

## LGN5830 - Biometria de Marcadores Genéticos

## Tópico 1: Noções Básicas de Cálculo

Antonio Augusto Franco Garcia

<http://about.me/augusto.garcia>  
augusto.garcia@usp.brDepartamento de Genética  
ESALQ/USP  
2015

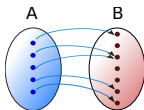
## Conteúdo

- 1 Funções
  - Definições
  - Funções Básicas
- 2 Derivadas
  - Introdução
  - Regras
  - Pontos de Máximo
- 3 Integrais
  - Definições
  - Integral Definida
- 4 Referências

## Funções

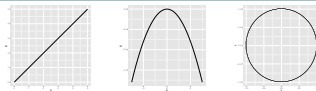
## Definição

Sejam  $A$  e  $B$  dois conjuntos. Uma função  $f$  definida em  $A$  com valores em  $B$  é uma lei que associa a **todo** elemento de  $A$  um único elemento de  $B$ .  
Notação:  $y = f(x)$



## Funções

## Exemplos (círculo?)



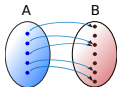
## Exemplos

- Distância nos cromossomos é função da fração de recombinação
- Fenótipo é função do genótipo e do ambiente
- (Modelos, de forma geral)

## Funções

### Definição

O conjunto  $A$  é chamado domínio da função  $f$ , o conjunto  $B$  é o contra-domínio de  $f$ .

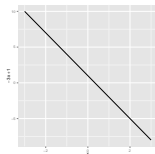
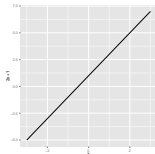


### Exemplos

- Qual o domínio de  $f(x) = \frac{1}{x-2}$ ?
- Qual o domínio de  $m = -\frac{1}{2} \log(1-2r)$ ?

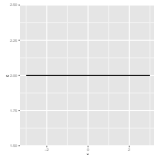
## Funções Básicas

- Função afim:  $f(x) = ax + b$



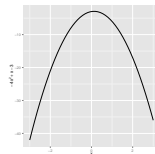
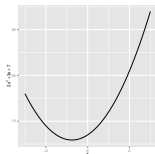
## Funções Básicas

- Função Constante:  $f(x) = c$



## Funções Básicas

- Função Quadrática:  $f(x) = ax^2 + bx + c$





## Funções Básicas

### Função Logarítmica

-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
1/4	1/2	1	2	4	8	16	32	64

-1	0	1	2	3	4	5	6	7
0.1	1	10	100	1000	10000	100000	1000000	10000000

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	1/64	1/128	1/256	1/512

### Função Logarítmica: $f(x) = \log_a x$

### Exemplo

- Calcule:  $8 \times 32$ 
  - $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = 256$  (ou seja,  $\log_2 256 = 8$ )
- Michael Stifel (1487-1567): *Arithmetica Integra*
- John Napier (1614): *Mirifici logarithmorum canonis*
  - Que base poderia ser usada para facilitar os cálculos?

## Função Logarítmica

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$2^n$	2	4	8	16	32	64	128	256	512

x	2	4	8	16	32	64	128	256	512
$\log_2(x)$	1	2	3	4	5	6	7	8	9

### Exemplo: Interprete os valores

LOD	1	2	3	4	5	6	7
-----	---	---	---	---	---	---	---

## Função Logarítmica

n	$(1 - 10^{-7})^n$
1	0.9999999
2	0.9999998
3	0.9999997
4	0.9999996
5	0.9999995
6	0.9999994
7	0.9999993
8	0.9999992
9	0.9999991

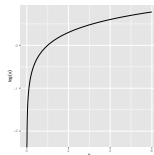
- Durante 20 anos, Napier elaborou uma tabela com 101 valores
- Um século depois, esse número foi reconhecido como a *base universal dos logaritmos*, ou *e*

## Logaritmos



## Funções Básicas

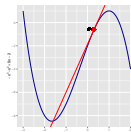
- Função Logarítmica:  $f(x) = \log_a x$



## Propriedades dos logaritmos

- 1  $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$
- 2  $\log_a(b/c) = \log_a b - \log_a c$
- 3  $\log_a b^\alpha = \alpha \log_a b$
- 4  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

## Ideias



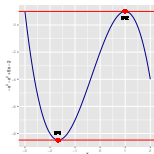
### Definição

O coeficiente angular da reta tangente ao gráfico de  $y = f(x)$  num ponto  $P$  qualquer é a derivada de  $f$  calculada no ponto  $P$ . Notação:  $f'(x) = \frac{dy}{dx}$

## Idéias

### Aplicação

- Neste contexto: obtenção de pontos de máximo de funções ( $\tan 0^\circ = 0$ )



## Regras Básicas

- $f(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x) + v'(x)$

### Exemplo

- $f(x) = 4x^4 + 7x^2 + 3$ 
  - $f'(x) = 16x^3 + 14x$

## Regras básicas

- $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$  ( $c = \text{constante}$ )
- $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$

### Exemplo

- $f(x) = x$ 
  - $f'(x) = 1$
- $f(x) = x^2$ 
  - $f'(x) = 2x$

$$g(x) = cf(x) \Rightarrow g'(x) = cf'(x)$$

### Exemplo

- $f(x) = 5x^8$ 
  - $f'(x) = 40x^7$

## Regras básicas

- $f(x) = u(x)v(x) \Rightarrow f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$

### Exemplo

- $f(x) = (x^2 + x)(3x^4 + 5)$ 
  - $f'(x) = (2x + 1)(3x^4 + 5) + (x^2 + x)(12x^3)$

$$(uvx)' = u'v'x + uv'x + uvx'$$

- Note que para calcular a derivada de produtos de funções o processo pode ser tedioso

## Regras básicas

$$\bullet f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{[v(x)]^2}$$

$$\bullet \text{Regra da cadeia:}$$

- Se  $y = f(u)$ ,  $u = g(x)$ ,  $y = f(g(x))$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$$

## Exemplo

- $y = (x^2 + 7)^3$ 
  - $y' = 3(x^2 + 7)^2(2x)$
- $y = \sqrt{(x^2 + 1)}$ 
  - $y' = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$

## Regras básicas

$$\bullet f(x) = \log_a x, f'(x) = \frac{1}{x \log_e a}$$

Atenção Note a conveniência com uso da base  $e$

## Exemplo

- $y = \log_{10} x$ 
  - $y' = \frac{1}{x \log_e 10} = \frac{1}{x \cdot 2.302585}$
- $y = \log_e x$ 
  - $y' = \frac{1}{x}$
- $y = \log_e(x^2 + 7)$ 
  - $y' = \frac{2x}{x^2 + 7}$

## Máximos e mínimos

## Exemplo



- O que tem em comum os pontos  $P_1$  e  $P_2$  (extremos relativos)?
- Resposta:  $f'(P_1) = 0$  e  $f'(P_2) = 0$

Cuidado Formalmente, há várias condições que devem ser verificadas

Regra Máximo:  $f''(x) < 0$

## Ponto de máximo

## Exercício

Quais os pontos de máximo de  $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$ ?

- Sistema Algébrico Computacional:

<http://maxima.sourceforge.net/>

## Ideias Gerais

- Dada  $f'(x)$ , qual é  $f(x)$ ?
- Em outras palavras, qual é a **antiderivada** (ou antidiferencial) de  $f'(x)$ ?
- Em muitos casos este cálculo é bastante simples mas, em muitas situações, técnicas complexas são requeridas

## Exemplo

- $f'(x) = x^2$ 
  - $f(x) = \frac{x^3}{3}$
  - $f(x) = \frac{x^3}{3} + 5$
  - $f(x) = \frac{x^3}{3} + C$

## Polinômios

## Calcule

- $\int (2x^3 - x^2) dx$
- Resp.:  $2\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + C$

## Notação e Propriedades

## Definição

A antiderivada de  $f(x)$ , denotada por  $F(x) + C$ , é definida como integral indefinida de  $f(x)$ , representada por

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

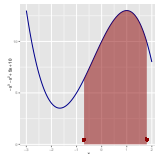
## Algumas propriedades

- 1  $\int k f(x) dx = k \int f(x) dx$
- 2  $\int [f(x) + g(x)] dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$
- 3  $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}, n \neq -1$

- É fácil calcular integrais de polinômios

## Integral de Riemann

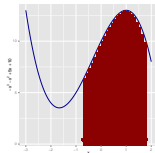
- Qual a área sob a curva no intervalo entre  $a$  e  $b$ ?





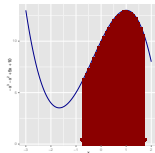
## Integral de Riemann

- Circunscritos



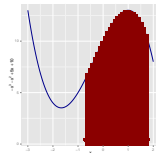
## Integral de Riemann

- Metade



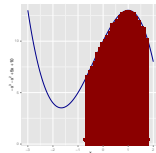
## Integral de Riemann

- Sobrescritos



## Integral de Riemann

- Soma de Riemann



## Integral

### Integral definida

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

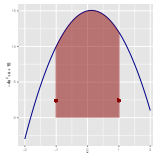
## Área

### Resposta

$$\int_{-1}^1 (-4x^2 + x + 15) dx = \left[ -4\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 15x \right]_{-1}^1 = \frac{82}{3}$$

## Área

### Exemplo: calcule a área indicada



## Integral definida

### Aplicações

- Se  $f(x)$  é uma função de densidade de probabilidades,  
 $P(a \leq x \leq b) = \int_a^b f(x) dx$
- Conceito de Esperança Matemática para variáveis contínuas

## Referências



Howard, A.

Cálculo: um novo horizonte

*Editora Bookman, 2000* Volume 1



Leithold, L.

O cálculo com geometria analítica

*Editora Harbra, 1994* Volume 1