LGN5830 - Biometria de Marcadores Genéticos

Tópico 2: Verossimilhança

Antonio Augusto Franco Garcia
http://about.me/augusto.garcia
augusto.garcia@usp.br

Departamento de Genética
ESALQ/USP
2015

STATISTICAL GENETICS LAB
ESALQ / USP

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
DEPARTAMENTO DE GENÉTICA
PIRACICABA, SP, BRAZIL

Conteúdo

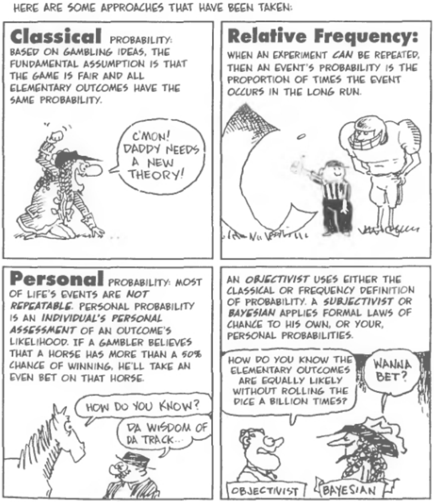
Conteúdo

Conteúdo

Conteúdo

Conteúdo

Definições


HERE ARE SOME APPROACHES THAT HAVE BEEN TAKEN:
Classical PROBABILITY: BASED ON GAMBLING IDEAS, THE FUNDAMENTAL ASSUMPTION IS THAT THE GAME IS FAIR AND ALL ELEMENTARY OUTCOMES HAVE THE SAME PROBABILITY.
C'MON! DADDY NEEDS A NEW THEORY!
Relative Frequency: WHEN AN EXPERIMENT CAN BE REPEATED, THEN AN EVENT'S PROBABILITY IS THE PROPORTION OF TIMES THE EVENT OCCURS IN THE LONG RUN.
Personal PROBABILITY: MOST OF LIFE'S EVENTS ARE NOT REPEATABLE. PERSONAL PROBABILITY IS AN INDIVIDUAL'S PERSONAL ASSESSMENT OF AN OUTCOME'S LIKELIHOOD. IF A GAMBLER BELIEVES THAT A HORSE HAS MORE THAN A 50% CHANCE OF WINNING, HE'LL TAKE AN EVEN BET ON THAT HORSE.
HOW DO YOU KNOW?
DA WISDOM OF DA TRACK...
AN OBJECTIVIST USES EITHER THE CLASSICAL OR FREQUENCY DEFINITION OF PROBABILITY. A SUBJECTIVIST OR BAYESIAN APPLIES FORMAL LAWS OF CHANCE TO HIS OWN, OR YOUR, PERSONAL PROBABILITIES.
HOW DO YOU KNOW THE ELEMENTARY OUTCOMES ARE EQUALLY LIKELY WITHOUT ROLLING THE DICE A BILLION TIMES?
WANNA BET?
OBJECTIVIST
BAYESIAN

Regras

- Adição
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$
- Adição (eventos mutuamente exclusivos)
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$
- Subtração
$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$
- Multiplicação
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$
- Multiplicação (A e B independentes)
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$
- Notação: $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A, B)$

Regras

- Adição

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

- Adição (eventos mutuamente exclusivos)

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

- Subtração

$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$

- Multiplicação

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Multiplicação (A e B independentes)

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$

- Notação: $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A, B)$

Regras

- Adição
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$
- Adição (eventos mutuamente exclusivos)
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$
- Subtração
$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$
- Multiplicação
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$
- Multiplicação (A e B independentes)
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$
- Notação: $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A, B)$

Regras

- Adição

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$

- Adição (eventos mutuamente exclusivos)

$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$

- Subtração

$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$

- Multiplicação

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Multiplicação (A e B independentes)

$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$

- Notação: $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A, B)$

Regras

- Adição
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$
- Adição (eventos mutuamente exclusivos)
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$
- Subtração
$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$
- Multiplicação
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$
- Multiplicação (A e B independentes)
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$
- Notação: $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A, B)$

Regras

- Adição
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ e } B)$$
- Adição (eventos mutuamente exclusivos)
$$P(A \text{ ou } B) = P(A) + P(B)$$
- Subtração
$$P(A) = 1 - P(\text{não } A)$$
- Multiplicação
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B|A)$$
- Multiplicação (A e B independentes)
$$P(A \text{ e } B) = P(A) \times P(B)$$
- Notação: $P(A \text{ e } B) = P(A \cap B) = P(A, B)$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Se eu jogar os dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: $6 \times 6 = 36$
  - # resultados com soma 3: 2 ($\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3) = 2/36$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Se eu jogar os dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de obter soma 3?
    - # resultados possíveis: $6 \times 6 = 36$
    - # resultados com soma 3: 2 $(\{1, 2\}, \{2, 1\})$
    - Resp: $P(\text{soma } 3) = 2/36$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Se eu jogar os dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de obter soma 3?
  - \# resultados possíveis: $6 \times 6 = 36$
  - \# resultados com soma 3: 2 ($\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3) = 2/36$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Se eu jogar os dois dados simultaneamente, qual é a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: $6 \times 6 = 36$
  - # resultados com soma 3: 2 ($\{1, 2\}$, $\{2, 1\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3) = 2/36$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Suponha agora que um dos dois dados foi jogado antes, e o resultado foi 1
- Qual a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: 6
  - # resultados com soma 3: 1 $(\{1,2\})$
  - Resp: $P(\text{soma } 3 | \text{valor } 1 \text{ em um dos dados}) = 1/6$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Suponha agora que um dos dois dados foi jogado antes, e o resultado foi 1
- Qual a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: 6
  - # resultados com soma 3: 1 ($\{1, 2\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3 | \text{valor } 1 \text{ em um dos dados}) = 1/6$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Suponha agora que um dos dois dados foi jogado antes, e o resultado foi 1
- Qual a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: 6
  - # resultados com soma 3: 1 ($\{1,2\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3 | \text{valor } 1 \text{ em um dos dados}) = 1/6$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Suponha agora que um dos dois dados foi jogado antes, e o resultado foi 1
- Qual a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: 6
  - # resultados com soma 3: 1 ($\{1, 2\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3 | \text{valor } 1 \text{ em um dos dados}) = 1/6$

Probabilidade Condicional

Dois dados com cores diferentes

- Suponha agora que um dos dois dados foi jogado antes, e o resultado foi 1
- Qual a probabilidade de obter soma 3?
  - # resultados possíveis: 6
  - # resultados com soma 3: 1 ($\{1, 2\}$)
  - Resp: $P(\text{soma } 3|\text{valor 1 em um dos dados}) = 1/6$

Probabilidade Condicional

$P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Atenção

- Note a relação entre probab. condicional e a regra da multiplicação
- O que significam $P(A|B) = 1$ e $P(A|B) = 0$?
- Eventos independentes: $P(A,B) = P(A) \times P(B)$

Exemplo anterior

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Probabilidade Condicional

$P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Atenção

- Note a relação entre probab. condicional e a regra da multiplicação
- O que significam $P(A|B) = 1$ e $P(A|B) = 0$?
- Eventos independentes: $P(A,B) = P(A) \times P(B)$

Exemplo anterior

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Probabilidade Condicional

$P(A|B)$

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)}$$

Atenção

- Note a relação entre probab. condicional e a regra da multiplicação
- O que significam $P(A|B) = 1$ e $P(A|B) = 0$?
- Eventos independentes: $P(A,B) = P(A) \times P(B)$

Exemplo anterior

$$P(A|B) = \frac{P(A,B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{6}$$

Eventos independentes

Moeda "honesta"

- Qual a probabilidade de obter uma sequência de 4 caras?
- Resp: $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Eventos independentes

Moeda "honesta"

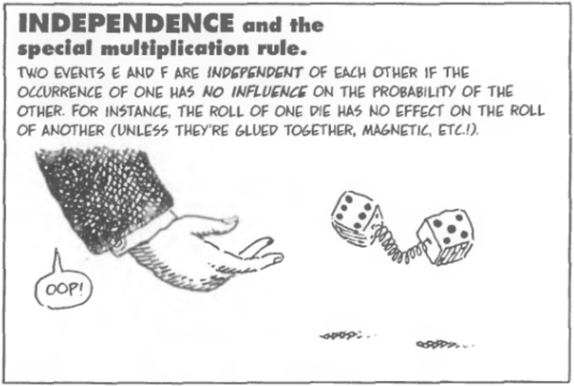
- Qual a probabilidade de obter uma sequência de 4 caras?
- Resp: $\left(\frac{1}{2}\right)^4$

Eventos independentes

Moeda "honesta"

Qual a probabilidade de obter uma sequência de 4 caras?

Eventos independentes



Um caso simples

Doença, Genótipo

	mm	Mm	MM	
R	0.10	0.21	0.47	0.78
S	0.05	0.09	0.08	0.22
	0.15	0.30	0.55	1

- $P(D = R) = 0.78$
- $P(G = Mm) = 0.30$
- $P(D = R|G = MM) = \frac{P(D=R,G=MM)}{P(G=MM)} = \frac{0.47}{0.55} = 0.85$
- $P(D = R, G = MM) = P(D = R)\, P(G = MM|D = R) = 0.78 \times \frac{0.47}{0.78} = 0.47$
- Note que $P(D = R).P(G = MM) = 0.78 \times 0.55 = 0.429$

Um caso simples

Doença, Genótipo

	mm	Mm	MM	
R	0.10	0.21	0.47	0.78
S	0.05	0.09	0.08	0.22
	0.15	0.30	0.55	1

- $P(D = R) = 0.78$
- $P(G = Mm) = 0.30$
- $P(D = R|G = MM) = \frac{P(D=R,G=MM)}{P(G=MM)} = \frac{0.47}{0.55} = 0.85$
- $P(D = R, G = MM) = P(D = R)\,P(G = MM|D = R) = 0.78 \times \frac{0.47}{0.78} = 0.47$
- Note que $P(D = R).P(G = MM) = 0.78 \times 0.55 = 0.429$

Um caso simples

Doença, Genótipo

	mm	Mm	MM	
R	0.10	0.21	0.47	0.78
S	0.05	0.09	0.08	0.22
	0.15	0.30	0.55	1

- $P(D = R) = 0.78$
- $P(G = Mm) = 0.30$
- $P(D = R|G = MM) = \frac{P(D=R,G=MM)}{P(G=MM)} = \frac{0.47}{0.55} = 0.85$
- $P(D = R, G = MM) = P(D = R)\,P(G = MM|D = R) = 0.78 \times \frac{0.47}{0.78} = 0.47$
- Note que $P(D = R).P(G = MM) = 0.78 \times 0.55 = 0.429$

