Universidade Federal de Santa Catarina

EEL7123/EEL510457

Solução Problema 4.11

Problema 4.11. Considere o seguinte conjunto de módulos $\{2^n, 2^n - 3, 2^n + 3\}$, para $n = 4$ e uma entrada-saída de $3n$ bits:

(a) Obtenha a estrutura para fazer a conversão binario-RNS (use compressores e somadores módulo 13 e 19)

Um numero inteiro $X = \{x_{11}, \ldots, x_1, x_0\}$ pode ser expressado em notação binaria como:

$$X = \sum_{i=1}^{11} 2^i x_i = 2^{11}x_{11} + \ldots + 2^0 x_0. \tag{1}$$

Usando notação binaria e conjunto de módulos $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2^8, 2^4 - 1, 2^4 + 1\}$, a faixa dinâmica do valor X é $[0, M-1]$, onde $M = m_1 m_2 m_3$. Três conversores são necessários de modo a obter a representação do RNS, um para cada elemento de base.

- **Canal** $m_1 = 2^4$**:** O canal mais simples é o conversor usando o modulo m_1. O valor $|X|_{m_1}$ pode ser obtido pelo resto da divisão do X por 2^4 , o que pode por conseguida por médio de truncar o valor de X, uma vez que:

$$|X|_{2^4} = |\overbrace{|2^{11}|_{2^{11}}}^{=0} + \ldots + \overbrace{|2^4|_{2^4}}^{=0} + 2^3x_3 + 2^2x_2 + 2^1x_1 + 2^0x_0|_{2^4} = \{x_3, x_2, x_1, x_0\}. \tag{2}$$

- **Canal** $m_2 = 2^4 - 3$**:** A Eq. 1 fica como:

$$\begin{aligned}|X|_{13} =& |\overbrace{|2^{11}|_{13}}^{=-6} x_{11} + \overbrace{|2^{10}|_{13}}^{=-3} x_{10} + \overbrace{|2^{9}|_{13}}^{=-8} x_9 + \overbrace{|2^{8}|_{13}}^{=-4} x_8 + \overbrace{|2^{7}|_{13}}^{=-2} x_7 + \overbrace{|2^{6}|_{13}}^{=-1} x_6 + \overbrace{|2^{5}|_{13}}^{=6} x_5 + \\ &+ \overbrace{|2^{4}|_{13}}^{=3} x_4 + 2^3x_3 + 2^2x_2 + 2^1x_1 + 2^0x_0|_{13}.\end{aligned} \tag{3}$$

Tendo em consideração que $|-Ax|_m = |A\bar{x} + COR|$, onde COR é o fator corretor:

$$|X|_{13} = |6\bar{x}_{11} + 3\bar{x}_{10} + 8\bar{x}_9 + 4\bar{x}_8 + 2\bar{x}_7 + \bar{x}_6 + 6x_5 + 3x_4 + 2^3x_3 + 2^2x_2 + 2^1x_1 + 2^0x_0 + COR_{m2}|_{13}. \tag{4}$$

, onde COR_{m2} é o fator corretor de todos os termos negativos.

- **Canal** $m_3 = 2^4 + 1$**:** Devido a que $|2^4|_{2^4+1} = -1$, a Eq. 1 fica como:

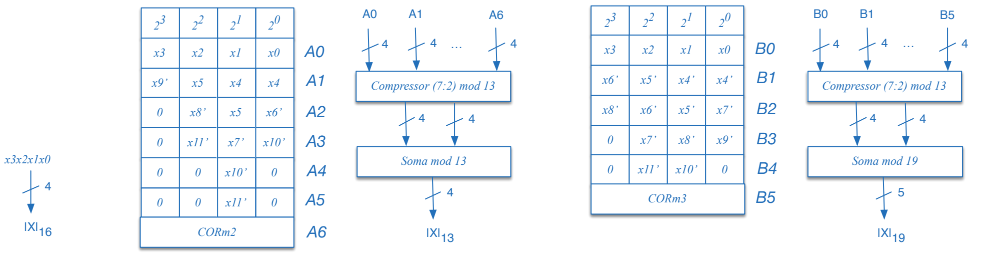

Figura 1: Diagrama de blocos para conversor binario-RNS modulo $m_1 = 2^4$, $m_2 = \{2^4 - 3\}$ e $m_3 = \{2^4 + 3\}$.

$$|X|_{19} =| \overbrace{|2^{11}|_{19}}^{=-4} x_{11} + \overbrace{|2^{10}|_{19}}^{=-2} x_{10} + \overbrace{|2^{9}|_{19}}^{=-1} x_{9} + \overbrace{|2^{8}|_{19}}^{=-10} x_{8} + \overbrace{|2^{7}|_{19}}^{=-5} x_{7} + \overbrace{|2^{6}|_{19}}^{=-12} x_{6} + \overbrace{|2^{5}|_{19}}^{=-6} x_{5} +$$
$$+ \overbrace{|2^{4}|_{19}}^{=-3} x_{4} + 2^3 x_3 + 2^2 x_2 + 2^1 x_1 + 2^0 x_0|_{19}. \quad (5)$$

Tendo em consideração que $|-Ax|_m = |A\bar{x} + COR|$, onde COR é o fator corretor:

$$|X|_{19} =|4\bar{x}_{11} + 2\bar{x}_{10} + \bar{x}_9 + 10\bar{x}_8 + 5\bar{x}_7 + 12\bar{x}_6 + 6\bar{x}_5 + 3\bar{x}_4 + 2^3 x_3 + 2^2 x_2 + 2^1 x_1 + 2^0 x_0 + COR_{m3}|_{19}. \quad (6)$$

, onde COR_{m3} é o fator corretor de todos os termos negativos.

