Transformada de Laplace

Antonio Carlos Nogueira

Nesta seção estudaremos a definição e as propriedades de uma integral conhecida como **transformada de Laplace**. Uma das aplicações da transformada de Laplace, como veremos, é na resolução de equações diferenciais lineares.

1 Função Gama

Antes de introduzir o conceito de transformada de Laplace, vamos introduzir o que chamamos de função Gama. Esta função como veremos será útil no cálculo de algumas integrais impróprias.

Definição 1 (Função Gama) *A função Gama é definida por*

$$\gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

Para $\alpha = 1$ temos

$$\gamma(1) = \int_0^\infty x^{1-1} e^{-x} dx = \int_0^\infty e^{-x} dx = \lim_{t \to \infty} \int_0^t e^{-x} dx = \lim_{t \to \infty} -e^{-t} \,|_0^\infty = 1$$

Logo,

$$\gamma(1) = 1.$$

Vamos calcular agora $\gamma(\alpha+1)$:

$$\begin{aligned}\gamma(\alpha+1) &= \int_0^\infty x^{\alpha+1-1}e^{-x}dx \\ &= \int_0^\infty x^{\alpha}e^{-x}dx\end{aligned}$$

Integrando por partes: faça $u = x^\alpha$ e $dv = e^{-x}dx$ e daí $du = \alpha x^{\alpha-1}dx$ e $v = -e^{-x}$. Logo

$$\int_0^\infty x^\alpha e^{-x}dx = -x^\alpha e^{-x}\Big|_0^\infty + \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1}e^{-x}dx = \alpha\int_0^\infty x^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

Logo

$$\gamma(\alpha+1) = \alpha\gamma(\alpha) \tag{1}$$

Observe que a fórmula 1 é uma fórmula de recorrência e pode ser usada para determinar os valores de $\gamma(\alpha)$ para outros valores de α.

(a) α inteiro e positivo

$$\begin{aligned}
\gamma(2) &= \gamma(1+1) = 1\gamma(1) = 1 \cdot 1 = 1! \\
\gamma(3) &= \gamma(2+1) = 2\gamma(2) = 2 \cdot 1 = 2! \\
\gamma(4) &= \gamma(3+1) = 3\gamma(3) = 3 \cdot 2! = 3! \\
\gamma(5) &= \gamma(4+1) = 4\gamma(4) = 4 \cdot 3! = 4! \\
&\vdots \\
\gamma(n) &= \gamma((n-1)+1) = (n-1)\gamma(n-1) = (n-1)! \\
\gamma(n+1) &= n\gamma(n) = n \cdot (n-1)! = n!
\end{aligned}$$

(b) Para $\alpha = 0$ temos: $\gamma(\alpha+1) = \alpha\gamma(\alpha)$, logo $\gamma(\alpha) = \frac{\gamma(\alpha+1)}{\alpha}$, ou seja,

$$\gamma(0) = \frac{\gamma(0+1)}{0} = \frac{\gamma(1)}{0} = \infty$$

(c) α inteiro e negativo

$\alpha = -1$: $\gamma(-1) = \frac{\gamma(-1+1)}{-1} = \frac{\gamma(0)}{-1} = -\infty$

$\alpha = -2$: $\gamma(-2) = \frac{\gamma(-2+1)}{-3} = \frac{\gamma(-1)}{-2} = \infty$

$\alpha = -1$: $\gamma(-3) = \frac{\gamma(-3+1)}{-3} = \frac{\gamma(-2)}{-3} = -\infty$ e assim por diante.

Continjando com esse procedimento pode-se mostrar que o domínio da função gama, ou seja, o conjunto dos números $\alpha \in \mathbb{R}$ para os quais a integral imprópria converge é $\mathbb{R} - \{0, -1, -2, -3, \cdots\}$. Se de algum modo pudermos calcular $\gamma(\alpha)$ para α entre 0 e 1, então com o auxílio da relação de recorrência poderemos calcular $\gamma(\alpha)$ para α entre 1 e 2, depois entre 2 e 3, etc. Existem tabelas de valores de $\gamma(\alpha)$, $1 < \alpha < 2$, com alto grau de aproximação, de modo que será possível assim calcular $\gamma(\alpha)$ quando $\alpha > 0$.

Exemplo 1 *Admitindo que* $\gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$*, vamos calcular* $\gamma(7/2)$*.*

Solução:

$$\begin{aligned}
\gamma(7/2) &= \gamma(5/2+1) \\
&= 5/2 \cdot \gamma(5/2) = 5/2 \cdot \gamma(3/2+1) \\
&= 5/2 \cdot 3/2 \cdot \gamma(3/2) = 5/2 \cdot 3/2 \cdot \gamma(1/2+1) \\
&= 5/2 \cdot 3/2 \cdot 1/2 \cdot \gamma(1/2) \\
&= 15/8 \cdot \sqrt{\pi}
\end{aligned}$$

Exemplo 2 *Admitindo que* $\gamma(1,7) = 0,90863873$ *calcular* $\gamma(2,7)$.

Solução:

$$\begin{aligned}
\gamma(2,7) = &\quad = \gamma(1,7+1) \\
= &\quad = 1,7\gamma(1,7) \\
= &\quad = 1,7 \cdot 0,90863873 \\
= &\quad = 1,544685841
\end{aligned}$$

Exemplos 1

Exemplo 3 *Calcule as integrais impróprias usando a função* γ

1. $I = \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx$
2. $I = \int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx$
3. $I = \int_0^\infty e^{-x^2} dx$
4. $I = \int_0^\infty 3\alpha e^{3\alpha - 1} e^{-x^3} dx$
5. $I = \int_0^\infty \sqrt{x} e^{-x} dx$
6. $I = \int_0^\infty x^7 e^{-x} dx$

Solução:

a)

$$\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \int_0^\infty x^{1/2-1} e^{-x} dx = \gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

b) Para resolver a integral $\int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx$ faça a mudança de variável $x^2 = y$ e portanto $x = y^{1/2}$; segue daí que $dx = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy$; observe ainda que quando $x = 0$, temos $y = 0$ e quando $x = \infty$, $y = \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^7 e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty (y^{1/2})^7 e^{-y} \frac{1}{2} y^{-1/2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{7/2} e^{-y} y^{-1/2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^3 e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{4-1} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \gamma(4) \\
&= \frac{1}{2} 3! = 3
\end{aligned}$$

c) Para a integral $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ faça a mudança de variável $y = x^2$ e, como no exemplo anterior, $x = y^{1/2}$; segue daí que $dx = \frac{1}{2} y^{-1/2} dy$;

observe ainda que quando $x = 0$, temos $y = 0$ e quando $x = \infty$, $y = \infty$. Assim,

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty e^{-x^2} dx &= \int_0^\infty e^{-y} \frac{1}{2} y^{-1/2} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{-1/2} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\infty y^{1-1/2} e^{-y} dy \\
&= \frac{1}{2} \gamma(1/2) \\
&= \frac{\sqrt{\pi}}{2}
\end{aligned}$$

Transformada de Laplace

Definição 2 *Seja $f(t)$ uma função definida para todo $t \geq 0$. A **transformada de Laplace** de $f(t)$, denotada por $\mathcal{L}[f(t)]$, é definida por*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \tag{2}$$

Quando a integral 2 converge, o resultado é uma função de s. Na prática, para facilitar o entendimento, utilizaremos letras minúsculas para denotar a função a ser transformada e a letra maiúscula correspondente para denotar sua transformada de Laplace; por exemplo

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s), \quad \mathcal{L}[g(t)] = G(s), \quad \mathcal{L}[y(t)] = Y(s).$$

Observação 1

O domínio da transformada de Laplace, evidentemente, é o conjunto de todos os valores $s \in \mathbb{R}$ para os quais a integral cooonverge.

Exemplo 4 *Calcule $\mathcal{L}(1)$.*

Solução:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(1) &= \int_0^\infty 1e^{-st}dt = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}dt \\
&= \lim_{b\to\infty} \left.\frac{-e^{-st}}{s}\right|_0^b \\
&= \lim_{b\to\infty} \frac{-e^{-sb}+1}{s} \\
&= \frac{1}{s}
\end{aligned}$$

desde que s seja maior do que zero ($s > 0$). Onserve, que quando $s > 0$, o expoente $-sb$ é negativo e portanto $e^{-sb} \to 0$ quando $b \to \infty$. Quando $s < 0$, a integral diverge. Assim,

$$\mathcal{L}(1) = \frac{1}{s}, \quad s > 0$$

Exercício 1 *Mostre que:*

(a) $\mathcal{L}[t] = \frac{1}{s^2}$

(b) $\mathcal{L}[t^2] = \frac{2}{s^3}$

(c) $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n \in \mathbb{N}$

(d) $\mathcal{L}[t^p] = \frac{\gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $p > -1$.

