

Transformada de Laplace e Séries de Fourier

Antonio Carlos Nogueira

Nesta seção estudaremos a definição e as propriedades de uma integral conhecida como **transformada de Laplace**. Uma das aplicações da transformada de Laplace, como veremos, é na resolução de equações diferenciais lineares.

1 Função Gama

Antes de introduzir o conceito de transformada de Laplace, vamos introduzir o que chamamos de função Gama. Esta função como veremos será útil no cálculo de algumas integrais impróprias.

Definição 1 (Função Gama) *A função Gama é definida por*

$$\gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Para $\alpha = 1$ temos

$$\gamma(1) = \int_0^{\infty} x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \rightarrow \infty} -e^{-t} \Big|_0^{\infty} = 1$$

Logo,

$$\gamma(1) = 1.$$

Vamos calcular agora $\gamma(\alpha + 1)$:

$$\begin{aligned} \gamma(\alpha + 1) &= \int_0^{\infty} x^{\alpha+1-1} e^{-x} dx \\ &= \int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx \end{aligned}$$

Integrando por partes: faça $u = x^{\alpha}$ e $dv = e^{-x} dx$ e daí $du = \alpha x^{\alpha-1} dx$ e $v = -e^{-x}$. Logo

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} e^{-x} dx = -x^{\alpha} e^{-x} \Big|_0^{\infty} + \int_0^{\infty} \alpha x^{\alpha-1} e^{-x} dx = \alpha \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Logo

$$\gamma(\alpha + 1) = \alpha \gamma(\alpha) \tag{1}$$

Observe que a fórmula 1 é uma fórmula de recorrência e pode ser usada para determinar os valores de $\gamma(\alpha)$ para outros valores de α .

(a) α inteiro e positivo

$$\begin{aligned}
 \gamma(2) &= \gamma(1+1) = 1\gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1! \\
 \gamma(3) &= \gamma(2+1) = 2\gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2! \\
 \gamma(4) &= \gamma(3+1) = 3\gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\
 \gamma(5) &= \gamma(4+1) = 4\gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4! \\
 &\vdots \\
 \gamma(n) &= \gamma((n-1)+1) = (n-1)\gamma(n-1) = (n-1)! \\
 \gamma(n+1) &= n\gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!
 \end{aligned}$$

(b) Para $\alpha = 0$ temos: $\gamma(\alpha+1) = \alpha\gamma(\alpha)$, logo $\gamma(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, ou seja,

$$\gamma(0) = \frac{\gamma(0+1)}{0} = \frac{\gamma(1)}{0} = \infty$$

(c) α inteiro e negativo

$$\begin{aligned}
 \alpha = -1: \gamma(-1) &= \frac{\gamma(-1+1)}{-1} = \frac{\gamma(0)}{-1} = -\infty \\
 \alpha = -2: \gamma(-2) &= \frac{\gamma(-2+1)}{-2} = \frac{\gamma(-1)}{-2} = \infty \\
 \alpha = -3: \gamma(-3) &= \frac{\gamma(-3+1)}{-3} = \frac{\gamma(-2)}{-3} = -\infty \text{ e assim por diante.}
 \end{aligned}$$

Continjando com esse procedimento pode-se mostrar que o domínio da função gama, ou seja, o conjunto dos números $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a integral imprópria converge é $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \dots\}$. Se de algum modo pudermos calcular $\gamma(\alpha)$ para α entre 0 e 1, então com o auxílio da relação de recorrência poderemos calcular $\gamma(\alpha)$ para α entre 1 e 2, depois entre 2 e 3, etc. Existem tabelas de valores de $\gamma(\alpha)$, $1 < \alpha < 2$, com alto grau de aproximação, de modo que será possível assim calcular $\gamma(\alpha)$ quando $\alpha > 0$.

Exemplo 1 Admitindo que $\gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$, vamos calcular $\gamma(7/2)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
 \gamma(7/2) &= \gamma(5/2+1) \\
 &= 5/2 \cdot \gamma(5/2) = 5/2 \cdot \gamma(3/2+1) \\
 &= 5/2 \cdot 3/2 \cdot \gamma(3/2) = 5/2 \cdot 3/2 \cdot \gamma(1/2+1) \\
 &= 5/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 \cdot \gamma(1/2) \\
 &= 15/8 \cdot \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

Exemplo 2 Admitindo que $\gamma(1,7) = 0,90863873$ calcular $\gamma(2,7)$.

Solução:

$$\begin{aligned}\gamma(2, 7) &= &= \gamma(1, 7 + 1) \\ &= &= 1, 7\gamma(1, 7) \\ &= &= 1, 7 \cdot 0, 90863873 \\ &= &= 1, 544685841\end{aligned}$$

Exemplos 1

Exemplo 3 Calcule as integrais impróprias usando a função γ

1. $I = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$

2. $I = \int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx$

3. $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$

4. $I = \int_0^\infty 3\alpha e^{3\alpha-1} e^{-x^3} dx$

5. $I = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$

6. $I = \int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$

Solução:

a)

$$\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{1/2-1} e^{-x} dx = \gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

b) Para resolver a integral $\int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx$ faça a mudança de variável $x^2 = y$ e portanto $x = y^{1/2}$; segue daí que $dx = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy$; observe ainda que quando $x = 0$, temos $y = 0$ e quando $x = \infty$, $y = \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty (y^{1/2})^7 e^{-y} \frac{1}{2} y^{-1/2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{7/2} e^{-y} y^{-1/2} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{4-1} e^{-y} dy \\ &= \frac{1}{2} \gamma(4) \\ &= \frac{1}{2} 3! = 3\end{aligned}$$

c) Para a integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ faça a mudança de variável $y = x^2$ e, como no exemplo anterior, $x = y^{1/2}$; segue daí que $dx = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy$; observe ainda que quando $x = 0$, temos $y = 0$ e quando $x = \infty$, $y = \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty e^{-y} \frac{1}{2} y^{-1/2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{1-1/2} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \gamma(1/2) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

2 Transformada de Laplace

Definição 2 Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$. A **transformada de Laplace** de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$, é definida por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt \quad (2)$$

Quando a integral 2 converge, o resultado é uma função de s . Na prática, para facilitar o entendimento, utilizaremos letras minúsculas para denotar a função a ser transformada e a letra maiúscula correspondente para denotar sua transformada de Laplace; por exemplo

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad \mathcal{L}[g(t)] = G(s), \quad \mathcal{L}[y(t)] = Y(s).$$

Observação 1

O domínio da transformada de Laplace, evidentemente, é o conjunto de todos os valores $s \in \mathbb{R}$ para os quais a integral coonverge.

Exemplo 4 Calcule $\mathcal{L}(1)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1) &= \int_0^\infty 1 e^{-st} dt = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} dt \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \left. \frac{-e^{-st}}{s} \right|_0^b \\
&= \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{-e^{-sb} + 1}{s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

desde que s seja maior do que zero ($s > 0$). Onserve, que quando $s > 0$, o expoente $-sb$ é negativo e portanto $e^{-sb} \rightarrow 0$ quando $b \rightarrow \infty$. Quando $s < 0$, a integral diverge. Assim,

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Exercício 1 *Mostre que:*

(a) $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$

(b) $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$

(c) $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad n \in \mathbb{N}$

(d) $\mathcal{L}[t^p] = \frac{\gamma(p+1)}{s^{p+1}}, \quad p > -1.$

(e) $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}, \quad \text{para } s > a.$

Existência da transformada de Laplace

A integral que define a transformada de Laplace não é necessariamente convergente. Existem casos de funções cujas transformadas de Laplace não existem. Veremos a seguir condições que garantem a existência da transformada. Antes vamos estabelecer alguns conceitos necessários.

Definição 3 (Função contínua por partes) *Uma função f é **contínua por partes** no intervalo $[0, \infty)$ se, em qualquer intervalo $[a, b]$, onde $a, b \geq 0$, existem apenas um número finito de descontinuidades e toda descontinuidade é de primeira espécie, ou seja, os limites laterais existem.*

Definição 4 (Função de ordem exponencial) *Uma função f é dita de **ordem exponencial** α se existem constantes reais α e M , $M > 0$, tais que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, para todo $t > 0$. Podemos dizer ainda que $\left| \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} \right| \leq M$.*

Observação 2 *Funções de ordem exponencial não podem crescer mais rapidamente que $e^{\alpha t}$, para um certo α , quanto $t \rightarrow \infty$; logo podemos concluir que $\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \frac{f(t)}{e^{\alpha t}} \right| = 0$.*

Exemplo 5 *A função $f(t) = \sin(2t)$ é de ordem exponencial.*

Solução: De fato, para $\alpha = 1$ temos

$$\left| \frac{\sin(2t)}{e^t} \right| \leq \frac{|\sin(2t)|}{e^t} \leq \frac{1}{e^t} \leq 1, \quad \forall t \geq 0$$

Segue daí que

$$|\sin(2t)| \leq e^t, \quad \forall t \geq 0.$$

Exemplo 6 As funções t^n , e^{at} , $\sin(bt)$, $\cos(bt)$, $t^n e^{at} \sin(bt)$, $t^n e^{at} \cos(bt)$ são funções de ordem exponencial. Estas funções aparecem, geralmente, nas equações diferenciais lineares de coeficientes constantes.

Exemplo 7 A função e^{t^2} não é de ordem exponencial. Seu gráfico cresce de forma mais rápida que qualquer função exponencial da forma e^{ct} .

Teorema 1 Seja $f(t)$ uma função contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$ e de ordem exponencial, isto é, existem constantes α e $M > 0$ tais que $|f(t)| \leq M e^{\alpha t}$, para todo $t \geq 0$, então a transformada de Laplace $F = F(s)$, definida para todo $s > \alpha$ por

$$F(s) = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

existe e converge para todo $s > \alpha$.

Observação 3 As condições do teorema são suficientes mas não necessárias para a existência da transformada de Laplace como veremos no exemplo a seguir.

Exemplo 8 A função $f(t) = t^{-1/2}$ não é contínua por partes no intervalo $[0, \infty)$, mas sua transformada de Laplace existe.

