Lista de Exercícios práticos usando Integrais

Instruções: Cada problema descreve um cenário prático e pede o cálculo de probabilidades, esperanças ou constantes de normalização usando integrais. As integrais propostas devem ser resolvidas por *substituição*, por *integração por partes* ou por integração direta (simples). Indique o método usado em cada passo.

1. **Vida útil de lâmpadas LED.** Uma fábrica declara que o tempo de vida (em horas) de um lote de lâmpadas LED segue a densidade

$$f_T(t) = \frac{1}{100}e^{-t/100}, \qquad t > 0.$$

(a) Calcule a probabilidade de que uma lâmpada dure mais de 200 horas, $P(T > 200)$.
(b) Calcule a esperança $E[T]$. *Método: integrais simples e/ou substituição.*

2. **Tempo de espera em um caixa eletrônico.** O tempo (em minutos) que um cliente espera em um caixa eletrônico tem densidade

$$f_W(w) = 3w^2, \qquad 0 \le w \le 1,$$

zero fora desse intervalo. Em média o banco considera aceitável um tempo médio de 0.6 minuto. (a) Verifique que f_W é uma densidade válida determinando a constante (se necessário). (b) Calcule $P(W > 0.8)$ e $E[W]$. *Método: integrais por substituição e integrais diretas.*

3. **Tempo de recarga de bateria (distribuição com raiz).** Um modelo experimental para o tempo (horas) de recarga de uma bateria leve fornece a densidade

$$f_R(r) = \frac{1}{2\sqrt{r}}, \qquad 0 < r < 1,$$

zero fora. (a) Mostre que é uma função densidade. (b) Calcule $P(0.25 < R < 0.81)$ e $E[R]$. *Método: substituição (por exemplo $u = \sqrt{r}$) e integral simples.*

4. **Falhas de componentes (uso de integração por partes).** O tempo (em anos) até a falha de um componente eletrônico tem densidade

$$f_X(x) = e^{-x}, \qquad x > 0.$$

Calcule $E[X]$ e $E[X^2]$ explicitando o uso de integração por partes quando necessário. *Método: integração por partes (para integrais do tipo $\int xe^{-x}\,dx$ e $\int x^2e^{-x}\,dx$).*

5. **Distribuição conjunta de dois sensores.** Dois sensores em uma linha de produção fornecem tempos de resposta X e Y com densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = k(x+y), \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,$$

zero fora desse quadrado. (a) Determine k. (b) Calcule $P(X > 0.5,\ Y < 0.25)$. (c) Encontre a densidade marginal $f_X(x)$. *Método: integrais duplas simples (integração iterada).*

6. **Transformação linear (substituição).** O comprimento (em cm) de um lote de barras metálicas tem densidade

$$f_L(\ell) = \frac{3}{8}\ell^2, \qquad 0 \le \ell \le 2.$$

Se uma peça é cortada e produz-se a variável $Z = 2\ell + 1$, encontre a densidade de Z e calcule $P(3 < Z < 5)$. *Método: transformação por substituição (mudança de variável).*

7. **Probabilidade condicional com distribuição conjunta.** Em uma cafetaria, o tamanho da bebida (em litros) X e a quantidade de açúcar (colheres) Y têm densidade conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = 4xy, \qquad 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1.$$

(a) Verifique que é densidade conjunta. (b) Calcule a probabilidade condicional $P(Y > 0.5 \mid X = 0.6)$ (interprete como densidade condicional) e $P(Y > 0.5 \mid X > 0.5)$. *Método: integração iterada e normalização simples.*

8. **Tempo até atendimento com distribuição triangular.** Em uma clínica pequena, a distribuição do tempo de atendimento (em horas) é triangular crescente até 2 horas:

$$f_T(t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2}, & 0 \le t \le 2, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

(a) Verifique que é densidade. (b) Calcule $P(1 < t < 1.5)$ e $E[T]$. *Método: integrais diretas e substituição simples quando conveniente.*