(e) $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$, *para* $s > a$.

Existência da transformada de Laplace

A integral que define a transformada de Laplace não é necessariamente convergente. Existem casos de funções cujas transformadas de Laplace não existem. Veremos a seguir condições que garantem a existência da transformada. Antes vamos estabelecer alguns conceitos necessários.

Definição 3 (Função contínua por partes) *Uma função f é* ***contínua por partes*** *no intervalo $[0, \infty)$ se, em qualquer intervalo $[a, b]$, onde $a, b \geq 0$, existem apenas um número finito de descontinuidades e toda descontinuidade é de primeira espécie, ou seja, os limites laterais existem.*

Definição 4 (Função de ordem exponencial) *Uma função f é dita de* ***ordem exponencial*** *α se existem constantes reais α e M, $M > 0$, tais que $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$, para todo $t > 0$. Podemos dizer ainda que $\left|\frac{f(t)}{e^{\alpha t}}\right| \leq M$.*

Observação 2 *Funções de ordem exponencial não podem crescer mais rapidamente que $e^{\alpha t}$, para um certo α, quanto $t \to \infty$; logo podemos concluir que $\lim_{t\to\infty} \left|\frac{f(t)}{e^{\alpha t}}\right| = 0$.*

Exemplo 5 *A função $f(t) = \operatorname{sen}(2t)$ é de ordem exponencial.*

Solução: De fato, para $\alpha = 1$ temos

$$\left|\frac{\operatorname{sen}(2t)}{e^t}\right| \leq \frac{|\operatorname{sen}(2t)|}{e^t} \leq \frac{1}{e^t} \leq 1, \ \ \forall t \geq 0$$

Segue daí que

$$|\operatorname{sen}(2t)| \leq e^t, \ \ \forall t \geq 0.$$

Exemplo 6 *As funções* t^n, e^{at}, $\operatorname{sen}(bt)$, $\cos(bt)$, $t^n e^{at} \operatorname{sen}(bt)$, $t^n e^{at} \cos(bt)$ *são funções de ordem exponencial. Estas funções aparecem, geralmente, nas equações diferenciais lineares de coeficientes constantes.*

Exemplo 7 *A função* e^{t^2} *não é de ordem exponencial. Seu gráfico cresce de forma mais rápida que qualquer função exponencial da forma* e^{ct}.

Teorema 1 *Seja* $f(t)$ *uma função contínua por partes no intervalo* $[0, \infty)$ *e de ordem exponencial, isto é, exi stem contantes* α *e* $M > 0$ *tais* *que* $|f(t)| \leq Me^{\alpha t}$*, para todo* $t \geq 0$*, então a transformada de Laplace* $F = F(s)$*, definida para todo* $s > \alpha$ *por*

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt$$

existe e converge para todo $s > \alpha$*.*

Observação 3 *As condições do teorema são suficientes mas não necessárias para a existência da transformada dr Laplace como veremos no exemplo a seguir.*

Exemplo 8 *A função* $f(t) = t^{-1/2}$ *não é contínua por partes no intervalo* $[0, \infty)$*, mas sua transformada de Laplace existe.*

Solução: Primeiro observe que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t) = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{t}} = +\infty,$$

logo f não é contínua por partes. Apesar disso, f é de ordem exponencial pois

$$\lim_{t\to\infty} \frac{|f(t)|}{e^{\alpha t}} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{\sqrt{t}e^{\alpha t}} = 0,$$

para qualquer $\alpha \geq 0$; logo f é de ordem exponencial. Agora vamos calcular sua transformada:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[t^{-1/2}] &= \int_0^\infty t^{-1/2} e^{-st} dt \\
(*) &= \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{-1/2} e^{-x} \frac{dx}{s} \\
&= \frac{1}{s^{-1/2}\cdot s} \int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{s^{1/2}} \int_0^\infty x^{1/2-1} e^{-x} dx \\
&= \frac{1}{s^{1/2}} \gamma(1/2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{s}} \sqrt{\pi} \\
&= \sqrt{\frac{\pi}{s}}, \quad s > 0
\end{aligned}
$$

Em (*) faça

$$
\begin{aligned}
st &= x \\
t &= \frac{x}{s} \\
dt &= \frac{dx}{s}
\end{aligned}
$$

Veja que:

para $t = 0 \Rightarrow x = 0$

para $t = \infty \Rightarrow x = \infty$

Exercício 2 *Calcule a transformada de Laplace das funções abaixo*

(a) $f(t) = e^{-3t}$

(b) $f(t) = \text{sen}\,(2t)$

(c) $f(t) = 3t - 5\,\text{sen}\,(2t)$

(d) $f(t) = te^{-2t}$

(e) $f(t) = t^2e^{-2t}$

Exercício 3 *Calcule a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 3 \\ \\ 2, & t \geq 3 \end{cases}$$

Teorema 2 *Transformadas de Laplace de algumas funções básicas*

(a) $\mathcal{L}[1] = \frac{1}{s}$

(b) $\mathcal{L}[t^n] = \frac{n!}{s^{n+1}}$, $n = 1, 2, 3, \cdots$

(c) $\mathcal{L}[t^{-1/2}] = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$

(d) $\mathcal{L}[t^{1/2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}$

(e) $\mathcal{L}[t^p] = \frac{\gamma(p+1)}{s^{p+1}}$, $p > -1$

(f) $\mathcal{L}[e^{at}] = \frac{1}{s-a}$

(g) $\mathcal{L}[\operatorname{sen} kt] = \frac{k}{s^2+k^2}$

(h) $\mathcal{L}[\cos kt] = \frac{s}{s^2+k^2}$

(i) $\mathcal{L}[\operatorname{senh} kt] = \frac{k}{s^2-k^2}$

(j) $\mathcal{L}[\cosh kt] = \frac{s}{s^2-k^2}$

Observação 4 *As funções seno hiperbólica e cosseno hiperbólica são* *definidas pelas equações*

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad e \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Cálculo de transformada de Laplace a partir de tabelas

Uma propriedade importante da transformada de Laplace é que ela é linear, ou seja, dadas funções f e g e números reais a e b, tem-se

$$\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$$

De fato, podemos escrever

$$\int_0^\infty e^{-st}(af(t) + bg(t))dt = \int_0^\infty e^{-st}(af(t))dt + \int_0^\infty e^{-st}(bg(t))dt$$

$$= a\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt + b\int_0^\infty e^{-st}g(t)dt$$

Assim,podemos usar a tabela fornecida pelo teorema 2 e o fato de que a transformada de Laplace é linear para calcular a transformada de Laplace de outras funções. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 9 *Calcule a transformada de Laplace de* $f(t) = 2t^2 - 3t - 4e^t$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[2t^2 - 3t - 4e^t] &= 2\mathcal{L}[t^2] - 3\mathcal{L}[t] - 4\mathcal{L}[e^t] \\
&= 2\frac{2}{s^3} - 3\frac{1}{s^2} - 4\frac{1}{s-1} \\
&= \frac{4}{s^3} - \frac{3}{s^2} - \frac{4}{s-1} \\
&= \frac{4(s-1) - 3s(s-1) - 4s^3}{s^3(s-1)} \\
&= \frac{-4s^3 - 3s^2 + 7s - 4}{s^3(s-1)}
\end{aligned}$$

Exemplo 10 *Calcule a transformada de Laplace da função* $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$.