Solução: Primeiro observe que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty,$$

logo f não é contínua por partes. Apesar disso, f é de ordem exponencial pois

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{t} e^{\alpha t}} = 0,$$

para qualquer $\alpha \geq 0$; logo f é de ordem exponencial. Agora vamos calcular sua transformada:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^{-1/2}] &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-st} dt \\ (*) &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{-1/2} e^{-x} \frac{dx}{s} \\ &= \frac{1}{s^{-1/2} \cdot s} \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{s^{1/2}} \int_0^\infty x^{1/2-1} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{s^{1/2}} \gamma(1/2) \\ &= \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\pi} \\ &= \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0 \end{aligned}$$

Em (*) faça

$$\begin{aligned} st &= x \\ t &= \frac{x}{s} \\ dt &= \frac{dx}{s} \end{aligned}$$

Veja que:

para $t = 0 \Rightarrow x = 0$

para $t = \infty \Rightarrow x = \infty$

Exercício 2 Calcule a transformada de Laplace das funções abaixo

(a) $f(t) = e^{-3t}$

(b) $f(t) = \text{sen}(2t)$

(c) $f(t) = 3t - 5 \text{sen}(2t)$

(d) $f(t) = te^{-2t}$

(e) $f(t) = t^2 e^{-2t}$

Exercício 3 Calcule a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

Teorema 2 Transformadas de Laplace de algumas funções básicas

(a) $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$

(b) $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}, n = 1, 2, 3, \dots$

(c) $\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

(d) $\mathcal{L}[t^{1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$

(e) $\mathcal{L}[t^p] = \frac{\gamma(p+1)}{s^{p+1}}, p > -1$

(f) $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$

(g) $\mathcal{L}[\text{sen } kt] = \frac{k}{s^2+k^2}$

(h) $\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}$

(i) $\mathcal{L}[\sinh kt] = \frac{k}{s^2-k^2}$

(j) $\mathcal{L}[\cosh kt] = \frac{s}{s^2-k^2}$

Observação 4 As funções seno hiperbólica e cosseno hiperbólica são definidas pelas equações

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Cálculo de transformada de Laplace a partir de tabelas

Uma propriedade importante da transformada de Laplace é que ela é linear, ou seja, dadas funções f e g e números reais a e b , tem-se

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

De fato, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt &= \int_0^\infty e^{-st}(af(t))dt + \int_0^\infty e^{-st}(bg(t))dt \\ &= a \int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b \int_0^\infty e^{-st}g(t)dt\end{aligned}$$

Assim, podemos usar a tabela fornecida pelo teorema 2 e o fato de que a transformada de Laplace é linear para calcular a transformada de Laplace de outras funções. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9 Calcule a transformada de Laplace de $f(t) = 2t^2 - 3t - 4e^t$.

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[2t^2 - 3t - 4e^t] &= 2\mathcal{L}[t^2] - 3\mathcal{L}[t] - 4\mathcal{L}[e^t] \\ &= 2\frac{2}{s^3} - 3\frac{1}{s^2} - 4\frac{1}{s-1} \\ &= \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2} - \frac{4}{s-1} \\ &= \frac{4(s-1) - 3s(s-1) - 4s^3}{s^3(s-1)} \\ &= \frac{-4s^3 - 3s^2 + 7s - 4}{s^3(s-1)}\end{aligned}$$

Exemplo 10 Calcule a transformada de Laplace da função $f(t) = \sin^2 t$.

Solução: Primeiro observe que para todo $t \in \mathbb{R}$ tem-se a identidade

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

Assim, usando a linearidade da transformada de Laplace e os resultados da tabela acima

segue que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[\sin^2 t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1 - \cos 2t}{2}\right] \\
 &= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t] \\
 &= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2 + 4} \\
 &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2 + 4}\right) \\
 &= \frac{2}{s(s^2 + 4)}
 \end{aligned}$$

Exemplo 11 Calcule $\mathcal{L}[1 + t + t^2]$

Solução: Pela linearidade de \mathcal{L} temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[1 + t + t^2] &= \mathcal{L}[1] + \mathcal{L}[t] + \mathcal{L}[t^2] \\
 &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2} + \frac{2}{s^3} \\
 &= \frac{2 + s + s^2}{s^3}
 \end{aligned}$$

Exercício 4 Calcule $\mathcal{L}[\sin t + \cos t]$

Exercícios

- Use a definição de transformada de Laplace para calcular $\mathcal{L}[f(t)]$:
 - $f(t) = e^{t+7}$
 - $f(t) = e^{-2t-5}$
 - $f(t) = te^{4t}$
 - $f(t) = t^2e^{3t}$
 - $f(t) = e^{-t}\sin t$
 - $f(t) = e^t \cos t$
 - $f(t) = t \cos t$
 - $f(t) = t \sin t$
 - $f(t) = te^{-2t}$
 - $f(t) = t^2e^{-2t}$
- Calcule a transformada de Laplace de $f(t)$ usando a função gama:
 - $f(t) = t^{1/2}$
 - $f(t) = t^{-1/2}$
 - $f(t) = t^{3/2}$
- Calcule $\mathcal{L}[f(t)]$ usando a tabela e propriedade de linearidade.
 - $f(t) = 2t^4$
 - $f(t) = t^5$
 - $f(t) = 4t - 10$
 - $f(t) = 7t + 3$
 - $f(t) = t^2 - 6t + 3$
 - $f(t) = (t + 1)^3$
 - $f(t) = 1 + e^{4t}$
 - $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$
 - $f(t) = (1 + e^{2t})^2$
 - $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------|
| (k) $f(t) = e^t \sinh kt$ | (o) $f(t) = \cos^2 t$ |
| (l) $f(t) = e^t \cosh kt$ | (p) $f(t) = \cos t \cos 2t$ |
| (m) $f(t) = \cos 5t + \sin 2t$ | (q) $f(t) = \sin^3 t$ |
| (n) $f(t) = \sin 2t \cos 2t$ | |

A transformada inversa

Teorema 3 (Unicidade) *Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas por parte e de ordem exponencial e além disso*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)], \quad \text{para todo } s \geq \alpha,$$

então $f(t) = g(t)$ em todos os pontos onde f e g forem contínuas.

De acordo com o teorema acima podemos concluir que:

- (a) $f(t) = g(t)$ exceto, possivelmente, nos pontos de descontinuidade.
- (b) não podemos ter funções diferentes com a mesma transformada de Laplace.
- (c) podemos falar na transformada inversa de Laplace.

Dada uma função $F(s)$, se existir uma função $f(t)$ tal que sua transformada de Laplace seja $F(s)$, diremos que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$. Indicaremos isso pela notação:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

O análogo do teorema 2 para a transformada inversa é o seguinte:

Teorema 4 *Algumas transformadas inversas*

- | | |
|---|--|
| 1. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right] = 1$ | 6. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s^2+k^2}\right] = \sin kt$ |
| 2. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{n!}{s^{n+1}}\right] = t^n$ | 7. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+k^2}\right] = \cos kt$ |
| 3. $\mathcal{L}^{-1}\left[\sqrt{\frac{\pi}{s}}\right] = t^{-1/2}$ | 8. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{k}{s^2-k^2}\right] = \sinh kt$ |
| 4. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}\right] = t^{1/2}$ | 9. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2-k^2}\right] = \cosh kt$ |
| 5. $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-a}\right] = e^{at}$ | |

Da mesma forma que \mathcal{L} , \mathcal{L}^{-1} também é um operador linear, ou seja, dadas quaisquer constantes α e β tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

onde $F(s)$ e $G(s)$ são as transformadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente.

Solução: De fato, seja $h(t) = \mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)]$, logo pela definição

$$\mathcal{L}[h(t)] = \alpha F(s) + \beta G(s) = \alpha \mathcal{L}[f(t)] + \beta \mathcal{L}[g(t)] = \mathcal{L}[\alpha f(t) + \beta g(t)]$$

e, assim de acordo com o teorema 3 temos $h(t) = \alpha f(t) + \beta g(t)$ e daí

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] &= h(t) \\ &= \alpha f(t) + \beta g(t) \\ &= \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)] \end{aligned}$$

Exemplo 12 Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right]$

Solução: Observe que esta função não está na tabela, mas observando que $5 = 4 + 1$, podemos identificar que $n = 4$; usando a propriedade de linearidade podemos escrever:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^5}\right] = \frac{1}{4!} \mathcal{L}^{-1}\left[4! \frac{1}{s^5}\right] = \frac{1}{24} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4!}{s^5}\right] = \frac{1}{24} t^4$$

Exemplo 13 Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+64}\right]$

Solução: Observe que $s^2 + 64 = s^2 + 8^2$ e portanto $\frac{1}{s^2+64} = \frac{8}{8(s^2+8^2)} = \frac{1}{8} \frac{8}{s^2+8^2}$. Assim,

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+64}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{8} \frac{8}{s^2+64}\right] = \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{s^2+8^2}\right] = \frac{1}{8} \sin 8t$$

Exercício 5 Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+5}{s^2+7}\right]$

Frações parciais

O uso de frações parciais é bastante importante para encontrar a transformada de Laplace inversa. Faremos aqui uma revisão de três casos básicos dessa teoria.

Caso 1

Os denominadores de $F(s)$ contêm somente fatores lineares distintos.

Exemplo 14 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} \right]$$

Solução: Vamos inicialmente decompor a fração $\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$ em frações parciais, ou seja, determinar as constantes A, B, C tais que

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} &= \frac{A}{s-1} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s+4} \\ &= \frac{A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)} \end{aligned}$$

Como os denominadores são idênticos, os numeradores também deverão ser idênticos, ou seja,

$$1 = A(s+2)(s+4) + B(s-1)(s+4) + C(s-1)(s+2).$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados dessa igualdade, vemos que essa equação é equivalente a um sistema de três equações e três incógnitas A, B e C . Porém, podemos determinar essas incógnitas atribuindo valores para s :

- $s = 1 \Rightarrow 1 = A(3)(5) \Rightarrow A = 1/15$
- $s = -2 \Rightarrow 1 = B(-3)(2) \Rightarrow B = -1/6$
- $s = -4 \Rightarrow 1 = C(-5)(-2) \Rightarrow C = 1/10$

Assim, podemos escrever

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{1/15}{s-1} - \frac{1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4}$$

e, assim,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1/15}{s-1} - \frac{1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4} \right] \\ &= \frac{1}{15} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-1} \right] - \frac{1}{6} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] + \frac{1}{10} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+4} \right] \\ &= \frac{1}{15} e^t - \frac{1}{6} e^{-2t} + \frac{1}{10} e^{-4t} \end{aligned}$$

Caso 2

O denominador de $F(s)$ contém fatores lineares repetidos.

Exemplo 15 Calcule $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} \right]$.

