Lista IV

Guilherme NUSP: 8943160 e Leonardo NUSP: 9793436

Exercício 6

Seja $(X_1, ..., X_n)$ uma a.a. de $X \sim f_\theta$ em que:

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta_1\theta_2 x^{\theta_2 - 1} e^{-\theta_1 x^{\theta_2}}, & \text{se } x > 0, \quad \theta_1 > 0, \quad \theta_1 > 0 \\ 0, & c.c. \end{cases}$$

Temos uma amostra de tamanho $n = 100$ de $X \sim f_\theta$

1.19,	1.33,	1.29,	0.97,	0.57,	0.26,	1.46,	0.73,	0.45,	0.85,
1.67,	0.56,	0.45,	0.35,	0.52,	1.32,	1.22,	1.09,	0.27,	0.34,
0.59,	0.78,	0.55,	1.29,	1.11,	1.04,	1.21,	0.38,	0.61,	1.12,
0.72,	0.55,	0.90,	0.26,	0.90,	0.54,	0.99,	0.67,	1.36,	0.18,
0.58,	0.22,	1.38,	1.36,	0.35,	1.43,	0.04,	0.26,	0.86,	1.06,
1.47,	0.42,	0.62,	0.58,	0.65,	0.54,	0.76,	0.93,	1.15,	0.92,
1.95,	1.29,	0.64,	0.13,	1.70,	1.00,	0.75,	1.09,	1.40,	1.26,
0.87,	0.80,	0.67,	0.47,	0.66,	0.33,	0.56,	1.01,	1.54,	0.46,
1.39,	1.30,	1.17,	1.60,	1.16,	0.93,	1.27,	0.20,	1.17,	0.42,
1.53,	0.31,	1.31,	1.20,	0.75,	0.72,	1.97,	1.26,	0.48,	0.27.

a) Suponha $\theta_2 = 1$ conhecido. Apresente o estimador de MV para $\theta = \theta_1$ e sua estimativa. Insira a densidade $X \sim f_\theta$ estimada no histograma da amostra (utilize a densidade de frequencia e 10 classes com intervalos de classe iguais). Discuta os resultados.

Resolução

Toamando $\theta_2 = 1$ temos que $f_\theta(x) = \theta e^{-\theta x}$ portanto: $X \sim exp(\theta)$

Econtrar o EMV para θ:

Função de Verossimilhança: $L(\theta, x) = \prod_{i=1}^{n}[f_\theta(x)] = \prod_{i=1}^{n} \theta e^{-\theta x_i} = \theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$

Aplicando o Logaritmo na base e:

$ln(L(\theta, x)) = ln(\theta^n e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}) = nln(\theta) - \theta \sum_{i=1}^{n} x_i$

Agora derivando e igualando a zero, temos:

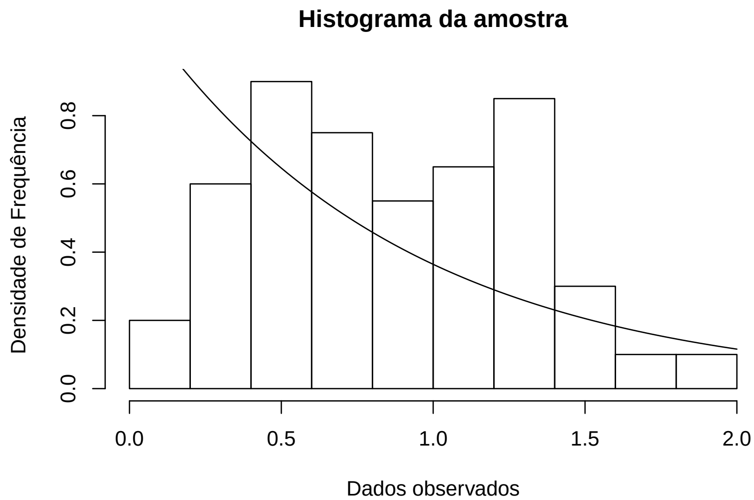
$\frac{d(ln(L(\theta,x)))}{d\theta} = \frac{n}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} x_i} = \frac{1}{\bar{X}}$

Verificando se é o ponto de máximo:

$\frac{d^2(ln(L(\theta,x)))}{d\theta^2} = -\frac{n}{\theta^2} < 0 \; \forall \; \theta \in \Theta$ e $n > 0$

Assim, sua estimativa de acordo com a amostra observada é: $\widehat{\theta}_{MV} = \frac{1}{\bar{x}} = \frac{1}{0.8721} = 1.1466575$

Plotando o histograma dos dados com a densidade $f_{\hat{\theta}}(x)$ estimada, temos:



Analisando o gráfico gerado, podemos observar que para a curva cujos os parâmetros $\theta_1 = 1.1466575$ e $\theta_2 = 1$ não se ajusta bem aos dados, com isso concluimos que θ_1 e θ_2 obtidos não são as melhores estimativas.

b) Suponha agora θ_2 desconhecido e proponha um processo iterativo para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

Resolução

Um método iterativo é que proponho é o Newton-Raphson, que consiste em:

$$\hat{\theta}^{(j+1)} = \hat{\theta}^{(j)} + H^{-1}(\hat{\theta}^{(j)})U_n(\hat{\theta}^{(j)}), \qquad j = 0, 1, ..$$

Onde $U_n(\theta)$ é a função escore $U_n : \Theta \longrightarrow \mathbb{R}^2$ uma função vetorial diferenciavel em Θ

E $H^{-1}(\theta)$ e a matriz de derivadas parciais de segunda ordem negativas de $ln(L(\theta, x))$ (matriz Hessiana)

Os elementos (i, j) são dados por:

$$H_{ij}(\theta) = -\frac{\partial^2}{\partial\theta_i \partial\theta_j} ln(L(\theta, x))$$

Onde $\hat{\theta}^{(0)}$ é o valor inicial.

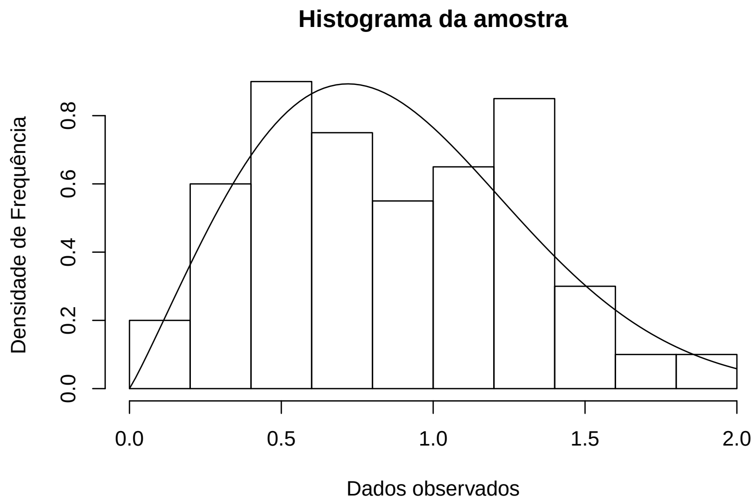
c) Utilize o processo encontrado em (b) para calcular as estimativas de MV para $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ considerando a amostra acima.

Resolução

Utilizando o método iterativo do exercício anterior considerando a amostra dada chegamos em
$\hat{\theta} = (1.03, 2.08)$

d) Insira a densidade f_θ com as estimativas encontradas em (c) e no mesmo histograma. Discutaos resultados.

Resolução



Podemos observar que depois do processo iterativo, encontramos os dois parâmetros que se adequaram melhor aos dados.