Primeira Lista de Exercícios: Revisao de Probabilidade

Exercícios

1. Um dado equilibrado é lançado 2 vezes e os números obtidos nos dois lançamentos são registrados. Considere os seguintes eventos aleatórios:

    - A = soma maior ou igual a 9.

    - B = soma ímpar.

    - C = um dos lançamentos foi 5.

    - D = o mínimo entre as duas faces é 4.

    - Calcule as seguinte probabilidades: P(A), P(B|C), $\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}\right), \mathrm{P}\left(\mathrm{C} \cup \mathrm{D}\right)$

        - P(A) - Para calcular P(A) devemos calcular a probabilidade da soma do lançamento de dois dados ser maior ou igual que 9.
            - A probabilidade de ser igual a 9 é $\frac{4}{36}$ (6, 3) (5, 4), (4, 5), (3,6)
            - A probabilidade de ser maior que 9 é a probabilidade de no primeiro e no segundo lançamento sair um número maior igual 5, ou seja, (6, 4), (6, 5), (6, 6), (4, 6), (5,6), (6, 6) que gera a probabilidade $\frac{6}{36}$
            - Dessa forma o resultado é $\frac{4}{36}$ + $\frac{6}{36}$ = $\frac{10}{36}$
        - P(B|C) - Para calcular P(B|C), devemos calcular a probabilide da soma ser impar, dado que um dos lançamentos foi 5
            - Devemos calcular $\frac{\mathrm{P}\left(\mathrm{B} \cap \mathrm{C}\right)}{\mathrm{P}\left(\mathrm{C}\right)}$, pois sabemos que, condicionalmente, o espaço amostral é C, e que um evento deste espaço é P(B ∩ C)
            - P(B ∩ C): $\frac{6}{36}$ (5, 2), (2, 5), (5, 4), (4, 5), (6, 5), (5, 6)
            - P(C): $\frac{11}{36}$ (5, 1), (1, 5), (5, 2), (2, 5), (5, 3), (3, 5), (5, 4), (4, 5), (5, 5), (6, 5), (5, 6)
            - Então P(B|C) = $\frac{6}{36}/\frac{11}{36}$ = $\frac{6}{11}$
        - P(A ∩ D) - Devemos calcular a probabilidade de, entre a soma das faces ser 9, o mínimo entre as faces dos dados seja 4, ou seja, probabilidade dos eventos dentro de A onde 4 seja o menor resultado dentre as faces dos lançamentos
            - Sabendo que os eventos de P(A) são: (6, 3), (3, 6), (5, 4), (4, 5), (6, 4), (6, 5), (6, 6), (4, 6), (5, 6), (6, 6)
            - Os eventos válidos são: (5, 4), (4, 5), (4, 6), (6, 4)
            - Logo P(A ∩ D) = $\frac{4}{36}$ = $\frac{1}{9}$

- P(C ∪ D) - Devemos calcular a probabilidade de um dos lançamentos ser 5 ou o mínimo entre duas faces ser 4
  - Devemos calcular P(C) + P(D) - P(C ∩ D)
  - P(D) = $\frac{5}{36}$ (4, 4), (5, 4), (4, 5), (6, 4), (4, 6)
  - P(C) + P(D) = $\frac{11}{36}$ + $\frac{5}{36}$
  - P(C ∩ D) = $\frac{2}{36}$ (5, 4), (4, 5)
  - Portanto, P(C ∪ D) = $\frac{11}{36}$ + $\frac{5}{36}$ - $\frac{2}{36}$ = $\frac{14}{36}$

2. Um exame de sangue feito por um laboratório tem eficiência de 94% para detectar uma certa doença quando ela de fato existe. Entretanto, o teste aponta um resultado falso-positivo para 1% das pessoas sadias testadas (isto é, se uma pessoa testada for saudável, então, com probabilidade 0,01, o teste indicará que a pessoa sadia tem a doença). Se 0,4% da população tem a doença, qual é a probabilidade de uma pessoa ter a doença dado que o resultado de seu exame foi positivo?

