1) $E_\theta(X) = \mu$, $Var_\theta(X) = \sigma^2$;

mostre que T é um estimador não viesado p/ μ,

em que:

$$E_\theta(T) = E_\theta\left(\frac{a}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} X_i + \frac{b}{n^2}\sum_{i=1}^{n} X_i\right)$$

$$= \frac{a}{2n+1}\sum_{i=1}^{n} E_\theta(X_i) + \frac{b}{n^2}\sum_{i=1}^{n} E_\theta(X_i)$$

$$= \frac{a}{2n+1}\mu n + \frac{b}{n^2}\mu n = \frac{a}{2+\frac{1}{n}}\mu + \frac{b\mu}{n}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E_\theta(T) = \lim_{n\to\infty}\left\{\frac{a}{2+\cancel{\frac{1}{n}}^{\,0}}\mu + \cancel{\frac{b\mu}{n}}^{\,0}\right\} = \frac{a}{2}\mu$$

$\Rightarrow$ p/ $\forall\, b>0$, e $a=2 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} E_\theta(T) = \mu$

2) Seja $(X_1,\ldots,X_n)$ a.a. $X \sim f_\theta$.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} a\exp\{-a(x-\theta)\}, & \text{se } x>\theta,\ \theta>0,\ a>0 \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

i) Temos que:

$$\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x) = \mathbb{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} \leq x)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min\{X_1,\ldots,X_n\} > x),$$

$$= 1 - \prod_{i=1}^{n} \{1 - \mathbb{P}(X_i \leq t)\} = 1 - \{1 - \underbrace{\mathbb{P}(X_1 \leq x)}_{(I)}\}^n$$

$$(I)\ \mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_{\theta}^{x} a \exp\{-a(t-\theta)\} dt =$$

$$= -\exp\{-a(t-\theta)\} \Big|_{\theta}^{x} =$$

$$= -\exp\{-a(x-\theta)\} + \exp\{-a(\theta-\theta)\} =$$

$$= 1 - \exp\{-a(x-\theta)\},,$$

Assim, temos que

$$\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x) = 1 - \{1 - (1 - \exp\{-a(x-\theta)\})\}^n$$

$$= 1 - \exp\{-an(x-\theta)\},$$

$$f_{X_{(1)},\theta}(x) = \frac{d\mathbb{P}(X_{(1)} \leq x)}{dx} = an \exp\{-an(x-\theta)\},$$

Assim, temos que:

$$E_{X_{(1)},\theta}(X) = \int_{\theta}^{\infty} x\, an \exp\{-an(x-\theta)\} dx =$$

$$= -x \exp\{-an(x-\theta)\} \Big|_{\theta}^{\infty} + \int_{0}^{\infty} \exp\{-an(x-\theta)\} dx =$$

$$= \lim_{n\to\infty} -x \exp\{\cancel{-an(x-\theta)}\}^{0} + \theta + \left\{ -\frac{1}{an} \exp\{-an(x-\theta)\} \Big|_{\theta}^{\infty} \right\},$$

$$= \theta + 1/an,$$

$$\lim_{n\to\infty} E_\theta(T) = \lim_{n\to\infty} \left\{ \theta + \frac{1}{an} \right\} \longrightarrow \theta.$$

b) Seja,

$$\log f_\theta(x) = \log a \exp\{-a(x-\theta)\}$$
$$= \log a - a(x-\theta)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial\theta} = \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\log a - a(x-\theta)\right\} = a$$

$$\Rightarrow I(\theta) = n E_\theta\left\{\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2\right\} = n E_\theta\{a^2\} = na^2$$

$$\Rightarrow LI = \frac{[g'(\theta)]^2}{n E_\theta\left\{\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2\right\}} = \frac{1}{na^2}$$

por outro lado; como as condições de regularidade não são válidas.

$$n E_\theta\left\{\left(\frac{\partial \log f_\theta(x)}{\partial\theta}\right)^2\right\} = na^2 \neq n E_\theta\left\{-\frac{\partial^2 \log f_\theta(x)}{\partial\theta^2}\right\} = 0$$

3) "feito em classe".

