

Lista de Exercícios — Probabilidade e Integrais

Instruções

Responda todas as questões, mostrando os cálculos das integrais e interpretando o significado da área sob a curva em cada caso. Utilize gráficos quando possível.

Exercícios

Exercício 1. Uma variável aleatória contínua X tem função densidade dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Verifique se $f(x)$ é uma função densidade válida.
- (b) Calcule $P(1 \leq X \leq 3)$ utilizando integrais.
- (c) Represente graficamente a densidade e a área correspondente à probabilidade calculada.

Exercício 2. Uma variável aleatória X possui densidade exponencial:

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}, \quad x \geq 0, \quad \lambda = 0.5$$

- (a) Calcule a probabilidade $P(X \leq 3)$.
- (b) Determine $P(2 \leq X \leq 5)$ por meio de integrais.
- (c) Esboce o gráfico da função densidade e destaque a região correspondente.

Exercício 3. Considere a variável aleatória X com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} kx^2, & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor da constante k para que $f(x)$ seja uma densidade válida.
- (b) Calcule $P(1 \leq X \leq 2)$.
- (c) Interprete geometricamente o resultado obtido.

Exercício 4. A função densidade de uma variável aleatória é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(4 - x), & 0 \leq x \leq 4 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Verifique se $f(x)$ é uma densidade válida.

- (b) Calcule $P(X \leq 2)$ e $P(1 \leq X \leq 3)$.
- (c) Desenhe o gráfico da função e destaque as áreas correspondentes às probabilidades calculadas.

Exercício 5. A variável aleatória X segue uma distribuição normal padrão $N(0, 1)$.

- (a) Escreva a expressão da função densidade:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- (b) Calcule, utilizando a função de distribuição acumulada, as probabilidades:

$$P(-1 \leq X \leq 1), \quad P(X \geq 2)$$

- (c) Explique o significado geométrico dessas integrais no contexto da área sob a curva.

Exercício 6. (Desafio) Seja X uma variável contínua com densidade:

$$f(x) = \begin{cases} kx(2-x), & 0 \leq x \leq 2 \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Determine o valor de k .
- (b) Calcule $P(0.5 \leq X \leq 1.5)$.
- (c) Esboce o gráfico da densidade e destaque a área correspondente.

Boa resolução!