   - P = positivo, D = doente, ND = não doente
   - P(P|D) = 0.94
   - P(P|ND) = 0.01
   - P(D) = 0.004
   - P(ND) = 0.996
   - P(P) = P(P ∩ D) + P(P ∩ ND) = P(D)P(P|D) + P(ND)P(P|ND)
   - P(D|P) = $\frac{P(D \cap P)}{P(P)}$ = $\frac{P(D)P(P|D)}{P(P)}$ = $\frac{P(D)P(P|D)}{P(D)P(P|D)+P(ND)P(P|ND)}$ = $\frac{0{,}004.0{,}94}{0{,}004.0{,}94+0{,}996.0{,}01}$ = $\frac{376}{1372}$ = $\approx 27{,}4\%$

3. Considere três urnas com as seguintes configurações: a urna I contém 6 bolas pretas, 3 brancas e 5 vermelhas; a urna II contém 4 bolas pretas, 4 brancas e 2 vermelhas; a urna III contém 4 bolas pretas, 2 brancas e 7 vermelhas. Lança-se um dado equilibrado. Se sair 5, uma bola da urna I é retirada; se sair 1, 4, então uma bola da urna II é retirada; se sair 2, 3 ou 6, então uma bola da urna III é retirada

   - (a) Calcule a probabilidade da bola retirada ser vermelha.
     - Devemos calcular a P(V)
     - Sabemos pelo teorema da probabilidade total que: P(V) = P(V∩U_1) + P(V∩U_2) + P(V∩U_3) = P(U_1)P(V|U_1) + P(U_2)P(V|U_2) + P(U_3)P(V|U_3)
     - Subsituindo temos: $\frac{1}{6}\frac{5}{14}$ + $\frac{1}{3}\frac{1}{5}$ + $\frac{1}{2}\frac{7}{13}$
     - Portanto, P(V) = 0.395424245 ~= 39,5%
   - (b) Calcule a probabilidade de ter sido sorteada a urna III, sabendo-se que a bola retirada foi vermelha.
     - Queremos calcular P($U_3|V$)
     - Sabemos que P($U_3|V$) = $\frac{P(U_3 \cap V)}{P(V)}$
     - Sabemos da alternativa A que P(V) = 0.395424245, então temos: $\frac{P(U_3 \cap V)}{0.395424245}$

- Também $\mathrm{P}(\mathrm{U}_3 \cap \mathrm{V})$ pode ser escrito como, $\mathrm{P}(\mathrm{U}_3)\mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{U}_3)$
- Concluimos com, $\frac{\mathrm{P}(\mathrm{U}_3)\mathrm{P}(\mathrm{V}|\mathrm{U}_3)}{0.395424245}$, e substituindo temos: $\frac{0.269230769}{0.395424245}$ = 0.680865608 $\approx 68,1\%$

4. Os amigos David Gilmour, Robert Plant, Nick Manson e Jimmy Page desejam fazer um *amigo oculto* entre eles. Calcule a probabilidade de que este amigo oculto não dê errado. Obs: um amigo oculto dá errado quando uma pessoa sorteia ela mesma

    - P(E) = 1 - P(NE), Probabilidade de um amigo oculto não dar errado é 1 menos a probabilidade de dar errado
    - A cardinalidade do espaço amostral é 24, (4!)
    - P(NE) é a soma das probabilidades de cada um escolher ele mesmo
    - Evento em que todos sorteiam eles mesmos: (1,2,3,4)
    - O evento em que 3 sorteiam eles mesmos cai no anterior, pois se três itens estão em seus respectivos índices, o último também estará
    - Os evento em que 2 sorteiam eles mesmos são: (1,2,4,3), (1,4,3,2), (1,3,2,4), (4,2,3,1), (3,2,1,4), (2,1,3,4)
    - Os eventos em que 1 sorteia ele mesmo são: (1,4,2,3), (1,3,4,2), (3,2,4,1), (4,2,1,3), (4,1,3,2), (2,4,3,1), (3,1,2,4), (2,3,1,4)
    - Ou seja, a probabilidade de dar errado é a probabilidade de pelo menos um amigo sortear ele mesmo, que é a soma da probabilidade dos eventos calculados anteriormente: $\frac{8+6+1}{24}$ = $\frac{15}{24}$ = 0,625
    - Como a probabilidade de não dar errado é um menos a probabilidade de dar errado, temos: 1 - 0,625 = 0,375 = 37,5% do amigo secreto não dar errado

