MAE 0311 2018 - INFERÊNCIA ESTATÍSTICA.
PROF. ALEXANDRE PATRIOTA
LISTA 3

1. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra de uma variável aleatória $X \sim P_\theta$, com $\theta = (\mu, \sigma^2)$, em que $\mu \in \mathbb{R}$, e $\sigma^2 > 0$ são tais que $E_\theta(X) = \mu$ e $Var_\theta(X) = \sigma^2$. Defina T da seguinte forma
$$T = \frac{a}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{b}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i, \quad a, b > 0.$$
Para que valores de a e b, o estimador T é assintoticamente não viesado?

2. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, tal que
$$f_\theta(x) = \begin{cases} a\exp\left(-a(x-\theta)\right), & \text{se} \quad x > \theta, \quad \theta > 0, \quad a > 0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$
sendo a uma constante conhecida.
   a) Mostre que $T = X_{(1)}$, em que $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, é um estimador assintoticamente não viesado para θ.
   b) Encontre o limite inferior para as variâncias de estimadores não viciados (também conhecido como limite de *Cramér-Rao*) para $g(\theta) = \theta$.

3. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\theta)$, com $\theta > 0$. Verifique se $T = \sum_{i=1}^n X_i$ é suficiente para o modelo utilizando a definição (não utilize o Critério da Fatoração). Explicite e justifique todos os passos.

4. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \mu^2)$, com $\mu \in \mathbb{R}$,
   a) Verifique se $T = (\sum_{i=1}^n X_i, \sum_{i=1}^n X_i^2)$ é suficiente minimal para o modelo em questão.
   b) Verifique se T definido em a) é uma estatística completa para o modelo em questão.

5. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, com $\theta \in \Theta$. Seja T uma estatística suficiente minimal para o modelo, verifique se
   a) $T_1 = (T, T)$ é uma estatísitica suficiente minimal para o modelo.
   b) $T_2 = (T, T^2)$ é uma estatística suficiente minimal para o modelo.
   c) Se $T = \overline{X}$, mostre que $T_3 = (T, X_1)$ não é suficiente minimal para o modelo.

6. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, com $\theta \in \Theta$. Seja T uma estatística suficiente para o modelo. Mostre que T não é uma estatística completa para o modelo em questão considerando os seguintes casos (a, b, c, k, l são constantes que não dependem de θ):
   a) $E_\theta(T) = cE_\theta(T^2)$, com $c \neq 0$.
   b) $E_\theta(T^k) = a + bE_\theta(T^l)$, para $k, l, a \in \mathbb{R}$, $b \neq 0$ e $k \neq l \neq 0$ tais que $T^k \neq a + bT^l$ com probabilidade 1.
   c) De maneira geral, $E_\theta(h_1(T)) = E_\theta(h_2(T))$, em que h_1 e h_2 são duas funções que não dependem de θ tais que $h_1(T) \neq h_2(T)$ com probabilidade 1.

7. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Unif(0, \theta)$, com $\theta > 0$ e $0 < x < 1$, mostre que $T = X_{(n)}$ é uma estatística completa, em que $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$.

8. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Unif(\theta, \theta+1)$, com $\theta > 0$ e $0 < x < 1$, mostre que a amplitude $T = X_{(n)} - X_{(1)}$, com $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$ e $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$, é ancilar ao modelo.

9. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Poisson(\theta)$, com $\theta > 0$. Use o teorema de *Lehmann-Scheffé* para encontrar um estimador não-viesado com variância uniformemente mínima para $g(\theta) = P_\theta(X_1 = 3)$. Use o fato de que $T = \sum_{i=1}^n X_i$ é estatística suficiente e completa para o modelo em questão.