Um caso simples

Doença, Genótipo

	mm	Mm	MM	
R	0.10	0.21	0.47	0.78
S	0.05	0.09	0.08	0.22
	0.15	0.30	0.55	1

- $P(D = R) = 0.78$
- $P(G = Mm) = 0.30$
- $P(D = R|G = MM) = \frac{P(D=R,G=MM)}{P(G=MM)} = \frac{0.47}{0.55} = 0.85$
- $P(D = R, G = MM) = P(D = R)\,P(G = MM|D = R) = 0.78 \times \frac{0.47}{0.78} = 0.47$
- Note que $P(D = R).P(G = MM) = 0.78 \times 0.55 = 0.429$

Um caso simples

Doença, Genótipo

	mm	Mm	MM	
R	0.10	0.21	0.47	0.78
S	0.05	0.09	0.08	0.22
	0.15	0.30	0.55	1

- $P(D = R) = 0.78$
- $P(G = Mm) = 0.30$
- $P(D = R|G = MM) = \frac{P(D=R,G=MM)}{P(G=MM)} = \frac{0.47}{0.55} = 0.85$
- $P(D = R, G = MM) = P(D = R)\, P(G = MM|D = R) = 0.78 \times \frac{0.47}{0.78} = 0.47$
- Note que $P(D = R).P(G = MM) = 0.78 \times 0.55 = 0.429$

Teorema de Bayes

Thomas Bayes, 1701–1761

$$P(A|B) = \frac{P(A)\ P(B|A)}{P(B)}$$

- $P(A)$: “priori”
- $P(A|B)$: “posteriori”
- $P(B|A)/P(B)$: suporte que B fornece para A

Conteúdo

Variável Discreta

Exemplo - Distribuição Binomial

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, proveniente de um retrocruzamento.
- Neste caso, temos teoricamente 50% dos indivíduos com este genótipo ($\theta = 1/2$)
- Qual a probabilidade de observarmos x genótipos Aa numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
  - $P(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1 - \theta)^{(n-x)}$
- Note que estamos assumindo que os eventos são independentes!

Variável Discreta

Exemplo - Distribuição Binomial

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, proveniente de um retrocruzamento.
- Neste caso, temos teoricamente 50% dos indivíduos com este genótipo ($\theta = 1/2$)
- Qual a probabilidade de observarmos x genótipos Aa numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
  - $P(x) = \begin{pmatrix} n \\ x \end{pmatrix} \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$
- Note que estamos assumindo que os eventos são independentes!

Variável Discreta

Exemplo - Distribuição Binomial

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, proveniente de um retrocruzamento.
- Neste caso, temos teoricamente 50% dos indivíduos com este genótipo ($\theta = 1/2$)
- Qual a probabilidade de observarmos x genótipos Aa numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
  - $P(x) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$
- Note que estamos assumindo que os eventos são independentes!

Variável Discreta

Exemplo - Distribuição Binomial

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, proveniente de um retrocruzamento.
- Neste caso, temos teoricamente 50% dos indivíduos com este genótipo ($\theta = 1/2$)
- Qual a probabilidade de observarmos x genótipos Aa numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
  - $P(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$
- Note que estamos assumindo que os eventos são independentes!

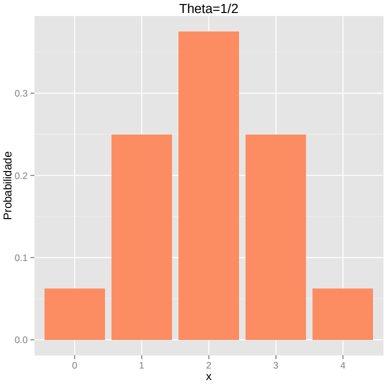
Variável Discreta

Exemplo - Distribuição Binomial

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, proveniente de um retrocruzamento.
- Neste caso, temos teoricamente 50% dos indivíduos com este genótipo ($\theta = 1/2$)
- Qual a probabilidade de observarmos x genótipos Aa numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
  - $P(x) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$
- Note que estamos assumindo que os eventos são independentes!

Distribuição Binomial

Exemplo



Distribuição Binomial

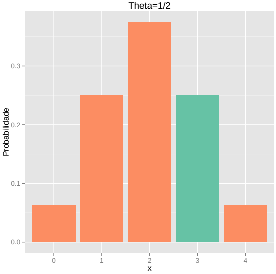
Exemplo

- Qual a probabilidade de observarmos 3 genótipos Aa ($x = 3$) numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
- $P(3) = \binom{4}{3}(1/2)^3[1-(1/2)]^{(4-3)} = 1/4$

Distribuição Binomial

Exemplo

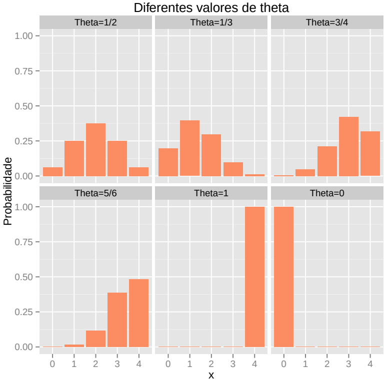
- Qual a probabilidade de observarmos 3 genótipos Aa ($x = 3$) numa amostra de 4 indivíduos ($n = 4$)?
  - $P(3) = \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) (1/2)^3 \left[1 - (1/2)\right]^{(4-3)} = 1/4$



Distribuição Binomial

Outras distribuições

- E se θ tiver outros valores?



