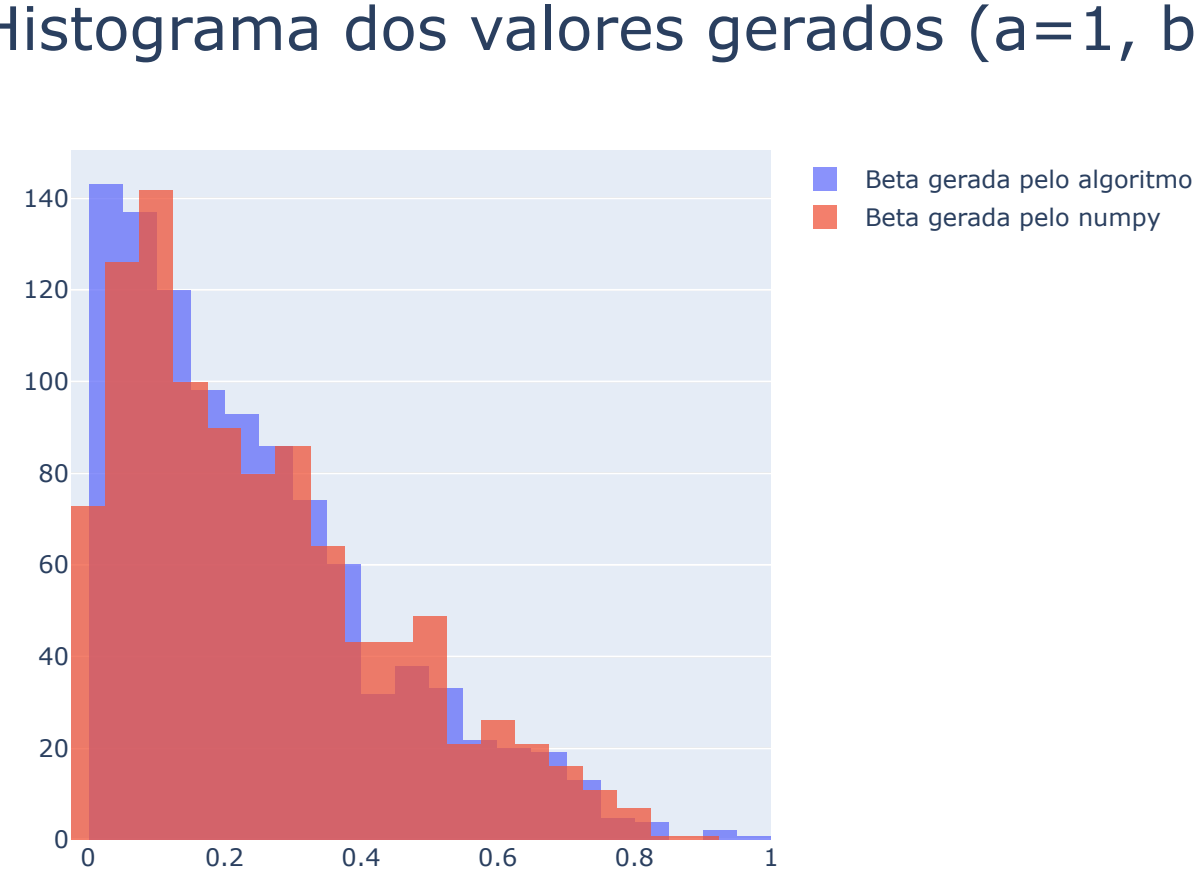
Repetindo o algoritmo 1000 vezes e comparando com a função geradora de variáveis beta do numpy:

In [12]:
```
a=1
b=3

X = algoritmo(1000, a, b)
beta = np.random.beta(a=a,b=b,size=1000)
```

In [13]:
```
fig = go.Figure()
fig.add_trace(go.Histogram(x=X, name='Beta gerada pelo algoritmo'))
fig.add_trace(go.Histogram(x=beta, name='Beta gerada pelo numpy'))

fig.update_layout(barmode='overlay', title=dict(text=f'Histograma dos valores gerados (a
# Reduce opacity to see both histograms
fig.update_traces(opacity=0.75)
fig.show()
```



Questão 7

> Nota: assumindo a segunda probabilidade como 1/4 para que elas possam somar 1.

Simulando com o método da transformação inversa, estou gerando uma variável $U \sim Unif(0,1)$.

