Lista Final

Questão 1

Vamos calcular $\int_C x\,dx + x^2 dy$ de $(-1,0)$ a $(1,0)$ ao longo:

(a) do eixo x.

Temos:

$y = 0$ e $-1 \leq x \leq 1$. Então $dy = 0 \Rightarrow x^2 dy = 0$.

$$\int_C x\,dx + x^2 dy = \int_C x\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$= 0.$$

(b) de $C: \vec{r}(t) = (-\cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq \pi$

Então temos: $x = -\cos t \Rightarrow dx = \operatorname{sen} t\,dt$ e

$y = \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = \cos t\,dt$.

$$\int_C x\,dx + x^2 dy = \int_0^{\pi} \left(-\cos t \operatorname{sen} t + \cos^2 t \cos t\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-\cos t \operatorname{sen} t + \cos^3 t\right) dt$$

$$= \int_0^{\pi} -\cos t \operatorname{sen} t\,dt + \int_0^{\pi} \cos^3 t\,dt$$

$$= -\frac{1}{4}\left[-\cos(u)\right]_0^{2\pi} + \left[\frac{1}{3}\left(2\operatorname{sen}^3 t + 3\cos^2 t \operatorname{sen} t\right)\right]_0^{\pi}$$

$$= -\frac{1}{4} \cdot 0 + \frac{1}{3} \cdot 0$$

$$= 0 + 0$$

$$= 0.$$

Questão 2

Vamos calcular $\oint_C -y\,dx + x\,dy$, ao longo dos seguintes caminhos fechados, orientados no sentido anti-horário:

Aqui, como a curva C é fechada, vamos usar o Teorema de Green:

(a) Circunferência de centro na origem e raio 2.

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y)\right) dx\,dy$$

$$= \iint_R (1+1)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_R dx\,dy$$

$$= 2\,\text{Área}(R)$$

$$= 2\left(\pi \times 2^2\right)$$

$$= 8\pi.$$

(b) Elipse $x^2 + 36y^2 = 36$.

$$x^2 + 36y^2 = 36 \Leftrightarrow \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{1} = 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{1^2} = 1.$$

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = 2\,\text{Área}(\text{Elipse})$$

$$= 2\left(\pi(6)(1)\right)$$

$$= 12\pi.$$

Questão 2

(c) Triângulo de vértices $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$

$$\int_C -y\,dx + x\,dy = 2\,\text{Área (Triângulo)}$$
$$= 2\left(\frac{(1-0)(1-0)}{2}\right)$$
$$= 1.$$

Questão 3

Vamos calcular $\int_C (3x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy$ de $(0,0)$ a $(1,1)$ ao longo:

(a) do segmento de reta:

Parametrização: $x = t$, $0 \leq t \leq 1$ e $y = t$, $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow$

$dx = dy = dt.$

$$\int_C (3x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy = \int_0^1 (3t + 2t + 3t - t)\,dt$$
$$= \int_0^1 7t\,dt$$
$$= 7\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = 7\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{7}{2}.$$

(b) do arco de parábola $y = x^2$

$y = x^2$, $0 \leq x \leq 1 \Rightarrow dy = 2x\,dx.$

$$\int_C (3x+2y)\,dx + (3x-y)\,dy = \int_0^1 \left[3x + 2x^2 + (3x - x^2)(2x)\right] dx$$
$$= \int_0^1 \left[3x + 8x^2 - 2x^3\right] dx$$
$$= \frac{3}{2} + \frac{8}{3} - \frac{1}{2} = \frac{11}{3}.$$

Questão 3

(c) do arco de circunferência $x^2 + (y-1)^2 = 1$, orientado no sentido anti-horário:

Parametrização: $x = \cos t$, $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi \Rightarrow$