5. Luke Skywalker está na origem de uma reta. Um esboço da situação pode ser visto na Figura 1. Luke lança uma moeda honesta; se sair coroa, ele dá um passo para a esquerda (e termina na posição -1 da reta); se sair cara, ele dá um passo para a direita (e termina na posição 1 da reta). Suponha que no primeiro lançamento tenha saído cara. Aí, agora na posição 1, ele lança novamente a moeda: se cara, um passo para a direita; se coroa um passo para a esquerda. Suponha que novamente tenha saído cara. Na posição 2 da reta ele irá jogar novamente a moeda e irá proceder da mesma forma que nos dois passos anteriores.

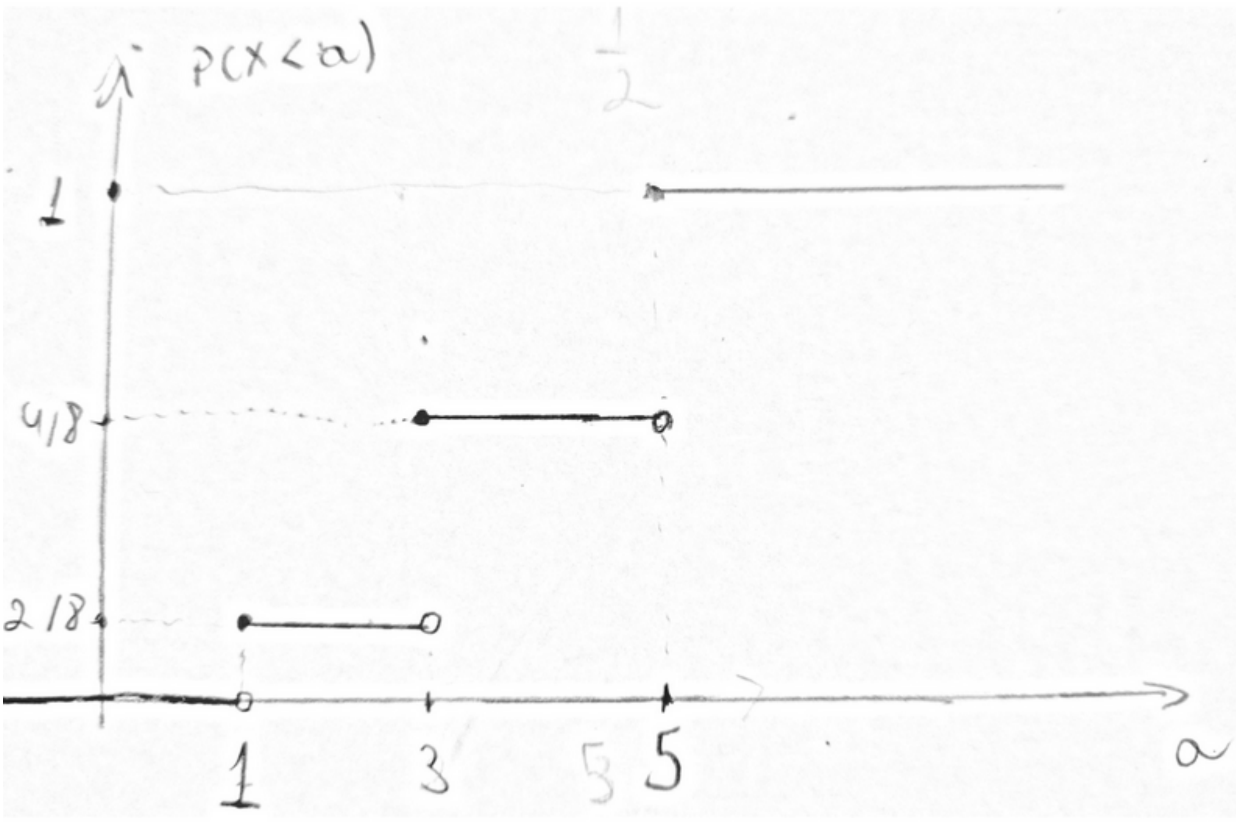
    (a) Yoda diz: Luke à origem só pode voltar depois de um número par de rodadas. Você concorda com Yoda? Justifique sua resposta.