4) Seja $(X_1, \dots, X_n)$, a.a $X \sim N(\mu, \mu^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$,

temos que,

$$f_\mu(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{1}{2\pi\mu^2}\right)^{n/2} \exp\left\{-\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\mu^2}\right\}$$

$$= \exp\left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{\mu} - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{2\mu^2} + d(\theta) \right\} \cdot S(x_1, \dots, x_n).$$

onde $S(x_1, \dots, x_n) = \exp\left\{-\frac{n}{2}\right\}$ e $d(\theta) = \log\left(\frac{1}{2\pi\mu^2}\right)^{n/2}$,

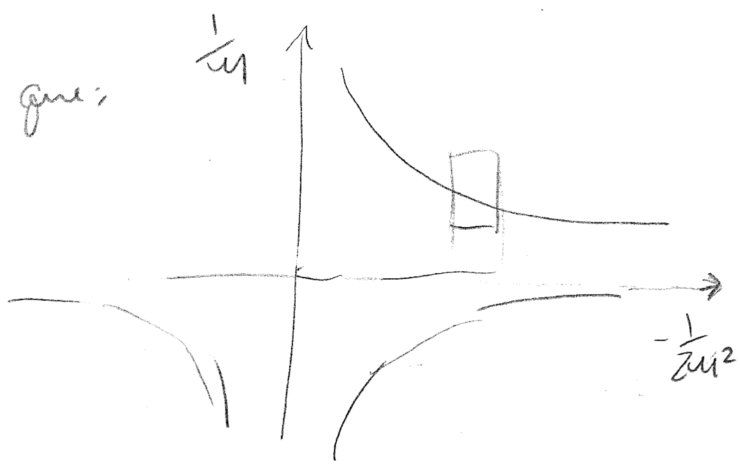
$\Rightarrow$ temos que,

$$\begin{cases} C_1(\theta) = 1/\mu, \quad T_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \\ C_2(\theta) = -\frac{1}{2\mu^2}, \quad T_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i, \end{cases}$$

$\Rightarrow$ f_μ é família exponencial, T_1 e T_2 são estatísticas suficientes, pelo critério da fatoração.

mas, é completa?.

temos que:



e $\mu \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{\mu} \in \mathbb{R}$

e $\mu^2 \in \mathbb{R}_+ \Rightarrow \frac{1}{\mu^2} \in \mathbb{R}_+$

$\Rightarrow$ a relação entre $1/\mu$ e $-1/2\mu^2$ não permite um retângulo em $\mathbb{R}^2$ que cubra $(1/\mu, 1/\mu^2)$, $\mu \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Não podemos concluir que T é completa usando os teoremas vistos em sala.

b) Para mostrar que T é completo, temos que se
$\mathbb{P}_\theta(g(T)=0)=1 \Leftrightarrow E_\theta(g(T))=0$.

i) Temos que $T_1 = \bar{X} \Rightarrow E(T_1) = \mu$, $T_2 = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$

Seja:

$$g(T) = \frac{T_2}{2n}\left(\frac{1}{n}+1\right) - T_1^2$$

$$E_\theta(g(T)) = \underbrace{\frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}+1\right)E_\theta(T_2)}_{(I)} - \underbrace{E(T_1^2)}_{(II)},$$

$$(I) = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}+1\right)E_\theta(T_2) = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}+1\right)\sum_{i=1}^{n} E_\theta(X_i^2) = \frac{1}{2n}\left(\frac{1}{n}+1\right)2\mu^2 n$$

pois $Var_\theta(X_i) = E_\theta(X_i^2) - E_\theta(X_i)^2 \Rightarrow E_\theta(X_i^2) = \mu^2 + \mu^2 = 2\mu^2$.

(II) $E_\theta(T_2^2) = E_\theta(\bar{X}^2) = \mu^2\left(\frac{1}{n}+1\right)$,

pois: $Var_\theta(\bar{x}) = E_\theta(\bar{x}^2) - E_\theta(\bar{x})^2 \Rightarrow \frac{\mu^2}{n} = E_\theta(\bar{x}^2) - \mu^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow E_\theta(\bar{x}^2) = \mu^2\left(1+\frac{1}{n}\right)$ //

$\Rightarrow E_\theta(g(T)) = \frac{1}{\cancel{2n}}\left(\frac{1}{n}+1\right)\cancel{2n}\mu^2 - \mu^2\left(\frac{1}{n}+1\right)$

$= \mu^2\left(\frac{1}{n}+1\right) - \mu^2\left(\frac{1}{n}+1\right) = 0$.

$\Rightarrow T = (T_1, T_2) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)$ não é completa.