Conteúdo

Distribuição Normal

- Grande parte das variáveis (caracteres) estudados na Genética

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exemplo: teor de açúcar numa população de cana-de-açúcar

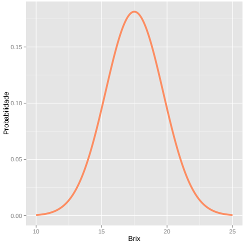
- Concentração em torno da média, dispersão, indivíduos raros, etc

Distribuição Normal

- Grande parte das variáveis (caracteres) estudados na Genética

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Exemplo: teor de açúcar numa população de cana-de-açúcar



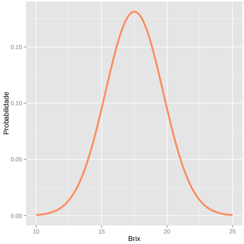
- Concentração em torno da média, dispersão, indivíduos raros, etc

Distribuição Normal

- Grande parte das variáveis (caracteres) estudados na Genética

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

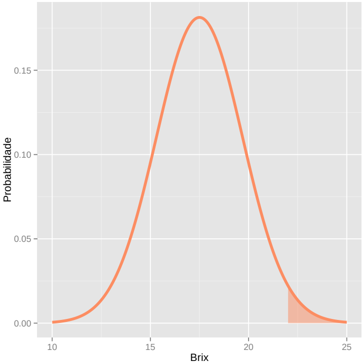
Exemplo: teor de açúcar numa população de cana-de-açúcar



- Concentração em torno da média, dispersão, indivíduos raros, etc

Densidade de Probabilidades

Qual a probab. de selecionar ind. com Brix acima de 22?



Modelo vs dados reais

- É óbvio que dados reais não estão “classificados”
- Várias técnicas são empregadas (histogramas, boxplots, ramo-e-folhas, etc

Brix, 200 valores

Modelo vs dados reais

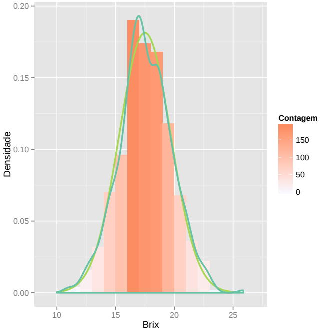
- É óbvio que dados reais não estão “classificados”
- Várias técnicas são empregadas (histogramas, boxplots, ramo-e-folhas, etc

Brix, 200 valores

Modelo vs dados reais

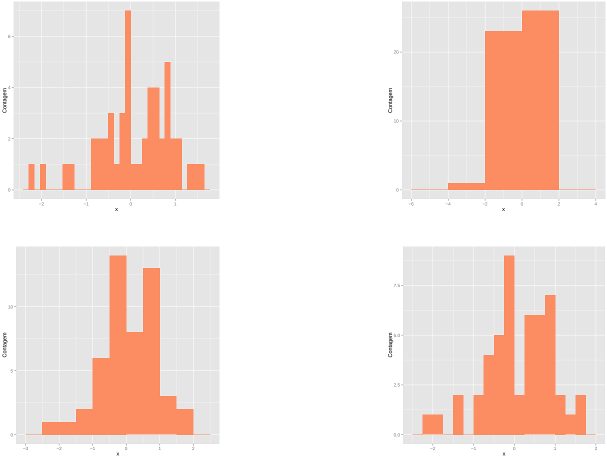
- É óbvio que dados reais não estão "classificados"
- Várias técnicas são empregadas (histogramas, boxplots, ramo-e-folhas, etc

Brix, 200 valores



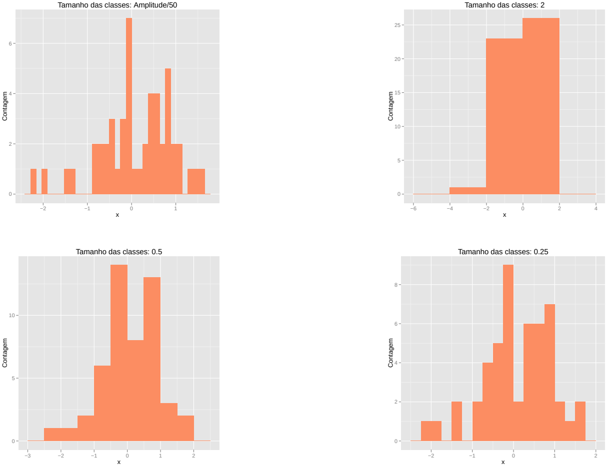
Exercício

Qual(is) conj. foram amostrado(s) em pop. com dist. normal?



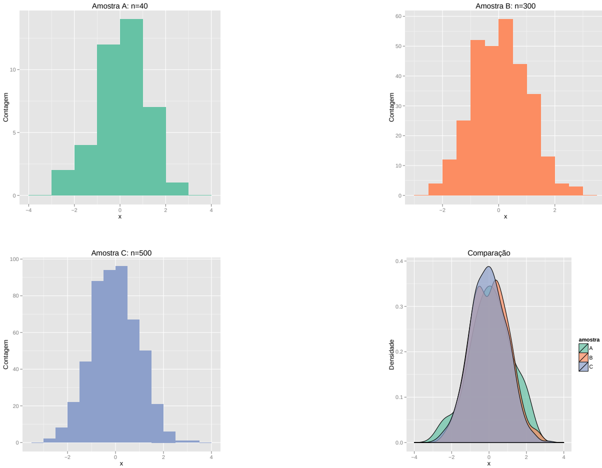
Exercício

Todos eles! $(n = 50)$



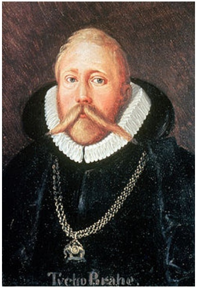
Exercício

Tamanho da amostra



História - Tycho Brahe

Movimento de corpos celestiais



Conteúdo

Variável Discreta

Retrocruzamento, com interesse em Aa

- Imagine um exp. hipotético não realizado, com 4 indivíduos

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1,}_{\text{x}} \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- Resultados possíveis:

