MAE 0311 2018 - INFERÊNCIA ESTATÍSTICA.
PROF. ALEXANDRE PATRIOTA
LISTA 4

1. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, em que

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & \text{se} \quad 0 < x < 1, \quad \theta > 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

   a) Encontre o estimador de máxima verossimilhança e de momentos para θ.
   b) Encontre o estimador de máxima verossimilhança de $g(\theta) = \theta/(1+\theta)$
   c) Encontre a distribuição aproximada dos estimadores obtidos em (a) e (b) quando n é grande.

2. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim P_\theta$, em que

$$P_\theta(X = x) = \begin{cases} (1-\theta)/2, & \text{se} \quad x = 0, \\ 1/2, & \text{se} \quad x = 1, \\ \theta/2, & \text{se} \quad x = 2, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

   Sabendo que $n = n_1 + n_2 + n_3$ é o tamanho amostral, e que "0" ocorre n_1 vezes, "1" ocorre n_2 vezes, "2" ocorre n_3 vezes,

   a) Encontre uma estatística suficiente para θ em função de n_1, n_2 e n_3.
   b) Encontre estimador de máxima verossimilhança e de momentos para θ e sua distribuição assintótica.
   c) Encontre os estimadores da máxima verossimilhança para $E_\theta(X^2)$ e $Var_\theta(X)$.
   d) Apresente as estimativas para as quantidades listadas nos items b) e c) considerando $n_1 = 20, n_2 = 10$ e $n_3 = 5$
      Dica: escreva a função probabilidade por meio de produtório.

3. Seja $(W_1, \dots, W_n)$ uma amostra aleatória de $W_i \sim N(0, \sigma^2)$. Seja $X_i = \alpha + \beta z_i + W_i$, em que z_i é um valor conhecido para $i = 1, \dots, n$. Encontre os estimadores de máxima verossimilhança de α, β e σ^2, em que $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $\sigma^2 > 0$. Dica: encontre a função de verossimilhança para $\theta = (\alpha, \beta, \sigma^2)$ usando a conjunta de $(X_1, \dots, X_n)$.

4. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, em que

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta f_0(x) + (1-\theta) f_1(x), & \text{se} \quad -\infty < x < \infty, \quad 0 < \theta < 1, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

   Assuma que $f_0(x)$ e $f_1(x)$ são funções positivas, estritamente contínuas que não dependem de parâmetros desconhecidos. Considere que $\int_{\mathbb{R}} x^k f_0(x)dx = c_{0k}$ e $\int_{\mathbb{R}} x^k f_1(x)dx = c_{1k}$, em que c_{0k} e c_{1k} são constantes reais finitas para $k \geq 1$.

   a) Estime θ pelo método dos momentos.
   b) Encontre o estimador de MV de θ para $n = 2$.
   c) Encontre a variância do estimador de MV.
   d) Apresente o estimador de MV para as funções $g_1(\theta) = P_\theta(X > 0)$, e $g_2(\theta)$, tal que $P_\theta(X < g_2(\theta)) = 0.5$ (mediana).

5. Seja $(X_1, \dots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, em que f_θ pertence à família exponencial unidimensional, com $\theta \in \mathbb{R}$. Assuma as condições de regularidades $R1$ a $R6$ dadas em aula. Defina $h(\theta) = d'(\theta)/c'(\theta)$, em que $d(\theta)$ e $c(\theta)$ são funções definidas pela família exponencial.

a) Apresente o estimador de máxima verossimilhança para θ, caso $h(\theta)$ seja invertível.

b) Apresente um processo iterativo que dependa de θ através de $h(\theta)$, em que $h(\theta)$ não é invertível.

c) Mostre analiticamente o segundo passo do processo iterativo encontrado em (b) para $\hat{\theta}^{(0)} = 0$, $h'(0) = 1$ e $h(0) = 0$. Apresente o resultado em termos da função h.

d) Apresente o erro absoluto das estimativas do processo iterativo, $|\hat{\theta}^{(2)} - \hat{\theta}^{(1)}|$.

6. Seja $(X_1, \ldots, X_n)$ uma amostra aleatória de $X \sim f_\theta$, em que

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \theta_1\theta_2 x^{\theta_2 - 1}\exp\{-\theta_1 x^{\theta_2}\}, & \text{se} \quad x > 0, \quad \theta_1 > 0, \quad \theta_2 > 0, \\ 0, & \text{c.c.} \end{cases}$$

Temos uma amostra de tamanho $n = 100$ de f_θ,

$$\begin{gathered}
1.19, 1.33, 1.29, 0.97, 0.57, 0.26, 1.46, 0.73, 0.45, 0.85, \\
1.67, 0.56, 0.45, 0.35, 0.52, 1.32, 1.22, 1.09, 0.27, 0.34, \\
0.59, 0.78, 0.55, 1.29, 1.11, 1.04, 1.21, 0.38, 0.61, 1.12, \\
0.72, 0.55, 0.90, 0.26, 0.90, 0.54, 0.99, 0.67, 1.36, 0.18, \\
0.58, 0.22, 1.38, 1.36, 0.35, 1.43, 0.04, 0.26, 0.86, 1.06, \\
1.47, 0.42, 0.62, 0.58, 0.65, 0.54, 0.76, 0.93, 1.15, 0.92, \\
1.95, 1.29, 0.64, 0.13, 1.70, 1.00, 0.75, 1.09, 1.40, 1.26, \\
0.87, 0.80, 0.67, 0.47, 0.66, 0.33, 0.56, 1.01, 1.54, 0.46, \\
1.39, 1.30, 1.17, 1.60, 1.16, 0.93, 1.27, 0.20, 1.17, 0.42, \\
1.53, 0.31, 1.31, 1.20, 0.75, 0.72, 1.97, 1.26, 0.48, 0.27.
\end{gathered}$$

a) Suponha $\theta_2 = 1$ conhecido. Apresente o estimador de MV para $\theta = \theta_1$ e sua estimativa. Insira a densidade $f_{\hat{\theta}}$ estimada no histograma da amostra (utilize a densidade de frequencia e 10 classes com intervalos de classe iguais). Discuta os resultados.

b) Suponha agora θ_2 desconhecido e proponha um processo iterativo para encontrar os estimadores de máxima verossimilhança de $\theta = (\theta_1, \theta_2)$.

c) Utilize o processo encontrado em (b) para calcular as estimativas de MV para $\theta = (\theta_1, \theta_2)$ considerando a amostra acima.

d) Insira a densidade f_θ com as estimativas encontradas em (c) e no mesmo histograma. Discuta os resultados.

e) Apresente um procedimento iterativo alternativo que evite estimativas negativas. Mostre que, para os dados em questão, os dois procedimentos iterativos são equivalentes (justifique teoricamente como feito em sala de aula).

Utilize o R para os itens (a), (c), (d) e (e).