    - Ao luke partir da origem, supondo que ao deslocar a direita some um e deslocar a esquerda subtraia um, ao deslocar ***n*** à direita, ele deve retornar ***n*** esquerda, totalizando ***2n*** rodadas para que o mesmo retorne à origem. Portanto ele só retornará à origem após um número par de rodadas

    (b) Luke está na origem da reta. Calcule a probabilidade dele retornar à origem depois de 4 passos.

- Considerando a 4-upla (D,E,E,D) os 4 passos de luke e D (direita) e E (esquerda), os movimentos dele temos $2^4 = 16$ possibilidades de movimentos
- Dentre esses queremos aqueles em que a quantidade D é igual a de E
- Logo essa probabilidade é a probabilidade de escolher 2 posições dentro as 4 para d C(4, 2) = 4!/(2!2!) = 6
- Logo a probabilidade dele retornar a origem é 6/16 = 3/8 = 37,5%

6. Seja X uma variável aleatória tal que
   - $P(X = 1) = \frac{2}{8}$, $P(X = 3) = \frac{2}{8}$ e $P(X = 5) = \frac{4}{8}$.
   - (a) Calcule $P(X < 4)$.
     - O resultado é: $P(X = 1) + P(X = 3) = \frac{2}{8} + \frac{2}{8} = \frac{1}{2}$
   - (b) CalculeP($X \geq 4$).
     - O resultado é: $P(X = 5) = \frac{1}{2}$
   - (c) Calcule a esperança e a variância de X.
     - $E(X) = 1.P(X = 1) + 3.P(X = 3) + 5.P(X = 5) = \frac{2}{8} + 3\frac{2}{8} + 5\frac{4}{8} = \frac{2+6+20}{8} = \frac{28}{8} = 3{,}5$
     - $Var(X) = E(x^2) - (E(X))^2 = 1.P(X = 1) + 9.P(X = 3) + 25.P(X = 5) - 3{,}5^2 = \frac{2}{8} + 9\frac{2}{8} + 25 \frac{4}{8} = \frac{2+18+100}{8} - 3{,}5^2 = 15 - 12{,}25 = 2{,}75$
   - (d) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de X.



7. Consideremos o lançamento de dois dados equilibrados. O espaço amostral desse experimento é formado pelos pares ordenados (i, j), emque i, j= 1,2,3,4,5,6. Suponhamos

que nosso interesse esteja no máximo das faces dos dois dados, isto é, vamos considerar a variável aleatória X que é dada por:

X = o máximo das faces dos dois dados.

Assim, por exemplo, se o resultado do experimento foi (2,4), teremos que o valor de X neste ponto será 4, pois

X(2,4) = máximo{2,4}= 4.

Análise similar nos permite afirmar que se o resultado do experimento foi (5,5), então X assumirá, neste ponto, o valor 5. Em relação a esta variável aleatória X, responda:

(a) Quais os valores que X assume?

- X assume os valores {1, 2, 3 ,4 ,5 ,6}, que são os valores máximos em duas faces

(b) Para cada valor k que X assume, determine P(X = k).

- P(1) = $\frac{1}{36}$
- P(2) = $\frac{3}{36}$
- P(3) = $\frac{5}{36}$
- P(4) = $\frac{7}{36}$
- P(5) = $\frac{9}{36}$
- P(6) = $\frac{11}{36}$