Aa	0	1	2	3	4
Probabilidade	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$

- Média esperada:

$$E(X) = \sum xP(x)$$

- Na distribuição binomial, demonstra-se que $E(X) = np$
- No caso, $E(X) = 4(1/2)$, ou seja, 2 indivíduos com genótipo Aa

Variável Discreta

Retrocruzamento, com interesse em Aa

- Imagine um exp. hipotético não realizado, com 4 indivíduos

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- Resultados possíveis:

Aa	0	1	2	3	4
Probabilidade	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$

- Média esperada:

$$E(X) = \sum xP(x)$$

- Na distribuição binomial, demonstra-se que $E(X) = np$
- No caso, $E(X) = 4(1/2)$, ou seja, 2 indivíduos com genótipo Aa

Variável Discreta

Retrocruzamento, com interesse em Aa

- Imagine um exp. hipotético não realizado, com 4 indivíduos

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- Resultados possíveis:

Aa	0	1	2	3	4
Probabilidade	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$

- Média esperada:

$$E(X) = \sum xP(x)$$

- Na distribuição binomial, demonstra-se que $E(X) = np$
- No caso, $E(X) = 4(1/2)$, ou seja, 2 indivíduos com genótipo Aa

Variável Discreta

Retrocruzamento, com interesse em Aa

- Imagine um exp. hipotético não realizado, com 4 indivíduos

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- Resultados possíveis:

Aa	0	1	2	3	4
Probabilidade	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$

- Média esperada:

$$E(X) = \sum xP(x)$$

- Na distribuição binomial, demonstra-se que $E(X) = np$
- No caso, $E(X) = 4(1/2)$, ou seja, 2 indivíduos com genótipo Aa

Variável Discreta

Retrocruzamento, com interesse em Aa

- Imagine um exp. hipotético não realizado, com 4 indivíduos

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- Resultados possíveis:

Aa	0	1	2	3	4
Probabilidade	$P(0)$	$P(1)$	$P(2)$	$P(3)$	$P(4)$

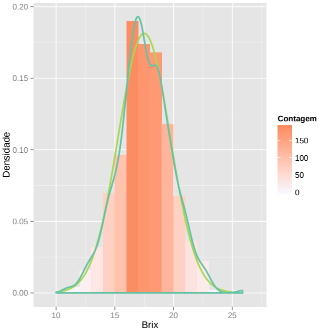
- Média esperada:

$$E(X) = \sum xP(x)$$

- Na distribuição binomial, demonstra-se que $E(X) = np$
- No caso, $E(X) = 4(1/2)$, ou seja, 2 indivíduos com genótipo Aa

Variável Contínua

Brix de 200 indivíduos, cana-de-açúcar



- Qual a média desse experimento, com base no histograma?

Variável Contínua

- Qual a média esperada para uma variável contínua?
- Esperança Matemática:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

- Demonstra-se que, no caso da distribuição normal, $E(X) = \mu$

Variável Contínua

- Qual a média esperada para uma variável contínua?
- Esperança Matemática:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x)\, dx$$

- Demonstra-se que, no caso da distribuição normal, $E(X) = \mu$

Variável Contínua

- Qual a média esperada para uma variável contínua?
- Esperança Matemática:

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) \, dx$$

- Demonstra-se que, no caso da distribuição normal, $E(X) = \mu$

Conteúdo

Alguns conceitos

Experimento

- Conjunto de dados
- Informações sobre como esses dados foram coletados

Inferência estatística

- Desejamos explicitar o modelo que deu origem aos dados
- Usualmente, o modelo envolve um ou mais parâmetros desconhecidos
- Os parâmetros devem ser estimados a partir dos dados

Alguns conceitos

Experimento

- Conjunto de dados
- Informações sobre como esses dados foram coletados

Inferência estatística

- Desejamos explicitar o modelo que deu origem aos dados
- Usualmente, o modelo envolve um ou mais parâmetros desconhecidos
- Os parâmetros devem ser estimados a partir dos dados

Alguns conceitos

Experimento

- Conjunto de dados
- Informações sobre como esses dados foram coletados

Inferência estatística

- Desejamos explicitar o modelo que deu origem aos dados
- Usualmente, o modelo envolve um ou mais parâmetros desconhecidos
- Os parâmetros devem ser estimados a partir dos dados

Alguns conceitos

Experimento

- Conjunto de dados
- Informações sobre como esses dados foram coletados

Inferência estatística

- Desejamos explicitar o modelo que deu origem aos dados
- Usualmente, o modelo envolve um ou mais parâmetros desconhecidos
- Os parâmetros devem ser estimados a partir dos dados

Método da Verossimilhança

- Suponha que um modelo probabilístico tenha sido formulado para um experimento
- Imagine que esse modelo envolva um parâmetro θ
- Desejamos usar os dados para estimar θ
- Formalmente, desejamos determinar quais são os possíveis valores de θ mais plausíveis (prováveis, verossímeis), à luz das observações

Método da Verossimilhança

- Suponha que um modelo probabilístico tenha sido formulado para um experimento
- Imagine que esse modelo envolva um parâmetro θ
- Desejamos usar os dados para estimar θ
- Formalmente, desejamos determinar quais são os possíveis valores de θ mais plausíveis (prováveis, verossímeis), à luz das observações

Método da Verossimilhança

- Suponha que um modelo probabilístico tenha sido formulado para um experimento
- Imagine que esse modelo envolva um parâmetro θ
- Desejamos usar os dados para estimar θ
- Formalmente, desejamos determinar quais são os possíveis valores de θ mais plausíveis (prováveis, verossímeis), à luz das observações