$dx = -\operatorname{sen} t \, dt$ e

$y = 1 + \operatorname{sen} t \Rightarrow dy = \cos t \, dt$

com $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq 2\pi$

$$\int_C (3x + 2y)\,dx + (3x - y)\,dy = \int_{2\pi}^{\frac{3\pi}{2}} \left[3\cos t + 2(1 + \operatorname{sen} t)\right](+\operatorname{sen} t)\,dt$$

$$+ \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} (3\cos t - 1 - \operatorname{sen} t)\cos t \, dt$$

$$= 3\left(-\left(-\frac{3}{2}\right) - \frac{2}{3}\right) + 1{,}85619$$

$$= \frac{5}{2} + 1{,}85619$$

$$= 2{,}5 + 1{,}85619$$

$$= 4{,}35619.$$

Questão 4

Vamos calcular $\int_C 3xz\,dx + 4yz\,dy + 2xy\,dz$, do ponto $A = (0,0,0)$ ao ponto $B = (1,1,2)$, ao longo dos seguintes caminhos:

(a) segmento de reta AB:

Parametrização: $x = t$, $y = t$, $z = 2t$

com $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow dx = dy = dt$

e $dz = 2\,dt$.

Questão 4

$$\int_C 3xz\,dx + 4yz\,dy + 2xy\,dz =$$

$$= \int_0^1 \left[3t(2t) + 4t(2t) + 2t(t)(2)\right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[6t^2 + 8t^2 + 4t^2\right] dt = \int_0^1 18t^2\,dt$$

$$= 18\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = 18\left(\frac{1}{3}\right) = 6.$$

Questão 10

Um campo de forças bidimensional $\vec{F}$ define-se por $\vec{F}(x,y) = (x+y)\vec{i} + (x-y)\vec{j}$.

(a) Vamos provar que o trabalho realizado por esta força ao deslocar uma partícula ao longo da curva $\vec{r}(t) = f(t)\vec{i} + g(t)\vec{j}$, $a \leq t \leq b$, depende unicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ e $g(b)$.

Temos:

$$\vec{F}(\vec{r}(t)) = \left(f(t) + g(t)\right)\vec{i} + \left(f(t) - g(t)\right)\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = f'(t)\vec{i} + g'(t)\vec{j}$$

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \left(f(t) + g(t)\right)f'(t) + \left(f(t) - g(t)\right)g'(t)$$

$$= f(t)f'(t) + g(t)f'(t) + f(t)g'(t) - g(t)g'(t)$$

$$\vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(\frac{1}{2}\left[f(t)\right]^2\right)' + \left[f(t)g(t)\right]' - \left(\frac{1}{2}\left[g(t)\right]^2\right)'$$

$$= \left(\frac{1}{2}\left[f(t)\right]^2 + f(t)g(t) - \frac{1}{2}\left[g(t)\right]^2\right)'$$

$$\text{Trabalho} = \int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_a^b \vec{F}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt}\,dt$$

$$= \int_a^b \left(\frac{1}{2}\left[f(t)\right]^2 + f(t)g(t) - \frac{1}{2}\left[g(t)\right]^2\right)' dt$$

$$= \left[\frac{1}{2}\left[f(t)\right]^2 + f(t)g(t) - \frac{1}{2}\left[g(t)\right]^2\right]_a^b$$

$$= \frac{1}{2}\left[f(b)^2 - f(a)^2\right] + \left[f(b)g(b) - f(a)g(a)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[\left[g(b)\right]^2 - \left[g(a)\right]^2\right].$$

Portanto, o trabalho realizado depende unicamente de $f(a)$, $f(b)$, $g(a)$ e $g(b)$.

(b) Vamos determinar o trabalho realizado:

$$\text{Trabalho} = \frac{1}{2}\left[f(b)^2 - f(a)^2\right] + \left[f(b)g(b) - f(a)g(a)\right]$$
$$- \frac{1}{2}\left[g(b)^2 - g(a)^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[2^2 - 1^2\right] + \left[2\times 4 - 1\times 3\right] - \frac{1}{2}\left[4^2 - 3^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}(3) + 5 - \frac{1}{2}(7) = 5 - 2$$
$$= 3.$$

Questão 13

Vamos verificar o Teorema de Green para $\vec{F}(x, y) = (4x - 2y, 2x + 6y)$, onde D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$.

Temos:

$$\oint_C (4x - 2y)\,dy - (2x + 6y)\,dx = \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}(4x - 2y) + \frac{\partial}{\partial y}(2x + 6y)\right] dA$$

$$= \iint_D (4 + 6)\,dx\,dy$$

$$= 10 \iint_D dx\,dy$$

$$= 10 \text{ Área (Elipse)}$$

$$= 10 \left(\pi (2)(1)\right)$$

$$= 20\pi.$$

Questão 14

Se D é a região interior à elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ e exterior à circunferência $x^2 + y^2 = 4$, vamos calcular a integral de linha I dada, onde $C = \partial D$ está orientada positivamente.