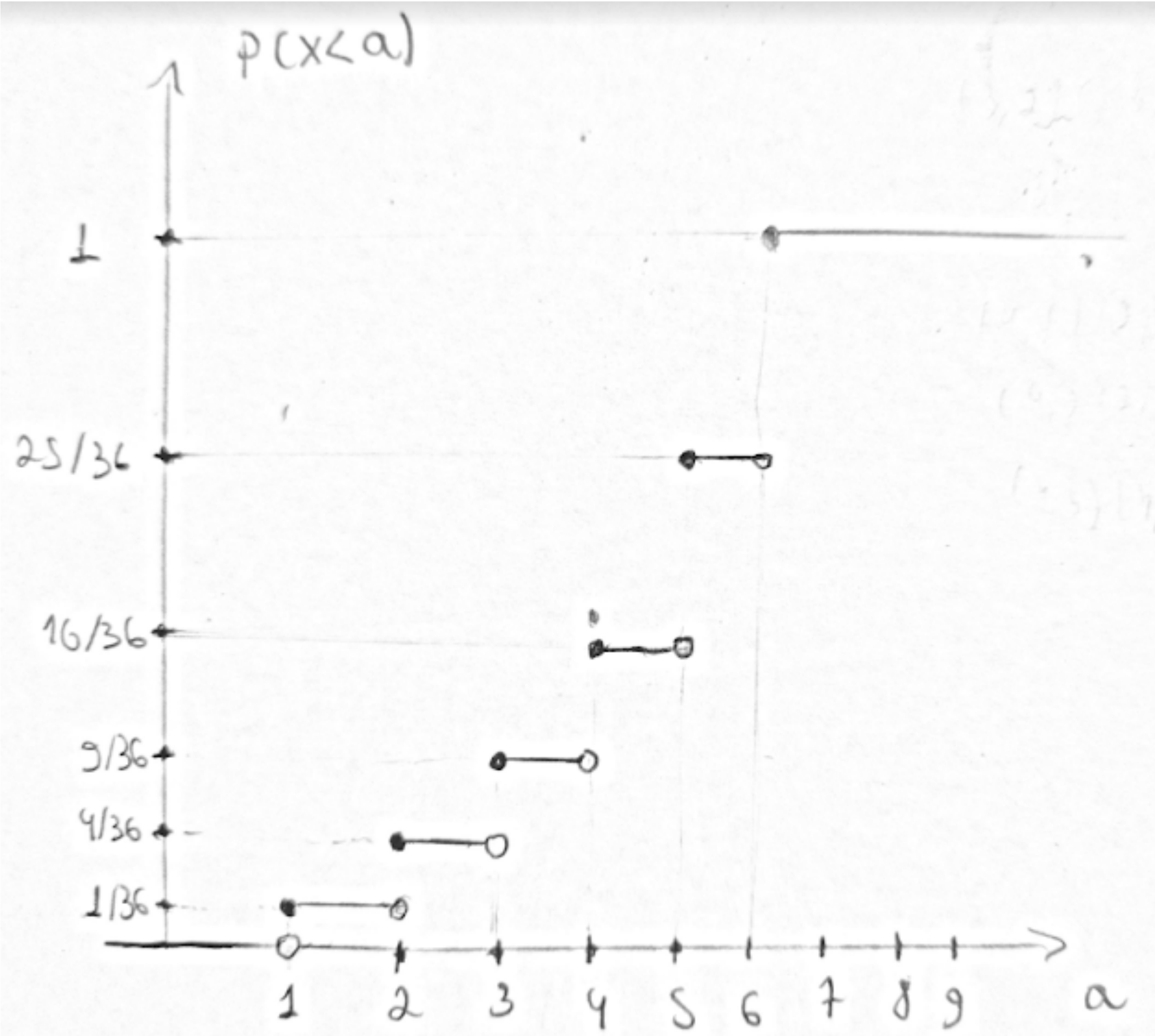
(c) Calcule P(X < 3) e P(X ≥ 3).

- P(X < 3) = P(1) + P(2) = $\frac{4}{36}$ = $\frac{1}{9}$
- P(X ≥ 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - $\frac{4}{36}$ = $\frac{8}{9}$

(d) Calcule P(X > 2|X < 5).