---

5) Seja $(x_1, \ldots, x_n)$ uma amostra aleatória

de $X \sim f_\theta$, $\theta \in \Theta$,

a) $T_1 = (T, T)$

1. Existe h_1 tal que $T_1 = h_1(T)$, sendo $h(x) = (x, x)$
2. Existe h_2 tal que $T = h_2(T_1)$, sendo $h_2(x) = x_1$, em que $x = (x_1, x_2)$, logo T_1 é função de T e T é função de T_1, portanto, T_1 também é suficiente minimal.

b) $T_2 = (T, T^2)$

1. Temos que existe h_1 tal que $T_2 = h_1(T)$, sendo $h(x) = (x, x^2)$
2. Temos que existe h_2 tal que $T = h_2(T_2)$ sendo $h_2(x) = x_1$,

em que $x = (x_1, x_2)$, logo T_2 é função de T e T é função de T_2.

portanto T_2, também é suficiente minimal.

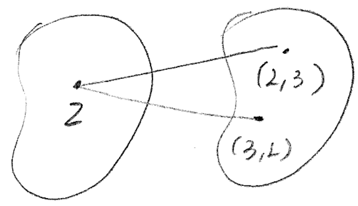
c) $T_3 = (\bar{X}, X_1)$

1. Temos que não existe h_1 tal que $T_3 = h_1(T)$ p/ $n \geqslant 2$. Seja $n = 2$,

então $h_2((x_1 + x_2)/2) = (x_1, x_2)$,

tome $x_1 = 1, x_2 = 3 \Rightarrow h_2(2) = (1, 3)$,

tome $x_1 = 1, x_2 = 1 \Rightarrow h_2(2) = (3, 1)$.



$\Rightarrow$ não existe função h_2, e por indução podemos estender p/ $n \geqslant 2$.

2. Temos que existe h_2 t.q. $T = h_2(T_3)$, sendo $h_2(x) = x_1$, em que $x = (x_1, x_2)$

logo T_3 não é função de T mas T é função de T_3. Portanto, T_3 não pode ser suficiente minimal.

6) a) $E_\theta(T) = c E_\theta(T^2)$,

i) $g(T) = T - cT^2 \neq 0$, q.c, mas $E_\theta(g(T)) = E_\theta(T) - cE_\theta(T^2) = 0$,

b) $E_\theta(T^k) = a + b E_\theta(T^l)$,

i) $g(T) = T^k - (a + b T^l) \neq 0$, q.c mas $E_\theta(g(T)) = E_\theta(T^k) - (a + b E_\theta(T^l)) = 0$,

$\Rightarrow E_\theta(T^k) - E_\theta(T^k) = 0$.

c) $E(h_1(T)) = E(h_2(T))$ e $P(h_1(T) \neq h_2(T)) = 1$,

$\Rightarrow g(T) = h_1(T) - h_2(T) \neq 0$, q.c. mas

$$E(g(T)) = E(h_1(T) - h_2(T)) = E(h_1(T)) - E(h_2(T))$$
$$= E(h_1(T)) - E(h_1(T)) = 0$$

7) Seja $(X_1, \dots, X_n)$ a.a $X \sim Unif(0,\theta)$

com $\theta > 0$, $0 < x < 1$, $T = X_{(n)}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \dots, X_n\}$.

i) Temos que:

$$P_\theta(X_{(n)} \leq t) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \leq t) = \prod_{i=1}^{n} F_\theta(t) = F_\theta(t)^n$$

$$f_{X_{(n)},\theta}(t) = \frac{d P_\theta(X_{(n)} \leq t)}{dt} = \frac{d}{dt} F_\theta(t)^n = n F_\theta(t)^{n-1} f_\theta(t),$$

ii) Considere $g(T)$ tq $\underset{\theta}{E}(g(T)) = 0$ } hipótese

$$E_\theta(g(T)) = \int_0^\theta g(t)\, n \left(\frac{t}{\theta}\right)^{n-1} \frac{1}{\theta}\, dt$$

$$= \int_0^\theta g(t)\, n \frac{t^{n-1}}{\theta^n}\, dt$$

$$= \frac{n}{\theta^n} \int_0^\theta g(t)\, t^{n-1} dt$$

pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\frac{d}{dx} \int_0^x f(t)\, dt = f(x)$$

$$\Rightarrow \cdots = \frac{n}{\theta^n}\int_0^\theta g(t)\, t^{n-1}\, dt = 0$$

$$= \int_0^\theta g(t)\, t^{n-1}\, dt = 0$$

$$= \frac{d}{d\theta}\int_0^\theta g(t)\, t^{n-1}\, dt = g(\theta)\,\theta^{n-1} = 0 \Rightarrow g(\theta) = 0$$