Temos:

$$I = \int_C \left(2xy + e^{x^2}\right) dx + \left(x^2 + 2x + \cos(y^2)\right) dy$$

$$= \iint_D \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2 + 2x + \cos(y^2)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2xy + e^{x^2}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_D \left(2x + 2 - 2x\right) dx\,dy$$

$$= \iint_D 2\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_D dx\,dy$$

$$= 2\,\text{Área}\,(D)$$

$$= 2\left[\text{Área}\,(\text{Elipse}) - \text{Área}\,(\text{circunferência})\right]$$

$$= 2\left[\pi(5)(3) - \pi(2^2)\right]$$

$$= 2\left[15\pi - 4\pi\right]$$

$$= 2\,(9\pi)$$

$$= 18\pi.$$

Questão 15

Vamos calcular as integrais de linha pelo Teorema de Green:

(a) $\int_C (3x - y)\,dx + (x + 5y)\,dy$, onde C é a circunferência unitária $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, com $0 \leq t \leq 2\pi$.

Temos:

$$\int_C (3x - y)\,dx + (x+5y)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x+5y) - \frac{\partial}{\partial y}(3x-y)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (1+1)\,dx\,dy$$

$$= 2\iint_R dx\,dy$$

$$= 2\,\text{Área}(R)$$

$$= 2\left(\pi(1^2)\right)$$

$$= 2\pi.$$

(b) $\int_C (xy - y^2)\,dx + (xy)\,dy$, onde C é o caminho fechado formado por $y = 0$, $x = 1$ e $y = x$, orientado positivamente.

Temos:

$$\int_C (xy - y^2)\,dx + (xy)\,dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) - \frac{\partial}{\partial y}(xy - y^2)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (y - x + 2y)\,dx\,dy$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 (3y - x)\, dx\, dy$$

$$= \int_0^1 \left[3xy - \frac{x^2}{2}\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(3y - \frac{1}{2}\right) dy$$

$$= \left[3\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}y\right]_0^1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{2}{2}$$

$$= 1.$$

Questão 16

Vamos calcular as seguintes integrais:

(a) $\oint_C \left(2y + \sqrt[3]{1 + x^5}\right) dx + \left(5x - e^{y^2}\right) dy$, onde C é a circunferência $x^2 + y^2 = 4$.

Temos:

$$I = \oint_C \left(2y + \sqrt[3]{1+x^5}\right) dx + \left(5x - e^{y^2}\right) dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(5x - e^{y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(2y + \sqrt[3]{1+x^5}\right)\right] dx\, dy$$

$$= \iint_R (5 - 2)\, dx\, dy$$

$$= 3 \iint_R dx\, dy = 3\text{ Área (circunferência)}$$

$$= 3\left(\pi\left(2^2\right)\right) = 3(\pi \times 4)$$

$$= 12\pi.$$

Questão 16

(b) $\oint_C \frac{-xy}{1+x}dx + \ln(1+x)dy$, onde C é formada por $y=0$, $x+2y=4$ e $x=0$

$$I = \oint_C \frac{-xy}{1+x}dx + \ln(1+x)dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(1+x)\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{-xy}{1+x}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{1}{1+x} + \frac{x}{1+x}\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{x+1}{x+1}\right) dx\,dy = \iint_R (1)\, dx\,dy$$

$$= \iint_R dx\,dy = \text{Área}(R)$$

$= 4 \times 2$, pois R é retângulo com medidas 4 e 2.

$= 8.$

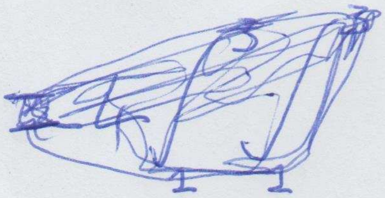
(f) $\oint_C \left(xy - \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x + \frac{x^3}{3} + y\right)dy$, onde C é a fronteira da região D entre as circunferências $x^2+y^2=1$ e $x^2+y^2=9$, orientada positivamente.

