*Cálculo III*

Teorema de Gauss
Teorema de Stokes

---

1. Verifique o Teorema de Gauss, calculando as duas integrais do enunciado para
   (a) $\vec{F}(x,y,z)=(x,y,z)$ e o sólido $W$ limitado pelas superfícies $z=x^2+y^2$ e $z=4$.
   (b) $\vec{F}(x,y,z)=(z+1)\,\vec{k}$ e o sólido $W$ limitado pelas superfícies $z=1-x^2-y^2$ e $z=0$.

2. Seja $\vec{F}(x,y,z)=6x\,\vec{i}-2y\,\vec{j}+5z\,\vec{k}$. Seja $S$ a superfície da esfera com centro $(1,0,1)$ e raio $5$. Ache o fluxo de $\vec{F}$, de dentro para fora de $S$.

3. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=(x+y)\,\vec{i}+(y+z)\,\vec{j}+z^2\,\vec{k}$, $S$ é a fronteira do cilindro $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2\leq 1,\ 0\leq z\leq 1\right\}$ e $\vec{n}$ orientada para fora de $W$.

4. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=x^3\,\vec{i}+y^3\,\vec{j}+z^3\,\vec{k}$, $S$ é a superfície esférica $x^2+y^2+z^2=1$ e $\vec{n}$ a orientação normal exterior a $S$.

5. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=(x+\cos x, y+y\,\mathrm{sen}\,x, 2z)$, através do tetraedro limitado pelos planos coordenados e pelo plano $x+y+z=1$, onde $\vec{n}$ é a normal unitária exterior a $S$.

6. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=-y\,\vec{i}+x\,\vec{j}+4z^2\,\vec{k}$, através da superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2+y^2=1$ e pelos planos $z=0$ e $z+y=2$, com a normal $S$ apontando para fora do sólido.

7. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(xy^2+e^y\right)\,\vec{i}+\left(yz^2+\mathrm{sen}^2 x\right)\,\vec{j}+\left(5+zx^2\right)\,\vec{k}$, através da superfície aberta $S:\ z=\sqrt{4-x^2-y^2},\ z\geq 0$, com $\vec{n}$ tendo componente $z$ positiva.

8. Seja $\vec{F}(x,y,z)=z\arctan\left(y^2\right)\,\vec{i}+z^3\ln\left(x^2+1\right)\,\vec{j}+z\,\vec{k}$. Determine o fluxo de $\vec{F}$ através da parte do paraboloide $x^2+y^2+z=2$ que está acima do plano $z=1$, sendo $\vec{n}$ a normal com componente $z$ não negativa.

9. Calcule $\iint_S \vec{F}\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=x\,\vec{i}+(-2y+e^x\cos z)\,\vec{j}+\left(z+x^2\right)\,\vec{k}$ e $S$ é definida por $\left\{z=9-x^2-y^2,\ 0\leq z\leq 5\right\}$, $\left\{z=5,\ 1\leq x^2+y^2\leq 4\right\}$ e $\left\{z=8-3\left(x^2+y^2\right),\ x^2+y^2\leq 1\right\}$.

10. Calcule o fluxo do campo $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{x^3}{3}+y,\frac{y^3}{3},\frac{z^3}{3}+2\right)$, através da superfície $S$ do sólido $W$ definido por $W=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2\geq 1,\ x^2+y^2+(z-2)^2\leq 4,\ z\geq\sqrt{x^2+y^2}\right\}$, com campo de vetores normais a $S$ apontando para fora de $W$.

11. Seja $T$ o tetraedro de vértices $O=(0,0,0)$, $A=(2,0,0)$, $B=(0,6,0)$, $C=(0,0,2)$. Sejam $S$ a superfície lateral de $T$, constituída pelas faces de $T$ que não estão no plano $xy$ e $\vec{F}(x,y,z)=(3y+z,x+4z,2y+x)$ um campo vetorial de $\mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S(rot\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$, com a normal exterior a $S$.

12. Seja a superfície cônica $S$ de vértice $(0,0,h)$, $(h>0)$, de base situada no plano $xy$ com raio $1$ e $\vec{n}$ com componente $\vec{k}$ não negativa. Seja $\vec{F}(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\,\vec{i}-\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\,\vec{j}+2(z+1)\,\vec{k}$, sendo $f(x,y,z)$ de classe $\mathcal{C}^2$ em $\mathbb{R}^3$. Calcule o fluxo de $\vec{F}$ através de $S$.

13. Seja $f:\ \mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2 f=x^2+y^2+z^2$. Calcule $\iint_S\nabla f\cdot\vec{n}\,dS$ onde $S$ é a esfera $x^2+y^2+z^2=1$, com $\vec{n}$ exterior a $S$.

14. Seja $S$ a calota esférica dada pela equação $x^2+y^2+z^2=4$, onde $0\leq z\leq 2$. Sobre $S$ fixe a orientação $\vec{n}$, tal que $\vec{n}(0,0,2)=\vec{k}$. Calcule $\iint_S(rot\vec{F})\cdot\vec{n}\,dS$, onde $\vec{F}(x,y,z)=\left(\frac{-y^3}{3}+ze^x,\frac{x^3}{3}-\cos(yz),xy\right)$.

15. Considere o campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = (2x + e^z)\,\vec{i} + (3y - ze^x)\,\vec{j} + (z-2)\,\vec{k}$, seja $S$ a calota esférica $x^2+y^2+z^2 = a^2$, com $z \geq 0$ e raio $a > 0$. Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ na direção da normal exterior $\vec{n}$ é igual a $2\pi a^3$, calcule o raio da calota.

16. Calcule $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n}\; dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = \left(x^2y + 2\right)\vec{i} + \left(x^3 + y^4\right)\vec{j} + (2yz - 1)\,\vec{k}$ e $S$ a parte da esfera $x^2+y^2+z^2-4z = 0$, com $z \leq 1$, orientada com $\vec{n}$ exterior.

17. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. Seja $W$ um sólido e seja $S$ a fronteira de $W$, com normal exterior $\vec{n}$. Prove que $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\; dS = \iiint_W \nabla^2 f\; dxdydz$, onde $\frac{\partial f}{\partial \vec{n}}$ é a derivada direcional de $f$ na direção do vetor unitário $\vec{n}$.

18. Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, tal que $\nabla^2 f = x^2 + y^2$ e $\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,1) = \frac{1}{3}$, para todo $(x,y,1) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\iint_S \frac{\partial f}{\partial \vec{n}}\, dS$, onde $S$ é a lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2 = 1$, $0 \leq z \leq 1$, $z = 0$, $x^2+y^2 \leq 1$, com normal $\vec{n}$ apontando para fora de $S$.

19. Considere o campo vetorial $\vec{F} = (x + f(y,z))\,\vec{i} + (x - y + z)\,\vec{j} + \left(z^4 - 3a^2\right)\vec{k}$, onde $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$. Seja $S$ uma lata cilíndrica com fundo e sem tampa dada por $x^2+y^2 = a^2$, $0 \leq z \leq \sqrt{a}$, $a > 0$ e $x^2 + y^2 \leq a^2$, $z = 0$. Sabendo que o fluxo de $\vec{F}$ através de $S$, de dentro para fora é igual a $\pi a^3$, calcule o valor de $a$.

20. Encontre o fluxo do campo $\vec{F} = (e^y + \cos(yz))\,\vec{i} + (-2zy + \operatorname{sen}(xz))\,\vec{j} + \left(z^2 + \frac{3}{\sqrt{2}}\right)\vec{k}$ através da superfície $S$, orientada positivamente, $S = S_1 \cup S_2$, onde $S_1 :\ z = 4 - 2x^2 - y^2$, $0 \leq z \leq 2$ e $S_2 :\ z = 1 + x^2 + \frac{y^2}{2}$, $1 \leq z \leq 2$.