Solução: Primeiro observe que para tod $t \in \mathbb{R}$ tem-se a identidade

$$\operatorname{sen}^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}$$

Assim, usando a linearidade da transformada de Laplace e os resultados da tabela acima segue que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[\operatorname{sen}^2 t] &= \mathcal{L}\left[\frac{1-\cos 2t}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\mathcal{L}[1] - \frac{1}{2}\mathcal{L}[\cos 2t] \\
&= \frac{1}{2}\frac{1}{s} - \frac{1}{2}\frac{s}{s^2+4} \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+4}\right) \\
&= \frac{2}{s(s^2+4)}
\end{aligned}$$

Exemplo 11 *Calcule* $\mathcal{L}[1+t+t^2]$

Solução: Pela linearidade de $\mathcal{L}$ temos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[1+t+t^2] &= \mathcal{L}[1]+\mathcal{L}[t]+\mathcal{L}[t^2] \\ &= \frac{1}{s}+\frac{1}{s^2}+\frac{2}{s^3} \\ &= \frac{2+s+s^2}{s^3} \end{aligned}$$

Exercício 4 *Calcule* $\mathcal{L}[\operatorname{sen} t+\cos t]$

Exercícios

1. Use a definição de transformada de Laplace para calcular $\mathcal{L}[f(t)]$:

    (a) $f(t)=e^{t+7}$

    (b) $f(t)=e^{-2t-5}$

    (c) $f(t)=te^{4t}$

    (d) $f(t)=t^2e^{3t}$

    (e) $f(t)=e^{-t}\operatorname{sen} t$

    (f) $f(t)=e^{t}\cos t$

    (g) $f(t)=t\cos t$

(h) $f(t) = t \operatorname{sen} t$

(i) $f(t) = te^{-2t}$

(j) $f(t) = t^2 e^{-2t}$

2. Calcule a trasnsformada de Laplace de $f(t)$ usando a função gama:

   (a) $f(t) = t^{1/2}$

   (b) $f(t) = t^{-1/2}$

   (c) $f(t) = t^{3/2}$

3. Calcule $\mathcal{L}[f(t)]$ usando a tabela e propriedade de linearidade.

   (a) $f(t) = 2t^4$

   (b) $f(t) = t^5$

   (c) $f(t) = 4t - 10$

   (d) $f(t) = 7t + 3$

   (e) $f(t) = t^2 - 6t + 3$

   (f) $f(t) = (t + 1)^3$

   (g) $f(t) = 1 + e^{4t}$

   (h) $f(t) = t^2 - e^{-9t} + 5$

   (i) $f(t) = (1 + e^{2t})^2$

   (j) $f(t) = (e^t - e^{-t})^2$

   (k) $f(t) = e^t \operatorname{senh} kt$

   (l) $f(t) = e^t \cosh kt$

   (m) $f(t) = \cos 5t + \operatorname{sen} 2t$

   (n) $f(t) = \operatorname{sen} 2t \cos 2t$

   (o) $f(t) = \cos^2 t$

   (p) $f(t) = \cos t \cos 2t$

   (q) $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$

A transformada inversa

Teorema 3 (Unicidade) *Se $f(t)$ e $g(t)$ são funções contínuas por parte e de ordem exponencial e além disso*

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g(t)], \quad \textit{para todo } s \geq \alpha,$$

então $f(t) = g(t)$ em todos os pontos onde f e g forem contínuas.

De acordo com o teorema acima podemos concluir que:

(a) $f(t) = g(t)$ exceto, possivelmente, nos pontos de descontinuidade.

(b) não podemos ter funções diferentes com a mesma transformada de Laplace.

(c) podemos falar na transformada inversa de Laplace.

Dada uma função $F(s)$, se existir uma função $f(t)$ tal que sua transformada de Laplace seja $F(s)$, diremos que $f(t)$ é a transformada inversa de Laplace de $F(s)$. Indicaremos isso pela notação:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$$

O análogo do teorema 2 para a transformada inversa é o seguinte:

Teorema 4 *Algumas transformadas inversas*

1. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s}] = 1$
2. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{n!}{s^{n+1}}] = t^n$
3. $\mathcal{L}^{-1}[\sqrt{\frac{\pi}{s}}] = t^{-1/2}$
4. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{\sqrt{\pi}}{2s^{3/2}}] = t^{1/2}$
5. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s-a}] = e^{at}$
6. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{k}{s^2+k^2}] = \operatorname{sen} kt$
7. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2+k^2}] = \cos kt$
8. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{k}{s^2-k^2}] = \operatorname{senh} kt$
9. $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s}{s^2-k^2}] = \cosh kt$

Da mesma forma que $\mathcal{L}$, $\mathcal{L}^{-1}$ também é um operador linear, ou seja, dadas quaisquer constantes α e β tem-se

$$\mathcal{L}^{-1}[\alpha F(s) + \beta G(s)] = \alpha \mathcal{L}^{-1}[F(s)] + \beta \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

onde $F(s)$ e $G(s)$ são as transforamadas de Laplace de $f(t)$ e $g(t)$, respectivamente.

Exemplo 12 *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s^5}]$

Solução: Observe que esta função não está na tabela, mas observando que $5 = 4 + 1$, podemos identificar que $n = 4$; usando a propriedade de linearidade podemos escrever:

Exemplo 13 *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+64}\right]$

Solução:

Exercício 5 *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3s+5}{s^2+7}\right]$

Frações parciais

O uso de frações parciais é bastante importante para encontrar a transformada de Laplace inversa. Faremos aqui uma revisão de três casos básicos dessa teoria.

Caso 1

Os denominadores de $F(s)$ contém somente fatores lineares distintos.

Exemplo 14 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right]$$

Solução: Vamos inicialmente decompor a fração $\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}$ em frações parciais, ou seja, determinar as constantes A, B, C tais que

$$\begin{aligned}\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} &= \frac{A}{s-1}+\frac{B}{s+2}+\frac{C}{s+4}\\ &= \frac{A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2)}{(s-1)(s+2)(s+4)}\end{aligned}$$

Como os denominadores são idênticos, os numeradores também deverão ser idênticos, ou seja,

$$1 = A(s+2)(s+4)+B(s-1)(s+4)+C(s-1)(s+2).$$

Comparando os coeficientes das potências de s em ambos os lados dessa igualdade, vemos que essa equação é equivalente a um sistema de três equações e três incógnitas A, B e C. Porém, podemos determinar essas incógnitas atribuindo valores para s:

- $\mathbf{s = 1} \Rightarrow 1 = A(3)(5) \Rightarrow A = 1/15$

- $\mathbf{s = -2} \Rightarrow 1 = B(-3)(2) \Rightarrow B = -1/6$
- $\mathbf{s = -4} \Rightarrow 1 = C(-5)(-2) \Rightarrow C = 1/10$

Assim, podemos escrever

$$\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)} = \frac{1/15}{s-1} - \frac{1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4}$$

e, assim,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)(s+2)(s+4)}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/15}{s-1} - \frac{1/6}{s+2} + \frac{1/10}{s+4}\right] \\
&= \frac{1}{15}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-1}\right] - \frac{1}{6}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] + \frac{1}{10}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+4}\right] \\
&= \frac{1}{15}e^{t} - \frac{1}{6}e^{-2t} + \frac{1}{10}e^{-4t}
\end{aligned}$$

Caso 2

O denominador de $F(s)$ contém fatores lineares repetidos.

Caso 3

O denominador de $F(s)$ contém um fator quadrático irredutível.

Teorema 5 (Comportamento de $F(s)$ quando $s \to \infty$) *Seja $f(t)$ contínua por partes e de ordem exponencial em $[0, \infty)$. Então*

$$\lim_{s \to \infty} \mathcal{L}[f(t)] = 0.$$

Exercícios

1. Utilize o teorema 4 e a propriedade de linearidade para calcular $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

   (a) $F(s) = \frac{1}{s^3}$

   (b) $F(s) = \frac{1}{s^4}$

   (c) $F(s) = \frac{1}{s^3} - \frac{48}{s^5}$

(d) $F(s) = \left(\frac{2}{s} - \frac{1}{s^3}\right)^2$

(e) $F(s) = \frac{(s+1)^3}{s^4}$

(f) $F(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s-2}$

(g) $F(s) = \frac{4}{s} + \frac{6}{s^5} + \frac{1}{s+8}$

(h) $F(s) = \frac{10s}{s^2+16}$

(i) $F(s) = \frac{4s}{4s^2+1}$

(j) $F(s) = \frac{1}{4s^2+1}$

(k) $F(s) = \frac{1}{s^2-16}$

(l) $F(s) = \frac{10s}{s^2-25}$

(m) $F(s) = \frac{s}{s^2+2s-3}$

(n) $F(s) = \frac{1}{s^2+s-20}$

(o) $F(s) = \frac{s}{(s-2)(s-3)(s-6)}$

(p) $F(s) = \frac{s}{(s^2+4)(s+2)}$

(q) $F(s) = \frac{s-1}{s^2(s^2+1)}$

(r) $F(s) = \frac{s-3}{(s-\sqrt{3})(s+\sqrt{3})}$

(s) $F(s) = \frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}$

(t) $F(s) = \frac{6s+3}{(s^2+1)(s^2+4)}$

Translação na transformada de Laplace

O próximo teorema nos possibilitará aumentar nossa tabela de transformadas de Laplace de maneira significativa.

Teorema 6 (Teorema de translação) *Se a é um número real, então*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = F(s-a),$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Prova. A prova segue diretamente da definição de $\mathcal{L}$:

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}f(t)dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}f(t)dt = F(s-a).$$

$\square$

Observação 5 (Notação:) *Algumas vezes vamos utilizar a simbologia*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)] = \mathcal{L}[f(t)]_{s\to s-a}$$

onde $s \to s-a$ indica que substituimos s por $s-a$ em $F(s)$.