Método da Verossimilhança

- Suponha que um modelo probabilístico tenha sido formulado para um experimento
- Imagine que esse modelo envolva um parâmetro θ
- Desejamos usar os dados para estimar θ
- Formalmente, desejamos determinar quais são os possíveis valores de θ mais plausíveis (prováveis, verossímeis), à luz das observações

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, com 2 alelos para esse loco.
- Desejamos estimar essa proporção.
- Para tanto, selecionamos aleatoriamente n indivíduos e verificamos seu genótipo.
- Após o experimento, notamos que x deles são Aa
- A probabilidade de observarmos esse evento E é $P(E;\theta) =$ probab. de x, de um total de n indivíduos, possuírem o genótipo Aa

$$P(E;\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$$

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, com 2 alelos para esse loco.
- Desejamos estimar essa proporção.
- Para tanto, selecionamos aleatoriamente n indivíduos e verificamos seu genótipo.
- Após o experimento, notamos que x deles são Aa
- A probabilidade de observarmos esse evento E é $P(E;\theta) =$ probab. de x, de um total de n indivíduos, possuírem o genótipo Aa

$$P(E;\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$$

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, com 2 alelos para esse loco.
- Desejamos estimar essa proporção.
- Para tanto, selecionamos aleatoriamente n indivíduos e verificamos seu genótipo.
- Após o experimento, notamos que x deles são Aa
- A probabilidade de observarmos esse evento E é $P(E;\theta) =$ probab. de x, de um total de n indivíduos, possuírem o genótipo Aa

$$P(E;\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$$

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, com 2 alelos para esse loco.
- Desejamos estimar essa proporção.
- Para tanto, selecionamos aleatoriamente n indivíduos e verificamos seu genótipo.
- Após o experimento, notamos que x deles são Aa
- A probabilidade de observarmos esse evento E é $P(E;\theta) =$ probab. de x, de um total de n indivíduos, possuírem o genótipo Aa

$$P(E;\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$$

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Seja θ a proporção de indivíduos Aa numa população grande e homogênea, com 2 alelos para esse loco.
- Desejamos estimar essa proporção.
- Para tanto, selecionamos aleatoriamente n indivíduos e verificamos seu genótipo.
- Após o experimento, notamos que x deles são Aa
- A probabilidade de observarmos esse evento E é $P(E;\theta) =$ probab. de x, de um total de n indivíduos, possuírem o genótipo Aa

$$P(E;\theta) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$$

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3}\theta^3(1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3}\theta^3(1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3} \theta^3 (1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3} \theta^3 (1-\theta)^{(4-3)}$
    - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
    - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
    - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
    - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
    - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3}\theta^3(1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3} \theta^3 (1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3}\theta^3(1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \binom{4}{3}\theta^3(1-\theta)^{(4-3)}$
  - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
  - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
  - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
  - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
  - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Método da Verossimilhança

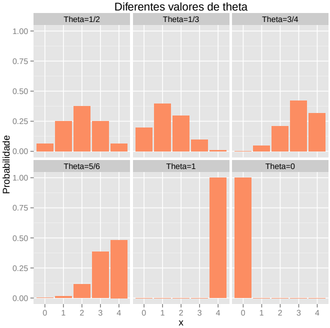
Exemplo

- Suponha que $x = 3$ e $n = 4$
- Note que, nesta situação, θ não é conhecido
- $P(E;\theta) = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} \theta^3 (1-\theta)^{(4-3)}$
    - Se $\theta = 1/2$, $P(E;\theta) = 0.25$
    - Se $\theta = 1/3$, $P(E;\theta) = 0.10$
    - Se $\theta = 3/4$, $P(E;\theta) = 0.42$
    - Se $\theta = 5/6$, $P(E;\theta) = 0.39$
    - Se $\theta = 1$, $P(E;\theta) = 0$
- Qual valor de θ é mais plausível?

Verossimilhança

Distribuições

- De qual distribuição os dados foram amostrados?



- Note que é mais fácil rejeitar do que aceitar

Conteúdo

Método da Verossimilhança

Definição

- A função de verossimilhança de θ é definida como $L(\theta) = c \cdot P(E; \theta)$
- Função de Verossimilhança: função densidade de probabilidade das observações, interpretada como uma função dos parâmetros que determinam a distribuição (Siegmund e Yakir, 2007)
- Edwards (1992): The *likelihood* $L(H|R)$, of the hypothesis H given data R, and a specific model, is proportional to $P(R|H)$, the constant of proportionality being arbitrary.

Método da Verossimilhança

Definição

- A função de verossimilhança de θ é definida como $L(\theta) = c \cdot P(E;\theta)$
- Função de Verossimilhança: função densidade de probabilidade das observações, interpretada como uma função dos parâmetros que determinam a distribuição (Siegmund e Yakir, 2007)
- Edwards (1992): The *likelihood* $L(H|R)$, of the hypothesis H given data R, and a specific model, is proportional to $P(R|H)$, the constant of proportionality being arbitrary.

Método da Verossimilhança

Definição

- A função de verossimilhança de θ é definida como $L(\theta) = c \cdot P(E; \theta)$
- Função de Verossimilhança: função densidade de probabilidade das observações, interpretada como uma função dos parâmetros que determinam a distribuição (Siegmund e Yakir, 2007)
- Edwards (1992): The *likelihood* $L(H|R)$, of the hypothesis H given data R, and a specific model, is proportional to $P(R|H)$, the constant of proportionality being arbitrary.

