1) Ambos os campos possuem o $\mathbb{R}^3$ como domínio. Esse domínio é simplesmente conexos. Os campos são da forma $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$. Para que ele seja conservativo, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.

Campo $\vec{F}$: $\frac{\partial P}{\partial y} = -e^x \operatorname{sen} y$ e $\frac{\partial Q}{\partial x} = e^x \operatorname{sen} y$

Como essas derivadas não são iguais, F não é conservativo.

Campo $\vec{G}$: $\underbrace{\frac{\partial P}{\partial y} = e^x + \cos y \quad \text{e} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^x + \cos y}_{\hookrightarrow \text{ Iguais}}$

$\boxed{\vec{G} \text{ é conservativo}}$, logo existe uma função g tal que $\vec{G} = \nabla g$

$g = \int P dx = \int (ye^x + \operatorname{sen} y)\, dx = ye^x + x \operatorname{sen} y + C(y)$

$g_y = \frac{\partial}{\partial y}(ye^x + x \operatorname{sen} y) = e^x + x\cos y + C'(y) = Q = e^x + x\cos y \to$ Logo, $C'(y) = 0$

Daí, $C(y) = \underline{\underline{C}}$ Daí, $\boxed{g = ye^x + x \operatorname{sen} y + C}$

2) A fronteira da região D é uma curva fechada, percorrida no sentido anti-horário (sentido positivo). E como o Campo é do Tipo que suas componentes são de classe C^1, ou seja, possuem derivadas parciais contínuas, o teorema de Green pode ser utilizado. E o teorema de Green é expresso pela igualdade da questão.

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dA$$

3) $(f \cdot F) = f \cdot F$ pode ser reescrito como:

$F = (P, Q, R)$. Logo $f \cdot F = (fP, fQ, fR)$

O divergente de $f \cdot F$, é:

$$\operatorname{div}(f \cdot F) = \frac{\partial}{\partial x}(fP) + \frac{\partial}{\partial y}(fQ) + \frac{\partial}{\partial z}(fR)$$

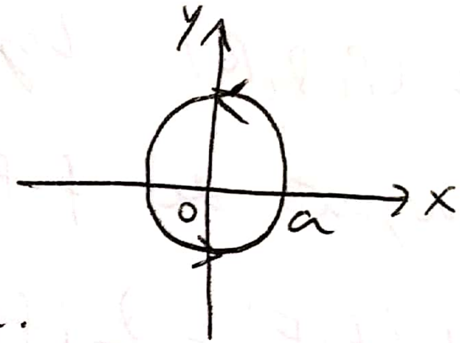
Cada derivada parcial é obtida por uma regra do produto. Logo:

$$\operatorname{div}(f \cdot F) = f_x \cdot P + f P_x + f_y \cdot Q + f \cdot Q_y + f_z R + f R_z$$

$$\operatorname{div}(f \cdot F) = f(\underbrace{P_x + Q_y + R_z}_{\operatorname{div} F}) + \underbrace{f_x \cdot P + f_y \cdot Q + f_z \cdot R}_{\nabla f \cdot F}$$

Logo, $\boxed{\operatorname{div}(f \cdot F) = f \cdot (\operatorname{div} F) + \nabla f \cdot F}$

4) A fronteira da região R é fechada simples.



O campo é de classe C^1, e está definido em toda a região R. Pode-se aplicar o Teorema de Green.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -3 \quad e \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -3 \text{. Logo, } \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = -3-(-3) = 0$$

Como as duas derivadas são iguais, pelo Teorema de Green, a integral de linha

$$\oint_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R \underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{0} dA = \boxed{0}$$

5) Cálculo do vetor Tangente:

$$\vec{r}'(t) = (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1)$$

$$\vec{F}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos t \operatorname{sen} t)$$

$$\vec{F} \cdot \vec{r}' = (\cos t, \operatorname{sen} t, -\cos t \operatorname{sen} t) \cdot (-\operatorname{sen} t, \cos t, 1) =$$

$$= -\cos t \cancel{\operatorname{sen} t} + \cos t \cancel{\operatorname{sen} t} - \cos t \operatorname{sen} t = \underline{-\cos t \operatorname{sen} t}$$

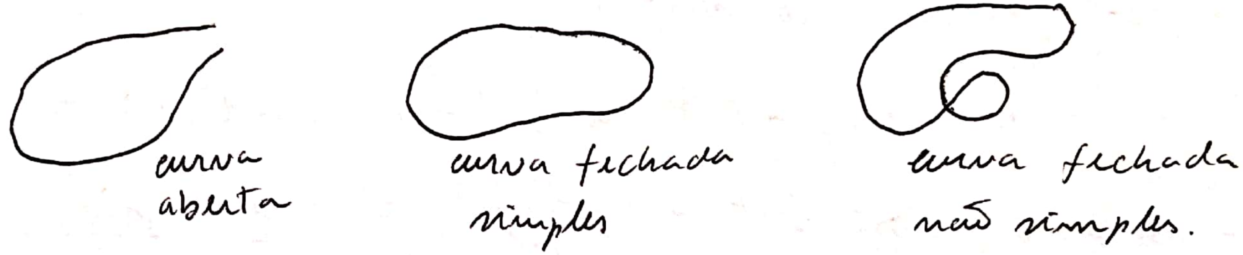
$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^{\pi} -\cos t \operatorname{sen} t \, dt = \left| \begin{matrix} \cos t = u \\ -\operatorname{sen} t \, dt = du \end{matrix} \right| \begin{matrix} t = 0, \ u = 1 \\ t = \pi, \ u = -1 \end{matrix}$$

$$= \int_1^{-1} u \, du = -\int_{-1}^{1} u \, du = -\frac{u^2}{2} \Big|_{-1}^{1} = -\frac{1^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2} = \boxed{0}$$

EXTRA

a) É uma curva cujo ponto inicial coincide com o ponto final. A curva fechada pode ser simples, ou não.

Exemplos:



b) É um campo cuja qualquer integral de linha de curva fechada é nula. Ele é de classe C^1, e possui uma função potencial (f) tal que $\nabla f = F$.

c) É a energia necessária para que uma força consiga mover a partícula. Esse trabalho é dado por: $W = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$, onde $\vec{r}$ é a parametrização da curva C, e $\vec{F}$ é o campo.

d) O teorema afirma que $\int_C \nabla f \cdot dr = f(B) - f(A)$, onde f é uma função escalar, e a integral de linha é a integral do divergente de f. Portanto, o teorema diz que a integral de linha calcula a variação de f, do ponto inicial ao final da curva.