Cálculo III

Integral de Superfície de Campo Escalar
Fluxo de Campo Vetorial

---

1. Parametrize as superfícies abaixo, indicando o domínio dos parâmetros:
   (a) $S:$ parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, que fica acima do plano $z=\sqrt{2}$.
   (b) $S:$ parte do cilindro $x^2+y^2=4$, que fica entre os planos $z=-2$ e $y+z=2$.
   (c) $S:$ parte do plano $x+y+z=2$ no interior do cilindro $x^2+y^2=1$.
   (d) $S:$ cone gerado pela semireta $z=2y,\ y\geq 0$, girando-a em torno do eixo z.
   (e) $S:$ superfície de revolução obtida girando o segmento de reta AB, $A=(4,1,0)$, $B=(2,4,0)$, em torno do eixo x.
   (f) $S:$ parte do cilindro $x^2+y^2=2y$, que fica entre $z=0$ e $z=x^2+y^2$.
   (g) $S:$ superfície de revolução obtida girando a curva $(x-a)^2+z^2=r^2$, com $0<r<a$, em torno do eixo z.

2. Seja S uma superfície parametrizada por $\vec{r}(u,v)=\big(v\cos u, v\,\mathrm{sen}\,u, 1-v^2\big)$ $0\leq u\leq 2\pi$ e $v\geq 0$.
   (a) Identifique essa superfície
   (b) Encontre uma equação da reta normal a S em $\vec{r}(0,1)$
   (c) Encontre uma equação do plano tangente a S em $\vec{r}(0,1)$.

3. Calcule a área da superfície dada por $\vec{r}(u,v)=(u,v,u^2+v^2)$, com $(u,v)\in D:\ u^2+v^2\leq 4$.

4. Calcule a área das superfícies:
   (a) $S:$ porção do plano $x+2y+z=4$, que está dentro do cilindro $x^2+y^2=4$.
   (b) $S:$ parte da esfera $x^2+y^2+z^2=4$, interior ao cone $z=\sqrt{\frac{x^2+y^2}{3}}$.
   (c) $S:$ porção do cilindro $x^2+y^2=1$, entre os planos $z=y$ e $z=2y$.
   (d) $S:$ parte do cilindro $x^2+y^2=2y$, limitado pelo plano $z=0$ e o cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$.
   (e) $S:$ superfície gerada pela rotação do conjunto $C=\big\{(0,y,z)\in\mathbb{R}^3;\ (y-2)^2+z^2=1\big\}$ em torno do eixo z.
   (f) $S:$ superfície gerada pela rotação do segmento de reta AB, $A=(0,1,3)$, $B=(0,3,1)$ em torno do eixo z.
   (g) $S:$ parte da superfície $z=\sqrt{x^2+y^2}$, compreendida entre os planos $x+y=1$, $x+y=2$, $x=0$ e $y=0$.
   (h) $S:$ parte do cone $z=\sqrt{x^2+y^2}$, que se encontra dentro do cilindro $x^2+y^2=2y$, fora do cilindro $x^2+y^2=1$.

5. Calcule a área da superfície da esfera de raio a, centrada na origem, limitada por dois paralelos e dois meridianos, sabendo que o ângulo entre os meridianos é α e a distância entre os planos que contêm os paralelos é h.

6. Seja S a superfície de equação $2z=x^2+y^2$, $0\leq z\leq k$, $k>0$. Sabendo-se que a área de S vale $\frac{14\pi}{3}$, determine o valor de k.

7. Deseja-se construir uma peça de zinco que tem a forma da superfície de equação $z=1-x^2$, compreendida entre os planos $y=0$ e $z=0$ e o cilindro $z=1-y^2$, $y\geq 0$. Se o metro quadrado do zinco custa R reais, calcule o preço total da peça.

8. O cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide a esfera $S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 1$ em duas regiões S_1 e S_2, onde S_1 está no interior do cilindro e S_2 fora. Ache a razão das áreas $\frac{A(S_2)}{A(S_1)}$.

9. Calcule $\iint_S f(x,y,z)dS$, onde

   (a) $f(x,y,z) = z - x^2 + xy^2 - 1$ e $S: \ \vec{r}(u,v) = u\,\vec{i} + v\,\vec{j} + \left(u^2+1\right)\,\vec{k}$, com $0 \le u \le 1$, $0 \le v \le 2$.

