Atividade 1

Guilherme Navarro NUSP: 8943160

03 de agosto de 2020

Atividade 1

Seja T uma variável aleatória que, condicionalmente a variável aleatória U , tem distribuição Weibull com parâmetros $\lambda = Ue^{x^T\beta}$ e γ, ou seja, tem função de risco (ou taxa de falha) dada por

$$\alpha(t|U,x) = Ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1},$$

em que x é um vetor de covariáveis conhecidas (que inclui o intercepto), β e γ, são parâmetros (desconhecidos). Assuma que a variável aleatória U tenha distribuição estável positiva, com função densidade de probabilidade dada por

$$f_U(u) = \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(k\theta+1)}{k!}u^{-k\theta-1}sen(k\theta\pi),\ \ u \geq 0,$$

em que θ é o parâmetro da distribuição com $0 < \theta \leq 1$. É interessante observar que o caso $\theta = 1$ corresponde a uma variável aleatória degenerada no ponto U = 1. Essa distribuição tem a propriedade de apresentar todos os momentos infinitos e, consequentemente, o valor esperado é infinito e a variância não existe. Apesar da expressão da função densidade de probabilidade poder ser expressa apenas em termos de uma série, a transformada de Laplace tem uma forma bastante simples:

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}[e^{-sU}] = e^{-s^\theta}.$$

(a) Qual é a distribuição marginal de T (considerando-se dado o vetor de covariáveis x)?

Resolução

Como $T|U \sim Weibull(\lambda, \gamma)$ com $\lambda = Ue^{x^T\beta}$

Assim temos que:

$$f_{T|U}(t|u) = ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}e^{-ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma}}$$

e para encontrar a distribuição marginal de t, basta lembrar da teoria de probabilidades:

$$f_T(t|x) = \int_U \frac{f_{T,U}(t,u)}{f_U(u)}du = \int_U f_{T|U}(t|u)f_U(u)du \qquad (I)$$

Assim:

$$f_{T|U}(t|u)f_U(u) = ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}e^{-ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma}}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(k\theta+1)}{k!}u^{-k\theta-1}sen(k\theta\pi)$$

$$= e^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}[ue^{-ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma}}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(k\theta+1)}{k!}u^{-k\theta-1}sen(k\theta\pi)] \quad (II)$$

Voltando em (I), fazendo a integral com a expressão (II), temos:

$$\int_U f_{T|U}(t|u)f_U(u)du = \int_U e^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}[ue^{-ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma}}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(k\theta+1)}{k!}u^{-k\theta-1}sen(k\theta\pi)]du$$

$$= e^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}\int_U ue^{-ue^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma}}\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\Gamma(k\theta+1)}{k!}u^{-k\theta-1}sen(k\theta\pi)du$$

E podemos escrever a expressão acima em termos de uma esperança:

$$e^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}\mathbb{E}[Ue^{-Ux^T\beta t^{\gamma}}] \quad (III)$$

Utilizando a definição da tranformada de Laplace:

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}[e^{-sU}] = \int_0^{\infty} e^{-su}f_U(u)du$$

Como a esperança é um operador linear, podemos fazer:

$$\frac{d}{ds}\mathbb{E}(e^{-sU}) = \mathbb{E}\Big(\frac{d}{ds}(e^{-sU})\Big) = -\mathbb{E}[Ue^{-sU}]$$

Utilizando esses resultados:

$$\mathbb{E}[Ue^{-sU}] = -\frac{d}{ds}\mathbb{E}(e^{-sU}) = -\frac{d}{ds}(e^{-s^{\theta}}) = -\theta(-e^{-s^{\theta}})s^{\theta-1} = \theta e^{-s^{\theta}}s^{\theta-1}$$

Substituindo $s = t^{\gamma}e^{x^T\beta}$ e voltando em (III) utilizando o resultado acima, temos:

$$f_T(t|x) = e^{x^T\beta}\gamma t^{\gamma-1}\theta e^{-(t^{\gamma}e^{x^T\beta})^{\theta}}(t^{\gamma}e^{x^T\beta})^{\theta-1}$$

Assim a distribuição marginal de T, parece ser alguma modificação da distribuição Weibull com 3 parâmentros, com f.d.p dada pela expressão acima.

(b) Assuma agora que a variável aleatória T tenha distribuição condicional a U especificada pela seguinte função de risco:

$$\alpha(t|U,x) = \alpha_0(t)Ue^{x^T\beta},$$

em que $\alpha_0(t)$ é a função de risco basal. Obtenha a função de sobrevivência marginal de T (considerando-se conhecido o vetor x de covariáveis) e também a função de risco.

