LGN5830 - Biometria de Marcadores Genéticos
Tópico 1: Noções Básicas de Cálculo

Antonio Augusto Franco Garcia
http://about.me/augusto.garcia
augusto.garcia@usp.br

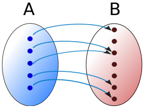
Departamento de Genética
ESALQ/USP
2015

Conteúdo

Funções

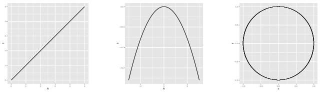
Definição

Sejam A e B dois conjuntos. Uma função f definida em A com valores em B é uma lei que associa a todo elemento de A um único elemento de B. Notação: $y = f(x)$



Funções

Exemplos (círculo?)



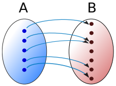
Exemplos

- Distância nos cromossomos é função da fração de recombinação
- Fenótipo é função do genótipo e do ambiente
- (Modelos, de forma geral)

Funções

Definição

O conjunto A é chamado domínio da função f, o conjunto B é o contra-domínio de f.

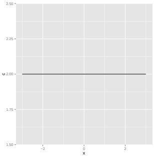


Exemplos

- Qual o domínio de $f(x) = \frac{1}{x-2}$?
- Qual o domínio de $m = -\frac{1}{2}\log(1-2r)$?

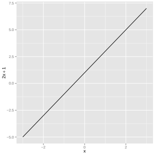
Funções Básicas

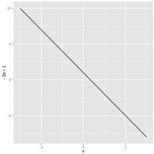
- Função Constante: $f(x) = c$



Funções Básicas

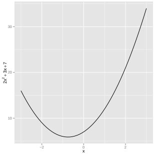
- Função afim: $f(x) = ax + b$

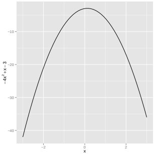




Funções Básicas

- Função Quadrática: $f(x) = ax^2 + bx + c$





Funções Básicas

- Função Exponencial

1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

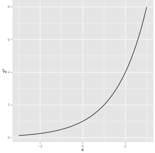
0.1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000

1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512

- Função Exponencial: $f(x) = a^x$
- Quais as *bases* (a) dos exemplos acima? E os *expoentes* (x)?

Funções Básicas

- Função Exponencial: $f(x) = a^x$



Crescimento exponencial

Invenção do Jogo de Xadrez (Wikipedia)

- "Um grão de arroz (ou trigo) para a casa 1, 2 para a casa 2, 4 para a próxima, e assim por diante"
- Quantos grãos são necessários?
  - **Resp:** $1 + 2 + 4 + \ldots + 2^{63} = \sum_{i=0}^{63} 2^i = 18,446,744,073,709,551,615$
  - $461,168,602,000$ toneladas
  - Uma montanha de arroz maior que o Everest, mil vezes a produção mundial em 2010

Crescimento exponencial

Variabilidade Genética

- Estima-se que os humanos tenham cerca de 23 mil genes
- Assumindo 2 alelos para cada um deles, quantos genótipos diferentes são possíveis?

Funções Básicas

- Função Logarítmica

-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
$1/4$	$1/2$	1	2	4	8	16	32	64

-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0.1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000

1	2	3	4	5	6	7	8	9
$1/2$	$1/4$	$1/8$	$1/16$	$1/32$	$1/64$	$1/128$	$1/256$	$1/512$

- Função Logarítmica: $f(x) = \log_a x$

Função Logarítmica

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2^n	2	4	8	16	32	64	128	256	512

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$log_2(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Exemplo: Interprete os valores

LOD	1	2	3	4	5	6	7

Exemplo

- Calcule: 8×32
  - $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 256$ (ou seja, $log_2 256 = 8$)

- Michael Stifel (1487-1567): *Arithmetica Integra*
- **John Napier** (1614): *Mirifici logarithmorum canonis*
  - Que base poderia ser usada para facilitar os cálculos?

Função Logarítmica

n	$(1-10^{-7})^n$
1	0.9999999
2	0.9999998
3	0.9999997
4	0.9999996
5	0.9999995
6	0.9999994
7	0.9999993
8	0.9999992
9	0.9999991

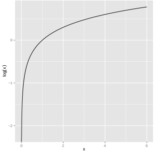
- Durante 20 anos, Napier elaborou uma tabela com 101 valores
- Um século depois, esse número foi reconhecido como a *base universal dos logaritmos*, ou e

Logaritmos


MIRIFICI
Logarithmorum
Canonis descriptio,
Ejusque usus, in utraque
Trigonometria; ut etiam in
omni Logistica Mathematica,
Amplissimi, Facillimi, &
expeditissimi explicatio.
Authore ac Inventore,
IOANNE NEPERO,
Barone Merchistonii,
&c. Scoto.
EDINBURGI,
Ex officinâ ANDREÆ HART
Bibliopolæ, CIↃ. DC. XIV.

Funções Básicas

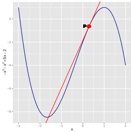
- Função Logarítmica: $f(x) = \log_a x$



Propriedades dos logaritmos

1. $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
2. $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
3. $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$
4. $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

Ideias



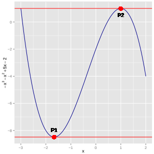
Definição

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ num ponto P qualquer é a derivada de f calculada no ponto P. Notação: $f'(x) = \frac{d\,y}{d\,x}$

Ideias

Aplicação

- Neste contexto: obtenção de pontos de máximo de funções ($\tan 0^o = 0$)



Regras básicas

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$ ($c =$ constante)
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

Exemplo

- $f(x) = x$
  - $f'(x) = 1$
- $f(x) = x^2$
  - $f'(x) = 2x$

- $g(x) = cf(x) \Rightarrow g'(x) = cf'(x)$

Exemplo

- $f(x) = 5x^8$
  - $f'(x) = 40x^7$

Regras Básicas

- $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

Exemplo

- $f(x) = 4x^4 + 7x^2 + 3$
  - $f'(x) = 16x^3 + 14x$

Regras básicas

- $f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

Exemplo

- $f(x) = (x^2 + x)(3x^4 + 5)$
  - $f'(x) = (2x + 1)(3x^4 + 5) + (x^2 + x)(12x^3)$

- $(uvx)' = u'vx + uv'x + uvx'$
- Note que para calcular a derivada de produtos de funções o processo pode ser tedioso

Regras básicas

- $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$
- Regra da cadeia:
  - Se $y = f(u)$, $u = g(x)$, $y = f\left(g(x)\right)$,

$$\frac{d\,y}{d\,x} = \frac{d\,y}{d\,u}\frac{d\,u}{d\,x}$$

Exemplo

- $y = (x^2 + 7)^3$
  - $y' = 3(x^2 + 7)^2(2x)$
- $y = \sqrt{(x^2 + 1)}$
  - $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$

Regras básicas

- $f(x) = \log_a x$, $f'(x) = \frac{1}{x}\frac{1}{\log_e a}$

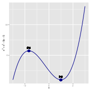
Atenção Note a conveniência com uso da base e

Exemplo

- $y = \log_{10} x$
  - $y' = \frac{1}{x}\frac{1}{log_e 10} = \frac{1}{x}\frac{1}{2.302585}$
- $y = \log_e x$
  - $y' = \frac{1}{x}$
- $y = \log_e(x^2 + 7)$
  - $y' = \frac{2x}{x^2+7}$

Máximos e mínimos

Exemplo



- O que tem em comum os pontos P_1 e P_2 (extremos relativos)?
- Resposta: $f'(P_1) = 0$ e $f'(P_2) = 0$

Cuidado Formalmente, há várias condições que devem ser verificadas

Regra Máximo: $f''(x) < 0$

Ponto de máximo

Exercício

Quais os pontos de máximo de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$?

- Sistema Algébrico Computacional:

http://maxima.sourceforge.net/

Ideias Gerais

- Dada $f'(x)$, qual é $f(x)$?
- Em outras palavras, qual é a antiderivada (ou antidiferencial) de $f'(x)$?
- Em muitos casos este cálculo é bastante simples mas, em muitas situações, técnicas complexas são requeridas

Exemplo

- $f'(x) = x^2$
  - $f(x) = \frac{x^3}{3}$
  - $f(x) = \frac{x^3}{3} + 5$
  - $f(x) = \frac{x^3}{3} + C$

Notação e Propriedades

Definição

A antiderivada de $f(x)$, denotada por $F(x) + C$, é definida como integral indefinida de $f(x)$, representada por

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Algumas propriedades

1. $\int k\,f(x)\,dx = k\int f(x)\,dx$
2. $\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$
3. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

- É fácil calcular integrais de polinômios

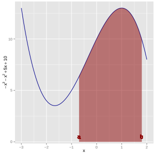
Polinômios

Calcule

- $\int (2x^3 - x^2)\,dx$
- **Resp.:** $2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C$

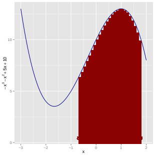
Integral de Riemann

- Qual a área sob a curva no intervalo entre a e b?



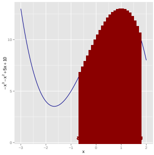
Integral de Riemann

- Circunscritos



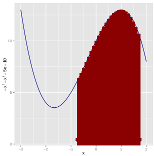
Integral de Riemann

- Sobrescritos



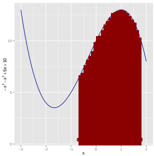
Integral de Riemann

- Metade



Integral de Riemann

- Soma de Riemann



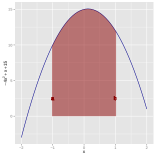
Integral

Integral definida

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Área

Exemplo: calcule a área indicada



Área

Resposta

$$\int_{-1}^{1} (-4x^2 + x + 15)\,dx = \left[-4\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 15x\right]_{-1}^{1} = \frac{58}{3}$$

Integral definida

Aplicações

- Se $f(x)$ é uma função de densidade de probabilidades, $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x)\,dx$
- Conceito de Esperança Matemática para variáveis contínuas

Referências

Howard, A.
Cálculo: um novo horizonte
Editora Bookman, 2000 Volume 1

Leithold, L.
O cálculo com geometria analítica
Editora Harbra, 1994 Volume 1