   (b) $f(x,y,z) = x^2 z$ e $S: \ x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$, com $0 \le z \le 1$.

   (c) $f(x,y,z) = x$ e S é a região triangular com vértices $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ e $(0,0,1)$.

   (d) $f(x,y,z) = z$ e S é a superfície do sólido limitado pelo cilindro $x^2 + y^2 = 1$ e os planos $z = 1$ e $x + z = 4$.

   (e) $f(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ e S é a porção da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 36$, limitada pelos planos $z = 0$ e $z = 3$.

   (f) $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ e : é a parte da superfície cônica $z = \sqrt{x^2+y^2}$, limitada por $z = 4 - \sqrt{x^2+y^2}$, com $z \ge 0$.

   (g) $f(x,y,z) = x^2y^2$ e S é a porção do cilindro $x^2 + \ y^2 = a^2$, $a > 0$, no primeiro octante, entre os planos $z = y$ e $z = 2y$.

   (h) $f(x,y,z) = x^2 + y^2$ e $S: \ x^2 + y^2 + z^2 = 4$, com $z \ge 1$.

10. Suponha que $f(x,y,z) = \left(x^2+y^2\right) \cdot g\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$, onde g é uma função de uma variável, tal que $g(2) = -5$. Calcule $\iint_S f(x.y,z)\,dS$, onde S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

11. Calcule a massa da superfície S parte do plano $z = 2 - x$ dentro do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, sendo a densidade dada por $\rho(x,y,z) = y^2$.

12. Seja S a porção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, com $z \ge 0$, limitada pelo plano $x + y + z = 1$ e o plano $z = 0$. Calcule a massa de S, sabendo que a densidade de massa em um ponto é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo z.

13. Seja S a superfície do sólido limitado inferiormente pelo parabolóide $z = x^2 + y^2$ e superiormente pelo plano $z = 1$. Se a densidade de massa é dada por $\rho(x,y,z) = z$, calcule a massa de S.

14. Seja S a porção da esfera $x^2+y^2+z^2 = 4$ que se encontra dentro do parabolóide $z = \frac{x^2+y^2}{3}$. Calcule a massa de S sabendo que a densidade de massa em cada ponto $(x,y,z) \in S$ é igual ao quadrado da distância do ponto ao eixo z.

15. Seja S a superfície de rotação obtida girando $C = \left\{(x,y,0) \in \mathbb{R}^3;\ x = \ln y,\ \sqrt{3} \le y \le \sqrt{8}\right\}$ em torno do eixo x. Calcule a massa de S, sabendo que a densidade em cada ponto é proporcional à distância do ponto ao eixo x.

16. Determine o momento de inércia em relação ao eixo z da superfície $S: \ x^2 + y^2 = 2y$, limitada por $z = 0$ e $z = \sqrt{x^2+y^2}$, sendo a densidade $\rho(x,y,z) = z$.

17. Mostre que o momento de inércia de uma casca cilíndrica de comprimento L e raio da base a, com densidade constante, em relação a um diâmetro do círculo cujo centro coincide com o centro da casca cilíndrica, é $I = \frac{1}{2}Ma^2 + \frac{1}{12}ML^2$, onde M é a massa total.

18. Calcule o momento de inércia da superfície homogênea, de massa M, de equação $x^2+y^2 = R^2$, $(R > 0)$, com $0 \le z \le 1$, em torno do eixo z.

19. Uma lâmina tem a forma de um hemisfério de raio a. Calcule o momento de inércia dessa lâmina em relação a um eixo que passa pelo polo e é perpendicular ao plano que delimita o hemisfério. Considere a densidade no ponto P da lâmina proporcional à distância desse ponto ao plano que delimita o hemisfério.

20. Mostre que o momento de inércia em relação ao eixo z da casca do cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ de altura h que está no primeiro octante com densidade constante é $I = \frac{Mh^2}{2}$, , onde M é a massa total.

21. Calcule o momento de inércia da superfície esférica de raio R, homogênea, de massa M, em torno de qualquer diâmetro.

22. Calcule o centro de massa da superfície homogênea, parte da superfície cônica $z^2 = x^2 + y^2$, compreendida entre os planos $z = 1$ e $z = 2$.