Exemplo 15 *Calcule:*

(a) $\mathcal{L}[e^{5t}t^3]$ *(b)* $\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 4t]$

Solução: Os resultados seguem do teorema 6:
(a)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{5t}t^3] &= \mathcal{L}[t^3]_{s\to s-5} \\
&= \left.\frac{3!}{s^4}\right|_{s\to s-5} \\
&= \frac{6}{(s-5)^4}
\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[e^{-2t}\cos 2t] &= \mathcal{L}[\cos 2t]_{s\to s+2} \\
&= \left.\frac{s}{s^2+16}\right|_{s\to s+2} \\
&= \frac{s+2}{(s+2)^2+16}
\end{aligned}$$

O teorema 6 também pode ser enunciado na forma inversa:

Teorema 7

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]_{s\to s-a} = \mathcal{L}^{-1}[F(s-a)] = e^{at}f(t)$$

onde $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplo 16 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+6s+11}\right]$$

Solução: Primeiro vamos completar o quadrado na expressão $s^2+6s+11$

$$\begin{aligned} s^2+6s+11 &= s^2+2\cdot 3s+3^2-3^2+11 \\ &= (s+3)^2-9+11 \\ &= (s+3)^2+2 \end{aligned}$$

Daí, podemos escrever:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+6s+11}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{(s+3)^2+2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3-3}{(s+3)^2+2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+2} - \frac{3}{(s+3)^2+2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+3)^2+2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s+3}{(s+3)^2+2}\right] - 3\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sqrt{2}}{(s+3)^2+(\sqrt{2})^2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\left.\frac{s}{s^2+2}\right|_{s\to s+3}\right] - \frac{3}{\sqrt{2}}\mathcal{L}^{-1}\left[\left.\frac{\sqrt{2}}{s^2+(\sqrt{2})^2}\right|_{s\to s+3}\right] \\
&= e^{3t}\cos\sqrt{2}t - \frac{3}{\sqrt{2}}e^{-3t}\operatorname{sen}\sqrt{2}t
\end{aligned}
$$

Exemplo 17 *Calcule*

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2+2s-8}\right]$$

Solução: Competando o quadrado no segundo denominador e usando a linearidade, temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{s^2+2s-8}\right] &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}+\frac{1}{(s+1)^2-9}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-1)^3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)_9^2}\right] \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{2!}\frac{2!}{(s-1)^3}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{3}\frac{3}{(s+1)^2-3^2}\right] \\
&= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2!}{(s-1)^3}\right]+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{3}{(s+1)^2-3^2}\right] \\
&= \frac{1}{2!}\mathcal{L}^{-1}\left[\left.\frac{2!}{s^3}\right|_{s\to s-1}\right]+\frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\left.\frac{3}{s^2-3^2}\right|_{s\to s+1}\right] \\
&= \frac{1}{2}e^t t^2+\frac{1}{3}e^{-t}\operatorname{senh}3t
\end{aligned}$$

Escala na transformação de Laplace

Se a transformada de Laplace de $f(t)$ é dada por

$$\mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = F(s)$$

e $\lambda > 0$ então

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda})$$

De fato,

$$\mathcal{L}[f(\lambda t)] = \int_0^\infty f(\lambda t)e^{-st}dt$$

Substituindo $\lambda t = u$ e depois fazendo $\sigma = \frac{s}{\lambda}$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f(\lambda t)] &= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\frac{su}{\lambda}}du \\
&= \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty f(u)e^{-\sigma u}du \\
&= \frac{1}{\lambda}F(\sigma) \\
&= \frac{1}{\lambda}F(\frac{s}{\lambda})
\end{aligned}
$$

Exemplo 18 *Calcule* $\mathcal{L}[\cos 12t]$

Solução: Seja $F(s) = \mathcal{L}[\cos t] = \frac{s}{s^2+1}$. Pelo resultado acima temos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[\cos 12t] &= \frac{1}{12} F(\frac{s}{12}) \\
&= \frac{1}{12} \frac{\frac{s}{12}}{\left(\frac{s}{12}\right)^2 + 1} \\
&= \frac{1}{12^2} \frac{s}{\frac{s^2}{12^2} + 1} \\
&= \frac{s}{s^2 + 12^2} \\
&= \frac{s}{s^2 + 144}
\end{aligned}
$$

Derivada de uma tranformada

Seja $F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$. Derivando sob o sinal da integral, com relação à variável s, obtemos

$$
\frac{dF}{ds} = \int_0^\infty (-t)f(t)e^{-st}dt = -\int_0^\infty tf(t)e^{-st}dt = -\mathcal{L}[tf(t)].
$$

Assim, podemos concluir que

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF}{ds} = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)].$$

Analogamente,

$$\mathcal{L}[t^2 f(t)] = \mathcal{L}[t{\cdot}tf(t)] = -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds}\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[f(t)]\right) = \frac{d^2}{ds^2}\mathcal{L}[f(t)].$$

Os resultados acima sugerem uma fórmula geral para $\mathcal{L}[t^n f(t)]$.

Teorema 8 (Derivadas de transformadas) *Para* $n = 1, 2, 3, \cdots$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Exemplo 19 *Calcule*

$(a)\mathcal{L}[te^{3t}]$ $(b)\mathcal{L}[t\operatorname{sen} at]$ $(c)\mathcal{L}[t^2\operatorname{sen} at]$ $(d)\mathcal{L}[te^{-t}\cos t]$

Função degrau unitário

Seja $u(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < 0 \\ 1, & \text{se } t \geq 0 \end{cases}$

Podemos generalizar: dado um número real positivo definimos $u_a(t) = u(t-a)$ ou seja,

$$u_a(t) = \begin{cases} 0, & \text{se } t < a \\ 1, & \text{se } t \geq a \end{cases}$$

Esta função é chamada de **função degrau unitário**.

Em geral, se $b > a$

$$u(t-a) - u(t-b) = \begin{cases} 0, & 0 < t < a \\ 1, & a \leq t < b \\ 0, & t \leq b \end{cases}$$

A função degrau unitário pode ser combinada com outras funções de duas maneiras: dada a função $f(t)$, $t \geq 0$, podemos considerar as seguintes funções:

(a) $g(t) = u_a(t)f(t)$; neste caso ocorre uma supressão, ou seja, a função degrau unitário cancela uma porção do gráfico de f.

(b) $g(t) = u_a(t)f(t-a)$; neste caso, o gráfico de $y = f(t-a)$ é o gráfico de $f(t)$, transladado para a direita em a unidades; porém quando $f(t-a)$ é multiplicada por $u_a(t)$, o gráfico da função $y = u_a(t)f(t-a)$, coincide com o gráfico de $y = f(t-a)$, para $t \geq a$, mas é identicamente nula para $0 \leq t < a$.

Exemplo 20 *A figura 1 ilustra o gráfico da função* $\operatorname{sen} t$, $t \geq 0$, *quando multiplicada por* $u_{2\pi}(t) = u(t-2\pi)$*:*

$$f(t) = \operatorname{sen} t \; u(t-2\pi) = \begin{cases} 0, & 0 \leq t < 2\pi \\ \operatorname{sen} t, & t \geq 2\pi \end{cases}$$

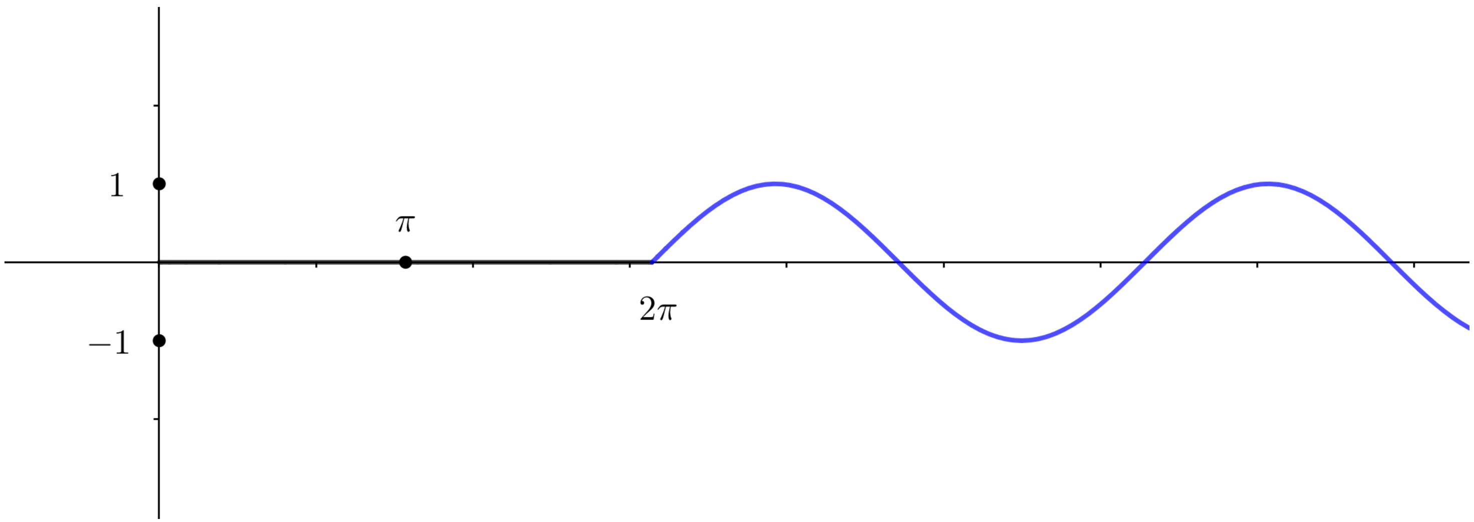

Figura 1

Expressando funções definidas por mais de uma sentença em termos de funções degrau unitário

