Cálculo III

Integral de Linha de Campo Vetorial
Teorema de Green
Campos conservativos

1. Calcule $\int_C x\,dx + x^2\,dy$ de $(-1,0)$ a $(1,0)$ ao longo
   (a) do eixo x
   (b) de $C:\ \vec{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t), \quad 0 \leq t \leq \pi$
   (c) da poligonal de vértices: $(-1,0)$, $(0,1)$, $(1,1)$ e $(1,0)$

2. Calcule $\oint_C -y\,dx + x\,dy$, ao longo dos seguintes caminhos fechados, orientados no sentido anti-horário.
   (a) circunferência de centro na origem e raio 2
   (b) elipse $x^2 + 36y^2 = 36$
   (c) triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$.

3. Calcule $\int_C (3x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy$ de $(0,0)$ a $(1,1)$, ao longo
   (a) do segmento de reta
   (b) do arco de parábola $y = x^2$
   (c) do arco de circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientado no sentido anti-horário.

4. Calcule $\int_C 3xz\,dx + 4yz\,dy + 2xy\,dz$, do ponto $A = (0,0,0)$ ao ponto $B = (1,1,2)$, ao longo dos seguintes caminhos:
   (a) segmento de reta AB
   (b) interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x = y$.

5. Calcule $\int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz$, onde
   (a) $\vec{F} = (P,Q,R) = (y,z,x)$ e C é a interseção das superfícies $x + y = 2$ e $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$, percorrida no sentido anti-horário quando vista da origem.
   (b) $\vec{F} = (P,Q,R) = (-2y,z,x)$ e C é a interseção das superfícies $4x^2 + y^2 = 1$ e $y^2 + z^2 = 1$, com $x \geq 0$ e $z \geq 0$, percorrida uma vez do ponto $(0,-1,0)$ ao ponto $(0,1,0)$.
   (c) $\vec{F} = (P,Q,R) = (z,x,y)$ e C é a interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $4x + 2y + z = 1$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez no sentido horário.

6. Seja C a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 4$ com o semiplano $y + z = 0$, $y \geq 0$, percorrida de modo que sua projeção no plano xy tenha sentido anti-horário e seja $\vec{F}(x,y,z) = x^4\,\vec{i} + y^4\,\vec{j} + z^4\,\vec{k}$. Calcule a integral $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

7. O campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = (x-2, y-2, z-4x-4)$ atua sobre uma partícula transladando-a ao longo da curva interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $z = 4x + 4y - 4$, orientada de modo que sua projeção no plano xy seja percorrida uma vez, no sentido horário. Calcule o trabalho realizado por $\vec{F}$.

8. Calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F} = (x,y,z)$ para deslocar uma partícula ao longo da curva interseção das superfícies $x + z = 5$ e $z = 4 - y^2$, orientada do ponto $(5,-2,0)$ a $(5,2,0)$.

9. Achar o trabalho de uma força variável, dirigida para a origem das coordenadas, cuja grandeza é proporcional ao afastamento do ponto em relação à origem das coordenadas, se o ponto de aplicação desta força descreve, no sentido anti-horário, a parte da elipse $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$ no primeiro quadrante.

10. Um campo de forças bidimensional $\vec{F}$ define-se por $\vec{F}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$.

    (a) Prove que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t) = f(t)\,\vec{i} + g(t)\vec{j},\ a \le t \le b,$ depende unicamente de $f(a),\ f(b),\ g(a)$ e $g(b)$.

    (b) Determine o trabalho realizado quando $f(a) = 1,\ f(b) = 2,\ g(a) = 3$ e $g(b) = 4$.

11. Uma partícula de peso w desce de $(0,4)$ a $(2,0)$ ao longo da parábola $y = 4 - x^2$. Agem sobre a partícula a força da gravidade e também uma força horizontal dirigida para a direita, de módulo igual à coordenada y do ponto. Determine o trabalho realizado por essas duas forças.

12. Seja $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável e $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma primitiva de g, tal que $h(1) = 2$, $h(2) = 4$. Calcule $\int_C x\, g\left(x^2+y^2+z^2\right)\, dx + y\, g\left(x^2+y^2+z^2\right)\, dy + z\, g\left(x^2+y^2+z^2\right)\, dz$, onde C está situada no primeiro octante, e é a interseção das superfícies $x^2+y^2 = 1$ e $y = z$, percorrida no sentido anti-horário quando vista de cima.