Solução: Neste caso devemos determinar constantes A, B, C, D e E tais que

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s+2} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{(s+2)^3}$$

Assim, devemos ter

$$\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} = \frac{As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2}{s^2(s+2)^3}$$

e daí

$$s+1 = As(s+2)^3 + B(s+2)^3 + Cs^2(s+2)^2 + Ds^2(s+2) + Es^2$$

Fazendo $s = 0$ obtemos $1 = 8B$ e portanto $B = 1/8$ e, fazendo $s = -2$, obtemos $-1 = 4E$ e então $E = -1/4$. Para obter as demais constantes vamos desenvolver as expressões do lado direito e comparar os coeficientes com os respectivos coeficientes da expressão do lado esquerdo:

$$\begin{aligned} s+1 &= As(s^3 + 6s^2 + 12s + 8) + B(s^3 + 6s^2 + 12s + 8) + Cs^2(s^2 + 4s + 4) + D(s^3 + 2s^2) + Es^2 \\ &= (A+C)s^4 + (6A+B+4C+D)s^3 + (12A+6B+4C+2D+E)s^2 + (8A+12B)s + 8B \end{aligned}$$

Comparando os coeficientes de s^4, s^3 e s em ambos os lados da igualdade obtemos

$$\begin{aligned} A+C &= 0 && \text{coeficiente de } s^4 \\ 6A+B+4C+D &= 0 && \text{coeficiente de } s^3 \\ 8A+12B &= 1 && \text{coeficiente de } s \end{aligned}$$

Resolvendo o sistema encontramos $A = -1/16, C = 1/16$ e $D = 0$. Assim

$$\begin{aligned} \frac{s+1}{s^2(s+2)^3} &= \frac{-1/16}{s} + \frac{1/8}{s^2} + \frac{1/16}{s+2} + \frac{0}{(s+2)^2} + \frac{-1/4}{(s+2)^3} \\ &= -\frac{1}{16} \frac{1}{s} + \frac{1}{8} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^3} \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[-\frac{1}{16} \frac{1}{s} + \frac{1}{8} \frac{1}{s^2} + \frac{1}{16} \frac{1}{s+2} - \frac{1}{4} \frac{1}{(s+2)^3} \right] \\ &= -\frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] + \frac{1}{16} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s+2} \right] - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s+2)^3} \right] \\ &= -\frac{1}{16} + \frac{1}{8}t + \frac{1}{16}e^{-2t} - \frac{1}{8}t^2e^{-2t}. \end{aligned}$$

Caso 3

O denominador de $F(s)$ contém um fator quadrático irreduzível.

Exemplo 16 Calcule $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} \right]$

Solução: Neste caso devemos procurar uma decomposição em frações parciais da seguinte forma

$$\begin{aligned} \frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} &= \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s^3} + \frac{Ds+E}{s^2+4} \\ &= \frac{As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)s^3}{s^3(s^2+4)} \end{aligned}$$

Assim, devemos ter

$$3s-2 = As^2(s^2+4) + Bs(s^2+4) + C(s^2+4) + (Ds+E)s^3.$$

Fazendo $s=0$, obtemos imediatamente $C = -1/2$. Por outro lado os coeficientes de s^4 , s^3 , s^2 e s são respectivamente:

$$A+D=0, \quad B+E=0, \quad 4A+C=0, \quad 4B=3$$

Destas equações obtemos então $B=3/4$, $E=-3/4$, $A=1/8$ e $D=-1/8$. Assim,

$$\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} = \frac{1}{8} \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^3} + \frac{-s/8-3/4}{s^2+4}$$

e portanto,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3s-2}{s^3(s^2+4)} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{8} \frac{1}{s} + \frac{3}{4} \frac{1}{s^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{s^3} + \frac{-s/8-3/4}{s^2+4} \right] \\ &= \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s} \right] + \frac{3}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2} \right] - \frac{1}{4} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^3} \right] - \frac{1}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2+4} \right] - \frac{3}{8} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{s^2+4} \right] \\ &= \frac{1}{8} + \frac{3}{4}t - \frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{8} \cos t - \frac{3}{8} \sin 2t. \end{aligned}$$

Uma observação importante neste ponto é que nem toda função $F(s)$ é a transformada de Laplace de alguma função $f(t)$ contínua por partes de ordem exponencial.

Teorema 5 (Comportamento de $F(s)$ quando $s \rightarrow \infty$) Seja $f(t)$ contínua por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty)$. Então

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \mathcal{L}[f(t)] = 0.$$

Prova. Como $f(t)$ é contínua por partes em $0 \leq t \leq T$, ela é necessariamente limitada neste intervalo, ou seja, existe um número real positivo M_1 tal que

$$|f(t)| \leq M_1 = M_1 e^{0t}, \forall t \in [0, T]$$

Além disso, existe $M_2 > 0$ tal que

$$|f(t)| \leq M e^{\lambda t}, \forall t > T.$$

Denotando por M o máximo entre M_1 e M_2 e c o máximo entre 0 e λ , então

$$\begin{aligned} |\mathcal{L}[f(t)]| &\leq \int_0^\infty e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq M \int_0^\infty e^{-st} e^{ct} dt \\ &= M \int_0^\infty e^{-(s-c)t} dt \\ &= -M \frac{e^{-(s-c)t}}{s-c} \Big|_0^\infty = \frac{M}{s-c} \end{aligned}$$

para $s > c$. Como $s \rightarrow \infty$, temos que $|\mathcal{L}[f(t)]| \rightarrow 0$ e portanto $\mathcal{L}[f(t)] \rightarrow 0$.

□

Exercícios

1. Utilize o teorema 4 e a propriedade de linearidade para calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.
 - (a) $F(s) = \frac{1}{s^3}$
 - (b) $F(s) = \frac{1}{s^4}$
 - (c) $F(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{48}{s^5}$
 - (d) $F(s) = \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2$
 - (e) $F(s) = \frac{(s+1)^3}{s^4}$
 - (f) $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$
 - (g) $F(s) = \frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} + \frac{1}{s+8}$
 - (h) $F(s) = \frac{10s}{s^2+16}$
 - (i) $F(s) = \frac{4s}{4s^2+1}$
 - (j) $F(s) = \frac{1}{4s^2+1}$
 - (k) $F(s) = \frac{1}{s^2-16}$
 - (l) $F(s) = \frac{10s}{s^2-25}$
 - (m) $F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$
 - (n) $F(s) = \frac{1}{s^2+s-20}$
 - (o) $F(s) = \frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}$
 - (p) $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+2)}$
 - (q) $F(s) = \frac{s-1}{s^2(s^2+1)}$
 - (r) $F(s) = \frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}$
 - (s) $F(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$
 - (t) $F(s) = \frac{6s+3}{(s^2+1)(s^2+4)}$

Translação na transformada de Laplace

O próximo teorema nos possibilitará aumentar nossa tabela de transformadas de Laplace de maneira significativa.

Teorema 6 (Teorema de translação) *Se a é um número real, então*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Prova. A prova segue diretamente da definição de \mathcal{L} ; sendo

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt,$$

então

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

□

Observação 5 (Notação:) *Algumas vezes vamos utilizar a simbologia*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s \rightarrow s-a}$$

onde $s \rightarrow s-a$ indica que substituímos s por $s-a$ em $F(s)$.

Exemplo 17 *Calcule:*

$$(a) \mathcal{L}[e^{5t}t^3]$$

$$(b) \mathcal{L}[e^{-2t} \cos 4t]$$

Solução: Os resultados seguem do teorema 6:

(a)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{5t}t^3] &= \mathcal{L}[t^3]_{s \rightarrow s-5} \\ &= \left. \frac{3!}{s^4} \right|_{s \rightarrow s-5} \\ &= \frac{6}{(s-5)^4} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[e^{-2t} \cos 2t] &= \mathcal{L}[\cos 2t]_{s \rightarrow s+2} \\ &= \left. \frac{s}{s^2 + 16} \right|_{s \rightarrow s+2} \\ &= \frac{s+2}{(s+2)^2 + 16} \end{aligned}$$

O teorema 6 também pode ser enunciado na forma inversa:

Teorema 7

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{s \rightarrow s-a} = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at} f(t)$$

onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplo 18 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 6s + 11} \right]$$

Solução: Primeiro vamos completar o quadrado na expressão $s^2 + 6s + 11$

$$\begin{aligned} s^2 + 6s + 11 &= s^2 + 2 \cdot 3s + 3^2 - 3^2 + 11 \\ &= (s + 3)^2 - 9 + 11 \\ &= (s + 3)^2 + 2 \end{aligned}$$

Daí, podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 6s + 11} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s + 3)^2 + 2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 3 - 3}{(s + 3)^2 + 2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 2} - \frac{3}{(s + 3)^2 + 2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 2} \right] - 3 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s + 3)^2 + 2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s + 3}{(s + 3)^2 + 2} \right] - 3 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{2}}{(s + 3)^2 + (\sqrt{2})^2} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 2} \right]_{s \rightarrow s+3} - \frac{3}{\sqrt{2}} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{\sqrt{2}}{s^2 + (\sqrt{2})^2} \right]_{s \rightarrow s+3} \\ &= e^{3t} \cos \sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}} e^{-3t} \sin \sqrt{2}t \end{aligned}$$

Exemplo 19 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2 + 2s - 8} \right]$$

Solução: Competando o quadrado no segundo denominador e usando a linearidade, temos:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{s^2+2s-8} \right] &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3} + \frac{1}{(s+1)^2-9} \right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+1)^2-9} \right] \\
 &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{2!} \frac{2!}{(s-1)^3} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{3} \frac{3}{(s+1)^2-3^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2!} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2!}{(s-1)^3} \right] + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{(s+1)^2-3^2} \right] \\
 &= \frac{1}{2!} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2!}{s^3} \Big|_{s \rightarrow s-1} \right] + \frac{1}{3} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{3}{s^2-3^2} \Big|_{s \rightarrow s+1} \right] \\
 &= \frac{1}{2} e^t t^2 + \frac{1}{3} e^{-t} \sinh 3t
 \end{aligned}$$

Escala na transformação de Laplace

Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt = F(s)$$

e $\lambda > 0$ então

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$$

De fato,

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \int_0^\infty f(\lambda t) e^{-st} dt$$

Substituindo $\lambda t = u$ e depois fazendo $\sigma = \frac{s}{\lambda}$, obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(\lambda t)] &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(u) e^{-\frac{su}{\lambda}} du \\
 &= \frac{1}{\lambda} \int_0^\infty f(u) e^{-\sigma u} du \\
 &= \frac{1}{\lambda} F(\sigma) \\
 &= \frac{1}{\lambda} F\left(\frac{s}{\lambda}\right)
 \end{aligned}$$

Exemplo 20 Calcule $\mathcal{L}[\cos 12t]$

Solução: Seja $F(s) = \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$. Pelo resultado acima temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos 12t] &= \frac{1}{12} F\left(\frac{s}{12}\right) \\
&= \frac{1}{12} \frac{\frac{s}{12}}{\left(\frac{s}{12}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{12^2} \frac{s}{\frac{s^2}{12^2} + 1} \\
&= \frac{s}{s^2 + 12^2} \\
&= \frac{s}{s^2 + 144}
\end{aligned}$$

Derivada de uma transformada

Seja $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$. Derivando sob o sinal da integral com relação à variável s (teorema de Leibniz), obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dF}{ds} &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial s} f(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}dt \\
&= - \int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt \\
&= -\mathcal{L}[tf(t)]
\end{aligned}$$

Assim, podemos concluir que

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF}{ds} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)].$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^2 f(t)] &= \mathcal{L}[t \cdot tf(t)] \\
&= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[tf(t)] \\
&= -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right) \\
&= \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[f(t)].
\end{aligned}$$

Os resultados acima sugerem uma fórmula geral para $\mathcal{L}[t^n f(t)]$.