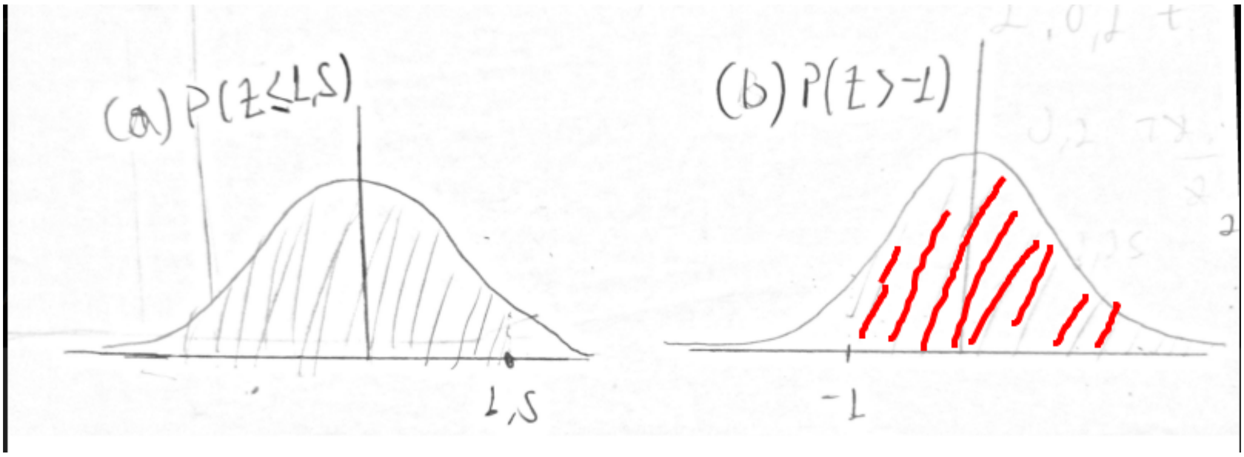
- Devemos calcular $\frac{P(X>2 \cap X<5)}{P(X<5)}$
- Logo, $\frac{P(3)+P(4)}{P(X<3)+P(3)+P(4)}$ = $\frac{12/36}{16/36}$ = $\frac{12}{16}$ = $\frac{3}{4}$

(e) Esboce o gráfico da função de distribuição acumulada de X.



8. Seja X ~ N(7,4). Obtenha:

- z = $\frac{X-7}{2}$
- (a) P(X ≤ 10).
  - O valor é P(Z ≤ 1,5) = 0,5 + 0,4332 (tabelado) = 0,9332
- (b) P(X > 5).
  - O valor é P(Z > -1) = 0,5 + 0,3413 (tabelado) = 0,8413
- (c) Represente graficamente as probabilidades obtidas em (a) e (b).