De forma que:

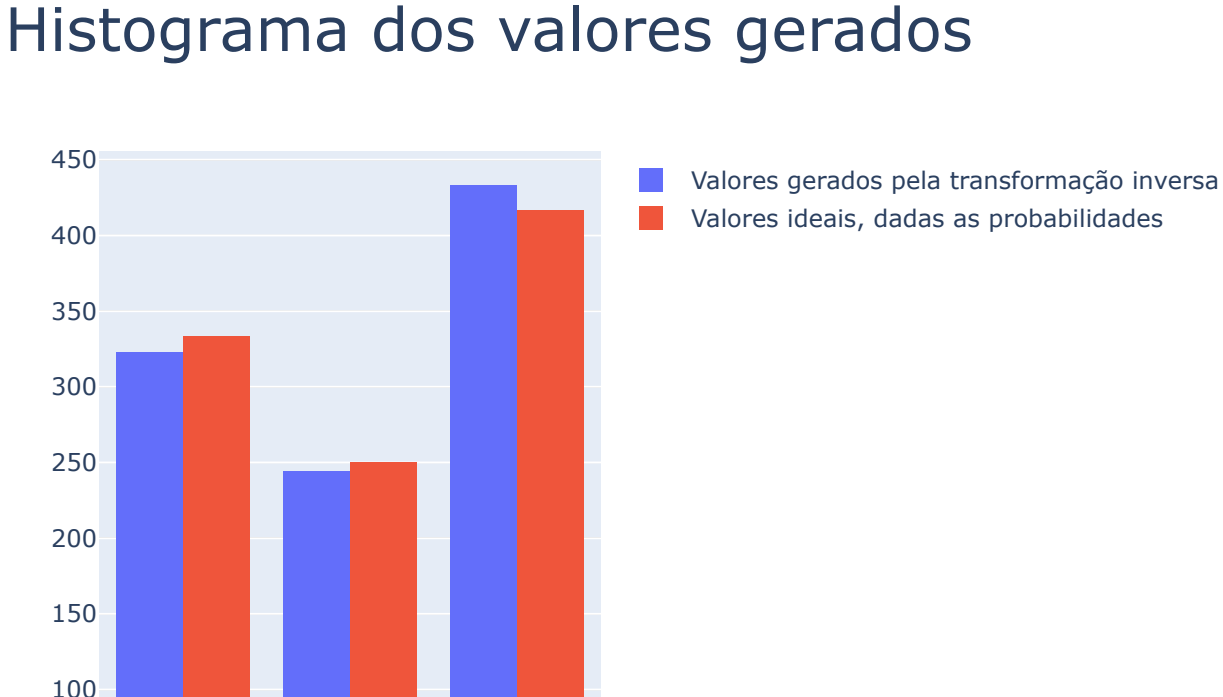
$$x = \begin{cases} 0, \ se \ \ U < \frac{1}{3} \\ 1, \ se \ \ \frac{1}{3} \leq U < \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \\ 2, \ se \ \ \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \leq U < 1 \end{cases}$$

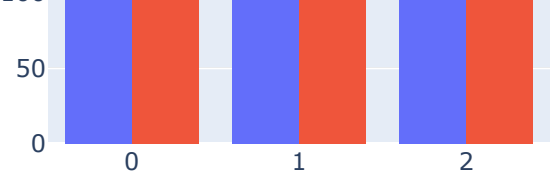
In [14]:
```
p = [1/3,1/4,5/12]
cum_p = np.cumsum(p)
X = np.random.uniform(size = 1000)
valores = []
for x in X:
        if x < cum_p[0]:
                valores.append(0)
        elif cum_p[0] <= x < cum_p[1]:
                valores.append(1)
        elif x >= cum_p[1]:
                valores.append(2)

ideais = [p * 1000 for p in p]
ideais = pd.DataFrame({'nomes': [0,1,2], 'numeros':ideais})
```

In [15]:
```
fig = go.Figure()
fig.add_trace(go.Histogram(x=valores, name='Valores gerados pela transformação inversa'))
fig.add_trace(go.Histogram(x=ideais['nomes'], y=ideais['numeros'], name='Valores ideais,

fig.update_layout(barmode='group', title=dict(text='Histograma dos valores gerados', fon
# Reduce opacity to see both histograms
fig.show()
```





Como podemos ver, os valores gerados ficaram em proporções bem próximas das ideais.

Questão 8:

Novamente gerando com o método da transformação inversa, utilizando o truque de gerar n variáveis $Ber(p)$ e depois somá-las para gerar variáveis $Binom(n,p)$.

Ou seja, geramos uma variável $U \sim Unif(0,1)$ tal que

$$x = \begin{cases} 0, \ se \ \ U > p \\ 1, \ se \ \ U < p \end{cases}$$

E repetimos o processo n vezes e somamos os resultados para gerar uma $Binom(n,p)$.

In [16]:
```
def binomial(n, p):
        binomiais = []
        while len(binomiais) < 1000:
                U = np.random.uniform(size = n)
                x = len([x for x in U if x < p])
                binomiais.append(x)
        return binomiais
```

In [17]:
```
x1 = binomial(5,0.3)
x2 = binomial(5,0.5)
x3 = binomial(5,0.8)
```

In [18]:
```
x1_freq = pd.Series(x1).value_counts() / len(x1)
x2_freq = pd.Series(x2).value_counts() / len(x2)
x3_freq = pd.Series(x3).value_counts() / len(x3)
```