13. Verifique o Teorema de Green, calculando as duas integrais do enunciado, para $\vec{F}(x,y) = (4x-2y, 2x+6y)$, onde D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

14. Se D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e exterior à circunferência $x^2+y^2 = 4$, calcule a integral de linha $I = \displaystyle\int_C \left(2xy + e^{x^2}\right) dx + \left(x^2 + 2x + \cos\left(y^2\right)\right) dy$, onde $C = \partial D$ está orientada positivamente.

15. Calcule as integrais de linha <u>diretamente</u> e também pelo <u>Teorema de Green</u>:

    (a) $\int_C (3x-y)\, dx + (x+5y)\, dy$, onde C é a circunferência unitária $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, com $0 \le t \le 2\pi$.

    (b) $\int_C \left(xy - y^2\right) dx + (xy)\, dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$ e $y = x$, orientado positivamente.

16. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\oint_C \left(2y + \sqrt[3]{1+x^5}\right) dx + \left(5x - e^{y^2}\right) dy$, onde C é a circunferência $x^2+y^2 = 4$.

    (b) $\displaystyle\oint_C \frac{-xy}{1+x}\, dx + \ln(1+x)\, dy$, onde C é formada por $y = 0$, $x + 2y = 4$ e $x = 0$.

    (c) $\displaystyle\oint_C \frac{y^2}{2}\, dx + 2xy\, dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $y = x$, $y = -x$ e $x^2+y^2 = 4$, com $y \ge 0$.

    (d) $\displaystyle\oint_C x^{-1} e^y\, dx + (2x + e^y \ln x)\, dy$, onde C é a fronteira da região limitada por $x = y^4 + 1$ e $x = 2$.

    (e) $\displaystyle\oint_C (y - x + \arctan x)\, dx + \left(2x - y + \sqrt{1+y^2}\right) dy$, onde C é a fronteira da região limitada pelas curvas $y = x + 2$ e $y = x^2$.

    (f) $\displaystyle\oint_C \left(xy - \frac{y^3}{3}\right) dx + \left(x + \frac{x^3}{3} + y\right) dy$, onde C é a fronteira da região D entre as circunferências $x^2+y^2 = 1$ e $x^2+y^2 = 9$, orientada positivamente.

17. Calcule as seguintes integrais:

    (a) $\displaystyle\int_C \left(e^{x^3} + y^2\right) dx + \left(x + y^5\right) dy$, onde C é formada por $y = x$ e $y = 0$, $0 \le x \le 1$, que vai do ponto $(1,1)$ ao ponto $(1,0)$.

    (b) $\displaystyle\int_C (1 + 2x\cos y)\, dx + \left(7xy - x^2 \operatorname{sen} y\right) dy$, onde C é a curva $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$, percorrida de $A = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ a $B = \left(\frac{-\pi}{2}, 0\right)$.

(c) $\displaystyle\int_C \left(2x\ln\left(y+x^2\right)-3y\right)dx + \left(\ln\left(y+x^2\right)-2x\right)dy$, onde C é a poligonal aberta que une os pontos $(2,0)$, $(2,2)$ e $(1,0)$, nesta ordem.

(d) $\displaystyle\int_C \left(e^x\ln y-2y\right)dx + \left(y^{-1}e^x\right)dy$, onde C é o arco de parábola $y = x^2+1$, orientado de $(-1,2)$ a $(1,2)$.

18. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y) = \left(2xe^y - x^2y - \frac{y^3}{3}, x^2e^y + \operatorname{sen} y\right)$, ao mover uma partícula ao longo da trajetória C dada por $\vec{r}(t) = (1+\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$.

19. Considere o campo vetorial dado por $\vec{F}(x,y) = \nabla f(x,y) - (y,-x)$, onde $f(x,y) = x^2e^{xy}\cos\left(y^2\right)$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a elipse $4x^2+9y^2=36$, percorrida no sentido anti-horário.