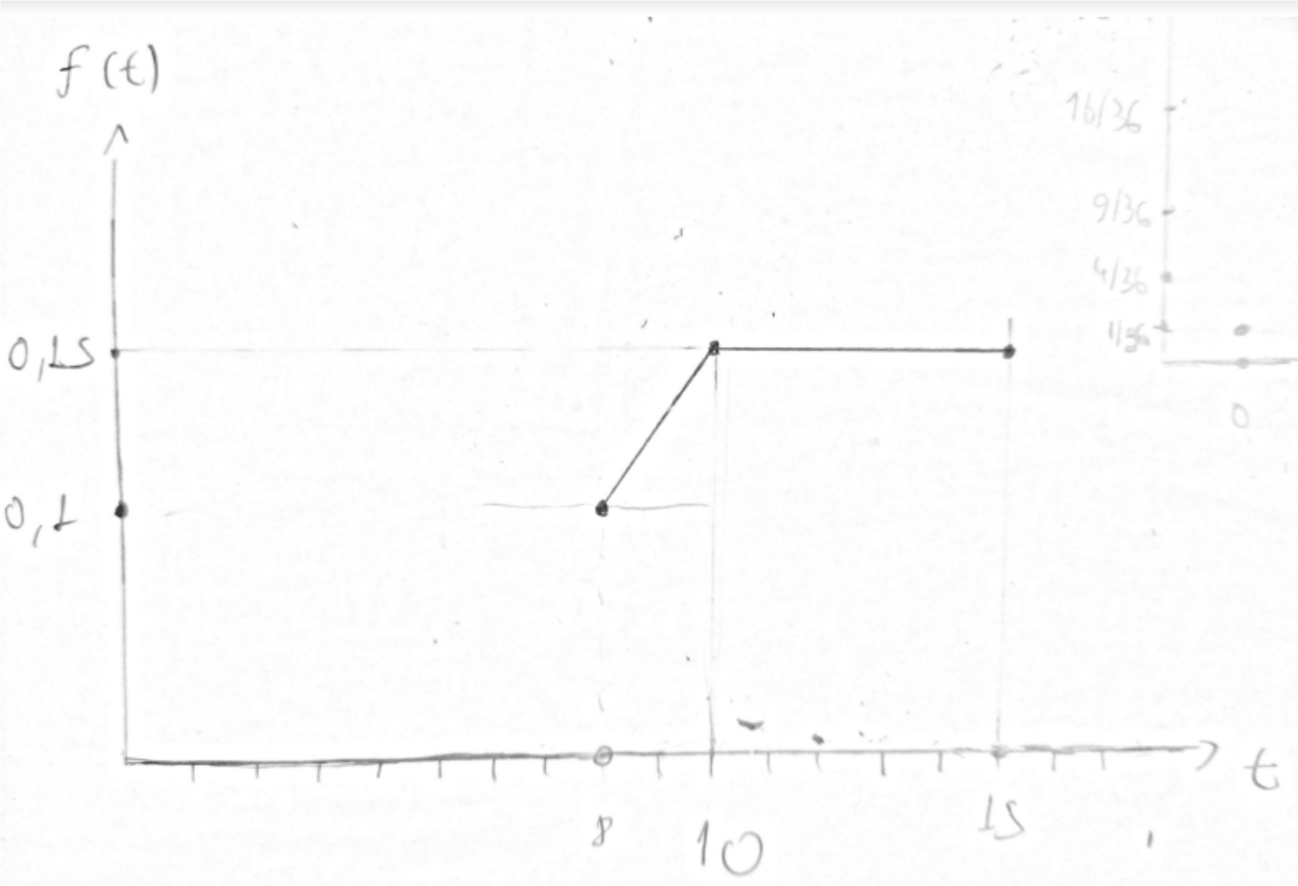


- (d) O valor de a tal que P(X ≤ a) = 0.04
  - 0,5 - 0,04 = 0,46, onde P(Z ≤ -1,75)
  - (-1,75).2 = a - 7, a = 3,5

9. Num teste educacional com crianças, o tempo para a realização de uma bateria de questões de raciocínio verbal e lógico é medido e anotado para ser comparado com um modelo teórico. Este teste é utilizado para identificar o desenvolvimento das crianças e auxiliar a aplicação de medidas corretivas. O modelo teórico considera T, tempo de teste em minutos, como uma variável aleatória contínua com função densidade de probabilidade dada por:

$$f(t) = \begin{cases} \frac{1(t-40)}{40,} & 8 \leq t \leq 10; \\ \frac{3}{20,} & 10 \leq t \leq 15; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

- (a) Esboce o gráfico de f.



- (b) Prove que f é, de fato, uma função densidade.
  - Para f ser uma função densidade, devemos provar que f(t) >= 0, para todo x, e que $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(t)dt} = 1$
  - f(t) >= 0, para todo x. Para t < 8 e t > 15, f(t) = 0. Já para t >= 8 e t <= 15, ambas funções são positivas.
  - $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(t)dt} = 1$. Para f(t), $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(t)dt}$ = $\int_{8}^{10} (\mathrm{t}-4)/40\mathrm{dt}$ + $\int_{10}^{15} 3/20\mathrm{dt}$ = 0,25 + 0,75 = 1
  - Logo, f(t) é uma função densidade
- (c) Calcule P(1 < T ≤ 13).
  - $\int_{1}^{13} \mathrm{f(t)dt}$ = 0 + $\int_{8}^{13} \mathrm{f(t)dt}$ = $\int_{8}^{10} (\mathrm{t}-4)/40\mathrm{dt}$ + $\int_{10}^{13} 3/20\mathrm{dt}$ = 0,25 + 0,45 = 0,65
- (d) Calcule P(10 < T ≤ 12).
  - $\int_{10}^{12} \mathrm{f(t)dt}$ = $\int_{10}^{12} 3/20\mathrm{dt}$ = 0,3