A função degrau unitário pode também ser usada para representar funções definidas por partes em uma forma compacta. Em geral, podemos expressar uma função $f(t)$ definida por mais de uma sentença como uma combinação linear de funções degrau unitário da seguinte maneira:

- Para cada intervalo finito $[a, b]$ onde f possui uma expressão diferente, multiplique a expressão de f pela diferença das funções degraus $u(t-a) - u(t-b)$;

- para uma expressão definida num intervalo infinito do tipo $[c, \infty]$ somente multiplicar a expressão por $u(t-c)$;

- $f(t)$ é o somatório de todos os produtos.

Exemplo 21 *Expresse a função*

$$f(t) = \begin{cases} g(t), & 0 \leq t < a \\ h(t), & t \geq a \end{cases}$$

em termos de funções degrau unitário.

Solução: Multiplicamos a função $g(t)$, definida no intervalo $[0, a)$, por $u(t) - u(t-a)$ e a função $h(t)$, definida no intervalo $[a, \infty)$ por $u(t-a)$. Assim temos:

$$\begin{aligned} f(t) &= g(t)(u(t) - u(t-a)) + h(t)u(t-a) \\ &= g(t) - g(t)u(t-a) + h(t)u(t-a) \end{aligned}$$

Exemplo 22 *Expresse a função*

$$f(t) = \begin{cases} t^2 - t + 3, & 0 \leq t < 2 \\ e^t, & 2 \leq t < 5 \\ 2t \operatorname{sen} t, & t \geq 5 \end{cases}$$

em uma forma compacta (ou seja, como combinação linear de funções degrau unitário.

Solução: Observe que $f(t)$ possui três expressões diferentes nos intervalos $[0, 2)$, $[2, 5)$ e $[5, \infty)$. Logo, temos duas diferenças $u(t) - u(t-2)$ e $u(t-2) - u(t-5)$ e três produtos

- $(t^2 - t + 3)(u(t) - u(t-2))$, para $t^2 - t + 3$ definida em $[0, 2)$;
- $e^t(u(t-2) - u(t-5)$, para e^t definida em $[2, 5)$;
- $2t \operatorname{sen} t \; u(t-5)$ para $2t \operatorname{sen} t$ definida em $[5, \infty)$.

Assim,

$$\begin{aligned} f(t) &= (t^2 - t + 3)(u(t) - u(t-2)) + e^t(u(t-2) - u(t-5) + 2t \operatorname{sen} t\, u(t-5) \\ &= (t^2 - t + 3)u(t) + (e^t - t^2 + t - 3)u(t-2) + (2t \operatorname{sen} t - e^t)u(t-5) \end{aligned}$$

Transformada de Laplace da função degrau unitário

Vamos determinar a transformada de Laplace da função degrau unitário $u(t-a)$:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-a)] &= \int_0^\infty u(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a u(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty u(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty e^{-st}dt \\
&= \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{t=a}^{\infty} \\
&= \frac{e^{-as}}{s}
\end{aligned}
$$

Exemplo 23 *Encontre a transformada de Laplace da função*

$$f(t) = \begin{cases} 2, & 0 \le t < 2 \\ -1, & 2 \le t < 3 \\ 0, & t \ge 3 \end{cases}$$

Solução: Primeiro expressamos $f(t)$ em termos de funções degrau unitário:

$$\begin{aligned} f(t) &= 2(u(t) - u(t-2)) + (-1)(u(t-2) - u(t-3)) + 0u(t-3) \\ &= 2u(t) - 3u(t-2) + u(t-3) \\ &= 2 - 3u(t-2) + u(t-3) \end{aligned}$$

Usando a linearidade e o exemplo , temos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \mathcal{L}[2] - 3\mathcal{L}[u(t-2)] + \mathcal{L}[u(t-3)] \\ &= \frac{2}{s} - 3\frac{e^{-2s}}{s} + \frac{e^{-3s}}{s} \end{aligned}$$

$\square$

No teorema 6 vimos que multiplicar a função $f(t)$ por uma exponencial resulta em uma translação na transformada de Laplace $F(s)$ de $f(t)$. No próximo teorema, veremos que quando $F(s)$ é multiplicada por uma função exponencial adequada, a transformada inversa desse produto é a função transladada.

Teorema 9 (Segundo teorema de translação) *Seja a um número real positivo. Então*

$$\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)] = e^{-as}F(s)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$

Prova.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-a)f(t-a)] &= \int_0^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt + \int_a^\infty u(t-a)f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^a 0dt + \int_a^\infty 1 \cdot f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt
\end{aligned}
$$

Faça $v = t - a$, $dv = dt$; assim quando $t = a$, temos $v = 0$ e quando $t = \infty$, $v = \infty$ e daí

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[u_a(t)f(t-a)] &= \int_a^\infty f(t-a)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty f(v)e^{-s(v+a)}dv \\
&= \int_0^\infty f(v)e^{-sv}e^{-as}dv \\
&= e^{-as}\int_0^\infty f(v)e^{-sv}dv \\
&= e^{-as}\mathcal{L}[f(t)] \\
&= e^{-as}F(s)
\end{aligned}
$$

$\square$

Exemplo 24 *Calcule* $\mathcal{L}[(t-2)^3u(t-2)]$

Solução: Como $a = 2$, tomando $f(t) = t^3$, segue do teorema 9 que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[(t-2)^3 u(t-2)] &= e^{-2s}\mathcal{L}[t^3] \\
&= e^{-2s}\frac{3!}{s^4} \\
&= \frac{6}{s^4}e^{-2s}
\end{aligned}$$

Exemplo 25 *Calcule* $\mathcal{L}[u(t-2\pi)sent]$

Solução: Neste caso, $a = 2\pi$, logo pelo teorema 9, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[u(t-2\pi)sent] &= \mathcal{L}[(u(t-2\pi)sen(t-2\pi)] \\
&= e^{-2\pi s}\mathcal{L}[sent] \\
&= e^{-2\pi s}\frac{1}{s^2+1} \\
&= \frac{e^{-2\pi s}}{s^2+1}
\end{aligned}$$

Observação: na primeira igualdade usamos o fato que a função seno é periódica de período 2π.

Exemplo 26 *Calcule a transformada de Laplace de* $u(t-a)f(t)$.

Solução: Vamos usar a função auxiliar $g(t) = f(t+a)$. Assim, $g(t-a) = f((t-a)+a) = f(t)$. Logo

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[u(t-a)f(t)] &= \mathcal{L}[u(t-a)g(t-a)] \\ &= e^{-as}\mathcal{L}[g(t)] \\ &= e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)] \end{aligned}$$

O teorema 9 pode ser escrito também na forma inversa:

Teorema 10 $u(t-a)f(t-a) = \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)]$, *onde* $a > 0$ *e* $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$.

