Prova 2 - Guilher D. Leal - Calculo 3

1) Campo $\vec{F}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$

F não é conservativo.

Campo $\vec{G}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + \cos y$, $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + \cos y$

$\vec{G}$ é conservativo, logo existe uma função g tal que $G = \nabla g$

$$g = \int P dx = \int (y e^x + \operatorname{sen} y)\, dx = y e^x + x \operatorname{sen} y + c(y)$$

$$g_y = \frac{\partial}{\partial y}(y e^x + x \operatorname{sen} y) = e^x + x \cos y + c'(y) \Rightarrow$$

$$Q = e^x + x \cos y \rightarrow \text{Logo, } c'(y) = 0,\ c(y) = c_1$$

Então, $g = y e^x + x \operatorname{sen} y + c_1$

2) A fronteira da região D é uma curva fechada, percorrida no sentido anti-horario (sentido positivo). E como o campo é do tipo que suas componentes são de classe C1, ou seja, possuem derivadas parciais contínuas, o teorema de Green pode ser utilizado. E o teorema de Green é expresso pela igualdade da questão.

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

3)

$(f.F) = f.F$, pode ser escrito como:

$F = (P, Q, R)$. logo $f.F = (fP, fQ, fR)$

O divergente de $f.F$, é: $div(f.F) = \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR)$

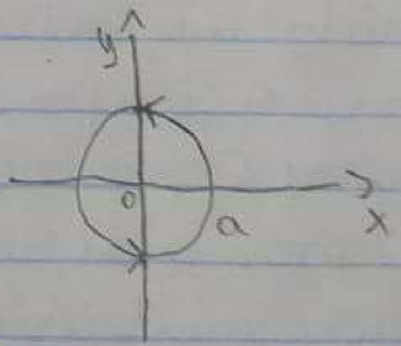
Cada derivada parcial é obtida por uma regra do produto.

$$div(f.F) = f_x.P + f P_x + f_y.Q + f.Q_y + f_z R + f R_z$$

$$div(f.F) = \underbrace{f(P_x + Q_y + R_z)}_{div\,F} + \underbrace{f_x.P + f_y.Q\, f_z.R}_{\nabla f.F}$$

Então: $div(f.F) = f.(div\,F) + \nabla f.F$

4) A fronteira da região R é fechada simples. O campo é de classe C^1, e está definido em toda a região R. Pode-se aplicar o teorema de Green.



$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -3, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3 - (-3) = 0_{,,}$$

Como as duas derivadas não são iguais, pelo Teorema de Green, a integral de linha

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA = 0_{,,}$$

5) Calculo do Vetor Tangente:

$\vec{r}'(t) = (-\text{sen}\,t, \cos t, 1)$

$\vec{F}(t) = (\cos t, \text{sen}\,t, -\cos t\,\text{sen}\,t)$

$\vec{F}.\vec{r}' = (\cos t, \text{sen}\,t, -\cos t\,\text{sen}\,t).(-\text{sen}\,t, \cos t, 1)$
$= -\cos t\,\text{sen}\,t + \cos t\,\text{sen}\,t - \cos t\,\text{sen}\,t$
$= -\cos t\,\text{sen}\,t$

$\int_C \vec{F}.dr = \int_0^{\pi} -\cos t\,\text{sen}\,t\,dt$

$\cos t = u$
$-\text{sen}\,t\,dt = du$
$t=0, u=1$
$t=\pi, u=-1$

$\int_1^{-1} u\,du$

$-\int_{-1}^{1} u\,du$

$\left[-\frac{u^2}{2}\right]_{-1}^{1}$

$\frac{-1^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2}$

0 //