(b) Obtenha a estrutura para fazer a conversão RNS-binario (use o algoritmo novo CRT, compressores e somadores módulo 255)

A conversão de RNS a binario é obtida usando o novo Teorema Chinés do Resto (CRT), visto na aula teorica.

$$X = \left|\sum_{i=1}^{3} V_i R_i\right|_{\hat{m}_1} m_1 + R_1, \quad (7)$$

onde $V_1 = \frac{\left|\hat{m}_1^{-1}\right|_{m_1} \hat{m}_1 - 1}{m_1}$, $V_2 = \frac{\left|\hat{m}_2^{-1}\right|_{m_2} \hat{m}_2}{m_1}$, $V_3 = \frac{\left|\hat{m}_3^{-1}\right|_{m_3} \hat{m}_3}{m_1}$, $\hat{m}_i = \frac{M}{m_i}$, $\left|\hat{m}_i^{-1}\right|_{m_i}$ é a multiplicativa inversa de $\hat{m}_i$ e R_i as entradas residuais. Para o moduli set $\{m_1, m_2, m_3\}$, onde $m_1 = 2^4$, $m_2 = 2^4 - 3$, $m_3 = 2^4 + 3$ escolhido obtemos $\hat{m}_1 = 247$, $\hat{m}_2 = 304$, $\hat{m}_3 = 208$, $\left|\hat{m}_1^{-1}\right|_{m_1} = 7$ $\left|\hat{m}_2^{-1}\right|_{m_2} = 8$ e $\left|\hat{m}_3^{-1}\right|_{m_3} = 18$, e $V_1 = 108$, $V_2 = 152$ e $V_3 = -13$.

Eq.(7) pode se escrever como:

$$X = |108R_1 + 152R_2 - 13R_3|_{247}\, 16 + R_1 \quad (8)$$

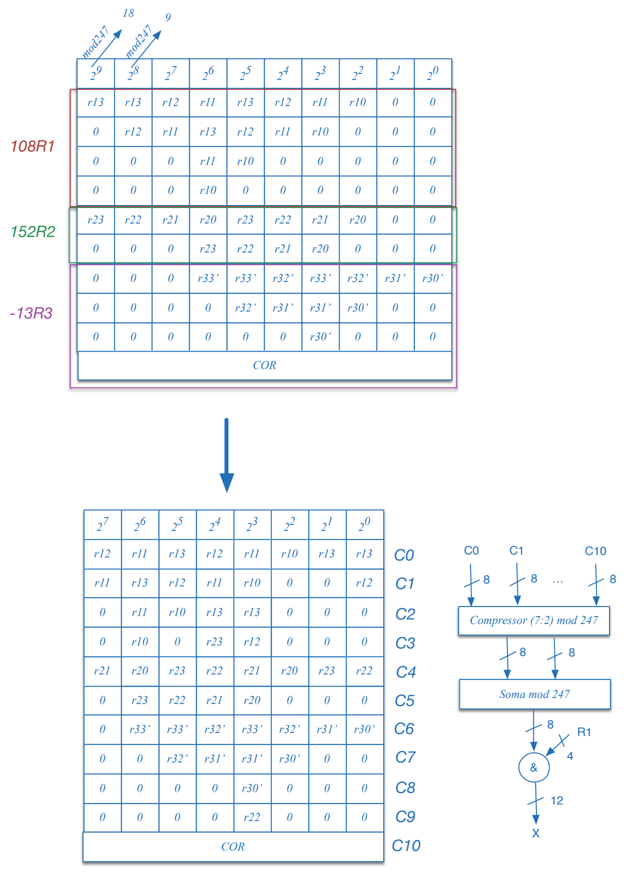

Figura 2: Diagrama de blocos para conversor RNS-binario para o modulo $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2^{2n}, 2^n - 3, 2^n + 3\}$.

Podemos finalmente expressar os termos da Eq.8 como mostrado na tabela da figura:

(c) Indique a faixa dinâmica da estrutura RNS e compare com a eficiência da representação com binario.

A faixa dinâmica em RNS para o conjunto $\{m_1, m_2, m_3\} = \{2^4, 2^4 - 3, 2^4 + 3\}$ é $M = 16 \times 13 \times 19 = 3952$ por enquanto a faixa dinâmica de $3n$-bits correspondente em binário é $2^{12} = 4096$, logo a eficiência será $\frac{4096-100}{3952} = 96,48$. Portanto obtemos um $96,48\%$ de eficiência da faixa dinâmica de RNS comparado com binário.