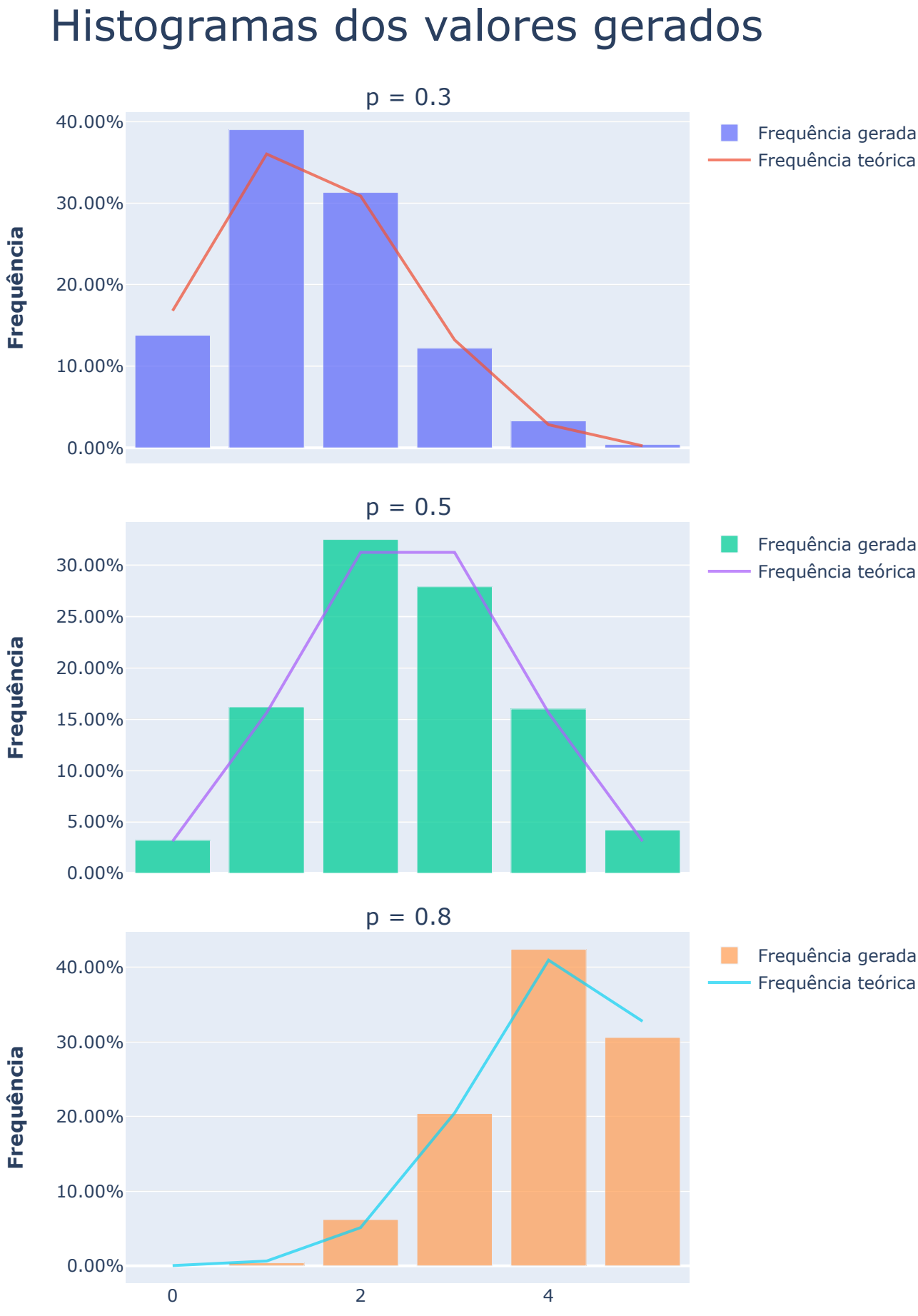
In [19]:
```
from scipy.stats import binom
x1_teorico = binom(5, 0.3)
x2_teorico = binom(5, 0.5)
x3_teorico = binom(5, 0.8)
```

In [20]:
```
x = [0,1,2,3,4,5]
fig = make_subplots(rows=3, cols=1, shared_xaxes=True,
                        subplot_titles=("p = 0.3","p = 0.5", "p = 0.8"), vertical_spacin
fig.add_trace(go.Bar(y=x1_freq, x=x1_freq.index, name='Frequência gerada', legendgroup=1
fig.add_trace(go.Scatter(x=x, y=x1_teorico.pmf(x), mode='lines', name='Frequência teóric

fig.add_trace(go.Bar(y=x2_freq, x=x2_freq.index, name='Frequência gerada', legendgroup=2
fig.add_trace(go.Scatter(x=x, y=x2_teorico.pmf(x), mode='lines', name='Frequência teóric

fig.add_trace(go.Bar(y=x3_freq, x=x3_freq.index, name='Frequência gerada', legendgroup=3
fig.add_trace(go.Scatter(x=x, y=x3_teorico.pmf(x), mode='lines', name='Frequência teóric
```

```
fig.update_layout(barmode='group', height=1000, legend_tracegroupgap=250, title=dict(tex
# Reduce opacity to see both histograms
fig.update_traces(opacity=0.75)
fig.update_yaxes(title_text="<b>Frequência</b>", tickformat=",.2%")
fig.show()
```



Como podemos ver, a frequência das variáveis geradas está bem próxima da frequência teórica para todos os valores de p fornecidos.