23. Calcule $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n}\, dS$, onde

    (a) $\vec{F}(x, y, z) = -z\vec{k}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ fora do cilindro $x^2 + y^2 = 1$, $\vec{n}$ apontando para fora.

    (b) $\vec{F}(x, y, z) = (-x)\ \vec{i} + (-y)\ \vec{j} + \left(3y^2 z\right)\ \vec{k}$ e S é a parte do cilindro $x^2 + y^2 = 16$, situado no primeiro octante, entre $z = 0$ e $z = 5 - y$, $\vec{n}$ apontando para o eixo z.

    (c) $\vec{F}(x, y, z) = (z + 3x)\ \vec{i} + (z + 3)\ \vec{k}$ e S é a superfície do sólido limitado por $z = 1 - y^2$, $x = 0$, $x = 2$ e o plano xy, com $\vec{n}$ exterior.

    (d) $\vec{F}(x, y, z) = \left(-3xyz^2\right)\ \vec{i} + \left(x + 2yz - 2xz^4\right)\ \vec{j} + \left(yz^3 - z^2\right)\ \vec{k}$ e S é a união da superfície $x^2 + y^2 = 1$, $0 \le z \le 1$, com $z = 0$, $x^2 + y^2 \le 1$, indicando a orientação escolhida para S.

    (e) $\vec{F}(x, y, z) = \left(yz, -xz, x^2 + y^2\right)$ e S é a superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga $(1, 0, 1)$ a $(0, 0, 3)$, em torno do eixo z, com $\vec{n}$ tendo a componente z não negativa.

    (f) $\vec{F}(x, y, z) = (x, y, -z)$ e S é a semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$, $z \ge 0$, com $\vec{n}$ exterior.

    (g) $\vec{F}(x, y, z) = y\ \vec{i} + x\ \vec{j} + 2\ \vec{k}$ e S é a superfície plana limitada pelo triângulo de vértices $(2, 0, 0)$, $(0, 2, 0)$ e $(0, 0, 2)$, com $\vec{n}$ tendo a componente z não negativa.

    (h) $\vec{F}(x, y, z) = z\ \vec{i} + yz\ \vec{j}$ e S é a parte do plano $z = 2 - x$, limitada pelo cilindro $x^2 + y^2 = 9$, com $\vec{n}$ tal que $\vec{n} \cdot \vec{k} \ge 0$

    (i) $\vec{F}(x, y, z) = \left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{3}{2}} (x, y, z)$ e S é a esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, com $\vec{n}$ exterior.

    (j) $\vec{F}(x, y, z) = (x - y, x + y, z)$ e $S:\ x^2 + y^2 = a^2$, $z > 0$, $0 \le z \le h$, com $\vec{n}$ exterior.

    (k) $\vec{F}(x, y, z) = x\ \vec{i} + -y\ \vec{j}$ e S é a parte da esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a > 0$, no primeiro octante e $\vec{n}$ apontando para a origem.

    (l) $\vec{F}(x, y, z) = (x, -3y, -2z)$ e S é a união dos planos $y + z = 0$, com $0 \le x \le 1$, $-1 \le y \le 0$ e $z = 0$, com $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, indicando a orientação escolhida para S.

24. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = \left(y^2 + z^2, x, x\right)$, através da superfície de revolução obtida girando o segmento de reta que liga o ponto $(4, 1, 0)$ a $(2, 4, 0)$ em torno do eixo x, onde o vetor $\vec{n}$ tem componente $\vec{i}$ não negativa.

25. Calcule o fluxo de $\vec{F}(x, y, z) = x\ \vec{i} + y\ \vec{j} - 2z\ \vec{k}$, através da superfície S, parte do cilindro $x^2 + y^2 = 2x$, limitado pelo plano $z = 0$ e pelo cone $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, com vetor normal apontando para fora de S.