20. Seja $\varphi:\ \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2\varphi = -3x$. Considere o campo $\vec{F} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}, -\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)$. Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde C é a curva formada por $y = x^3$ e $y = x$.

21. Seja $\vec{F} = (P,Q)$ um campo vetorial de classe $\mathcal{C}^1$, em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial P}{\partial y}(x,y) + 4$, para todo $(x,y)\in U$. Sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 6\pi$, onde $C_1:\ x^2+y^2=1$, calcule $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $C_2:\ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{25}=1$.

22. Considere um campo $\vec{F}$ definido em $U = \mathbb{R}^2 - \{(-2,0),\ (2,0)\}$ tal que $\nabla\times\vec{F}(x,y) = \vec{0}$ em $(x,y)\in U$. Suponha que $\displaystyle\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 6$, $C_1:\ (x+2)^2+y^2=1$ e $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = 9$, $C_2:\ (x-2)^2+y^2=1$.

Calcule $\displaystyle\oint_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C:\ x^2+y^2=16$.

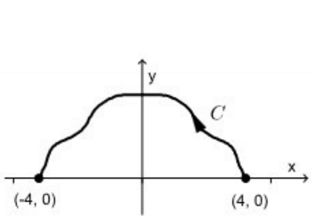
23. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{-y}{x^2+y^2-2x+1}, \frac{x-1}{x^2+y^2-2x+1} + x\right)$ e C é a curva fechada formada pelas curvas $x+y+2=0$, $x-y+2=0$ e $x+y^2=4$, $-2\leq y\leq 2$, percorrida no sentido anti-horário.

24. Calcule $\displaystyle\int_C \left(xy - \frac{y}{x^2+y^2}\right)dx + \left(2x + \frac{x}{x^2+y^2}\right)dy$, onde C é a curva $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$, $y\geq 0$, orientada de $(4,0)$ a $(-4,0)$.

25. Seja $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} - y, \frac{-x}{x^2+(y-1)^2}\right)$, $(x,y)\neq(0,1)$. Calcule a integral de linha do campo $\vec{F}$ ao longo de C_1 e C_2, orientadas no sentido anti-horário, onde

(a) $C_1:\ x^2+(y-1)^2=1$; (b) $C_2:\ x^2+y^2=16$.

26. Seja C uma curva simétrica em relação ao eixo y, que vai de $(4,0)$ a $(-4,0)$, como mostrada na figura ao lado. Sabendo-se que a área da região delimitada por C e o eixo x vale 16, calcule o trabalho realizado pela força $\vec{F}(x,y) = \left(\frac{x^2}{4} + xy^3\right)\ \vec{i} + (2x + \arctan y)\ \vec{j}$.



27. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (1+2x\cos y)\ \vec{i} + \left(7xy - x^2\operatorname{sen} y\right)\vec{j}$ e C é a curva $y = \cos x$, $-\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2}$, percorrida de $A = \left(\frac{\pi}{2},0\right)$ a $B = \left(-\frac{\pi}{2},0\right)$.

28. Seja $\vec{F} = (P,Q)$ de classe C^1 em $U = \mathbb{R}^2 - \{(0,2),\ (0,-2)\}$, tal que $\frac{\partial Q}{\partial x} = x + 2 + \frac{\partial P}{\partial y}$. Sejam $C_1:\ x^2+y^2=16$, $C_2:\ x^2+(y-2)^2=4$ e $C_3:\ x^2+(y+2)^2=4$. Calcule $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$, sabendo que $\displaystyle\oint_{C_1}\vec{F}\cdot d\vec{r} - 10\pi = \oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ e $\displaystyle\oint_{C_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \oint_{C_3}\vec{F}\cdot d\vec{r} - 8\pi$.

29. Calcule $\int_C \left(2xy^3 - y^2\cos x\right)dx + \left(1 - 2y\,\mathrm{sen}\,x + 3x^2y^2\right)dy$, onde C é o arco da parábola $2x = \pi y^2$ de $P_1 = (0,0)$ a $P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$.

30. Seja $\vec{F} = (P,Q) = \left(\cos\left(x^2\right) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}, x^3y^2 + \ln(2-x)\right)$.

    (a) $\vec{F}$ é conservativo? Por quê?

    (b) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C:\ \ \vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}\,t\right)$, $0 \le t \le 2\pi$.