Teorema 8 (Derivadas de transformadas) Se $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$, então para $n = 1, 2, 3, \dots$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s) = (-1)^n F^{(n)}(s).$$

Exemplo 21 Calcule

$$(a) \mathcal{L}[te^{3t}] \quad (b) \mathcal{L}[t \sin at] \quad (c) \mathcal{L}[t^2 \sin at] \quad (d) \mathcal{L}[te^{-t} \cos t]$$

Solução: a) Neste caso $n = 1$ e $f(t) = e^{3t}$:

$$\mathcal{L}[te^{3t}] = -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[e^{3t}] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{1}{s-3} \right) = \frac{1}{(s-3)^2}$$

Observe que neste caso poderíamos também utilizar o teorema de translação (6).

b)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t \sin(kt)] &= -\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(kt)] \\ &= -\frac{d}{ds} \left(\frac{k}{s^2 + k^2} \right) \\ &= \frac{2ks}{(s^2 + k^2)^2} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[t^2 \sin(kt)] &= \frac{d^2}{ds^2} \mathcal{L}[\sin(kt)] \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin(kt)] \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{d}{ds} \left(\frac{k}{s^2 + k^2} \right) \right) \\ &= \frac{d}{ds} \left(\frac{-2ks}{(s^2 + k^2)^2} \right) \\ &= \frac{6ks^2 - 2k^3}{(s^2 + k^2)^3}. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[te^{-t} \cos t] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[e^{-t} \cos t] \\ &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\cos t]_{s \rightarrow s+1} \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s}{s^2+1}\right)_{s \rightarrow s+1} \\ &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\right) \\ &= \frac{(s+1)^2-1}{((s+1)^2+1)^2}\end{aligned}$$

A forma inversa do teorema 8 fica assim:

Teorema 9

$$\mathcal{L}^{-1}\left[(-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}\right] = f(t)t^n$$

onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplo 22 Calcule $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$, para $F(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2}$

Solução: Vamos tentar usar o teorema 9. Para isso, observe que

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = \frac{-2s}{(s^2+1)^2} = -2\frac{s}{(s^2+1)^2}$$

ou seja

$$\frac{s}{(s^2+1)^2} = -\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right] \\ &= \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right]\end{aligned}$$

Mas, de acordo com o teorema 9, temos

$$\mathcal{L}^{-1}\left[-\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right)\right] = tf(t)$$

onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+1}\right] = \sin t$. Concluimos daí que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s^2+1)^2}\right] = \frac{1}{2}t \sin t = \frac{\sin t}{2} \cdot t$$

Transformadas de derivadas

O nosso objetivo principal com a transformada de Laplace é usá-la para resolver certos tipos de equações diferenciais. Para isso, precisamos dar sentido às expressões do tipo $\mathcal{L}[dy/dt]$ e $\mathcal{L}[d^2y/dt^2]$. Por exemplo, se f' for contínua para $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt\end{aligned}$$

Usando integração por partes com $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)dt$, de forma que $v = f(t)$, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-st} f'(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left([f(t)e^{-st}]_0^b - \int_0^b f(t)(-se^{-st}) dt \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-sb}f(b) - f(0)) + s \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f(t)e^{-st} dt \\ &= 0 - f(0) + s \int_0^\infty f(t)e^{-st} dt \\ &= -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)] \\ &= sF(s) - f(0)\end{aligned}$$

sendo que $\lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-sb}f(b)) = 0$, pois estamos supondo que $f(t)$ é de ordem exponencial.

Procedendo da mesma forma, obtemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t) dt \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \left([f'(t)e^{-st}]_0^b - \int_0^b f'(t)(-se^{-st}) dt \right) \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} (e^{-sb}f'(b) - f'(0)) + s \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b f'(t)e^{-st} dt \\ &= 0 - f'(0) + s \int_0^\infty f'(t)e^{-st} dt \\ &= -f'(0) + s\mathcal{L}[f'(t)] \\ &= -f'(0) + s(sF(s) - f(0)) \\ &= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

De forma geral, temos:

Teorema 10 (Transformada de uma derivada) Se $f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas e de ordem exponencial em $[0, \infty)$ e se $f^{(n)}(t)$ for contínua por partes em $[0, \infty)$, então

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Exemplo 23 Calcule $\mathcal{L}[kt \cos kt + \sin kt]$.

Solução: Observe que $kt \cos kt + \sin kt$ é a derivada da função $t \sin kt$ (Verifique!!!). Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[kt \cos kt + \sin kt] &= \mathcal{L}\left[\frac{d}{dt}(t \sin kt)\right] \\ &= s\mathcal{L}[t \sin kt] \\ &= s \left(-\frac{d}{ds} \mathcal{L}[\sin kt] \right) \\ &= -s \frac{d}{ds} \left(\frac{k}{s^2 + k^2} \right) \\ &= -s \frac{-2ks}{(s^2 + k^2)^2} \\ &= \frac{2ks^2}{(s^2 + k^2)^2} \end{aligned}$$

Exemplo 24 Calcule a transformada de Laplace das funções abaixo

(a) $f(t) = \cos^2 t$

(b) $f(t) = \sin^3 t$

(c) $f(t) = \cos^3 t$

Solução: (a) Observe que sendo $f(t) = \cos^2 t$, então $f'(t) = 2 \cos t (-\sin t) = -\sin(2t)$. De acordo com o teorema acima

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[-\sin(2t)] &= s\mathcal{L}[\cos^2 t] - \cos^2 0 \\ -\frac{2}{s^2 + 2^2} &= s\mathcal{L}[\cos^2 t] - 1 \\ \frac{-2}{s^2 + 4} + 1 &= s\mathcal{L}[\cos^2 t] \end{aligned}$$

e daí

$$\mathcal{L}[\cos^2 t] = \frac{1}{s} \left[\frac{-2}{s^2 + 4} + 1 \right] = \frac{s^2 + 2}{s(s^2 + 4)}$$

(b) Para calcular $\mathcal{L}[\sin^3 t]$, vamos derivar $f(t) = \sin^3 t$ duas vezes, obtendo

$$\begin{aligned}
f'(t) &= 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t \\
f''(t) &= 3 [2 \operatorname{sen} t \cos t \cos t + \operatorname{sen}^2 t (-\operatorname{sen} t)] \\
&= 3 [2 \operatorname{sen} t \cos^2 t - \operatorname{sen}^3 t] \\
&= 3 [2 \operatorname{sen} t (1 - \operatorname{sen}^2 t) - \operatorname{sen}^3 t] \\
&= 3 [2 \operatorname{sen} t - 2 \operatorname{sen}^3 t - \operatorname{sen}^3 t] \\
&= 3 [2 \operatorname{sen} t - 3 \operatorname{sen}^3 t] \\
&= 6 \operatorname{sen} t - 9 \operatorname{sen}^3 t
\end{aligned}$$

Utilizando o teorema 10 temos

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2 \mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[6 \operatorname{sen} t - 9 \operatorname{sen}^3 t] &= s^2 \mathcal{L}[\operatorname{sen}^3 t] - s \operatorname{sen}^3 t|_{t=0} - 3 \operatorname{sen}^2 t \cos t|_{t=0} \\
6 \mathcal{L}[\operatorname{sen} t] - 9 \mathcal{L}[\operatorname{sen}^3 t] &= s^2 \mathcal{L}[\operatorname{sen}^3 t] - s \cdot 0 - 3 \cdot 0 \\
6 \mathcal{L}[\operatorname{sen} t] &= (s^2 + 9) \mathcal{L}[\operatorname{sen}^3 t]
\end{aligned}$$

e daí

$$\mathcal{L}[\operatorname{sen}^3 t] = \frac{6}{s^2 + 9} \frac{1}{s^2 + 1} = \frac{6}{(s^2 + 9)(s^2 + 1)}$$

Exercícios

1. Encontre $F(s)$ ou $f(t)$, conforme indicado.

- | | |
|--|--|
| (a) $\mathcal{L}[te^{10t}]$ | (n) $\mathcal{L}[te^{-3t} \cos 3t]$ |
| (b) $\mathcal{L}[t^3 e^{-2t}]$ | (o) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s+2)^3} \right]$ |
| (c) $\mathcal{L}[e^t \operatorname{sen} 3t]$ | (p) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^4} \right]$ |
| (d) $\mathcal{L}[e^{5t} \sinh 3t]$ | (q) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 - 6s + 10} \right]$ |
| (e) $\mathcal{L}[t(e^t + e^{2t})^2]$ | (r) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2 + 2s + 5} \right]$ |
| (f) $\mathcal{L}[t^{10} e^{-7t}]$ | (s) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{s^2 + 4s + 5} \right]$ |
| (g) $\mathcal{L}[e^{-2t} \cos 4t]$ | (t) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2s+5}{s^2 + 6s + 34} \right]$ |
| (h) $\mathcal{L} \left[\frac{\cosh t}{e^t} \right]$ | (u) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s+1)^2} \right]$ |
| (i) $\mathcal{L}[e^{2t}(t-1)^2]$ | (v) $\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{5s}{(s-2)^3} \right]$ |
| (j) $\mathcal{L}[e^{-t} \operatorname{sen}^2 t]$ | |
| (k) $\mathcal{L}[t^2 \sinh t]$ | |
| (l) $\mathcal{L}[te^{2t} \operatorname{sen} 6t]$ | |
| (m) $\mathcal{L}[t^2 \cos t]$ | |

Função degrau unitário

$$\text{Seja } u(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$$

Podemos generalizar: dado um número real positivo definimos $u_a(t) = u(t-a)$ ou seja,

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < a \\ 1, & \text{se } t \geq a \end{cases}$$

Esta função é chamada de **função degrau unitário**.

Em geral, se $b > a$

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & a \leq t < b \\ 0, & t \leq b \end{cases}$$

A função degrau unitário pode ser combinada com outras funções de duas maneiras: dada a função $f(t)$, $t \geq 0$, podemos considerar as seguintes funções:

- (a) $g(t) = u_a(t)f(t)$; neste caso ocorre uma supressão, ou seja, a função degrau unitário cancela uma porção do gráfico de f .
- (b) $g(t) = u_a(t)f(t-a)$; neste caso, o gráfico de $y = f(t-a)$ é o gráfico de $f(t)$, transladado para a direita em a unidades; porém quando $f(t-a)$ é multiplicada por $u_a(t)$, o gráfico da função $y = u_a(t)f(t-a)$, coincide com o gráfico de $y = f(t-a)$, para $t \geq a$, mas é identicamente nula para $0 \leq t < a$.

Exemplo 25 A figura 1 ilustra o gráfico da função $\text{sen } t$, $t \leq 0$, quando multiplicada por $u_{2\pi}(t) = u(t-2\pi)$:

$$f(t) = \text{sen } t \, u(t-2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ \text{sen } t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

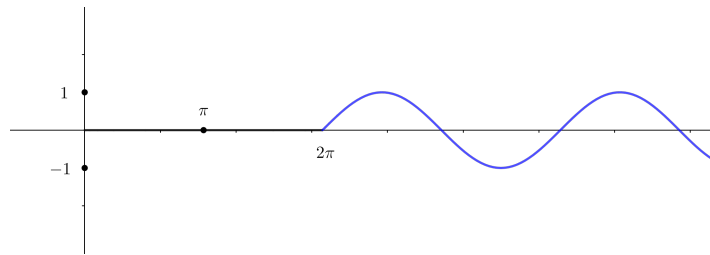


Figura 1

Expressando funções definidas por mais de uma sentença em termos de funções degrau unitário

A função degrau unitário pode também ser usada para representar funções definidas por partes em uma forma compacta. Em geral, podemos expressar uma função $f(t)$ definida por mais de uma sentença como uma combinação linear de funções degrau unitário da seguinte maneira:

- Para cada intervalo finito $[a, b]$ onde f possui uma expressão diferente, multiplique a expressão de f pela diferença das funções degraus $u(t - a) - u(t - b)$;
- para uma expressão definida num intervalo infinito do tipo $[c, \infty]$ somente multiplicar a expressão por $u(t - c)$;
- $f(t)$ é o somatório de todos os produtos.

