S T Q Q S S D 04 / 11 / 25

UNICAP - Ciência da Computação - 2º período
Disciplina: Elementos da integralização Computacional
Docente: Tulio Fidel
Discente: Guilherme Lacé

Lista II 11 - Probabilidade

(1) Uma variável aleatória contínua X tem função densidade dada por:

$$f(x)\begin{cases} 1/4, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

integral está entre 0 e 1

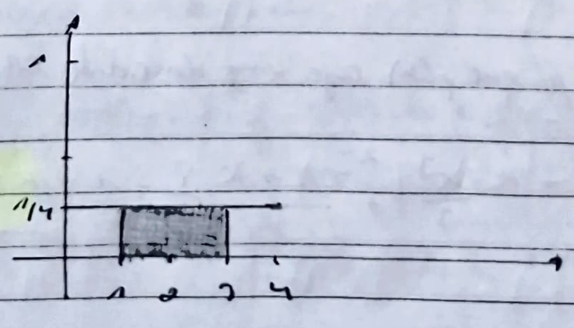
a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade válida.

$$\int_0^4 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_0^4 = \frac{4}{4} - \frac{0}{4} = \frac{4}{4} = \boxed{1}$$ ∴ é válida.

b) Calcule $P(1 \leq x \leq 3)$ utilizando integrais.

$$\int_1^3 \frac{1}{4}\,dx = \frac{1}{4}x\Big|_1^3 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

c) Represente graficamente a densidade e a área correspondente à probabilidade calculada.



(2) Uma variável aleatória X possui densidade exponencial:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda = 0,5$$

a) Calcule a probabilidade $P(X \leq 3)$

↳ $\int_0^3 0{,}5\, e^{-0{,}5x}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^3 e^{-x/2}\, dx = \frac{1}{2}\int_0^3 e^{u} \cdot -2\,du = -\int_0^3 e^{u}\, du = -e^{u}\Big|_0^3$

$u = -\frac{x}{2}$

$\frac{du}{dx} = -\frac{1}{2} \rightarrow -2\,du = dx$

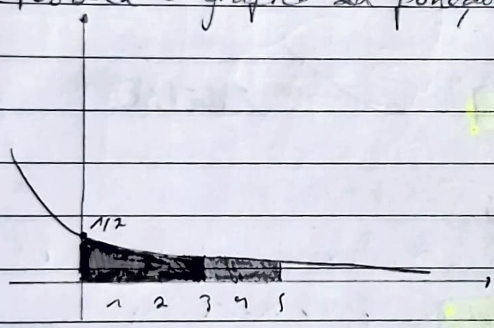
$= -e^{-x/2}\Big|_0^3 = -e^{-3/2} - (-e^{0}) = -e^{-3/2} + 1 = \boxed{1 - e^{-3/2}}$

b) Determine $P(2 < X \leq 5)$ por meio de integrais.

↳ $\int_2^5 0{,}5\, e^{-0{,}5x}\, dx = \frac{1}{2}\int_2^5 e^{-x/2}\, dx = -e^{-x/2}\Big|_2^5 = -e^{-5/2} - (-e^{-2/2})$

$= -e^{-5/2} + e^{-1} = \boxed{e^{-1} - e^{-5/2}}$

c) Esboce o gráfico da função densidade e destaque a região correspondente.



(3) Considere a variável aleatória X com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine o valor da constante k p/ que f(x) seja uma densidade válida.

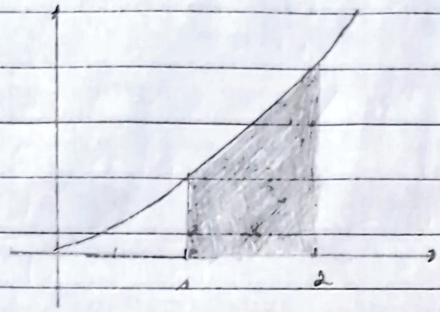
↳ $\int_0^2 kx^2\, dx = 1 \rightarrow k\int_0^2 x^2\, dx = 1 \rightarrow k \cdot \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 = 1 \rightarrow k \cdot \frac{8}{3} = 1 \rightarrow \boxed{k = \frac{3}{8}}$

$\boxed{0 \leq k \leq 3/8}$

b) Calcule $P(1 \leq X \leq 2)$.

↳ $\int_1^2 kx^2\, dx = \int_1^2 \frac{3}{8}x^2\, dx = \frac{3}{8}\int_1^2 x^2\, dx = \frac{\cancel{3}}{8} \cdot \frac{x^3}{\cancel{3}}\Big|_1^2 = \frac{x^3}{8}\Big|_1^2 = \frac{8}{8} - \frac{1}{8} = \boxed{\frac{7}{8}}$

c) interprete geometricamente o resultado obtido.



④ A função densidade de uma variável aleatória é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4-x), & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Verifique se é uma densidade válida

$$\hookrightarrow \int_0^4 \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8}\int_0^4 (4-x)\,dx = \frac{1}{8}\left(\int_0^4 4\,dx - \int_0^4 x\,dx\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(4x\Big|_0^4 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^4\right) = \frac{1}{8}\left[4\cdot4 - 4\cdot0 - \left(\frac{4^2}{2} - \frac{0^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{8}(16-8) = \frac{8}{8} = \boxed{1}$$

∴ é válida.

b) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(1 \leq X \leq 3)$.

$$\hookrightarrow P(X \leq 2): \int_0^2 \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8}\left(4x\Big|_0^2 - \frac{x^2}{2}\Big|_0^2\right) = \frac{1}{8}(8-2) = \frac{6}{8} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

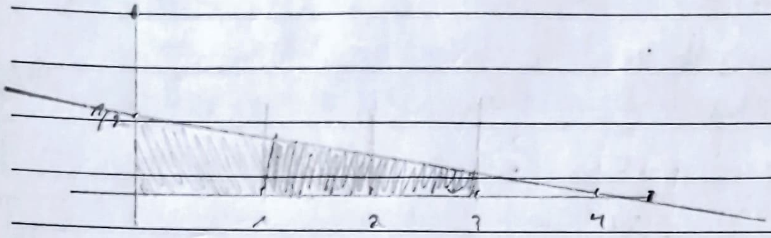
$$\hookrightarrow P(1 \leq X \leq 3): \int_1^3 \frac{1}{8}(4-x)\,dx = \frac{1}{8}\left(4x\Big|_1^3 - \frac{x^2}{2}\Big|_1^3\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left[4\cdot3 - 4\cdot1 - \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left[\cancel{12-4}\,8 - \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right)\right] = \frac{1}{8}\left(8 - \frac{8}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{8}\left(\frac{16-8}{2}\right) = \frac{1}{\cancel{8}}\cdot\frac{\cancel{8}}{2} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

S T Q Q S S D

c) Desenhe o gráfico da função e destaque as áreas correspondentes às probabilidades calculadas:

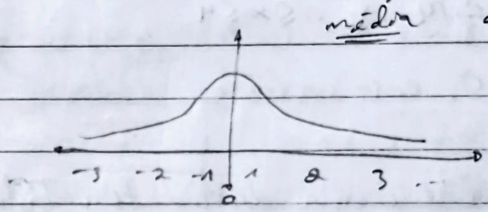


5) A variável aleatória X segue uma distribuição normal padrão $N(0,1)$.

média — desvio padrão

a) Escreva a expressão da função densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$$



↳ $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}, & x \in \mathbb{R} \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$

b) Calcule, utilizando a função de distribuição acumulada, as probabilidades: $P(-1 \leq X \leq 1)$ e $P(X \geq 2)$

↳ $P(-1 \leq X \leq 1)$: Para uma variável contínua, a probabilidade em um intervalo $[a, b]$ é:

$$\underbrace{\varphi(b) - \varphi(a)}_{\text{no caso da dist. normal padrão}} = \underbrace{F(b) - F(a)}_{\text{em qualquer variável aleatória contínua}}$$

$\therefore P(a \leq X \leq b) = \varphi(b) - \varphi(a) = \varphi(1) - \varphi(-1)$ — precisa usar a propriedade da simetria p/ valores negativos!!

* $\varphi(-a) = 1 - \varphi(a)$ $\therefore = \varphi(1) - (1 - \varphi(1)) = \varphi(1) - 1 + \varphi(1)$ $\boxed{= 2\varphi(1) - 1}$

↳ $\varphi(1) \cong 0{,}8413$ $\therefore P(-1 \leq X \leq 1) = 2 \cdot 0{,}8413 - 1 \cong \boxed{0{,}6826}$

S T Q Q S S D

___/___/___

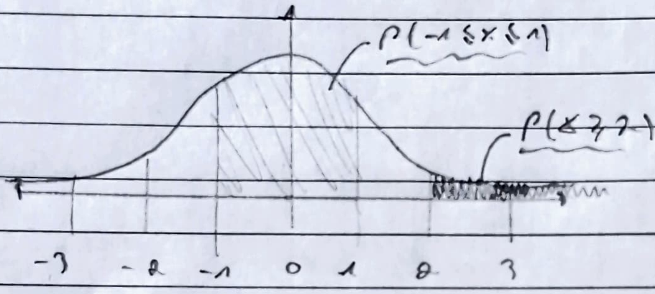
↳ $P(x \geq 2)$: $\varphi(2) = P(X \leq 2)$ ($P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$

∴ Usando a prop. complementar:

$P(x \geq 2) = 1 - \varphi(2) = 1 - 0,9772 = \boxed{0,0228}$

c) Explique o significado geométrico dessas integrais no contexto da área sob a curva.

↳ Na distribuição normal padrão temos a curva:



↳ P/ $P(-1 \leq X \leq 1)$, $\varphi(1)$ = área de $-\infty$ até 1, (aprox. 68,27% de probab. de X estar nessa área.

$\varphi(-1)$ = área de $-\infty$ até -1,

e $\varphi(1) - \varphi(-1)$ = área entre -1 e 1.

↳ P/ $P(X \geq 2)$, $1 - \varphi(2)$ = área de 2 até $+\infty$

↳ aprox. 2,28% de probabilidade de X estar nessa área.

⑥ Seja X uma variável contínua com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} Kx(2-x), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

a) Determine o valor de K:

$$\int_0^2 Kx(2-x)\,dx = 1 \to K\int_0^2 x(2-x)\,dx = 1 \to K\int_0^2 (2x - x^2)\,dx = 1$$

$$\hookrightarrow K\left(\int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2\,dx\right) = 1 \to K\left(x^2\Big|_0^2 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^2\right) = 1$$

$$\hookrightarrow K\left(4 - \frac{8}{3}\right) = 1 \to K\left(\frac{12-8}{3}\right) = 1 \to K \cdot \frac{4}{3} = 1 \to \boxed{K = \frac{3}{4}}$$

b) Calcule $P(0,5 \leq X \leq 1,5)$:

$$\hookrightarrow \int_{0,5}^{1,5} Kx(2-x)\,dx = \frac{3}{4}\int_{0,5}^{1,5} x(2-x)\,dx = \frac{3}{4}\int_{0,5}^{1,5} (2x - x^2)\,dx = \frac{3}{4}\left(\int_{0,5}^{1,5} 2x\,dx - \int_{0,5}^{1,5} x^2\,dx\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(x^2\Big|_{0,5}^{1,5} - \frac{x^3}{3}\Big|_{0,5}^{1,5}\right) = \frac{3}{4}\left(x^2\Big|_{1/2}^{3/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_{1/2}^{3/2}\right) =$$

→

__/__/__ S T Q Q S S D

$$\begin{array}{r} 48 \\ -26 \\ \hline 22 \end{array}$$

$$= \frac{3}{4}\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^3}{3} - \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^3}{3}\right]\right\} = \frac{3}{4}\left[\frac{9}{4} - \frac{1}{4} - \left(\frac{\frac{27}{8}}{3} - \frac{\frac{1}{8}}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{3}{4}\left[\frac{8}{4} - \left(\frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{8}\cdot\frac{1}{\cancel{3}} - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{3}{4}\left(\frac{8}{4} - \frac{9}{8} + \frac{1}{24}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{48-27+1}{24}\right) = \frac{\cancel{3}}{4}\cdot\frac{22}{\cancel{24}\,8} = \frac{22}{32} = \boxed{\frac{11}{16}}$$

c) Esboce o gráfico da densidade e destaque a área correspondente: