Anexos

Guilherme Navarro NºUSP:8943160 e Leonardo NUSP: 9793436

Exercício 5

Considere $X_i|\lambda \sim Exp(\lambda), i = 1, 2, .., n$ ind. e $\lambda \sim Gama(a, b)$.

(c) A partir da aproximação normal obtida em (b), obtenha a distribuição a posteriori aproximada para λ.

Resolução

Como $\phi|x_i \overset{a}{\approx} N(ln(\frac{A}{B}), \frac{1}{B})$ logo $\phi = ln(\lambda) \Rightarrow \lambda = e^{\phi}$ Pelo teorema de tranformação de variáveis utilizando o método jacobiano, temos:

$$f_\lambda(ln(\lambda)) = f_\phi(ln(\lambda))|\frac{d\phi}{d\lambda}| \propto \frac{1}{A}e^{-\frac{1}{2A}(ln(\lambda)-ln(\frac{A}{B}))^2} * |\frac{1}{\lambda}| \propto \frac{1}{A\lambda}e^{-\frac{1}{2A}(ln(\lambda)-ln(\frac{A}{B}))^2}\ (I)$$

Substituindo os valores em (I)

$$\frac{1}{(a+n)\lambda}e^{-\frac{1}{2(a+n)}(ln(\lambda)-ln(\frac{a+n}{b+n\bar{x}}))^2}\ (I)$$

Porém (I) é o núcleo da distribuição log-Normal, com isso temos que a partir da distribuição a posteriori obtida no item b, a distribuição a posteriori para λ é $Log-Normal(ln(\frac{a+n}{b+n\bar{x}}), \frac{1}{a+n})$

(d) Para $n = 10$ e $x = (8, 23, 22, 2, 4, 3, 11, 4, 23, 21)$, obtenha as distribuições a posteriori de λ exata e aproximadas. Usando o programa **R**, desenhe essas densidades em um gráfico e compare. Considere que a priori $\mathbb{E}[\lambda] = 1$ e $Var[\lambda] = 10$.

Resolução

Considerando que a priori $\mathbb{E}[\lambda] = 1$ e $Var[\lambda] = 10$, logo como sabemos que a distribuição gamma $\mathbb{E}[\lambda] = \frac{a}{b}$ e $Var[\lambda] = \frac{a}{b^2}$. Temos que: $\mathbb{E}[\lambda] = \frac{a}{b} = 1$ e $Var[\lambda] = \frac{a}{b^2} = 10$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b \\ a = 10b^2 \end{cases} \Rightarrow a = b = \frac{1}{10}$$

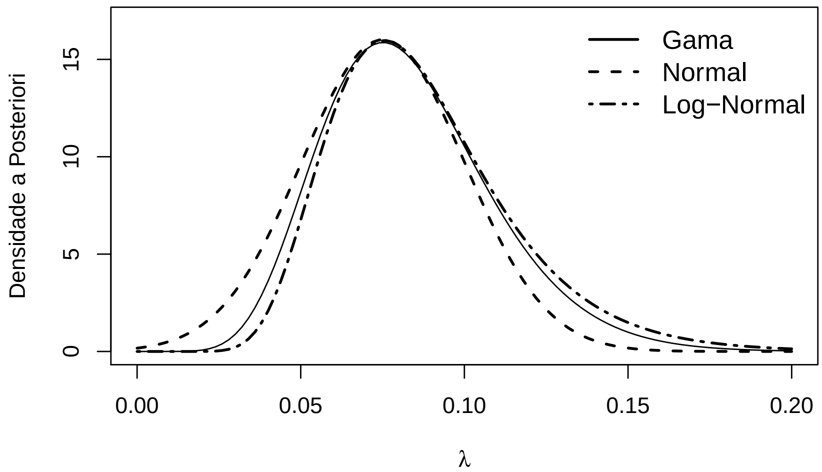
Logo a distribuição a priori para $\lambda \sim Gamma(0.1, 0.1)$. Assim do item a), temos a sguinte distribuição a posteriori $\lambda|x_i \sim Gamma(A, B)$ onde:

$$\begin{cases} A = a + n \\ B = b + \sum_{i=1}^{n} x_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 0.1 + 10 = 10.1 \\ B = 0.1 + 121 = 121.1 \end{cases}$$

Logo a distribuição a posteriori exata é $\lambda|x_i \sim Gamma(10.1, 121.1)$

Agora a calulando a deistribuição a posteriori aproximada, temos: do item a) temos que a aproixmação da normal para $\lambda|x_i$ é $N(\frac{A-1}{B}, \frac{A-1}{B^2}) \Rightarrow \lambda|x_i \overset{a}{\approx} N(0.075, 0.025^2)$.

Logo podemos concluir que a aproximação pela normal é até que razoávelmente boa.