Exemplo 27 *Calcule* $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right]$

Solução: Temos $a = \frac{\pi}{2}$ e $f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right] = \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t$. Logo, pelo teorema 10,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-\pi s/2}}{s^2+9}\right] &= \frac{1}{3}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+9}\right]_{t\to t-\pi/2} u(t-\pi/2) \\
&= \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3\left(t-\frac{\pi}{2}\right) u(t-\pi/2) \\
&= \frac{1}{3}\cos(3t)\, u\left(t-\frac{\pi}{2}\right)
\end{aligned}$$

Transformadas de derivadas

O nosso objetivo principal com a transformada de Laplace é usá-la para resolver certos tipos de equações diferenciais. Para isso, precisamos dar sentido à expressões do tipo $\mathcal{L}[dy/dt]$ e $\mathcal{L}[d^2y/dt^2]$. Por exemplo, se f' for contínua para $t \geq 0$, então

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt \\ &= \lim_{b\to\infty} \int_0^b e^{-st} f'(t)dt\end{aligned}$$

Usando integração por partes com $u = e^{-st}$ e $dv = f'(t)dt$, de forma que $v = f(t)$, podemos escrever

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f'(t)] &= \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st} f'(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left[f(t)e^{-st}\right]_0^b - \int_0^b f(t)(-se^{-st})dt\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}(e^{-sb}f(b) - f(0)) + s\lim_{b\to\infty}\int_0^b f(t)e^{-st}dt \\
&= 0 - f(0) + s\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt \\
&= -f(0) + s\mathcal{L}[f(t)] \\
&= sF(s) - f(0)
\end{aligned}
$$

sendo que $\lim_{b\to\infty}(e^{-sb}f(b)) = 0$, pois estamos supondo que $f(t)$ é de ordem exponencial.

Procedendo da mesma forma, obtemos

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[f''(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f''(t)dt \\
&= \lim_{b\to\infty}\left(\left[f'(t)e^{-st}\right]_0^b - \int_0^b f'(t)(-se^{-st})dt\right) \\
&= \lim_{b\to\infty}(e^{-sb}f'(b) - f'(0)) + s\lim_{b\to\infty}\int_0^b f'(t)e^{-st}dt \\
&= 0 - f'(0) + s\int_0^\infty f'(t)e^{-st}dt \\
&= -f'(0) + s\mathcal{L}[f'(t)] \\
&= -f'(0) + s(sF(s) - f(0)) \\
&= s^2F(s) - sf(0) - f'(0)
\end{aligned}
$$

De forma geral, temos:

Teorema 11 (Transformada de uma derivada) *Se $f(t), f'(t), \cdots, f^{(n-1)}(t)$ forem contínuas e ordem exponencial em $[0,\infty)$ e se $f^{(n)}(t)$ for contínua* *por partes em* $[0, \infty)$, *então*

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f'(0) - s^{n-3} f''(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

onde $F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$.

Exemplo 28 *Calcule* $\mathcal{L}[kt \cos kt + \operatorname{sen} kt]$.

Solução: Observe que $kt \cos kt + \operatorname{sen} kt$ é a derivada da função $t \operatorname{sen} kt$

(Verifique!!!). Então,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[kt\cos kt + \operatorname{sen} kt] &= \mathcal{L}[\frac{d}{dt}(t\operatorname{sen} kt)] \\
&= s\mathcal{L}[t\operatorname{sen} kt] \\
&= s\left(-\frac{d}{ds}\mathcal{L}[\operatorname{sen} kt]\right) \\
&= -s\frac{d}{ds}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right) \\
&= -s\frac{-2ks}{(s^2+k^2)^2} \\
&= \frac{2ks^2}{(s^2+k^2)^2}
\end{aligned}
$$

Exemplo 29 *Calcule a transformada de Laplace das funções abaixo* *(a)* $f(t) = \cos^2 t$ *(b)* $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$ *(c)* $f(t) = \cos^3 t$

Solução: (a) Observvce que sendo $f(t) = \cos^2 t$, então $f'(t) = 2\cos t(-\operatorname{sen} t) = -\operatorname{sen}(2t)$. De acordo com o teorema acima

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(0)$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[-\operatorname{sen}(2t)] &= s\mathcal{L}[\cos^2 t] - \cos^2 0 \\
-\frac{2}{s^2+2^2} &= s\mathcal{L}[\cos^2 t] - 1 \\
\frac{-2}{s^2+4} + 1 &= s\mathcal{L}[\cos^2 t]
\end{aligned}$$

e daí

$$\mathcal{L}[\cos^2 t] = \frac{1}{s}\left[\frac{-2}{s^2+4} + 1\right] = \frac{s^2+2}{s(s^2+4)}$$

(b) Para calcular $\mathcal{L}[\operatorname{sen}^3 t]$, vamos derivar $f(t) = \operatorname{sen}^3 t$ duas vezes, obtendo

$$
\begin{aligned}
f'(t) &= 3\,\mathrm{sen}^{\,2} t\cos t \\
f''(t) &= 3\left[2\,\mathrm{sen}\, t\cos t\cos t + \,\mathrm{sen}^{\,2} t(-\,\mathrm{sen}\, t)\right] \\
&= 3\left[2\,\mathrm{sen}\, t\cos^2 t - \,\mathrm{sen}^{\,3} t\right] \\
&= 3\left[2\,\mathrm{sen}\, t(1 - \,\mathrm{sen}^{\,2} t) - \,\mathrm{sen}^{\,3} t\right] \\
&= 3\left[2\,\mathrm{sen}\, t - 2\,\mathrm{sen}^{\,3} t) - \,\mathrm{sen}^{\,3} t\right] \\
&= 3\left[2\,\mathrm{sen}\, t 3 - \,\mathrm{sen}^{\,3} t\right] \\
&= 6\,\mathrm{sen}\, t - 9\,\mathrm{sen}^{\,3} t
\end{aligned}
$$

Utilizando o teorema 11 temos

$$\mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f(t)] - sf(0) - f'(0)$$

Assim,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}[6\,\mathrm{sen}\, t - 9\,\mathrm{sen}^{\,3} t] &= s^2\mathcal{L}[sen^3 t] - s\,\mathrm{sen}^{\,3} t|_{t=0} - 3\,\mathrm{sen}^{\,2} t\cos t|_{t=0} \\
6\mathcal{L}[\,\mathrm{sen}\, t] - 9\mathcal{L}[\,\mathrm{sen}^{\,3} t] &= s^2\mathcal{L}[sen^3 t] - s\cdot 0 - 3\cdot 0 \\
6\mathcal{L}[\,\mathrm{sen}\, t] &= (s^2+9)\mathcal{L}[\,\mathrm{sen}^{\,3} t]
\end{aligned}
$$

e daí

$$\mathcal{L}[sen^3 t] = \frac{6}{s^2+9}\frac{1}{s^2+1} = \frac{6}{(s^2+9)(s^2+1)}$$

Resolução de equações diferenciais

Dada uma função $y(t)$, como vimos nas seções anteriores, a transformada $\mathcal{L}[y^{(n)}(t)]$, $n > 1$, depende de $y(t)$ e de suas derivadas no ponto $t = 0$. Isto sugere que a transformada de Laplace pode ser usada como ferramenta para resolver problemas lineares de valor inicial com coeficientes constantes. Esse tipo de equação diferencial pode ser reduzida, através da transformada de Laplace, a uma equação algébrica na função transformada $Y(s)$. Considere então o problema de valor inicial

$$a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = g(t)$$

$$y(0) = y_0,\ y'(0) = y_0',\ \cdots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$$

com a_i, $i = 0, 1, \cdots, n$ e $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ são constantes. Pela linearidade da transformada de Laplace podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[a_n \frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y\right] &= \mathcal{L}[g(t)] \\ a_n \mathcal{L}\left[\frac{d^n y}{dt^n}\right] + a_{n-1}\mathcal{L}\left[\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right] + \cdots + a_1 \mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] + a_0 \mathcal{L}[y] &= \mathcal{L}[g(t)] \end{aligned} \tag{3}$$

Pelo teorema 11, a equação 3 torna-se:

$$\begin{gathered} a_n[s^n Y(S) s^{n-1} y(0) - \cdots - y^{(n-1)}(0)] \\ + a_{n-1}[s^{n-1}Y(s) - s^{n-2}y(0) - \cdots - y^{(n-2)}(0) + \cdots + a_0 Y(s) = G(s) \end{gathered}$$

ou

$$\begin{aligned} [a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0]Y(s) &= a_n[s^{n-1}y(0) + \cdots + y_0^{(n-1)}] \\ &+ a_{n-1}[s^{n-2}y_0 + \cdots + y_0^{(n-2)} + \cdots + G(s) \end{aligned} \tag{4}$$

onde $Y(s) = \mathcal{L}[f(t)]$ e $G(s) = \mathcal{L}[g(t)]$.

Explicitando $Y(s)$ na equação 4, encontramos então $y(t)$ através da transformada inversa

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)].$$

O procedimento está esquematizada na figura 1.