21. Calcule $\iint_S (rot\vec{F}) \cdot \vec{n}\; dS$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = x\;\vec{j} + xy\;\vec{k}$, através de $S :\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, $z \leq 1$, orientada de forma que o vetor normal no ponto $(0,0,-2)$ seja o vetor $-\vec{k}$.

22. Verifique o teorema de Stokes, calculando as duas integrais do enunciado para
    (a) $\vec{F}(x,y,z) = (y,-x,0)$, $S$ o paraboloide $z = x^2+y^2$, $0 \leq z \leq 1$ e $\vec{n}$ apontando para fora de $S$.
    (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\;\vec{i} + z\;\vec{j} + x\;\vec{k}$, $S$ o hemisfério $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, $a > 0$, orientada com $\vec{n}$ normal unitária exterior a $S$.

23. Use o o teorema de Stokes para mostrar que a integral de linha é igual ao valor dado, indicando a orientação da curva $C$ em:
    (a) $\oint_C (3y+z)\,dx + (x+4y)\,dy + (2x+y)\,dz = -\frac{3\sqrt{2}\pi}{4}$, onde $C$ é a interseção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ com o plano $y + z = 1$.
    (b) $\oint_C (y+z)\,dx + (z+2x)\,dy + (x+y)\,dz = -\pi$, onde $C$ é a interseção do plano $y = z$ com o cilindro $x^2+y^2 = 2y$.
    (c) $\oint_C (2xy)\,dx + \left[(1-y)z + x^2 + x\right]\,dy + \left(\frac{x^2}{2} + e^z\right)\,dz = \pi$, onde $C$ é a interseção do cilindro $x^2+y^2 = 1$ com o cone $z = \sqrt{x^2 + (y-1)^2}$.
    (d) $\oint_C (8x - 2y)\,dx + y\,dy + 3z\,dz = -4$, onde $C$ é a fronteira do triângulo situado no plano $x + z = 2$, de vértices $(2,0,0)$, $(2,2,0)$ e $(0,0,2)$.

24. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F} = \left(x - y^2\right)\vec{i} + \left(x - z + \frac{y^2}{2 + \operatorname{sen} y}\right)\vec{j} + y\;\vec{k}$ e $C$ a interseção do paraboloide $4z = x^2 + y^2$ com o cilindro $x^2+y^2 = 4$, orientada no sentido anti-horário se projetada no plano $xy$.

25. Calcule $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}(x,y,z) = \left(yz + z, xz + e^{-y}, xy + e^{-z}\right)$ e $C$ a curva interseção das superfícies $x^2+y^2 = 4$ e $z = y + 3$, orientada no sentido anti-horário quando projetada no plano $xy$.

26. Calcule $\displaystyle\int_C (e^{x^2} + y^2)\,dx + (e^{y^2} - z^2)\,dy + (e^{z^2} - x^2)\,dz$, onde $C$ é o contorno da parte do plano $x + y + z = 1$, que está no primeiro octante, no sentido anti-horário.

27. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (z - x + \operatorname{sen} x, z - x + \cos y, x - y + e^z)$ e $C$ é a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = a^2$ com o plano $\frac{x}{a} + \frac{z}{b} = 1$, $a > 0$, $b > 0$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

28. Calcule a circulação do campo $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i} + xz\,\vec{j} + z^2\,\vec{k}$ ao redor da curva $C$ fronteira do triângulo recortado do plano $x + y + z = 1$ pelo primeiro octante, no sentido horário quando vista da origem.

29. Calcule $\oint_C (e^{-x^3/3} - yz)\,dx + (e^{-y^3/3} + xz + 2x)\,dy + (e^{-z^3/3} + 5)\,dz$, onde $C$ é dada por $\vec{r}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, 2)$, $t \in [0, 2\pi]$.

30. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = yz^2\,\vec{i} + 2xz\,\vec{j} + \cos(xyz)\,\vec{k}$ e $C$ é a interseção da superfície $z = x^2 + y^2$ com $z = 10 - x^2 - y^2$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

31. Calcule o trabalho realizado pelo campo de forças $\vec{F}(x,y,z) = \left(2^x + z^2\right)\vec{i} + \left(2^y + x^2\right)\vec{j} + \left(2^z + y^2\right)\vec{k}$ quando uma partícula se move sob sua influência ao redor da borda da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que está no primeiro octante, no sentido anti-horário quando vista de cima.

32. Calcule $\int_C (z - y)\,dx + \ln\left(1 + y^2\right)dy + \left[\ln(1 + z^2) + y\right]dz$, sendo $C$ dada por $\vec{r}(t) = (4\cos t, 4\operatorname{sen} t, 4 - 4\cos t)$, $0 \le t \le 2\pi$.

33. Seja o campo $\vec{F}$, tal que $rot\,\vec{F} = (-4x, 2(y-1), f(z))$, onde $f:\ \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$ com $f(0) = 1$. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $C$ é a curva dada pela interseção das superfícies $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

34. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, sendo $\vec{F}$ um campo em $\mathbb{R}^3$ dado por $\vec{F} = (-y, x, f(x,y,z))$, onde $f:\ \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ é de classe $\mathcal{C}^1$, tal que $\nabla f\cdot\vec{i} = -3$ em $\mathbb{R}^3$ e $C$ é a interseção da superfície $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $z - y = 2$, com uma orientação tal que quando projetada no plano $z = 0$ produz um percurso no sentido horário.

35. Utilizando o teorema de Stokes, transforme $\iint_S rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$ em uma integral de linha e calcule:

    (a) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{k}$, $S:\ \vec{r}(u,v) = \left(u, v, u^2 + v^2\right)$, com $u^2 + v^2 \le 1$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.

    (b) $\vec{F}(x,y,z) = y\,\vec{i}$, $S$ a superfície $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 \le 1$ e $z \ge 0$, sendo $\vec{n}$ a normal apontando para cima.

    (c) $\vec{F}(x,y,z) = x\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$, $S:\ x^2 + y^2 + \frac{z^2}{4} = 1$, $z \le 1$, sendo $\vec{n}$ tal que $\vec{n}(0,0,-2) = -\vec{k}$.

    (d) $\vec{F}(x,y,z) = x^2y\,\vec{i} + 2y^3z\,\vec{j} + 3z\,\vec{k}$, $S:\ \vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta)\,\vec{i} + (r\operatorname{sen}\theta)\,\vec{j} + r\,\vec{k}$, com $0 \le r \le 1$, $0 \le \theta \le 2\pi$, sendo $\vec{n}$ a normal exterior.

36. Calcule $\iint_S rot\,\vec{F}\cdot\vec{n}\;dS$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (y, 2x, xyz)$, $S$ é formada pelas cinco faces do cubo $[0,2]\times[0,2]\times[0,2]$ que não estão no plano $xy$ com $\vec{n}$ exterior a $S$.

    (a) Utilizando o teorema de Gauss

    (b) Utilizando o teorema de Stokes.

37. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(z^2 + e^{x^2}, xz + e^y, 2xy + ze^z\right)$ e $C$ é a curva obtida como interseção da superfície $z = 1 - y^2$, $z \ge 0$, com o plano $x + z = 2$, orientada no sentido anti-horário quando vista do eixo $x$ positivo.

38. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(z, z^2 + y\cos y, 2yz + ze^{-z}\right)$ e $C$ é a curva obtida como interseção da superfície $z = x^2$, com o plano $y + z = 4$, orientada no sentido anti-horário quando vista de cima.

39. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(-2y + e^{\operatorname{sen} x}, -z + y, x^3 + e^{\operatorname{sen} z}\right)$ e $C$ é a interseção da superfície $z = y^2$, com o plano $x + z = 1$, orientada no sentido de crescimento de $y$.

40. Determine $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = \left(yz + x^3, xz + 3y^2, xy + 4\right)$ e $C$ é a curva obtida como interseção da superfícies $z = 5 - y^2$, $z \geq 1$ e $x + z = 5$, orientada no sentido de crescimento de $y$.

41. Calcule $\displaystyle\int_C (ze^{xz} + ye^{xy} + 6x)\, dx + (xe^{xy} + ze^{yz})\, dy + (xe^{xz} + ye^{yz} - \operatorname{sen} z)\, dz$, onde $C$ é a curva dada por $\vec{r}(t) = t^2\,\vec{i} + (t-1)(t-3)\,\vec{j} + \pi t^3\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$.

42. Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x}, e^{-z} - xe^{-y}, e^{-x} - ye^{-z})$ e $C$ é a curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \left(\frac{\ln(1+t)}{\ln 2}, \operatorname{sen}\left(\frac{\pi t}{2}\right), \frac{1-e^t}{1-e}\right)$, $0 \leq t \leq 1$.

43. Calcule a integral do campo vetorial $\vec{F}(x,y,z) = \left(x + y + z, z + x + e^{-y^2/2}, x + y + e^{-z^2/2}\right)$ ao longo da curva interseção da superfície $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$, $z \geq 0$, com o plano $y = -1$, orientada no sentido de crescimento de $x$.

44. Seja o campo vetorial $\vec{F} = \left(3yz^2 - 2xe^z\right)\vec{i} + \left(3xz^2 + \cos y\right)\vec{j} + \left(6xyz - x^2e^z\right)\vec{k}$

    (a) $\vec{F}$ é conservativo? Por quê?

    (b) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, se $C$ é a curva descrita por $\vec{r}(t) = t\,\vec{i} + \left(\frac{\pi}{2}t^3\right)\vec{j} + (t-1)(t-2)\,\vec{k}$, $0 \leq t \leq 1$

    (c) Calcule $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $C$ é a fronteira do plano $x + y + z = 2$, que fica no primeiro octante, orientada no sentido anti-horário.

## Respostas

1. (a) $24\pi$
   (b) $\frac{\pi}{2}$
2. $1500\pi$
3. $3\pi$
4. $\frac{12\pi}{5}$
5. $\frac{2}{3}$
6. $17\pi$
7. $\frac{164\pi}{5}$
8. $\frac{3\pi}{2}$
9. $\frac{81\pi}{4}$
10. $\frac{\pi}{15}\left(890 + 3\sqrt{2}\right)$
11. $-12$
12. $\frac{2\pi}{3}(h+3)$
13. $\frac{4\pi}{5}$
14. $8\pi$
15. $1$
16. $\frac{-9\pi}{2}$
18. $\frac{\pi}{6}$
19. $\frac{1}{3}$
20. $6\pi$
21. $\frac{-3\pi}{4}$
22. (a) $2\pi$
    (b) $-\pi a^2$
24. $4\pi$
25. $-4\pi$
26. $\frac{1}{3}$
27. $-2\pi\, a(a+b)$
28. $-\frac{1}{2}$
29. $6\pi$
30. $75\pi$
31. $16$
32. $32\pi$
33. $5\pi$
34. $\pi$
35. (a) $0$
    (b) $-\pi$
    (c) $-\frac{3\pi}{4}$
    (d) $\frac{\pi}{4}$
36. (a) $4$
    (b) $4$
37. $\frac{8}{3} - e + e^{-1}$
38. $-\frac{16}{3}$
39. $2$
40. $32$
41. $e^{\pi}$
42. $3\,e^{-1}$
43. $-\frac{8\sqrt{2}}{3}$
44. (a) É conservativo
    (b) $0$
    (c) $0$