    (c) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, $C:\ \ (x-1)^2 + y^2 = 1$, $x \le 1$, orientada no sentido anti-horário.

31. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F} = (P,Q) = \left(\cos\left(xy^2\right) - xy^2\,\mathrm{sen}\,\left(xy^2\right), -2x^2y\,\mathrm{sen}\,\left(xy^2\right)\right)$ e C é dada por

    (a) $C:\ \ \vec{r}(t) = (1 + \cos t, \mathrm{sen}\,t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

    (b) $C:\ \ \vec{r}(t) = \left(t + (t-1)\ln\left(1+t^2\right), -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right)$, $0 \le t \le 1$.

32. Seja C qualquer curva unindo qualquer ponto na circunferência $x^2 + y^2 = a^2$ a qualquer ponto na circunferência $x^2 + y^2 = b^2$, $b > a > 0$. Seja $\vec{F}(x,y) = 3\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{2}}(x,y)$. Mostre que $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$ tem sempre o valor $b^3 - a^3$.

33. Verifique que a seguinte integral independe do caminho e calcule o seu valor: $I = \displaystyle\int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y}dx - \frac{x^3}{y^2}dy$.

34. Encontre todos os valores possíveis de $I = \displaystyle\int_C \frac{(x+y)\ dx + (y-x)\ dy}{x^2+y^2}$, onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

35. Considere a curva C parametrizada por $r(t) = \left(\mathrm{sen}\,\frac{\pi}{t}, e^{t-1}\right)$, com $1 \le t \le 2$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(-y^2\,\mathrm{sen}\,x, 2y\cos x\right)$.

36. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = \left(y^3+1\right)\ \vec{i} + \left(3xy^2+1\right)\vec{j}$ e C é a semicircunferência $(x-1)^2+y^2 = 1$, com $y \ge 0$, orientada de $(0,0)$ a $(2,0)$.

37. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (\,\mathrm{sen}\,y - y\,\mathrm{sen}\,x)\ \vec{i} + (x\cos y + \cos x)\,\vec{j}$ e C é a curva parametrizada por $r(t) = \left(\frac{t^2-1}{1+t^2}, \frac{2t^2}{1+t^3}\right)$, com $0 \le t \le 1$.

38. Verifique que a integral $\displaystyle\int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x\ln y - \frac{e^y}{x}\right)dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y\ln x\right)dy$ independe do caminho e calcule o seu valor.

Cálculo III

Respostas

1. (a) 0
   (b) 0
   (c) $-\frac{2}{3}$
2. (a) 8π
   (b) 12π
   (c) 1
3. (a) $\frac{7}{2}$
   (b) $\frac{11}{3}$
   (c) $\frac{\pi}{4}+3$
4. (a) 6
   (b) $\frac{11}{2}$
5. (a) $-2\sqrt{2}\pi$
   (b) π
   (c) -42π
6. $\frac{64}{5}$
7. 64π
8. 0
9. $-6k$
10. 3
11. $\frac{16}{3}+4w$
12. 1
13. 8π
14. 22π
15. (a) 2π
    (b) $\frac{1}{6}$
16. (a) 12π
    (b) 4
    (c) $\frac{8\sqrt{2}}{3}$
    (d) $\frac{16}{5}$
    (e) $\frac{9}{2}$
    (f) 48π
17. (a) -1
    (b) $\frac{3\pi}{4}$
    (c) $\frac{7}{2}-8\ln 2$
    (d) $\left(e-e^{-1}\right)\ln 2-\frac{16}{3}$
18. $\frac{3\pi}{4}-4$
19. 12π
20. $\frac{2}{5}$
21. 42π
22. 15
23. $\frac{44}{3}+2\pi$
24. 9π
25. (a) $-\pi$
    (b) 14π
26. $\frac{64}{3}$
27. $\frac{3\pi}{4}$
28. 2π
29. $\frac{\pi^2}{4}$
30. (a) é conservativo
    (b) 0
    (c) $-\frac{2}{3}$
31. (a) 0
    (b) 1
33. $\frac{1}{3}$
34. $2\pi, \quad 0, \quad -2\pi$
35. $e^2\cos 1-1$
36. 2
37. 1
38. 0