Exemplo 26 *Expresse a função*

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

em termos de funções degrau unitário.

Solução: Multiplicamos a função $g(t)$, definida no intervalo $[0, a)$, por $u(t) - u(t - a)$ e a função $h(t)$, definida no intervalo $[a, \infty)$ por $u(t - a)$. Assim temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t)(u(t) - u(t - a)) + h(t)u(t - a) \\ &= g(t) - g(t)u(t - a) + h(t)u(t - a) \end{aligned}$$

Exemplo 27 *Expresse a função*

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t + 3, & 0 \leq t < 2 \\ e^t, & 2 \leq t < 5 \\ 2t \sen t, & t \geq 5 \end{cases}$$

em uma forma compacta (ou seja, como combinação linear de funções degrau unitário).

Solução: Observe que $f(t)$ possui três expressões diferentes nos intervalos $[0, 2)$, $[2, 5)$ e $[5, \infty)$. Logo, temos duas diferenças $u(t) - u(t - 2)$ e $u(t - 2) - u(t - 5)$ e três produtos

- $(t^2 - t + 3)(u(t) - u(t - 2))$, para $t^2 - t + 3$ definida em $[0, 2)$;
- $e^t(u(t - 2) - u(t - 5))$, para e^t definida em $[2, 5)$;
- $2t \sen t u(t - 5)$ para $2t \sen t$ definida em $[5, \infty)$.

Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2 - t + 3)(u(t) - u(t - 2)) + e^t(u(t - 2) - u(t - 5)) + 2t \sen t u(t - 5) \\ &= (t^2 - t + 3)u(t) + (e^t - t^2 + t - 3)u(t - 2) + (2t \sen t - e^t)u(t - 5) \end{aligned}$$

Transformada de Laplace da função degrau unitário

Vamos determinar a transformada de Laplace da função degrau unitário $u(t - a)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t - a)] &= \int_0^{\infty} u(t - a)e^{-st} dt \\&= \int_0^a u(t - a)e^{-st} dt + \int_a^{\infty} u(t - a)e^{-st} dt \\&= \int_a^{\infty} e^{-st} dt \\&= \left. \frac{e^{-st}}{-s} \right|_{t=a}^{\infty} \\&= \frac{e^{-as}}{s}\end{aligned}$$

Exemplo 28 Encontre a transformada de Laplace da função

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 2 \\ -1, & 2 \leq t < 3 \\ 0, & t \geq 3 \end{cases}$$

Solução: Primeiro expressamos $f(t)$ em termos de funções degrau unitário:

$$\begin{aligned}f(t) &= 2(u(t) - u(t - 2)) + (-1)(u(t - 2) - u(t - 3)) + 0u(t - 3) \\&= 2u(t) - 3u(t - 2) + u(t - 3) \\&= 2 - 3u(t - 2) + u(t - 3)\end{aligned}$$

Usando a linearidade e o exemplo , temos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[2] - 3\mathcal{L}[u(t - 2)] + \mathcal{L}[u(t - 3)] \\&= \frac{2}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s}\end{aligned}$$

□

No teorema 6 vimos que multiplicar a função $f(t)$ por uma exponencial resulta em uma translação na transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$. No próximo teorema, veremos que quando $F(s)$ é multiplicada por uma função exponencial adequada, a transformada inversa desse produto é a função transladada.

Teorema 11 (Segundo teorema de translação) *Seja a um número real positivo. Então*

$$\mathcal{L}[u(t - a)f(t - a)] = e^{-as}F(s)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

Prova.

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)] &= \int_0^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
 &= \int_0^a u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
 &= \int_0^a 0dt + \int_a^\infty 1 \cdot f(t-a)e^{-st}dt \\
 &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt
 \end{aligned}$$

Faça $v = t - a$, $dv = dt$; assim quando $t = a$, temos $v = 0$ e quando $t = \infty$, $v = \infty$ e daí

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)] &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\
 &= \int_0^\infty f(v)e^{-s(v+a)}dv \\
 &= \int_0^\infty f(v)e^{-sv}e^{-as}dv \\
 &= e^{-as} \int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv \\
 &= e^{-as} \mathcal{L}[f(t)] \\
 &= e^{-as} F(s)
 \end{aligned}$$

□

Exemplo 29 Calcule $\mathcal{L}[(t-2)^3 u(t-2)]$

Solução: Como $a = 2$, tomando $f(t) = t^3$, segue do teorema 11 que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[(t-2)^3 u(t-2)] &= e^{-2s} \mathcal{L}[t^3] \\
 &= e^{-2s} \frac{3!}{s^4} \\
 &= \frac{6}{s^4} e^{-2s}
 \end{aligned}$$

Exemplo 30 Calcule $\mathcal{L}[u(t-2\pi) \operatorname{sen} t]$

Solução: Neste caso, $a = 2\pi$, logo pelo teorema 11, temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[u(t-2\pi) \operatorname{sen} t] &= \mathcal{L}[(u(t-2\pi) \operatorname{sen}(t-2\pi))] \\
 &= e^{-2\pi s} \mathcal{L}[\operatorname{sen} t] \\
 &= e^{-2\pi s} \frac{1}{s^2 + 1} \\
 &= \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}
 \end{aligned}$$

Observação: na primeira igualdade usamos o fato que a função seno é periódica de período 2π .

Exemplo 31 Calcule a transformada de Laplace de $u(t-a)f(t)$.

Solução: Vamos usar a função auxiliar $g(t) = f(t+a)$. Assim, $g(t-a) = f((t-a)+a) = f(t)$. Logo

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[u(t-a)f(t)] &= \mathcal{L}[u(t-a)g(t-a)] \\ &= e^{-as}\mathcal{L}[g(t)] \\ &= e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)]\end{aligned}$$

O teorema 11 pode ser escrito também na forma inversa:

Teorema 12 $u(t-a)f(t-a) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]$, onde $a > 0$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplo 32 Calcule $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right]$

Solução: Temos $a = \frac{\pi}{2}$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\sin 3t$. Logo, pelo teorema 12,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right] &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]_{t \rightarrow t-\pi/2} u(t-\pi/2) \\ &= \frac{1}{3}\sin 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right) u(t-\pi/2) \\ &= \frac{1}{3}\cos(3t) u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)\end{aligned}$$

Exercícios

1. Encontre $\mathcal{L}[f(t)]$

(a) $f(t) = (t-1)u(t-1)$

(b) $f(t) = e^{2-t}u(t-2)$

(c) $f(t) = tu(t-2)$

(d) $f(t) = (3t+1)u(t-3)$

(e) $f(t) = \cos 2t u(t-\pi)$

(f) $f(t) = \sin t u(t-\pi/2)$

(g) $f(t) = (t-1)^3 e^{t-1}u(t-1)$

(h) $f(t) = te^{t-5}u(t-5)$

2. Encontre $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$:

(a) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s}$

(b) $F(s) = \frac{(1+e^{-2s})^2}{s+2}$

(c) $F(s) = \frac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

(d) $F(s) = \frac{se^{-\pi s/2}}{s^2+4}$

(e) $F(s) = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$

(f) $F(s) = \frac{e^{-2s}}{s^2(s-1)}$

3. Escreva cada função em termos de funções degrau unitário e encontre a transformada de Laplace:

(a) $f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \leq t < 3 \\ -2, & t \geq 3 \end{cases}$

(b) $f(t) = \begin{cases} 1, & 0 \leq t < 4 \\ 0, & 4 \leq t < 5 \\ 1, & t \geq 5 \end{cases}$

(c) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 1 \\ t^2, & t \geq 1 \end{cases}$

(d) $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t, \frac{3\pi}{2} \\ \text{sen } t, & t \geq \frac{3\pi}{2} \end{cases}$

(e) $f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 2 \\ 0, & t \geq 2 \end{cases}$

(f) $f(t) = \begin{cases} \text{sen } t, & 0 \leq t < 2\pi \\ 0, & t \geq 2\pi \end{cases}$

Transformadas de integrais e funções periódicas

Sejam f e g funções contínuas por partes em $[0, \infty)$. A **convolução** de f e g , denotada por $f * g$, é definida pela integral

$$f * g = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

A convolução tem as seguintes propriedades:

1. $f * g = g * f$
2. $f * (g + h) = f * g + f * h$
3. $f * (g * h) = (f * g) * h$
4. $f * 0 = 0$.

Prova. Faremos aqui a prova da propriedade (1). As demais serão deixadas como exercício.

Por definição temos

$$f * g = \int_0^t f(x)g(t-x)dx.$$

Seja $u = t - x$, de modo que $du = -dx$; assim

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t f(x)g(t-x)dx \\ &= \int_t^0 f(t-u)g(u)(-du) \\ &= - \int_t^0 g(u)f(t-u)du \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du \\ &= g * f \end{aligned}$$

□

Exemplo 33 A convolução de $f(t) = \sin t$ e $g(t) = e^t$ é dada por

$$\begin{aligned} \sin t * e^t &= \int_0^t \sin x e^{t-x} dx \\ &= e^t \int_0^t e^{-x} \sin x dx \\ &= e^t \frac{1}{2} (-e^{-t} \sin t - e^{-t} \cos t + 1) \\ &= \frac{1}{2} (-\sin t - \cos t + e^t) \end{aligned}$$

Teorema 13 (Teorema da convolução) *Sejam $f(t)$ e $g(t)$ funções contínuas por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial; então*

$$\mathcal{L}[f * g] = F(s)G(s) \quad (3)$$

ou equivalentemente

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)G(s)] = f * g \quad (4)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

Prova.

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^t f(t-x)g(x)dx \right] dt$$

Para simplificar a avaliação dessa integral repetida, vamos introduzir a função degrau unitário $u(t-x)$, de modo que

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty e^{-st} \left[\int_0^\infty u(t-x)f(t-x)g(x)dx \right] dt,$$

onde usamos o fato de que $u(t-x) = 0$ para $x > t$. Invertendo a ordem de integração temos

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty g(x) \left[\int_0^\infty e^{-st} u(t-x)f(t-x)dt \right] dx. \quad (5)$$

Pelo segundo teorema de translação (teorema 11) a integral dentro dos colchetes na expressão acima é igual a

$$e^{-sx}F(s).$$

Logo

$$\mathcal{L}[f * g] = \int_0^\infty g(x)e^{-sx}F(s)dx = F(s) \int_0^\infty e^{-sx}g(x)dx = F(s)G(s).$$

□

Corolário 1 *Se f é contínua por parte em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial então*

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(u)du \right] = \frac{F(s)}{s},$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

De fato, basta tomar $g(t) = 1$ no teorema 13 e lembrar que $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$.