Temos:

$$I = \oint_C \left(xy - \frac{y^3}{3}\right)dx + \left(x + \frac{x^3}{3} + y\right)dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x + \frac{x^3}{3} + y\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(xy - \frac{y^3}{3}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[1 + x^2 - x + y^2\right] dx\,dy$$



$$= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(1 + r^2 - r\cos\theta\right) r\, dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_1^3 \left(r + r^3 - r^2\cos\theta\right) dr\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3}\cos\theta\right]_1^3 d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{9}{2} + \frac{81}{4} - 9\cos\theta - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\cos\theta\right) d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(24 - \frac{26}{3}\cos\theta\right) d\theta$$

$$= 24(2\pi) - \frac{26}{3}\left[\operatorname{sen}\theta\right]_0^{2\pi} = 48\pi - \frac{26}{3}(0)$$

$$= 48\pi.$$

Questão 30

Seja $\vec{F} = (P, Q) = \left(\cos(x^2) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}, x^3y^2 + \ln(2-x)\right)$.

(a) Vamos verificar se $\vec{F}$ é conservativo:

Temos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y^2 + \ln(2-x)\right)$$
$$= 3x^2y^2 - \frac{1}{2-x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(x^2) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}\right)$$
$$= 3x^2y^2 - \frac{1}{2-x}.$$

Apesar de termos $\frac{\partial Q}{\partial x} = 3x^2y^2 - \frac{1}{2-x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, o campo $\vec{F} = (P, Q)$ não é conservativo porque seu domínio $D = \mathbb{R} \setminus \{2\}$ não é simplesmente conexo.

(b) Vamos calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, com

$$C: \vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos t, \frac{1}{2}\,\text{sen}\,t\right), \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left(-\frac{1}{2}\,\text{sen}\,t, \frac{1}{2}\cos t\right)$$

$$\vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{2}\left[\cos(x^2) + x^2y^3 - \frac{y}{2-x}\right]\text{sen}\,t + \frac{1}{2}\left[x^3y^2 + \ln(2-x)\right]\cos t$$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, porque C é fechada e $\vec{F}$ é conservativo no interior de C.

(c) Vamos calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$,

$C: (x-1)^2 + y^2 = 1$, $x \leq 1$, orientada no sentido anti-horário:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, porque C é fechada e $\vec{F}$ é conservativo no interior de C.

Questão 31

Vamos calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$$\vec{F} = (P, Q) = \left(\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2), -2x^2 y \operatorname{sen}(xy^2)\right)$$

e C é dada por:

(a) $C: \vec{r}(t) = (1 + \cos t, \operatorname{sen} t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

Temos:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-2x^2 y \operatorname{sen}(xy^2)\right)$$
$$= -4xy \operatorname{sen}(xy^2) - 2x^2y^3 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\cos(xy^2) - xy^2 \operatorname{sen}(xy^2)\right)$$
$$= -2xy \operatorname{sen}(xy^2) - 2xy \operatorname{sen}(xy^2) - 2x^2y^3 \cos(xy^2)$$
$$= -4xy \operatorname{sen}(xy^2) - 2x^2y^3 \cos(xy^2).$$

Então $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} \Leftrightarrow F$ é conservativo.

Portanto $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, pois C é fechada.

Questão 31

(b) $C: \vec{r}(t) = \left(t + (t-1)\ln(1+t^2), -\cos\left(\frac{\pi}{2}t\right)\right), 0 \leq t \leq 1.$

Temos:

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$, pois $\vec{F}$ é conservativo e C é fechada.

Questão 33

Vamos verificar que a seguinte integral independe do caminho e calcular o seu valor $I = \int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y}\,dx - \frac{x^3}{y^2}\,dy.$

Temos:

$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) = -\frac{3x^2}{y^2}$ e $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y}\right) = 3x^2\left(-\frac{1}{y^2}\right) = -\frac{3x^2}{y^2}.$

Ou seja, $\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y}\right).$

Logo, o campo $\vec{F} = (P, Q) = \left(\frac{3x^2}{y}, -\frac{x^3}{y^2}\right)$ é conservativo no interior da região determinada por $0 \leq x \leq 1$ e $2 \leq y \leq 3$.

Portanto a integral $I = \int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y}\,dx - \frac{x^3}{y^2}\,dy$ independe do caminho.

Calculando o valor de I.

$$I = \int_{(0,2)}^{(1,3)} \frac{3x^2}{y}\,dx - \frac{x^3}{y^2}\,dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x^3}{y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{3x^2}{y}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[-\frac{3x^2}{y^2} + \frac{3x^2}{y^2}\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (0)\,dx\,dy$$

$$= 0 \cdot \iint_R dx\,dy$$

$$= 0.$$

Questão 34

Vamos encontrar os valores possíveis de

$$I = \int_C \frac{(x+y)\,dx + (y-x)\,dy}{x^2+y^2},$$ onde C é uma curva fechada qualquer que não passa pela origem.

Temos:

$$I = \int_C \frac{x+y}{x^2+y^2}\,dx + \frac{y-x}{x^2+y^2}\,dy$$

Questão 34

$$I = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y-x}{x^2+y^2}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{x^2+y^2}\right)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{-(x^2+y^2)-(y-x)(2x)}{(x^2+y^2)^2} - \left[\frac{x^2+y^2-(x+y)(2y)}{(x^2+y^2)^2}\right]\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{-(x^2+y^2)-(x^2+y^2)-2xy+2x^2+2xy+2y^2}{(x^2+y^2)^2}\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R \left[\frac{(-2x^2+2x^2)+(-2y^2+2y^2)+(-2xy+2xy)}{(x^2+y^2)^2}\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (0)\, dx\,dy$$

$$= 0 \cdot \iint_R dx\,dy$$

$$= 0.$$

Questão 35

$C: \vec{r}(t) = \left(\operatorname{sen}\frac{\pi}{t},\ e^{t-1}\right)$, com $1 \le t \le 2$.

Vamos calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde

$\vec{F}(x,y) = (-y^2 \operatorname{sen} x,\ 2y\cos x)$.

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(2y\cos x) - \frac{\partial}{\partial y}(-y^2 \operatorname{sen} x)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (-2y \operatorname{sen} x + 2y \operatorname{sen} x)\, dx\,dy$$

$$= \iint_R (0)\, dx\,dy$$

$$= 0.$$

Questão 36

Vamos calcular $\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r}$, onde $\vec{F}(x,y) = (y^3+1)\vec{i} + (3xy^2+1)\vec{j}$ e C é a semicircunferência $(x-1)^2 + y^2 = 1$, com $y \geq 0$, orientada de $(0,0)$ a $(2,0)$.

Temos:

$$\int_C \vec{F}\cdot d\vec{r} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(3xy^2+1) - \frac{\partial}{\partial y}(y^3+1)\right] dx\,dy$$

$$= \iint_R (3y^2 - 3y^2)\, dx\,dy$$

$$= \iint_R (0)\, dx\,dy$$

$$= 0.$$

Questão 37

Vamos calcular $\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde

$\vec{F}(x,y) = (\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\vec{i} + (x\cos y + \cos x)\vec{j}$ e C é

a curva parametrizada por $r(t) = \left(\dfrac{t^2-1}{1+t^2}, \dfrac{2t^2}{1+t^3}\right)$,

com $0 \leq t \leq 1$.

Temos:

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(x\cos y + \cos x) - \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{sen} y - y \operatorname{sen} x)\right] dx\, dy$$

$$= \iint_R (\cos y - \operatorname{sen} x - \cos y + \operatorname{sen} x)\, dx\, dy$$

$$= \iint_R (0)\, dx\, dy$$

$$= 0.$$

Questão 38

Vamos verificar que a integral independe do caminho e calcular o seu valor:

$$I = \int_{(1,1)}^{(3,3)} \left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}\right) dx + \left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x\right) dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{e^x}{y} - e^y \ln x\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(e^x \ln y - \frac{e^y}{x}\right)\right) dx\, dy$$

$$= \iint_R \left(\frac{e^x}{y} - \frac{e^y}{x} - \frac{e^x}{y} + \frac{e^y}{x}\right) dx\, dy$$

$= \iint_R (0)\, dx\, dy$, portanto independe do caminho.

$$= 0.$$