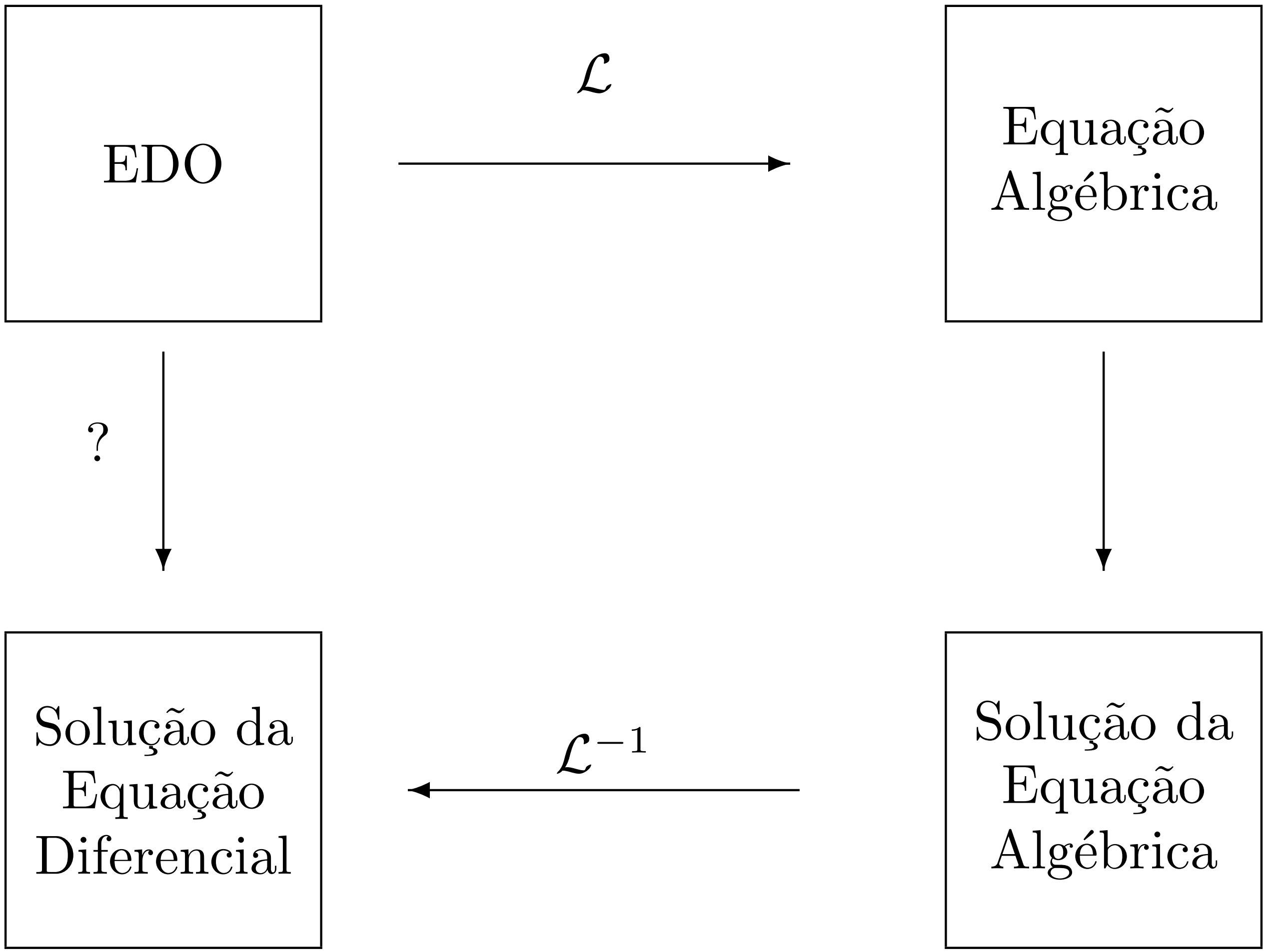
EDO
$\mathcal{L}$
Equação Algébrica
?
Solução da Equação Diferencial
$\mathcal{L}^{-1}$
Solução da Equação Algébrica

Figura 2

Exemplo 30 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dt} - 3y = e^{2t}, \quad y(0) = 1.$$

Solução: Calculamos primeiro a transformada de cada membro da equação diferencial:

$$\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] - 3\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[e^{2t}].$$

Veja que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left[\frac{dy}{dt}\right] &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\
\mathcal{L}[y] &= Y(s) \\
\mathcal{L}[e^{2t}] &= \frac{1}{s-2}
\end{aligned}$$

Resolvemos então a equação em $Y(s)$:

$$\begin{aligned} sY(s) - 1 - 3Y(s) &= \frac{1}{s-2} \\ Y(s)(s-3) &= \frac{1}{s-2} + 1 \\ Y(s)(s-3) &= \frac{1+s-2}{s-2} \\ Y(s) &= \frac{s-1}{(s-2)(s-3)} \end{aligned}$$

Usando frações parciais:

$$\frac{s-1}{(s-2)(s-3)} = \frac{A}{s-2} + \frac{B}{s-3} = \frac{A(s-3)+B(s-2)}{(s-2)(s-3)}$$

o que implica que

$$s-1 = A(s-3) + B(s-2)$$

Fazendo $s = 2$ e $s = 3$ nessa última equação obtemos $A = -1$ e $B = 2$, respectivamente. Logo,

$$Y(s) = \frac{-1}{s-2} + \frac{2}{s-3}$$

e, portanto

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = -\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-2}\right] + 2\mathcal{L}\left[\frac{2}{s-3}\right]$$

e, usando a nossa tabela

$$y(t) = -e^{2t} + 2e^{3t}.$$

Exemplo 31 *Resolva a equação*

$$y'' - 6y' + 9y = t^2e^{3t}, \;\; y(0) = 2, \;\; y'(0) = 6$$

Solução: Aplicando a transformada de Laplace à equação dada e usando a linearidade obtemos:

$$\mathcal{L}[y'' - 6y' + 9y] = \mathcal{L}[^2e^{3t}]$$

$$\mathcal{L}[y''] - 6\mathcal{L}[y'] + 9\mathcal{L}[y] = \mathcal{L}[t^2 e^{3t}]$$

que de acordo com o teorema 11 pode ser escrita como

$$s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) - 6[sY(s) - y(0)] + 9Y(S) = \frac{2}{(s-3)^3}$$

ou

$$Y(s)[s^2 - 6s + 9] - 2s - 6 + 6 \cdot 2 = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s)(s-3)^2 - 2s + 6 = \frac{2}{(s-3)^3}$$

$$Y(s)(s-3)^2 = \frac{2}{(s-3)^3} + 2s - 6$$

e isolando $Y(s)$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^3(s-3)^2} + \frac{2(s-3)}{(s-3)^2}$$

$$Y(s) = \frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}$$

Aplicando agora a transformada inversa obtemos $y(t)$:

$$\begin{aligned}
y(t) &= \mathcal{L}^{-1}[Y(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-3)^5} + \frac{2}{s-3}\right] \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s-3)^5}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] \\
&= 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{4!}\frac{4!}{(s-3)^5}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right] \\
&= \frac{2}{4!}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4!}{(s-3)^5}\right] + 2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-3}\right]
\end{aligned}$$

Pelo teorema 6, concluimos que

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{4!}{(s-3)^5}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\left.\frac{4!}{s^5}\right|_{s\to s-3}\right] = t^4e^{3t}$$

Portanto

$$y(t) = \frac{2}{4!}t^4e^{3t} + 2e^{3t} = \frac{1}{12}t^4e^{3t} + 2e^{3t}$$

Exemplo 32 *Resolva a equação* $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Exemplo 33 *Resolva a equação* $x'' + 16x = \cos 4t$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$.

Resolução de sistemas de EDOs lineares

Para resolver sistemas com duas equações diferenciais nas funções incógnitas x = x(t) e y = y(t), podemos aplicar a Transformada de Laplace a cada EDO de forma que $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$ e $\mathcal{L}[y(t)] = Y(s)$ e fazer com que o sistema recaia num sistema algébrico com duas equações nas duas variáveis $X(s)$ e $Y(s)$. Veremos como isto funciona através de um exemplo.

