

## MAE0328 - Lista 7: Entrega dia 25/06/2019

Para ambos os exercícios abaixo, use os dados da Tabela 1. Apresente todas as suas resoluções teóricas e implementações computacionais de forma clara, comentando seu código onde julgar apropriado.

1. Considere o modelo não-linear de regressão dado por

$$Y_i = \beta_0 x_i^{\beta_1} + e_i,$$

em que  $e_i \stackrel{iid}{\sim} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

- (a) Apresente um gráfico de dispersão dos dados. Você julga adequada a pressuposição de um modelo linear homoscedástico para esses dados?
- (b) Apresente a esperança e variância de  $Y_i$ . A variância é homogênea? O modelo é linearizável?
- (c) Apresente a função de log-verossimilhança  $\ell(\theta; \mathbf{y}, \mathbf{X})$ , em que  $\theta = (\beta_0, \beta_1, \sigma^2)$ , desse modelo e calcule a função escore e a matriz de informação de Fisher.
- (d) Com seus resultados do item (c), apresente uma implementação computacional do método escore de Fisher para obter a estimativa de máxima verossimilhança para  $\theta$ . Usando sua implementação e considerando tolerância de erro de aproximação de  $10^{-6}$ , obtenha as estimativas de máxima verossimilhança de  $\beta_0$ ,  $\beta_1$  e  $\sigma^2$ .
- (e) Usando a função *optim()* (ou alguma função de otimização numérica de sua preferência), estime novamente os parâmetros. Compare esses com os obtidos através do método escore de Fisher.

2. Considere agora uma modificação do modelo anterior, com

$$Y_i = \beta_0 x_i^{\beta_1} + e_i$$

e  $e_i \stackrel{ind}{\sim} \mathcal{N}(0, \exp\{\gamma_0 + \gamma_1 x_i\})$ .

- (a) Entre essa e a especificação do exercício (1), qual você julga mais adequada? Justifique com base no gráfico de dispersão.
- (b) Apresente a função de log-verossimilhança desse modelo. Justifique o uso da função exponencial para definir a variância do modelo.
- (c) Encontre a estimativa de máxima verossimilhança para  $\theta = (\beta_0, \beta_1, \gamma_0, \gamma_1)$  nesse novo modelo utilizando a função *optim()*. Compare-as com as obtidas no exercício (1).
- (d) Apresente um gráfico como os valores observados e as curvas de regressão estimadas dos dois modelos sugeridos.

Tabela 1: Dados fictícios, com variável resposta  $Y_i$  e covariável  $x_i$ .

$i$	$x_i$	$Y_i$	$i$	$x_i$	$Y_i$
1	188.1	86.97	36	251.8	90.96
2	276.0	90.81	37	196.2	85.22
3	198.0	87.64	38	188.5	85.53
4	174.7	83.29	39	241.4	89.72
5	188.6	85.39	40	166.7	83.37
6	226.1	87.69	41	216.4	87.38
7	229.9	88.52	42	158.9	82.52
8	148.4	81.11	43	232.4	89.20
9	302.8	92.70	44	251.9	92.96
10	137.6	81.25	45	327.2	92.17
11	260.3	91.07	46	139.9	80.64
12	186.0	85.16	47	176.4	84.62
13	260.6	92.05	48	214.0	88.58
14	280.9	92.11	49	427.5	91.14
15	170.9	84.72	50	184.3	84.29
16	229.1	89.39	51	176.2	84.15
17	244.0	90.27	52	217.9	88.29
18	174.7	83.89	53	188.5	85.53
19	165.2	83.26	54	359.3	95.48
20	267.3	93.68	55	224.6	88.95
21	252.6	92.34	56	273.8	93.57
22	286.3	92.78	57	145.6	80.72
23	177.0	83.35	58	290.5	90.65
24	202.4	86.40	59	157.4	82.11
25	211.0	87.47	60	262.3	87.90
26	271.6	92.31	61	223.0	89.04
27	348.2	95.31	62	237.3	89.52
28	257.2	90.83	63	210.1	86.57
29	351.9	95.26	64	293.4	93.98
30	208.1	87.23	65	200.0	86.77
31	162.1	82.49	66	176.6	84.66
32	250.1	89.51	67	131.8	79.90
33	195.0	86.59	68	351.0	92.20
34	247.3	90.37	69	188.9	85.27
35	167.7	83.30	70	236.2	88.15