

## Primeira Lista de Exercícios: Revisão de Probabilidade

Justifique e/ou desenvolva os cálculos de suas respostas.

**Exercício 1.** Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Considere os seguintes eventos aleatórios:

- $A$  = soma maior ou igual a 9.
- $B$  = soma ímpar.
- $C$  = um dos lançamentos foi 5.
- $D$  = o mínimo entre as duas faces é 4.

Calcule as seguintes probabilidades:  $P(A)$ ,  $P(B|C)$ ,  $P(A \cap D)$  e  $P(C \cup D)$ .

**Exercício 2.** Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 94% para detectar uma certa doença quando ela de fato existe. Entretanto, o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que a pessoa sadia tem a doença). Se 0,4% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado de seu exame foi positivo?

**Exercício 3.** Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 6 bolas pretas, 3 brancas e 5 vermelhas; a urna II contém 4 bolas pretas, 4 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 7 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2, 3 ou 6, então uma bola da urna III é retirada.

- (a) Calcule a probabilidade da bola retirada ser vermelha.
- (b) Calcule a probabilidade de ter sido sorteada a urna III, sabendo-se que a bola retirada foi vermelha.

**Exercício 4.** Os amigos David Gilmour, Robert Plant, Nick Manson e Jimmy Page desejam fazer um *amigo oculto* entre eles. Calcule a probabilidade de que este amigo oculto não dê errado.

**Obs:** um amigo oculto dá errado quando uma pessoa sorteia ela mesma.

**Exercício 5.** Luke Skywalker está na origem de uma reta. Um esboço da situação pode ser visto na Figura 1. Luke lança uma moeda honesta; se sair coroa, ele dá um passo para a esquerda (e termina na posição -1 da reta); se sair cara, ele dá um passo para a direita (e termina na posição 1 da reta). Suponha que no primeiro lançamento tenha saído cara. Aí, agora na posição

1, ele lança novamente a moeda: se cara, um passo para a direita; se coroa um passo para a esquerda. Suponha que novamente tenha saído cara. Na posição 2 da reta ele irá jogar novamente a moeda e irá proceder da mesma forma que nos dois passos anteriores.

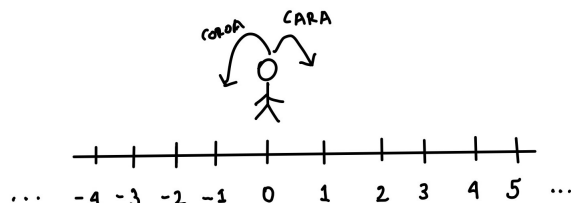


Figura 1: Passeio aleatório simétrico na reta.

- (a) Yoda diz: *Luke à origem só pode voltar depois de um número par de rodadas.* Você concorda com Yoda? Justifique sua resposta.
- (b) Luke está na origem da reta. Calcule a probabilidade dele retornar à origem depois de 4 passos.

**Exercício 6.** Seja  $X$  uma variável aleatória tal que

$$P(X = 1) = \frac{2}{8}, \quad P(X = 3) = \frac{2}{8} \quad \text{e} \quad P(X = 5) = \frac{4}{8}.$$

- (a) Calcule  $P(X < 4)$ .
- (b) Calcule  $P(X \geq 4)$ .
- (c) Calcule a esperança e a variância de  $X$ .
- (d) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de  $X$ .

**Exercício 7.** Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados  $(i, j)$ , em que  $i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Suponhamos que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados, isto é, vamos considerar a variável aleatória  $X$  que é dada por:

$$X = \text{o máximo das faces dos dois dados.}$$

Assim, por exemplo, se o resultado do experimento foi  $(2, 4)$ , teremos que o valor de  $X$  neste ponto será 4, pois

$$X(2, 4) = \text{máximo}\{2, 4\} = 4.$$

Análise similar nos permite afirmar que se o resultado do experimento foi  $(5, 5)$ , então  $X$  assumirá, neste ponto, o valor 5. Em relação a esta variável aleatória  $X$ , responda:

- (a) Quais os valores que  $X$  assume?
- (b) Para cada valor  $k$  que  $X$  assume, determine  $P(X = k)$ .
- (c) Calcule  $P(X < 3)$  e  $P(X \geq 3)$ .
- (d) Calcule  $P(X > 2|X < 5)$ .
- (e) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de  $X$ .

**Exercício 8.** Seja  $X \sim \mathcal{N}(7, 4)$ . Obtenha:

- (a)  $P(X \leq 10)$ .
- (b)  $P(X > 5)$ .
- (c) Represente graficamente as probabilidades obtidas em (a) e (b).
- (d) O valor de  $a$  tal que  $P(X \leq a) = 0.04$ .

**Exercício 9.** Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera  $T$ , tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1}{40}(t - 4), & 8 \leq t < 10; \\ \frac{3}{20}, & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de  $f$ .
- (b) Prove que  $f$  é, de fato, uma função densidade.
- (c) Calcule  $P(1 < T \leq 13)$ .
- (d) Calcule  $P(10 < T \leq 12)$ .