Exemplo 34 *Calcule*

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t e^x \sin(t-x)dx \right] = \mathcal{L}[e^t * \sin t]$$

Solução:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[e^t * \text{sen } t] &= \mathcal{L}[e^t] \mathcal{L}[\text{sen } t] \\ &= \frac{1}{s-1} \frac{1}{s^2+1} \\ &= \frac{1}{(s-1)(s^2+1)}\end{aligned}$$

□

Exemplo 35 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)(s+4)} \right]$$

Solução: Seja $F(s) = \frac{1}{s-1}$ e $G(s) = \frac{1}{s+4}$. Então $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)] = e^t$ e $g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)] = e^{-4t}$. Logo, pelo teorema da convolução

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)(s+4)} \right] &= e^t * e^{-4t} \\ &= \int_0^t e^x e^{-4(t-x)} dx \\ &= e^{-4t} \int_0^t e^{5x} dx \\ &= e^{-4t} \left(\frac{1}{5} e^{5x} \right) \Big|_0^t \\ &= e^{-4t} \left(\frac{1}{5} e^{5t} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{1}{5} e^t - \frac{1}{5} e^{-4t}\end{aligned}$$

Exemplo 36 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2+k^2)^2} \right]$$

Solução: Seja

$$F(s) = G(s) = \frac{1}{s^2+k^2}$$

e assim

$$f(t) = g(t) = \frac{1}{k} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{k}{s^2+k^2} \right] = \frac{1}{k} \text{sen}(kt).$$

Pelo teorema da convolução

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2+k^2)^2} \right] &= \frac{1}{k^2} \int_0^t \text{sen}(kt) \text{sen}(k(t-x)) dx \\ &= \frac{1}{2k^2} \left[\frac{1}{2k} \text{sen}(k(2x-t)) - x \cos(kt) \right] \Big|_0^t \\ &= \frac{\text{sen}(kt) - kt \cos(kt)}{2k^3}\end{aligned}$$

Transformada de uma função periódica

Dizemos que a função $f(t)$ é periódica de período $L > 0$ se $f(t + L) = f(t)$, para todo t .

Teorema 14 *Seja $f(t)$ contínua por partes em $[0, \infty)$ e de ordem exponencial. Se $f(t)$ for periódica de período $L > 0$, então*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sL}} \int_0^L e^{-st} f(t) dt.$$

Prova. Escrevemos a transformada de Laplace como a soma de duas integrais:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^L e^{-st} f(t) dt + \int_L^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (6)$$

Fazendo $t = u + L$ na segunda integral a mesma se torna

$$\int_L^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty e^{-s(u+L)} f(u+L) du = e^{-sL} \int_0^\infty e^{-su} f(u) du = e^{-sL} \mathcal{L}[f(t)]$$

Logo, substituindo em ?? temos

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^L e^{-st} f(t) dt + e^{-sL} \mathcal{L}[f(t)],$$

e explicitando $\mathcal{L}[f(t)]$ na expressão acima, obtemos o resultado:

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-sL}} \int_0^L e^{-st} f(t) dt.$$

□

Exemplo 37 *Encontre a transformada de Laplace da função definida no intervalo $[0, 2)$ por*

$$f(t) = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

e fora do intervalo por $f(t + 2) = f(t)$.

Solução: A função $f(t)$ é periódica de período 2. Logo, pelo teorema (14) temos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}[f(t)] &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^2 e^{-st} f(t) dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\int_0^1 e^{-st} t dt + \int_1^2 e^{-st} 0 dt \right] \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \int_0^1 e^{-st} t dt \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{-te^{-st}}{s} - \frac{e^{-st}}{s^2} \right] \Big|_0^1 \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{-e^{-s}}{s} - \frac{e^{-s}}{s^2} + \frac{1}{s^2} \right] \\
 &= \frac{1}{1 - e^{-2s}} \left[\frac{-e^{-s}}{s} + \frac{1 - e^{-s}}{s^2} \right] \\
 &= \frac{1 - (s + 1)e^{-s}}{s^2(1 - e^{-2s})}
 \end{aligned}$$

Exercícios

1. Encontre a transformada de Laplace da função dada sem calcular a integral.

- | | |
|--|---|
| (a) $\mathcal{L}[\int_0^t e^x dx]$ | (e) $\mathcal{L}[\int_0^t x \sin x dx]$ |
| (b) $\mathcal{L}[\int_0^t e^{-x} \cos x dx]$ | (f) $\mathcal{L}[\int_0^t \sin x \cos(t - x) dx]$ |
| (c) $\mathcal{L}[\int_0^t x e^{t-x} dx]$ | (g) $\mathcal{L}[t \int_0^t \sin x dx]$ |
| (d) $\mathcal{L}[\int_0^t \cos x dx]$ | (h) $\mathcal{L}[t \int_0^t x e^{-x} dx]$ |

2. Calcule

- | | |
|--------------------------------|--|
| (a) $\mathcal{L}[1 * t^3]$ | (d) $\mathcal{L}[t^2 * te^t]$ |
| (b) $\mathcal{L}[1 * e^{-2t}]$ | (e) $\mathcal{L}[e^{-t} * e^t \cos t]$ |
| (c) $\mathcal{L}[t^2 * t^4]$ | (f) $\mathcal{L}[e^{2t} * \sin t]$ |

3. Supondo que $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$, encontre a transformada inversa da função dada.

- | | |
|--------------------------|----------------------------|
| (a) $\frac{1}{s+5} F(s)$ | (b) $\frac{s}{s^2+4} F(s)$ |
|--------------------------|----------------------------|

4. Use o teorema da convolução para determinar $f(t)$.

- | | |
|--|--|
| (a) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s+1)}]$ | (d) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)^2}]$ |
| (b) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s(s^2+1)}]$ | (e) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{(s^2+4)^2}]$ |
| (c) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s+1)(s+2)}]$ | (f) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s^2+4s+5)^2}]$ |

5. Encontre a transformada de Laplace de cada função periódica abaixo.

Resolução de equações diferenciais

Dada uma função $y(t)$, como vimos nas seções anteriores, a transformada $\mathcal{L}[y^{(n)}(t)]$, $n > 1$, depende de $y(t)$ e de suas derivadas no ponto $t = 0$. Isto sugere que a transformada de Laplace pode ser usada como ferramenta para resolver problemas lineares de valor inicial com coeficientes constantes. Esse tipo de equação diferencial pode ser reduzida, através da transformada de Laplace, a uma equação algébrica na função transformada $Y(s)$. Considere então o problema de valor inicial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

com $a_i, i = 0, 1, \dots, n$ e $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ são constantes. Pela linearidade da transformada de Laplace podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left[a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y \right] &= \mathcal{L}[g(t)] \\ a_n \mathcal{L} \left[\frac{d^n y}{dt^n} \right] + a_{n-1} \mathcal{L} \left[\frac{d^{n-1} y}{dt^{n-1}} \right] + \cdots + a_1 \mathcal{L} \left[\frac{dy}{dt} \right] + a_0 \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned} \quad (7)$$

Pelo teorema 10, a equação 7 torna-se:

$$a_n [s^n Y(s) - s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)] + a_{n-1} [s^{n-1} Y(s) - s^{n-2} y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0)] + \cdots + a_0 Y(s) = G(s)$$

ou

$$\begin{aligned} [a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0] Y(s) &= a_n [s^{n-1} y(0) + \cdots + y_0^{(n-1)}] \\ &+ a_{n-1} [s^{n-2} y_0 + \cdots + y_0^{(n-2)}] + \cdots + G(s) \end{aligned} \quad (8)$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

Explicitando $Y(s)$ na equação 8, encontramos então $y(t)$ através da transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

O procedimento está esquematizada na figura 2.

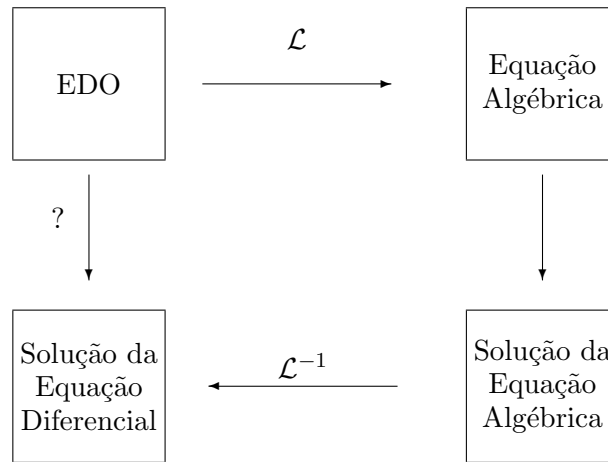


Figura 2

Exemplo 38 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1.$$

Solução: Calculamos primeiro a transformada de cada membro da equação diferencial:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

Veja que:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}[y] &= Y(s) \\ \mathcal{L}[e^{2t}] &= \frac{1}{s-2}\end{aligned}$$

Resolvemos então a equação em $Y(s)$:

$$\begin{aligned}sY(s) - 1 - 3Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s)(s-3) &= \frac{1}{s-2} + 1 \\ Y(s)(s-3) &= \frac{1+s-2}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{s-1}{(s-2)(s-3)}\end{aligned}$$

Usando frações parciais:

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3) + B(s-2)}{(s-2)(s-3)}$$

o que implica que

$$s - 1 = A(s - 3) + B(s - 2)$$

Fazendo $s = 2$ e $s = 3$ nessa última equação obtemos $A = -1$ e $B = 2$, respectivamente. Logo,

$$Y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

e, portanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s-3}\right]$$

e, usando a nossa tabela

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Exemplo 39 *Resolva a equação*

$$y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 6$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace à equação dada e usando a linearidade obtemos:

$$\mathcal{L}[y'' - 6y' + 9y] = \mathcal{L}[t^2 e^{3t}]$$

$$\mathcal{L}[y''] - 6\mathcal{L}[y'] + 9\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^2 e^{3t}]$$

que de acordo com o teorema 10 pode ser escrita como

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

ou

$$Y(s)[s^2 - 6s + 9] - 2s - 6 + 6 \cdot 2 = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s)(s-3)^2 - 2s + 6 = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s)(s-3)^2 = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6$$

e isolando $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3(s-3)^2} + \frac{2(s-3)}{(s-3)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

Aplicando agora a transformada inversa obtemos $y(t)$:

$$\begin{aligned}
 y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3} \right] \\
 &= 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-3)^5} \right] + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right] \\
 &= 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{4!} \frac{4!}{(s-3)^5} \right] + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right] \\
 &= \frac{2}{4!} \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4!}{(s-3)^5} \right] + 2\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right]
 \end{aligned}$$

Pelo teorema 6, concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4!}{(s-3)^5} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{4!}{s^5} \Big|_{s \rightarrow s-3} \right] = t^4 e^{3t}$$

Portanto

$$y(t) = \frac{2}{4!} t^4 e^{3t} + 2e^{3t} = \frac{1}{12} t^4 e^{3t} + 2e^{3t}$$

Exemplo 40 Resolva a equação $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Exemplo 41 Resolva a equação $x'' + 16x = \cos 4t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Resolução de sistemas de EDOs lineares

Para resolver sistemas com duas equações diferenciais nas funções incógnitas $x = x(t)$ e $y = y(t)$, podemos aplicar a Transformada de Laplace a cada EDO de forma que $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ e $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ e fazer com que o sistema recaia num sistema algébrico com duas equações nas duas variáveis $X(s)$ e $Y(s)$. Veremos como isto funciona através de um exemplo.