Exercício 6

Utilizar os dados dos tempos associados aos maratonistas de Nova York (marathontimes). Considere agora uma distribuição a priori informativa para média $\mu \sim N(300, 100)$ e uma não informativa para variância $f(\sigma^2) \propto \frac{1}{\sigma^2}$. Além disso, suponha independência entre elas.

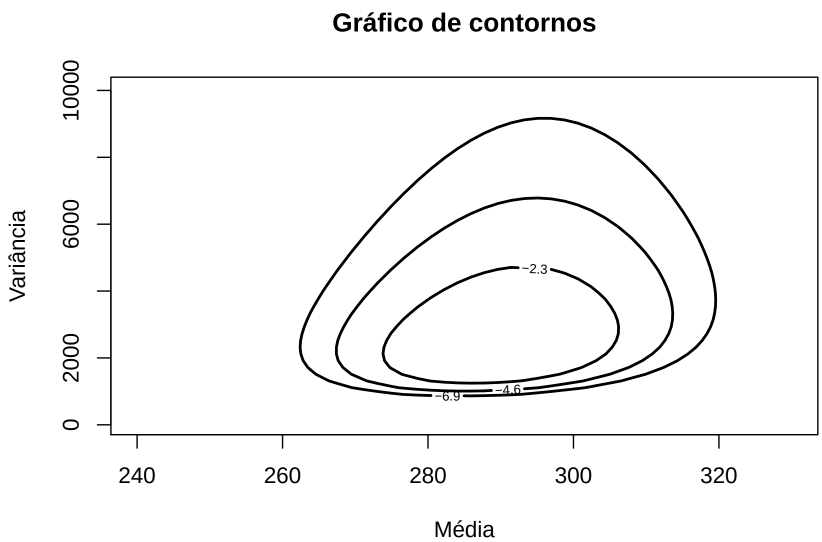
(a) Escreva uma função no **R** para calcular o logaritimo da posteriori. Desenhe os gráficos de contornos dessa posteriori (usar *mycontour*).

Resolução

Sendo X os dados, considerando uma distribuição a posteriori para μ e σ^2 como

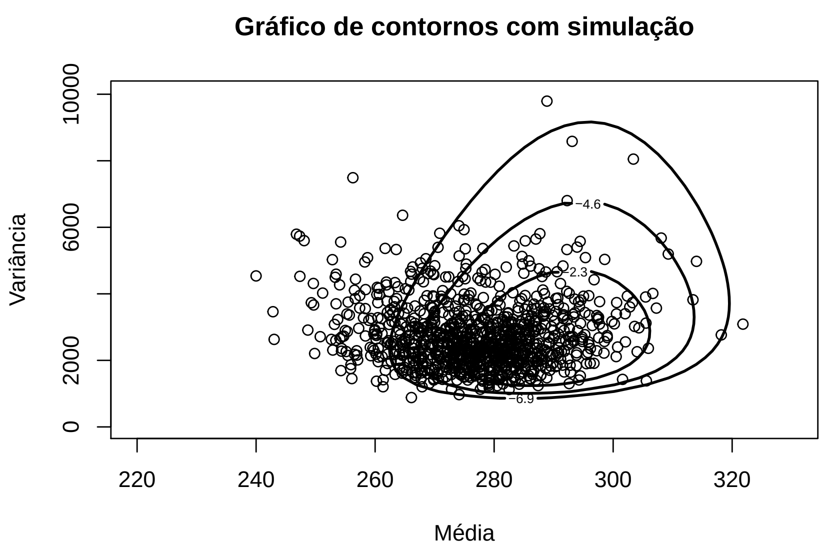
$$f(\mu, \sigma^2|X) \propto \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2} \frac{1}{\sigma^2} e^{\frac{(\mu-300)^2}{200}} = \frac{1}{(\sigma^2)^{\frac{n}{2}+1}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2 - \frac{(\mu-300)^2}{200}}$$

```
library(LearnBayes)
log_posterior <- function(theta,dados){ # log da posteriori de theta
    n <- length(dados) # tamanho dos dados
    mu <- theta[1] # parametro mu
    sigma2 <- theta[2] # parametro sigma²
    x <- dados # dados
    -n/2*log(sigma2)-1/(2*sigma2)*sum((x-mu)^2)-log(sigma2)-(mu-300)^2/200
    }
```



(b) Simular 1000 valores dessa distribuição a posteiori e incluir no gráfico.

Resolução



(c) Seja $CV = \frac{\sigma}{\mu}$ o coeficiente de variação populacional. Utilizando os valores simulados anteriormente, estimar CV. Apresente os quantis de ordem 0.05, 0.25, 0.50, 0.75 e 0.95 da distribuição a posteriori de CV. Desenhe o histograma dos valores simulados dessa a posteriori (observe que esse histograma é uma estimativa da densidade a posteriori de CV).

Resolução

```
##       5%      25%      50%      75%      95%
## 3.988282 4.887381 5.504062 6.146965 7.187679
```