Cálculo III

Respostas

1. (a) $\vec{r}(\phi,\theta)=(2\operatorname{sen}\phi\cos\theta, 2\operatorname{sen}\phi\operatorname{sen}\theta, 2\cos\phi),\ \ (\phi,\theta)\in D:\ \ 0\le\phi\le\frac{\pi}{4},\ \ 0\le\theta\le 2\pi$
   (b) $\vec{r}(\theta,z)=(2\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta, z),\ \ (\theta,z)\in D:\ \ 0\le\theta\le 2\pi,\ -2\le z\le 2-2\operatorname{sen}\theta$
   (c) $\vec{r}(x,y)=(x,y,2-x-y),\ \ (x,y)\in D:\ \ x^2+y^2\le 1$ ou
   $\vec{r}(r,\theta)=(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta, 2-r\cos\theta-r\operatorname{sen}\theta),\ \ (r,\theta)\in D:\ \ 0\le r\le 1,\ 0\le\theta\le 2\pi$
   (d) $\vec{r}(t,\theta)=(t\cos\theta, t\operatorname{sen}\theta, 2t),\ \ (t,\theta)\in D:\ \ t\ge 0,\ 0\le\theta\le 2\pi$
   (e) $\vec{r}(t,\theta)=(4-2t, (1+3t)\cos\theta, (1+3t)\operatorname{sen}\theta),\ \ (t,\theta)\in D:\ \ 0\le t\le 1,\ \theta\in[0,2\pi]$
   (f) $\vec{r}(\theta,z)=(2\operatorname{sen}\theta\cos\theta, 2\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\theta, z)=\left(\operatorname{sen}2\theta, 2\operatorname{sen}^2\theta, z\right)$,
   $(\theta,z)\in D:\ \ 0\le\theta\le\pi,\ 0\le z\le 4\operatorname{sen}^2\theta$ ou
   $\vec{r}(t,z)=(\cos t, 1+\operatorname{sen}t, z),\ \ (t,z)\in D:\ \ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le z\le 2+2\operatorname{sen}t$
   (g) $\vec{r}(t,\theta)=((a+r\cos t)\cos\theta, (a+r\cos t)\operatorname{sen}\theta, r\operatorname{sen}t),\ \ (t,\theta)\in D:\ \ 0\le t\le 2\pi,\ 0\le\theta\le 2\pi$

2. (a) $S:\ \ z=1-x^2-y^2$ (paraboloide circular)
   (b) $(x,y,z)=(1,0,0)+\lambda(-2,0,-1),\ \ \lambda\in\mathbb{R}$
   (c) $2x+z-2=0$

3. $\frac{\pi}{6}\left(17\sqrt{17}-1\right)$

4. (a) $4\sqrt{6}\,\pi$
   (b) 4π
   (c) 4
   (d) 8
   (e) $8\pi^2$
   (f) $8\sqrt{2}\,\pi$
   (g) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
   (h) $\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2\pi}{3}+\sqrt{3}\right)$

5. $a\,h\,\alpha$

6. $\frac{3}{2}$

7. $\left(5\sqrt{5}-1\right)\frac{R}{6}$

8. $\frac{2\pi+4}{2\pi-4}$

9. (a) $\frac{2}{9}\left(5\sqrt{5}-1\right)$
   (b) $\frac{\pi a^3}{2}$
   (c) $\frac{\sqrt{3}}{6}$
   (d) $\left(4\sqrt{2}+\frac{33}{2}\right)\pi$
   (e) 216π
   (f) $8\sqrt{2}\,\pi$
   (g) $\frac{2a^6}{15}$
   (h) $\frac{20\pi}{3}$

10. $-\frac{640\pi}{3}$

11. $\frac{\sqrt{2}\,\pi}{4}$

12. $\frac{3\pi}{2}+2$

13. $\frac{\pi}{60}\left(25\sqrt{5}+61\right)$

14. $\frac{20\pi}{3}$

15. $\frac{38\,k\,\pi}{3}$

16. 6π

18. MR^2

19. $\frac{k\,\pi\,a^5}{2}$

21. $\frac{2MR^2}{3}$

22. $\left(0,0,\frac{14}{9}\right)$

23. (a) $-4\pi\sqrt{3}$
    (b) $40\pi-64$
    (c) $\frac{32}{3}$
    (d) π com $\vec{n}$ exterior
    (e) $\frac{\pi}{2}$
    (f) $\frac{16\pi}{3}$
    (g) $\frac{20}{3}$
    (h) 18π
    (i) 4π
    (j) $2\pi\,a^2\,h$
    (k) 0
    (l) $\frac{1}{2}$ com $\vec{n}$ apontando para cima

24. $\frac{255\pi}{2}$

25. $\frac{32}{3}$