Exemplo 42 *Determinar a solução do PVI*

$$\begin{aligned}x'(t) + x(t) + y'(t) - y(t) &= 2 \\x''(t) + x'(t) - y'(t) &= \cos t\end{aligned}$$

sujeito às condições $x(0) = 0$, $x'(0) = 2$ e $y(0) = 1$.

Solução: Aplicando a transformada de Laplace a cada uma das equações e usando a linearidade obtemos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x'(t)] + \mathcal{L}[x(t)] + \mathcal{L}[y'(t)] - \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[2] \\ \mathcal{L}[x''(t)] + \mathcal{L}[x'(t)] - \mathcal{L}[y'(t)] &= \mathcal{L}[\cos t]\end{aligned}$$

Pelo teorema 10 e pela tabela 2 temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[x''(t)] &= s^2 X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2 X(s) - 2 \\ \mathcal{L}[x'(t)] &= sX(s) - x(0) = sX(s) \\ \mathcal{L}[y'(t)] &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\ \mathcal{L}[2] &= 2\mathcal{L}[1] = \frac{2}{s} \\ \mathcal{L}[\cos t] &= \frac{s}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

e assim obtemos o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned}sX(s) + X(s) + sY(s) - 1 - Y(s) &= \frac{2}{s} \\ s^2 X(s) - 2 + sX(s) - sY(s) + 1 &= \frac{s}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(s+1)X(s) + (s-1)Y(s) &= 1 + \frac{2}{s} \\ s(s+1)X(s) - sY(s) &= 1 + \frac{s}{s^2 + 1}\end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned}(s+1)X(s) + (s-1)Y(s) &= 1 + \frac{2}{s} \\ (s+1)X(s) - Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}\end{aligned}$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} \\ Y(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1}\end{aligned}$$

Utilizando as transformadas inversas destas funções obtemos a solução do sistema:

$$\begin{aligned}x(t) &= t + \sin t \\ y(t) &= t + \cos t\end{aligned}$$

Exercícios

1. Supondo que a função $y(t)$ tenha a propriedade $y(0) = 2$ e $y'(0) = -1$, encontre a transformada de Laplace da expressão dada
 - (a) $y'' + 3y'$
 - (b) $y'' - 4y' + 5y$
2. Supondo que a função $y(t)$ tenha a propriedade $y(0) = 2$ e $y'(0) = 3$, encontre a transformada de Laplace de $y(t)$ supondo que $y(t)$ satisfaça a equação dada.
 - (a) $y'' - 2y' + y = 0$
 - (b) $y'' + y = 1$
3. Use a transformada de Laplace para resolver O PVI dado.
 - (a) $y' - y = 1, y(0) = 0$
 - (b) $y' - 4y = e^{-4t}, y(0) = 2$
 - (c) $y' + 2y = t, y(0) = -1$
 - (d) $y' - y = \sin t, y(0) = 0$
 - (e) $y'' + 5y' + 4y = 0, y(0) = 1, y'(0) = 0$
 - (f) $y'' - 6y' + 9y = t, y(0) = 0, y'(0) = 1$
 - (g) $y'' - 4y' + 4y = t^3 e^{2t}, y(0) = 0, y'(0) = 0$
 - (h) $y'' + y = \sin t, y(0) = 1, y'(0) = -1$
 - (i) $y'' - y' = e^t \cos t, y(0) = 0, y'(0) = 0$

3 Séries de Fourier

O objetivo dessa seção é analisar a seguinte questão: que funções $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ podem ser expressas na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \quad (9)$$

Funções periódicas, paridade e ortogonalidade

Definição 5 Uma função f é dita *periódica* se existe um número real T tal que $f(t+T) = f(t)$, para todo t no domínio da função f .

Exemplo 43 As funções $\sin x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π , pois $\sin(x+2\pi) = \sin x$ e $\cos(x+2\pi) = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função $\operatorname{tg} x$ é periódica de período π , pois $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$.

Exemplo 44 A função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x é periódica de período 1.

Solução: De fato, $f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x+1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

Exemplo 45 Uma função constante $f(x) = k$ tem como período qualquer número real $T \neq 0$.

Observação 6 Se T é período de uma função f , então $2T, 3T, \dots, kT, \dots$ também o são (com $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$). Por exemplo, 4π também é um período para as funções $\sin x$ e $\cos x$. No entanto, 2π é o menor período positivo de $\sin x$ e $\cos x$ e, portanto é chamado de período fundamental.

Definição 6 O *período fundamental* de uma função periódica $f(x)$ é seu menor período positivo.

Proposição 1 Seja f uma função periódica de período T , então:

1. $f(ax)$, $a \neq 0$, é periódica de período $\frac{T}{a}$
2. $f(\frac{x}{a})$, $a \neq 0$, é periódica de período aT .

Prova.

□

Proposição 2 Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções periódicas de período T , então as funções $af(x) + bg(x)$, a e b constantes, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ também são periódicas de período T .

Proposição 3 Se as funções $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$, são periódicas de período T , então T também será um período de $\sum_{m=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ (se esta série convergir).

Da proposição 1 segue que:

- como o período de $\sin x$ é 2π , segue que $\frac{2L}{m}$ é o período fundamental de $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$.
- Mas, então $2L$ é um período comum a todas as funções do lado direito de 9 (incluindo a constante fora do somatório).
- Concluimos daí que, se tiver alguma chance de que uma função f possa ser escrita como uma soma do tipo 9, então f deverá ser periódica de período $2L$.

Proposição 4 Se $\frac{a}{b}$ é um número racional (isto é, se $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros), então $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$ é periódica.

De fato, observe que sendo $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, então $2\pi\frac{a}{b} = 2\pi\frac{m}{n}$ e daí $\frac{2\pi}{a}m = \frac{2\pi}{b}n$. Mas, pela proposição 1 $\frac{2\pi}{a}m$ é um período para $\sin ax$, bem como $\frac{2\pi}{b}n$ é um período para $\cos bx$. Assim o número $T = \frac{2\pi}{a}m = \frac{2\pi}{b}n$ é um período comum para a função $f(x) = \sin(ax) + \cos(bx)$.

Definição 7 Seja f uma função cujo domínio seja simétrico em relação à origem. Dize-mos que:

- (i) f é uma função par se $f(-t) = f(t)$, para todo t ;
- (ii) f é uma função ímpar se $f(-t) = -f(t)$, para todo t

Exemplo 46 As funções $f_1(t) = \cos t$ e $g_1(t) = t^2$ são funções pares enquanto que as funções $f_2(t) = \sin t$ e $g_2(t) = t^3$ são funções ímpares.

Listamos a seguir algumas propriedades úteis destas funções.

Proposição 5 1. A soma de duas funções pares ainda é uma função par.

2. A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.

3. O produto de duas funções pares (ou duas funções ímpares) é uma função par.

4. O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

5. Toda função cujo domínio é simétrico com relação a origem pode ser escrita como a soma de uma função par com uma função ímpar.

6. Seja f uma função contínua no intervalo $[-a, a]$:

(i) se f é par, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \int_0^a f(x)dx$

(ii) se f é ímpar, então $\int_{-a}^a f(x)dx = 0$

Definição 8 a) Sejam f e g funções contínuas o intervalo $[a, b]$. Dizemos que f e g são ortogonais sobre o intervalo $[a, b]$ se

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$$

b) Dizemos que um conjunto finito $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ ou infinito $S = \{f_1, f_2, \dots, f_n, \dots\}$ de funções contínuas em $[a, b]$ é ortogonal sobre $[a, b]$ se

$$\int_a^b f_m(t)f_n(t)dt = 0$$

para todo $m \neq n$.

Exemplo 47

Por exemplo, as funções $f(t) = t$ e $g(t) = t^2 + 1$ são ortogonais sobre o intervalo $[-1, 1]$, pois

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 t(t^2 + 1)dt &= \int_{-1}^1 (t^3 + t)dt \\ &= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 48

O conjunto $S = \{1, \cos t, \sin t\}$ é ortogonal em $[-\pi, \pi]$. (Verifique!!!).

Listaremos a seguir algumas relações de ortogonalidade que serão úteis na sequência. Começamos lembrando da trigonometria elementar as fórmulas para o seno e cosseno da soma e diferença:

$$\text{cosseno da soma: } \cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v \quad (10)$$

$$\text{seno da soma: } \sin(u + v) = \sin u \cos v + \sin v \cos u \quad (11)$$

$$\text{cosseno da diferença: } \cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v \quad (12)$$

$$\text{seno da diferença: } \sin(u - v) = \sin u \cos v - \sin v \cos u \quad (13)$$

A partir desta fórmulas obtemos as seguintes identidades que são úteis no cálculo de algumas integrais:

$$2 \cos u \cos v = \cos(u + v) + \cos(u - v) \quad (14)$$

$$2 \sin u \cos v = \sin(u + v) + \sin(u - v) \quad (15)$$

$$2 \sin u \sin v = \cos(u - v) - \cos(u + v) \quad (16)$$

Teorema 15 (Relações de ortogonalidade) *Se m e n são inteiros positivos não nulos, então:*

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt = 0 \quad (17)$$

$$\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} \cos \frac{n\pi t}{L} dt = \begin{cases} L, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases} \quad (18)$$

$$\int_{-L}^L \sin \frac{m\pi t}{L} \sin \frac{n\pi t}{L} dt = \begin{cases} L, & \text{se } m = n \\ 0, & \text{se } m \neq n \end{cases} \quad (19)$$

A prova destas relações se faz usando as relações trigonométricas 14 acima. Segue da proposição acima que o conjunto

$$S = \left\{ \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi t}{L}, \cos \frac{2\pi t}{L}, \dots, \cos \frac{n\pi t}{L}, \dots, \sin \frac{\pi t}{L}, \sin \frac{2\pi t}{L}, \dots, \sin \frac{n\pi t}{L}, \dots \right\}$$

é um conjunto ortogonal.

Séries de Fourier

Seja f uma função periódica de período $2L$. Suponha que existam constantes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots$, tais que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$$

Diremos então que esta série é a **série de Fourier** da função f ; as constantes $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, b_1, b_2, \dots$, são os coeficientes de Fourier.

