S T Q Q S S D

21/10/25

UNICAP - Ciência da Computação - 2º período

Disciplina: Elementos da Integralização Computacional

Docente: Túlio Fidel

Discente: Guilherme Lorré

Lista II 9 - Cálculo do Volume

① Calcule o volume do sólido gerado pela revolução da região sob a função $y = f(x) = x^3$, no intervalo $[1, 2]$.

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx$$ volume da revolução no eixo X.

$$\hookrightarrow V = \pi \int_1^2 (x^3)^2 dx = \pi \int_1^2 x^6 dx = \pi \frac{x^7}{7}\Big|_1^2$$

$$= \frac{\pi \cdot 2^7}{7} - \frac{\pi \cdot 1^7}{7} = \frac{128}{7}\pi - \frac{1}{7}\pi = \boxed{\frac{127\pi}{7} \text{ u.v.}}$$

② Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo X, delimitada pela curva abaixo pelo eixo x e pelas retas $x=0$ e $x=2$.

$\hookrightarrow y = \frac{1}{2}x^2 + 1$; $x=0$; $x=2$; $[0, 2]$:

$$\hookrightarrow V = \pi \int_0^2 \underbrace{\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2} dx = \pi \int_0^2 \left(\frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1\right) dx = \pi \left(\int_0^2 \frac{1}{4}x^4 dx + \int_0^2 x^2 dx + \int_0^2 dx\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}x^2+1\right)^2 = \frac{1}{4}x^4 + \cancel{\frac{2}{2}}x^2 + 1 = \frac{1}{4}x^4 + x^2 + 1$$

$$= \pi \left(\frac{1}{4}\int_0^2 x^4 dx + \frac{x^3}{3}\Big|_0^2 + x\Big|_0^2\right) = \pi \left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2 = \pi \left(\frac{x^5}{20} + \frac{x^3}{3} + x\right)\Big|_0^2$$

$$= \pi \left(\frac{2^5}{20} + \frac{2^3}{3} + 2\right) - \cancel{\pi \left(\frac{0^5}{20} + \frac{0^3}{3} + 0\right)}^{0} = \pi \left(\frac{32}{20} + \frac{8}{3} + 2\right) = \pi \left(\frac{8}{5} + \frac{8}{3} + 2\right)$$

$$= \pi \left(\frac{24+40+30}{15}\right) = \pi \cdot \frac{94}{15} = \boxed{\frac{94\pi}{15} \text{ u.v.}}$$

③ Calcule o volume gerado pela parábola $y = x^2$ girando ao torno de y, no intervalo $[0, 4]$. de ⓨ!!

$\hookrightarrow$ O método das cascas já é p/ rotações no y:

$$V = \int_{a}^{b} 2\pi x f(x) dx$$ $a = \sqrt{4} = 2$; $b = 0$ ⓧ!

$$\hookrightarrow V = \int_0^2 2\pi x \cdot x^2 dx = \int_0^2 2\pi x^3 dx = 2\pi \int_0^2 x^3 dx$$

$$= \cancel{2}\pi \frac{x^4}{\cancel{4}2}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2} x^4\Big|_0^2 = \frac{\pi}{2}\cdot 2^4 - \cancel{\frac{\pi}{2}\cdot 0^4} = 8\pi \text{ u.v.}$$

→

___/___/___ S T Q Q S S D

④ Determinar o volume gerado pela revolução em torno do eixo x da região delimitada por $y=x^2$, $x=2$ e o eixo (y?).

↳ $y=x^2$; $x=2$; $[0,2]$

↳ $V=\pi\int_0^2 (x^2)^2dx = \pi\int_0^2 x^4dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{\pi}{5}\cdot 2^5 - \cancel{\frac{\pi}{5}\cdot 0^5} = \boxed{\frac{32}{5}\pi \text{ u.v.}}$

⑤ Determinar o volume gerado pela revolução em torno do eixo x da região limitada por $y^2=2x$ e $x=2$. $[0,2]$

↳ $y^2=2x \to y=\pm\sqrt{2x} \to y=\sqrt{2x}$ (p/ região delimitada)

↳ $V=\pi\int_0^2(\sqrt{2x})^2dx = \pi\int_0^2 2x\,dx = 2\pi\int_0^2 x\,dx = \cancel{2}\pi\cdot\frac{x^2}{\cancel{2}}\Big|_0^2 = \pi x^2\Big|_0^2$

$= \pi\cdot 2^2 - \cancel{\pi\cdot 0^2} = 4\pi \text{ u.v.}$

⑥ Determinar o volume gerado pela revolução em torno do eixo x da área delimitada pelas curvas $y^2=2x$ e $y=x$. $[0,2]$

↳ $y=\sqrt{2x}$ e $y=x$ ↳ $V=\pi\int_0^2[(\sqrt{2x})^2-x^2]dx = \pi\int_0^2(2x-x^2)dx$

acima!

$=\pi\left(\int_0^2 2x\,dx - \int_0^2 x^2dx\right) = \pi\left(\cancel{2}\frac{x^2}{\cancel{2}}-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(x^2-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_0^2 = \pi\left(2^2-\frac{2^3}{3}\right) - \cancel{\pi\left(0^2-\frac{0^3}{3}\right)}$

$=\pi\left(4-\frac{8}{3}\right) = \pi\cdot\frac{12-8}{3} = \boxed{\frac{4}{3}\pi \text{ u.v.}}$

⑦ Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y=x^2$, pelo eixo x e pelas retas $x=0$ e $x=2$.

↳ $y=x^2$; $[0,2]$

↳ $V=\pi\int_0^2(x^2)^2dx = \pi\int_0^2 x^4dx = \pi\frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \pi\cdot\frac{2^5}{5} - \cancel{\frac{\pi\cdot 0^5}{5}} = \frac{32}{5}\pi \text{ u.v}$

⑧ Determine o volume do sólido de revolução, gerado pela rotação da região R em torno do eixo x, delimitada pela curva $y=\operatorname{sen}x$, pelo eixo x e pela reta $x=\pi/3$

↳ $y=\operatorname{sen}x$; $[0,\pi/3] \to V=\pi\int_0^{\pi/3}\operatorname{sen}^2x\,dx = \pi\int_0^{\pi/3}\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\,dx$

$=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi/3}(1-\cos 2x)\,dx = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\pi/3}dx - \int_0^{\pi/3}\cos 2x\,dx\right) = \frac{\pi}{2}\left(x-\int_0\cos u\frac{du}{2}\right)$

$u=2x$

$\frac{du}{dx}=2$

$\frac{du}{2}=dx$

→

spiral

S T Q Q S S D

__/__/__

	30	45	60
sen	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$
cos	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$
tan	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$

$$= \frac{\pi}{2}\left(x - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,2x\right)\Big|_0^{\pi/3} = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,\frac{2\pi}{3}\right) - \frac{\pi}{2}\left(0 - \cancel{\frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,0}^{\,0}\right)^{0}$$

sen $60° = \sqrt{3}/2$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\sqrt{3}}{4}\right) = \boxed{\frac{\pi^2}{6} - \frac{\sqrt{3}}{8}\pi \text{ u.v.}}$$