$p/ \ \forall\ \theta > 0 \Rightarrow g(T) = 0 \ p/ \ T : X \to \theta$

---

8) Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma a.a. $X \sim \text{Unif}(\theta, \theta+1)$, com $\theta > 0$, e $0 < x < 1$.

Temos que $T = X_{(n)} - X_{(1)}$, $X_{(n)} = \max\{X_1, \ldots, X_n\}$, e $X_{(1)} = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$.

Seja $f_\theta(x) = \underset{(\theta,\theta+1)}{\mathbb{I}}(x) = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(x-\theta)$,

Seja: $\underbrace{Y_i = X_i - \theta}_{X_i = Y_i + \theta}$, temos que $\frac{dx_i}{dy_i} = \frac{d(y_i+\theta)}{dy_i} = 1$

Temos que:

$$f_Y(y) = f_\theta(y) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(y) \left|\frac{dy}{dy}\right| = \underset{(0,1)}{\mathbb{I}}(y) \Rightarrow Y \sim \text{Unif}(0,1)$$

Assim,

$$X_{(n)} - X_{(2)} = (Y_{(n)} + \theta) - (Y_{(2)} + \theta) = Y_{(n)} - Y_{(2)}$$

em que $Y_{(n)} - Y_{(1)}$ não depende de θ. Portanto

T é ancilar ao modelo.

9) Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma a.a $X \sim \text{Poisson}(\theta)$, $\theta > 0$.

e $g(\theta) = \mathbb{P}_\theta(X_1 = 3) = \dfrac{\theta^3 e^{-\theta}}{3!}$,

i) Seja $U = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathbb{P}_\theta(X_1 = 3), \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$,

$$E_\theta(U) = 1 \cdot \mathbb{P}_\theta(X_1 = 3) + 0 \cdot \mathbb{P}_\theta(X_1 \neq 3) = \mathbb{P}_\theta(X_1 = 3)$$

$\Rightarrow$ U é não viesado p/ $\mathbb{P}_\theta(X_1 = 3)$.

ii) pelo teorema: com T suficiente e completa p/ o modelo.

$$E(U \mid T) \text{ é o ENVUM } p/ g(\theta)$$

iii) Temos que:

$$\mathbb{P}_\theta(X_1=3 \mid T=t) = \frac{\overbrace{\mathbb{P}(T=t \mid X_1=3)}^{(\mathrm{I})} \cdot \overbrace{\mathbb{P}(X_1=3)}^{(\mathrm{II})}}{\underbrace{\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = t\right)}_{(\mathrm{III})}}$$

$$(\mathrm{I})\quad \mathbb{P}(T=t \mid X_1=3) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=2}^{n} X_i = t-3\right) = \frac{(\theta(n-1))^{t-3} e^{-\theta(n-1)}}{(t-3)!}$$

$$(\mathrm{II})\quad \mathbb{P}(X_1=3) = \frac{\theta^3 e^{-\theta}}{3!},$$

Obs: $\left\{ \begin{array}{l} X_i \sim \text{Pois}(\theta), \\ \sum_i X_i \sim \text{Pois}(n\theta). \end{array} \right.$

$$(\mathrm{III})\quad \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i = t\right) = \frac{(\theta n)^t e^{-\theta n}}{t!}.$$

Assim, temos que por (I), (II) e (III)

$$\mathbb{P}_\theta(X_1=3 \mid T=t) = \begin{cases} \binom{t}{3} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-3}. \\ 0, \quad T=1,2,3 \end{cases}$$

Assim,

$$\left\{ \begin{array}{l} E(U \mid T) = 1 \cdot \mathbb{P}(U=1 \mid T) + 0 \cdot \mathbb{P}(U=0 \mid T) \\ \quad = \mathbb{P}(U=1 \mid T) = \mathbb{P}_\theta(X_1=3 \mid T=t) = \binom{T}{3} \frac{1}{n^3} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{t-3} \end{array} \right.$$

é o ENVUM