Método da Verossimilhança

Definição

- Likelihood is the hypothetical probability that an event that has already occurred would yield a specific outcome. The concept differs from that of a probability in that a probability refers to the occurrence of future events, while a likelihood refers to past events with known outcomes. (http://mathworld.wolfram.com/Likelihood.html)
- $L(\theta) \propto P(E;\theta)$
- $L(\theta) \propto \theta^x(1-\theta)^{(n-x)}$ (no caso da dist. binomial)
- A constante c, por não depender dos parâmetros, normalmente é desconsiderada

Método da Verossimilhança

Definição

- Likelihood is the hypothetical probability that an event that has already occurred would yield a specific outcome. The concept differs from that of a probability in that a probability refers to the occurrence of future events, while a likelihood refers to past events with known outcomes. (http://mathworld.wolfram.com/Likelihood.html)
- $L(\theta) \propto P(E;\theta)$
- $L(\theta) \propto \theta^{x}(1-\theta)^{(n-x)}$ (no caso da dist. binomial)
- A constante c, por não depender dos parâmetros, normalmente é desconsiderada

Verossimilhança

Definição

- Sorensen e Gianola (2002): Sejam **y** os dados observados, resultado de um processo estocástico caracterizado por um modelo com distribuição (densidade) $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A distribuição (densidade) das observações é portanto $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A verossimilhança $L(\theta)$ ou $L(\theta|\mathbf{y})$ é obtida com base em uma "inversão" deste conceito
- Por definição: $L(\theta|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\theta)$

Verossimilhança

Definição

- Sorensen e Gianola (2002): Sejam **y** os dados observados, resultado de um processo estocástico caracterizado por um modelo com distribuição (densidade) $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A distribuição (densidade) das observações é portanto $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A verossimilhança $L(\theta)$ ou $L(\theta|\mathbf{y})$ é obtida com base em uma "inversão" deste conceito
- Por definição: $L(\theta|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\theta)$

Verossimilhança

Definição

- Sorensen e Gianola (2002): Sejam $\mathbf{y}$ os dados observados, resultado de um processo estocástico caracterizado por um modelo com distribuição (densidade) $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A distribuição (densidade) das observações é portanto $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A verossimilhança $L(\theta)$ ou $L(\theta|\mathbf{y})$ é obtida com base em uma "inversão" deste conceito
- Por definição: $L(\theta|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\theta)$

Verossimilhança

Definição

- Sorensen e Gianola (2002): Sejam **y** os dados observados, resultado de um processo estocástico caracterizado por um modelo com distribuição (densidade) $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A distribuição (densidade) das observações é portanto $p(\mathbf{y}|\theta)$
- A verossimilhança $L(\theta)$ ou $L(\theta|\mathbf{y})$ é obtida com base em uma "inversão" deste conceito
- Por definição: $L(\theta|\mathbf{y}) \propto p(\mathbf{y}|\theta)$

Exemplo - genótipos Aa

- Dados: $\mathbf{y_i}$ $(i = 1, \ldots, n; n = 4)$

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y_i}|\theta)$

$$\underbrace{\theta, \theta, \ldots, \theta}_{\text{x}}, \underbrace{(1-\theta), (1-\theta), \ldots, (1-\theta)}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{n-x}$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) \propto \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Exemplo - genótipos Aa

- Dados: $\mathbf{y_i}$ $(i = 1, \ldots, n; n = 4)$

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y_i}|\theta)$

$$\underbrace{\theta, \theta, \ldots, \theta}_{\text{x}}, \underbrace{(1-\theta), (1-\theta), \ldots, (1-\theta)}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \binom{n}{x} \theta^x (1-\theta)^{n-x}$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) \propto \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Exemplo - genótipos Aa

- Dados: $\mathbf{y_i}$ $(i = 1, \ldots, n; n = 4)$

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y_i}|\theta)$

$$\underbrace{\theta, \theta, \ldots, \theta}_{\text{x}}, \underbrace{(1-\theta), (1-\theta), \ldots, (1-\theta)}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{n-x}$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) \propto \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Exemplo - genótipos Aa

- Dados: $\mathbf{y_i}$ $(i = 1, \ldots, n; n = 4)$

$$\underbrace{1, 1, \ldots, 1}_{\text{x}}, \underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \prod_{i=1}^{n} p(\mathbf{y_i}|\theta)$

$$\underbrace{\theta, \theta, \ldots, \theta}_{\text{x}}, \underbrace{(1-\theta), (1-\theta), \ldots, (1-\theta)}_{\text{n-x}}$$

- $p(\mathbf{y_i}|\theta) = \left(\begin{array}{c} n \\ x \end{array} \right) \theta^x (1-\theta)^{n-x}$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) \propto \theta^x (1-\theta)^{n-x}$$

Peso de indivíduos amostrados numa pop. F_2

- Um modelo possível: $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Qual seria um modelo para estudar a variação do peso dos alunos da sala de aula?

Peso de indivíduos amostrados numa pop. F_2

- Um modelo possível: $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Qual seria um modelo para estudar a variação do peso dos alunos da sala de aula?

Peso de indivíduos amostrados numa pop. F_2

- Um modelo possível: $y_i \sim N(\mu, \sigma^2)$, sendo $\theta = (\mu, \sigma^2)$
- Verossimilhança:

$$L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

- Qual seria um modelo para estudar a variação do peso dos alunos da sala de aula?

Conteúdo

Método da Verossimilhança

- Para simplificar, é usual trabalharmos com o log de $L(\theta)$
- Qual a razão?