Resolução

Como visto em aula a função de sobrevivência marginal é dada por:

$$S(t|x) = \mathbb{P}(T > t|x) = \int_t^{\infty} f_T(s) = \int_t^{\infty}\int_0^{\infty} f_{T|U}(s|u)f_U(u)\ duds = \int_0^{\infty}\Big(\int_t^{\infty} f_{T|U}(s|u)ds\Big)f_U(u)du$$

Mas como temos o caso de riscos proporcionais, logo:

$$S(t|x) = \mathbb{P}(T > t|x) = \int_0^{\infty} e^{-A_0(t)ue^{x^T\beta}}f_U(u)du = \int_0^{\infty} e^{-(A_0(t)e^{x^T\beta})u}f_U(u)du \quad (I)$$

Utilizando o resultado da transformada de laplace que é definida por:

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}[e^{-sU}] = \int_0^{\infty} e^{-su}f_U(u)du$$

E como foi dado no exercício a transformada de laplace para este caso é:

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}[e^{-sU}] = e^{-s^{\theta}}$$

Assim voltando em (I), temos:

$$\int_0^\infty e^{-(A_0(t)e^{x^T\beta})u} f_U(u)du = e^{-(A_0(t)e^{x^T\beta})^\theta}$$

Logo:

$$\Rightarrow S(t|x) = e^{-(A_0(t)e^{x^T\beta})^\theta}$$

Em que A_0 é a função de risco basal acumulada e β e θ são parâmentros desconhecidos.

Para a função de risco marginal, irei utlizar o resultado dado em aula, em que:

$$\alpha(t|x) = -(\alpha_0(t)e^{X^T\beta})\frac{\mathcal{L}'(A_0(t)e^{x^T\beta})}{\mathcal{L}(A_0(t)e^{x^T\beta})}$$

Assim teremos que calcular a primeira devirada da transformada de laplace, porém isto ja foi feito no item anterior, substituindo os valores, logo:

$$\alpha(t|x) = -(\alpha_0(t)e^{x^T\beta})\Big(\frac{-\theta e^{-(A_0(t)e^{x^T\beta})^\theta}(A_0(t)e^{x^T\beta})^{\theta-1}}{e^{-(A_0(t)e^{x^T\beta})^\theta}}\Big) = \alpha_0(t)e^{x^T\beta}\theta(A_0(t)e^{x^T\beta})^{\theta-1}$$

logo:

$$\alpha(t|x) = \alpha_0(t)e^{x^T\beta}\theta(A_0(t)e^{x^T\beta})^{\theta-1}$$

(c) Com base nos itens (a) e (b), discuta o efeito de ignorarmos a existência da variável de fragilidade U no modelo nas estimativas dos parâmetros associados com as covariáveis.

(d) Assuma agora que temos um par de variáveis aleatórias (T_1, T_2) satisfazendo um modelo de fragilidade compartilhada, ou seja:

- T_1 e T_2 são condicionalmente independentes dada a variável U ;
- a distribuição de T_j condicionalmente a U é dada por

$$\alpha_j(t|U) = \alpha_0(t)U\lambda_j,\ j = 1, 2,$$

em que λ_1 e λ_2 são parâmetros desconhecidos (que podem eventualmente depender de covariáveis);

- U tem distribuição estável positiva, com transformada de Laplace dada por (1). Obtenha a função de sobrevivência conjunta de (T_1, T_2) marginal (integrando-se com relação a U).

Resolução

Assim como no item b a função sobrevivência conjunta marginal de (T_1, T_2), s é dada por:

$$S(t_1, t_2) = \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \int_0^\infty S(t_1, t_2|u)f_U\ du$$

Mas como temos o caso de riscos proporcionais, logo:

$$S(t_1, t_2) = \mathbb{P}(T_1 > t_1, T_2 > t_2) = \int_0^\infty e^{-A_0(t)u\lambda_j} f_U(u)du = \int_0^\infty e^{-u(A_0(t)\lambda_j)} f_U(u)du \quad j = 1, 2 \qquad (I)$$

Utilizando o resultado da transformada de laplace que é definida por:

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}[e^{-sU}] = \int_0^\infty e^{-su} f_U(u)du$$

E como foi dado no exercício a transformada de laplace para este caso é:

$$\mathcal{L}(s) = \mathbb{E}[e^{-sU}] = e^{-s^{\theta}}$$

Assim voltando em (I), temos:

$$\int_0^{\infty} e^{-u(A_0(t)\lambda_j)} f_U(u)du = e^{-(A_0(t)\lambda_j)^{\theta}} \quad j = 1, 2$$

Logo:

$$\Rightarrow S(t_1, t_2) = e^{-(A_0(t)\lambda_j)^{\theta}} \quad j = 1, 2$$

Em que A_0 é a função de risco basal acumulada e β e λ_j são parâmentros desconhecidos.