Exercício 6 Se $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right)$, mostre que podemos reescrevê-la sob a forma

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left(\frac{n\pi t}{L} - \theta_n \right)$$

onde $\operatorname{tg} \theta_n = \frac{b_n}{a_n}$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$ e $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Assim, dada uma função periódica de período $2L$ surgem então as seguintes questões:

- (i) como determinar os coeficientes de Fourier a_0 , a_n e b_n de modo a representar a função f na forma acima?
- (ii) que condições devemos impor sobre a função f para que tal representação seja possível?

Determinando os coeficientes de Fourier

Dada uma função periódica de período $2L$, queremos determinar os coeficientes de Fourier para essa função particular. Para atingir tal objetivo utilizaremos as relações de ortogonalidade apresentadas no teorema 15.

Suponha então que a função f admita uma representação em série de Fourier dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \quad (20)$$

- **Determinação de a_0 :** integramos ambos os membros da equação 20 no intervalo $[-L, L]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L f(t)dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} dt + b_n \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi t}{L} dt \right) \\
&= \frac{1}{2}a_0 t \Big|_{-L}^L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{L}{n\pi} \sen \frac{n\pi t}{L} \Big|_{-L}^L - b_n \frac{L}{n\pi} \cos \frac{n\pi t}{L} \Big|_{-L}^L \right) \\
&= a_0 L + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{L}{n\pi} (\sen(n\pi) - \sen(-n\pi)) - b_n \frac{L}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos(-n\pi)) \right) \\
&= a_0 L
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$a_0 = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t)dt \quad (21)$$

- **Determinação de a_n :** multiplicamos ambos os membros de 20 por $\cos \frac{m\pi t}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integramos sobre o intervalo $[-L, L]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} dt + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^L \cos \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt + b_n \int_{-L}^L \sen \frac{n\pi t}{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt \right)
\end{aligned}$$

De acordo com o teorema 15 a segunda integral no somatório é nula e a primeira integral é nula para $m \neq n$ e vale L para $m = n$. Observando que a integral $\int_{-L}^L \cos \frac{m\pi t}{L} dt = 0$, segue que

$$\int_{-L}^L f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt = a_m L$$

e daí

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

- **Determinação de b_n :** multiplicamos ambos os lados de 20 por $\sen \frac{m\pi t}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integramos sobre o intervalo $[-L, L]$; procedendo como anteriormente e utilizando as relações de ortogonalidade do teorema 15 obtemos:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \sen \frac{n\pi t}{L} dt$$

Resumindo temos:

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n \geq 0 \quad (22)$$

$$b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt, \quad n \geq 1 \quad (23)$$

Exemplo 49 Determine a representação em série de Fourier da função onda quadrada mostrada na figura 3.

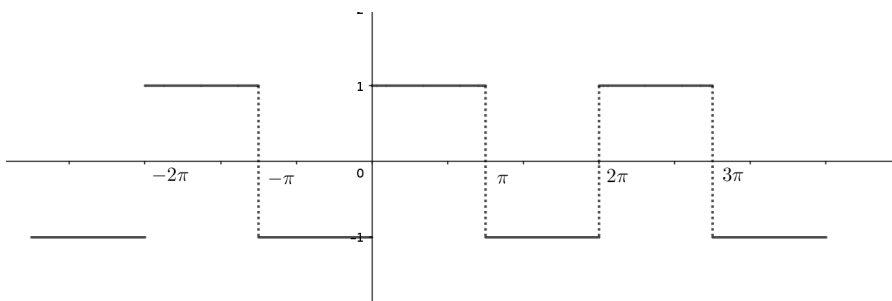


Figura 3: Onda quadrada - período 2π

Solução: O período desta função, chamada de onda quadrada, é 2π ; sua forma analítica pode ser dada por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}, f(t+2\pi) = f(t)$$

Calculando os coeficientes: neste caso, temos $2L = 2\pi$ e portanto $L = \pi$

- **Cálculo de a_0 :** usando a equação 21 temos:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 (-1) dt + \int_0^{\pi} 1 dt \\ &= \frac{1}{\pi} (-t|_{-\pi}^0 + t|_0^{\pi}) \\ &= \frac{1}{\pi} (-\pi + \pi) \\ &= 0 \end{aligned}$$

- **Cálculo de a_n :** usando a equação 22 temos:

$$\begin{aligned}
 a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos \frac{n\pi t}{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\cos nt \, dt + \int_0^{\pi} \cos nt \, dt \right] \\
 &= -\frac{1}{n\pi} [\operatorname{sen} nt]_{-\pi}^0 + \frac{1}{n\pi} [\operatorname{sen} nt]_0^{\pi} \\
 &= -\frac{1}{n\pi} (\operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen}(-n\pi)) + \frac{1}{n\pi} (\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen} 0) \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

- **Cálculo de b_n :** usando a equação 23 temos:

$$\begin{aligned}
 b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{\pi} \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt \\
 &= \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^0 -\operatorname{sen} nt \, dt + \int_0^{\pi} \operatorname{sen} nt \, dt \right] \\
 &= \frac{1}{n\pi} [\cos nt]_{-\pi}^0 - \frac{1}{n\pi} [\cos nt]_0^{\pi} \\
 &= \frac{1}{n\pi} (\cos 0 - \cos(-n\pi)) - \frac{1}{n\pi} (\cos(n\pi) - \cos 0) \\
 &= \frac{2}{n\pi} (1 - \cos(n\pi))
 \end{aligned}$$

Mas, se n é par temos $\cos(n\pi) = 1$ e se n é ímpar, temos $\cos(n\pi) = -1$. Assim, devemos ter

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$

Assim, a expansão da série de Fourier de f é dada por

$$f(t) \sim b_1 \operatorname{sen} t + b_3 \operatorname{sen} 3t + b_5 \operatorname{sen} 5t + b_7 \operatorname{sen} 7t \dots$$

isto é

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} t + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 5t + \frac{4}{7\pi} \operatorname{sen} 7t \dots$$

ou reescrevendo na forma de somatório

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)t}{2k+1}$$

Exemplo 50 Determine a representação em série de Fourier da função onda triangular mostrada na figura 4.

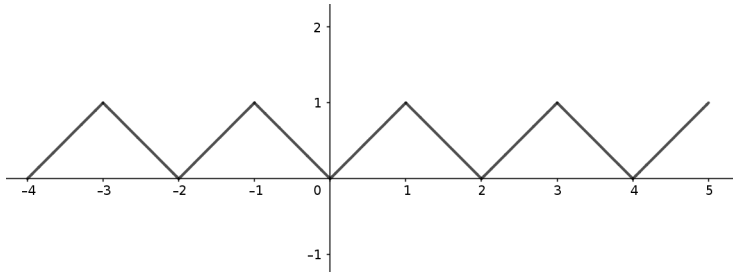


Figura 4: Onda triangular - período 2

Solução: : Resolver na aula.

A série de Fourier de f é dada por

$$f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$

Condições para convergência da série de Fourier

Dada uma função periódica de período $2L$, vimos na seção anterior como calcular os coeficientes de Fourier de modo a obter a série de Fourier de f , e podemos então escrever

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) \quad (24)$$

e isso significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de f . No que segue estabeleceremos condições para que a série de Fourier 24 convirja para a própria função f , isto é, para que a função f seja igual à sua série de Fourier.

Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua (ou contínua por partes) se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}) , $j = 1, 2, \dots, n-1$, e existem os limites laterais

$$\lim_{t \rightarrow a_j^+} f(t) = f(a_j+) \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow a_j^-} f(t) = f(a_j-)$$

É claro que toda função contínua é seccionalmente contínua. A função $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \neq 0$, não é seccionalmente contínua pois sua descontinuidade em $x = 0$ é de segunda espécie (neste caso $\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \infty$).

Exemplo 51 *As seguintes funções são seccionalmente contínuas (ou contínuas por partes).*

1. A função *senal* de x , definida por

$$\text{sign}(t) = \begin{cases} +1, & \text{se } t > 0 \\ 0, & \text{se } t = 0 \\ -1, & \text{se } t < 0 \end{cases}$$

2. A função da onda quadrada do exemplo 49 dada por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}, f(t+2\pi) = f(t)$$

3. A função da onda triangular do exemplo 50 dada por

$$f(t) = \begin{cases} -t & , \quad -1 \leq t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t < 1 \end{cases}, f(t+2) = f(t)$$

O próximo teorema estabelece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f .

Teorema 16 (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ contínua por partes tal sua derivada f' também é contínua por partes. Então a série de Fourier de $f(t)$ converge, em cada valor de t , para $\frac{1}{2}(f(t+) + f(t-))$. Em outras palavras:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \sin \frac{n\pi t}{L} \right) = \begin{cases} f(t) & \text{se } f \text{ é contínua em } t \\ \frac{f(t+) + f(t-)}{2} & \text{se } f \text{ é descontínua em } t \end{cases} \quad (25)$$

Exemplo 52

A função da onda quadrada do exemplo 49 dada por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases}, f(t+2\pi) = f(t)$$

satisfaz as condições do teorema de Fourier; assim, em todos os pontos t onde f é contínua podemos escrever

$$f(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)t}{2k+1}$$

Observe que para $t = 0$, f é descontínua e $f(0+) \lim_{t \rightarrow 0+} f(t) = 1$ e $f(0-) = \lim_{t \rightarrow 0-} f(t) = -1$; logo para $t = 0$, a série acima converge para $\frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)] = \frac{1}{2}[1 + (-1)] = 0$.

Exemplo 53 Use a série do exemplo anterior para obter uma expressão em série para π .

Solução: No ponto $t = \pi/2$ a função f é contínua, logo sua série de Fourier será igual a 1, em $t = \pi/2$:

$$1 = f(\pi/2) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen} (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

e daí

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2k+1} \operatorname{sen} (2k+1) \frac{\pi}{2}$$

ou seja

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

que é conhecida como **série de Leibniz**.

Exemplo 54 Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função 2π -periódica e tal que $f(t) = t^2$, para $0 < t < \pi$.

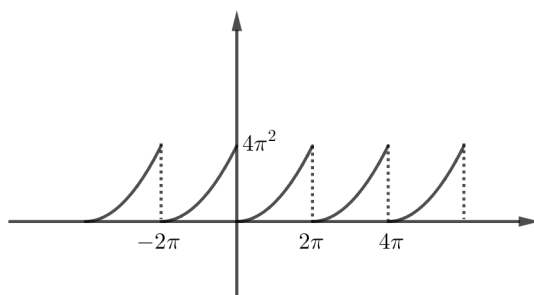


Figura 5

A série de Fourier de f será dada por

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Para calcular os coeficientes a_n deveríamos calcular a integral

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt$$

Como $f(t) = t^2$, para $0 < t < \pi$, mas tem uma definição diferente para $-\pi < t < 0$, teríamos que decompor esta integral na soma de duas integrais, uma para t entre 0 e π e outra para t entre $-\pi$ e 0.

Exemplo 55 Utilize a série de Fourier da função do exemplo 50 para ...

Solução: