MAE 0311 2018 - INFERÊNCIA ESTATÍSTICA.
PROF. ALEXANDRE PATRIOTA
LISTA 1

1. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim N(\mu, \sigma^2)$,

   a) Usando a função geradora de momentos, mostre que $\overline{X}_n \sim N(\mu, \sigma^2/n)$, com $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$.

   b) Mostre que $\overline{X}_n$ converge em probabilidade e quase certamente para μ.

2. Seja $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $X_i \sim U(0,1)$, $i \geq 1$. Defina $Y_n = \min\{X_1, \dots, X_n\}$ e mostre que

   a) Y_n converge em probabilidade para zero.

   b) nY_n converge em distribuição para $Exp(1)$.

3. Sejam X e Y variáveis aleatórias discretas definidas no mesmo modelo estatístico tais que suas funções de probabilidade são dadas, respectivamente, por

$$P_\theta(X = x) = \begin{cases} \theta^x(1-\theta)^{1-x}, & \text{se } x \in \{0,1\}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases} \quad \text{e} \quad P_\theta(Y = y) = \begin{cases} \theta^y(1-\theta)^{1-y}, & \text{se } y \in \{0,1\}, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

   a) Mostre que, se são estatisticamente independentes, então existe apenas uma única solução para as distribuições conjuntas (Obs: monte um sistema de equações com as distribuições).

   b) Construa as distribuições conjuntas de X e Y para os dois casos abaixo:

      b1) $P_\theta(X = 0, Y = 0) = \theta^2$,

      b2) $P_\theta(X = 0, Y = 0) = \theta$.

      Verifique, para cada caso, se existe independência estatística.

4. Considere a função densidade conjunta de X e Y dada por

$$f_\theta(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{\theta+2}{\theta^{\theta+1}}\right) xy^{\theta-1}, & \text{se} \quad 0 < x < \theta, \quad 0 < y < x, \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

   a) Encontre as funções de densidade marginais de X e Y.

   b) Verifique se X e Y são estatisticamente independentes.

5. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ amostra aleatória de $X \sim Beta(1, \theta)$ e $(Y_1, \dots, Y_n)$ amostra aleatória de $Y \sim Beta(\theta, 1)$.

   a) Obtenha as funções de verossimilhança para as duas amostras aleatórias.

   b) Esboce os gráficos e indique os pontos de máximo, se existirem, das funções obtidas em (a), considerando as seguintes amostras observadas:

$$x = (0.61, 0.73, 0.90, 0.11, 0.06, 0.03, 0.60, 0.38, 0.13, 0.10),$$
$$y = (0.85, 0.97, 0.41, 0.92, 0.73, 0.66, 0.50, 0.39, 0.50, 0.63).$$

6. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim Exp(\theta)$. Considere que a amostra observada foi;

$$\begin{aligned} x \;=\; & (0.24, 0.34, 0.23, 0.17, 0.18, 0.14, 0.27, 0.08, 0.20, 0.10, 0.02, 0.22, 0.04, 0.02, \\ & 0.03, 0.17, 0.17, 0.08, 0.18, 0.01). \end{aligned}$$

   a) Faça um histograma inserindo também três densidades exponenciais, $Exp(\theta)$, considerando $\theta = \{1, 10, 1/\overline{x}\}$, em que $\overline{x}$ é a média amostral.

   b) Obtenha a função de verossimilhança e esboce o seu gráfico com os valores da amostra. Indique o máximo da função, se existir. Verifique se existe relação entre o máximo encontrado e os valores de θ definidos no item (a).

Dizemos que $X \sim Beta(a,b)$ se, e somente se, sua função densidade de probabilidade é dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1}, & \text{se } x \in (0,1), \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

em que $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ é a função gamma.