Teoria da Computação
Introdução

Profa. Jerusa Marchi

Universidade Federal de Santa Catarina
Departamento de Informática e Estatística

2023-1

Um pouco de História...

Desenvolvimento da matemática:

- Até o século XIX - longo período de estagnação, onde os conhecimentos gregos foram conservados e transmitidos, mas pouco aperfeiçoados
- Durante o século XIX - criação de novas áreas de estudos, novos fundamentos foram estabelecidos
  - George Boole - Álgebra Booleana
  - Gottlob Frege - Lógica de Predicados ou de Primeira Ordem
  - Bertrand Russel e Alfred Whitehead - Correlação entre a Lógica e Matemática

Um pouco de História...

Construções provadas impossíveis de serem resolvidas utilizando régua e compasso:

- dividir um ângulo em três ângulos iguais
- construir um cubo com o dobro do volume de um cubo dado
- construir um quadrado com a mesma área de um círculo dado

As provas utilizam técnicas de análise que envolvem a determinação de raízes de equações

Um pouco de História...

A necessidade de solucionar equações numéricas fomentou a pesquisa sobre a natureza dos números

- Surgimento da Teoria dos números infinitos
- Definição precisa dos números naturais, inteiros, reais e complexos

Um pouco de História...

Surgimento de novas e interessantes Geometrias

- Método axiomático de Euclides (axiomas derivam proposições válidas - teoremas)
  - Geometria Euclidiana - "por um ponto fora de uma reta pode-se traçar apenas uma reta paralela à reta dada" ou "duas retas não se cruzam nem no infinito"
- Gauss, Lobatchewski, Riemann - demonstraram que era impossível deduzir tal axioma a partir dos demais
  - Consequências:
    - os axiomas de Euclides não eram necessariamente verdadeiros em relação ao espaço real
    - a substituição do axioma das paralelas por outras possibilidades resultam em sistemas geométricos interessantes e não menos reais que o de Euclides

Um pouco de História...

Crise geral:

- Os axiomas de Euclides eram "a verdade" (fruto da intuição clara e distinta)
- O surgimento de sistemas não Euclidianos levou os matemáticos a reconsiderar a posição da intuição na matemática
  - a matemática passa a ser a ciência que explora as consequências lógicas de um conjunto de axiomas ou postulados, sem levar em conta a possível "verdade" ou "realidade" subjacente
  - aumento do grau de abstração - manipulação de símbolos
  - o que é "verdade"? Como demonstrar que um sistema geométrico é "consistente"?

Um pouco de História...

Noção de **Modelo**

- Estrutura matemática ou física na qual cada proposição abstrata do sistema torna-se uma proposição verdadeira
- Exemplo
  - associar o conceito de superfície ou plano a uma esfera e a noção de reta, a círculo, temos um modelo adequado a geometria Riemanniana onde não existem retas paralelas.

Porém a noção de modelo não resolve o problema da consistência, apenas desloca seu foco

Um pouco de História...

Problemas básicos por trás da busca pela consistência:

- o problema dos infinitos - os modelos possíveis para os sistemas interessantes são infinitos
  - não é possível verificar as proposições do sistema para todos os elementos do modelo
- o problema dos fundamentos - sobre qual base construir uma prova de consistência?

Um pouco de História...

David Hilbert (1862 - 1943)

- associou “pontos” a pares de números e “planos” e “retas” a equações algébricas - transformando o problema da consistência no problema da consistência da álgebra

Dedeking (1888) e Guiusepe Peano (1889)

- Redução da aritmética aos conceitos básicos (1, sucessor e indução matemática)
- Estabelecimento dos axiomas da aritmética
- Transformação do problema da consistência da matemática no problema da consistência da aritmética

Um pouco de História...

Contudo, a álgebra tem seus fundamentos na *Teoria de Conjuntos* e na *Lógica*, e no interior destes sistemas foram descobertas (por Cantor e Russel, respectivamente) contradições surpreendentes

Um pouco de História...

O Paradoxo de Russel

- Existem dois tipos de conjuntos: (i) os normais, que não contêm a si próprios como elementos (exemplo: as cadeiras de uma sala, as bandeiras dos países do mundo) (ii) os não normais que têm a si próprios como elementos (exemplo: o conjunto de todos os conjuntos com mais de n elementos, o conjunto de todos os conjuntos). Seja N o conjunto de todos os conjuntos normais, N é normal ou não?

Um pouco de História...

Mais paradoxos

- Em uma cidade com uma lei rígida quanto ao uso da barba, a regra é que todo homem adulto é obrigado a se barbear diariamente, mas não precisa fazer a própria barba. Existe um barbeiro na cidade para esses casos, para o qual a lei diz que "o barbeiro deverá fazer a barba daqueles que optarem por não fazer a própria barba". (Quem barbeia o barbeiro?)

Um pouco de História...

A constatação de paradoxos alertou os matemáticos sobre o perigo de confiar em intuições para resolver problemas fundamentais, levando a uma radicalização ainda maior em direção à abstração

- Whitehead e Russel - Principia Mathematica - redução de todos os conceitos aritméticos a idéias puramente lógicas
- Programa de Hilbert - se propunha a construir um formalismo matemático sem qualquer tipo de significado e a provar sua consistência de forma absoluta
  - A matemática é completa? Ou seja, toda proposição pode ser provada verdadeira ou falsa?
  - A matemática é consistente? Ou seja, uma sequência válida de passos de prova nunca leva a uma contradição?
  - A matemática é decidível? Ou seja, existe um método definido que possa ser aplicado, em princípio, a qualquer proposição e que seja capaz de decidir se esta é verdadeira?

Um pouco de História...

- NÃO - A matemática não é completa
- NÃO - A matemática não é consistente
  - Kurt Gödel (Sobre proposições formalmente indecidíveis dos Principia Mathematica e outros sistemas semelhantes)
- e NÃO - A matemática não é decidível
  - Alan Turing e Alonso Church (1936)
- E é aqui que começa a nossa história...

Referências Bibliográficas

- G. Bittencourt, *Inteligência Artificial: Ferramentas e Teorias*, 3ª Edição, Editora da UFSC, Florianópolis, SC, 2006 (cap. 1)
- H. Gardner, *A Nova Ciência da Mente*, Editora EDUSP, 2003 (Parte II, cap. 1)
- W. Carnielli e R.L. Epstein, *Computabilidade, Funções Computáveis, Lógica e os Fundamentos da Matemática*, Editora Unesp, 2006 (Apêndice)