- Notação: $l(\theta) = \log_e L(\theta) = \log L(\theta)$
- $\frac{d\, l(\theta)}{d\theta}$ é dita função score
- $I(\theta) = -\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}$ é dita função de informação de Fisher

Método da Verossimilhança

- Para simplificar, é usual trabalharmos com o log de $L(\theta)$
- Qual a razão?

- Notação: $l(\theta) = \log_e L(\theta) = \log L(\theta)$
- $\frac{d\, l(\theta)}{d\theta}$ é dita função score
- $I(\theta) = -\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}$ é dita função de informação de Fisher

Método da Verossimilhança

- Para simplificar, é usual trabalharmos com o log de $L(\theta)$
- Qual a razão?

Atenção Os pontos de máximo e mínimo não se alteram após o uso do logaritmo (função *monótona*)

- Notação: $l(\theta) = \log_e L(\theta) = \log L(\theta)$
- $\frac{d\, l(\theta)}{d\theta}$ é dita função score
- $I(\theta) = -\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}$ é dita função de informação de Fisher

Método da Verossimilhança

- Para simplificar, é usual trabalharmos com o log de $L(\theta)$
- Qual a razão?

Atenção Os pontos de máximo e mínimo não se alteram após o uso do logaritmo (função *monótona*)

- Notação: $l(\theta) = \log_e L(\theta) = \log L(\theta)$
- $\frac{d\, l(\theta)}{d\theta}$ é dita função score
- $I(\theta) = -\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}$ é dita função de informação de Fisher

Método da Verossimilhança

- Para simplificar, é usual trabalharmos com o log de $L(\theta)$
- Qual a razão?

Atenção Os pontos de máximo e mínimo não se alteram após o uso do logaritmo (função *monótona*)

- Notação: $l(\theta) = \log_e L(\theta) = \log L(\theta)$
- $\frac{d\, l(\theta)}{d\theta}$ é dita função score
- $I(\theta) = -\frac{d^2 l(\theta)}{d\theta^2}$ é dita função de informação de Fisher

Estimador de Máxima Verossimilhança

Exercício

1. Qual a função de verossimilhança do exemplo anterior (binomial)?
2. Qual a função score?
3. Qual é o ponto de máximo de $l(\theta)$, dito $\hat{\theta}$?

Estimador de Máxima Verossimilhança

Exercício

1. Qual a função de verossimilhança do exemplo anterior (binomial)?
2. Qual a função score?
3. Qual é o ponto de máximo de $l(\theta)$, dito $\hat{\theta}$?

Estimador de Máxima Verossimilhança

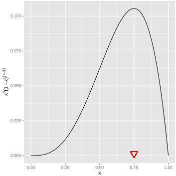
Exercício

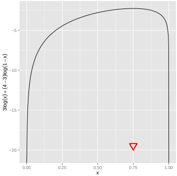
1. Qual a função de verossimilhança do exemplo anterior (binomial)?
2. Qual a função score?
3. Qual é o ponto de máximo de $l(\theta)$, dito $\hat{\theta}$?

Estimador de Máxima Verossimilhança

Exercício

1. $L(\theta) \propto \theta^{x}(1-\theta)^{(n-x)}$
2. $l(\theta) = x \ \log(\theta) + (n-x) \ \log(1-\theta)$
3. $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$





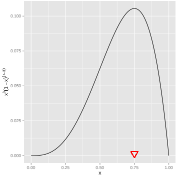
MLE

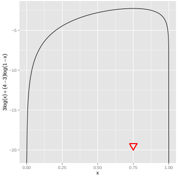
- $\hat{\theta} = 3/4$ é o MLE de θ

Estimador de Máxima Verossimilhança

Exercício

1. $L(\theta) \propto \theta^x (1-\theta)^{(n-x)}$
2. $l(\theta) = x \ \log(\theta) + (n-x) \ \log(1-\theta)$
3. $\hat{\theta} = \frac{x}{n}$





MLE

- $\hat{\theta} = 3/4$ é o MLE de θ

MLE

Distribuição Normal

1. $L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{\mathbf{y}}$
3. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}$

MLE e Quadrados Mínimos

- Sob normalidade, os *MLE*'s também são estimadores de quadrados mínimos

MLE

Distribuição Normal

1. $L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{\mathbf{y}}$
3. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \bar{y})^2}{n}$

MLE e Quadrados Mínimos

- Sob normalidade, os *MLE*'s também são estimadores de quadrados mínimos

MLE

Distribuição Normal

1. $L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{\mathbf{y}}$
3. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}$

MLE e Quadrados Mínimos

- Sob normalidade, os *MLE's* também são estimadores de quadrados mínimos

MLE

Distribuição Normal

1. $L(\theta|\mathbf{y}) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(y_i-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
2. $\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n} = \bar{\mathbf{y}}$
3. $\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i-\bar{y})^2}{n}$

MLE e Quadrados Mínimos

- Sob normalidade, os *MLE's* também são estimadores de quadrados mínimos

Principais Referências

Gonick, L; Smith, W.
The Cartoon Guide to Statistics
Editora Harper Perennial, 1993

Kalbfleisch, J.G.
Probability and Statistical Inference
Editora Springer-Verlag, 1985 Volume 1

Edwards, A.W.F.
Likelihood (expanded edition)
The John Hopkins University, 1992

Principais Referências

Sorensen, D.; Gianola, D.
Likelihood, Bayesian, and MCMC Methods in Quantitative Genetics
Editora Springer-Verlag, 2002

Koller, D.; Friedman, N.
Probabilistic Graphical Models: Principles and Techniques
MIT Press, 2009