Exemplo 34 *Determinar a solução do PVI*

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) + y'(t) - y(t) &= 2 \\ x''(t) + x'(t) - y'(t) &= \cos t \end{aligned}$$

sujeito às conduções $x(0) = 0$*,* $x'(0) = 2$ *e* $y(0) = 1$*.*

Solução: Aplicando a transformada de Laplace a cada uma das equações e usando a linearidade obtemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[x'(t)] + \mathcal{L}[x(t)] + \mathcal{L}[y'(t)] - \mathcal{L}[y(t)] &= \mathcal{L}[2] \\ \mathcal{L}[x''(t)] + \mathcal{L}[x'(t)] - \mathcal{L}[y'(t)] &= \mathcal{L}[\cos t] \end{aligned}$$

Pelo teorema 11 e pela tabela 2 temos:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}[x''(t)] &= s^2X(s) - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2 \\
\mathcal{L}[x'(t)] &= sX(s) - x(0) = sX(s) \\
\mathcal{L}[y'(t)] &= sY(s) - y(0) = sY(s) - 1 \\
\mathcal{L}[2] &= 2\mathcal{L}[1] = \frac{2}{s} \\
\mathcal{L}[\cos t] &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

e assim obtemos o sistema de equações algébricas

$$\begin{aligned}
sX(s) + X(s) + sY(s) - 1 - Y(s) &= \frac{2}{s} \\
s^2X(s) - 2 + sX(s) - sY(s) + 1 &= \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}$$

ou

$$
\begin{aligned}
(s+1)X(s) + (s-1)Y(s) &= 1 + \frac{2}{s} \\
s(s+1)X(s) - sY(s) &= 1 + \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

ou

$$
\begin{aligned}
(s+1)X(s) + (s-1)Y(s) &= 1 + \frac{2}{s} \\
(s+1)X(s) - Y(s) &= \frac{1}{s} + \frac{1}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Resolvendo o sistema obtemos

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^2+1} \\
Y(s) &= \frac{1}{s^2} + \frac{s}{s^2+1}
\end{aligned}
$$

Utilizando as transformadas inversas destas funções obtemos a solução do sistema:

$$
\begin{aligned}
x(t) &= t + \sin t \\
y(t) &= t + \cos t
\end{aligned}
$$

2 Séries de Fourier

O objetivo dessa seção é analisar a seguinte questão: que funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ podem ser expressas na forma

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L} \right) \qquad (5)$$

Funções periódicas, paridade e ortogonalidade

Definição 5 *Uma função f é dita periódica se existe um número real T tal que $f(t+T) = f(t)$, para todo t no domínio da função f.*

Exemplo 35 *As funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ são periódicas de período 2π, pois $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$ e $\cos(x+2\pi) = \cos x$, para todo $x \in \mathbb{R}$. A função $\operatorname{tg} x$ é periódica de período π, pois $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$.*

Exemplo 36 *A função $f(x) = x - \lfloor x \rfloor$, onde $\lfloor x \rfloor$ é a parte inteira de x é periódica de período 1.*

Solução: De fato, $f(x+1) = (x+1) - \lfloor x+1 \rfloor = x + 1 - \lfloor x \rfloor - 1 = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

Exemplo 37 *Uma função cosntante $f(x) = k$ tem como período qualquer número real $T \neq 0$.*

Observação 6 *Se T é período de uma função f, então $2T, 3T, \cdots, kT, \cdots$ também o são (com $k \in \mathbb{Z}$, $k \neq 0$). Por exemplo, 4π também é um período para as funções $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$. No entanto, 2π é o menor período positivo de $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$ e, portanto é chamado de período fundamental.*

Definição 6 *O **período fundamental** de uma função periódica $f(x)$ é seu menor período positivo.*

Proposição 1 *Seja f uma função periódica de período T, então:*

1. *$f(ax)$, $a \neq 0$, é periódica de período $\frac{T}{a}$*
2. *$f(\frac{x}{a})$, $a \neq 0$, é periódica de período aT.*

Prova. $\square$

Proposição 2 *Se $f(x)$ e $g(x)$ são funções periódicas de período T, então as funções $af(x) + bg(x)$, a e b constantes, $f(x) \cdot g(x)$ e $\frac{f(x)}{g(x)}$ também são periódicas de período T.*

Proposição 3 *Se as funções $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$, são periódicas de período T, então T também será um período de $\sum_{m=1}^{\infty} c_n f_n(x)$ (se esta série convergir).*

Da proposição 1 segue que:

- como o período de $\operatorname{sen} x$ é 2π, segue que $\frac{2L}{m}$ é o período fundamental de $\operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$.

- Mas, então $2L$ é um período comum a todas as funções do lado direito de 5 (incluindo a constante fora do somatório).

- Concluímos daí que, se tiver alguma chance de que uma função f possa ser escrita como uma soma do tipo 5, então f deverá ser periódica de período $2L$.

Proposição 4 *Se $\frac{a}{b}$ é um número racional (isto é, se $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, com m e n inteiros), então $f(x) = \operatorname{sen}(ax) + \cos(bx)$ é periódica.*

De fato, observe que sendo $\frac{a}{b} = \frac{m}{n}$, então $2\pi\frac{a}{b} = 2\pi\frac{m}{n}$ e daí $\frac{2\pi}{a}m = \frac{2\pi}{b}n$. Mas, pela proposição 1 $\frac{2\pi}{a}$ e, portanto $\frac{2\pi}{a}m$ é um período para $\operatorname{sen} ax$, bem como $\frac{2\pi}{b}n$ é um período para $\cos bx$. Assim o número $T = \frac{2\pi}{a}m = \frac{2\pi}{b}n$ é um período comum para a função $f(x) = \operatorname{sen}(ax) + \cos(bx)$.

Definição 7 *Seja f uma função cujo domínio seja simétrico em relação à origem. Dizemos que:*

(i) f é uma função par se $f(-t) = f(t)$, para todo t;

(ii) f *é uma função ímpar se* $f(-t) = -f(t)$, *para todo* t

Exemplo 38 *As funções* $f_1(t) = \cos t$ *e* $g_1(t) = t^2$ *são funções pares enquanto que as funções* $f_2(t) = \operatorname{sen} t$ *e* $g_2(t) = t^3$ *são funções ímpares.*

Listamos a seguir algumas propriedades úteis destas funções.

Proposição 5 1. *A soma de duas funções pares ainda é uma função par.*

2. *A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.*

3. *O produto de duas funções pares (ou duas funções ímpares) é uma função par.*

4. *O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.*

5. *Toda função cujo domínio é simétrico com relação a origem pode ser escrita como a soma de uma função para com uma função ímpar.*

6. *Seja* f *uma uma função contínua no intervalo* $[-a, a]$*:*

   (i) se f *é par, então* $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$

(ii) se f é ímpar, então $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

Definição 8 *a) Sejam f e g funções contínuas o intervalo $[a, b]$. Dizemos que f e g são ortogonais sobre o itervalo $[a, b]$se*

$$\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$$

b) Dizemos que um conjunto finito $S = \{f_1, f_2, \cdots, f_n\}$ ou infinito $S = \{f_1, f_2, \cdots, f_n \cdots\}$ de funções contínuas em $[a, b]$ é ortogonal sobre $[a, b]$ se

$$\int_a^b f_m(t)f_n(t)dt = 0$$

para todo $m \neq n$.

Exemplo 39

Por exemplo, as funções $f(t) = t$ e $g(t) = t^2 + 1$ são ortogonais sobre o intervalo $[-1, 1]$, pois

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} t(t^2+1)dt &= \int_{-1}^{1} (t^3+t)dt \\ &= \left(\frac{t^4}{4} + \frac{t^2}{2}\right)\Bigg|_{-1}^{1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Exemplo 40

O conjunto $S = \{1, \cos t, \operatorname{sen} t\}$ é ortogonal em $[-\pi, \pi]$. (Verifique!!!).

Listaremos a seguir algumas relações de ortogonalidade que serão úteis na sequência. Começamos relembrando da trigonometria elementar as fórmulas para o seno e cosseno da soma e diferença:

$$\begin{aligned}
\text{cosseno da soma:} \quad \cos(u+v) &= \cos u \cos v - \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & (6)\\
\text{seno da soma:} \quad \operatorname{sen}(u+v) &= \operatorname{sen} u \cos v + \operatorname{sen} v \cos u & (7)\\
\text{cosseno da diferença:} \quad \cos(u-v) &= \cos u \cos v + \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v & (8)\\
\text{seno da diferença:} \quad \operatorname{sen}(u-v) &= \operatorname{sen} u \cos v - \operatorname{sen} v \cos u & (9)
\end{aligned}$$

A partir desta fórmulas obtemos as seguintes identidades que são úteis no cálculo de algumas integrais:

$$\begin{aligned}
2\cos u \cos v &= \cos(u+v) + \cos(u-v) & (10)\\
2\operatorname{sen} u \cos v &= \operatorname{sen}(u+v) + \operatorname{sen}(u-v) & (11)\\
2\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v &= acos(u-v) - \cos(u+v) & (12)
\end{aligned}$$

Proposição 6 (Relações de ortogonalidade) *Se m e n são inteiros positivos não nulos, então:*

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi t}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} dt = 0 \qquad (13)$$

$$\int_{-L}^{L} \cos\frac{m\pi t}{L}\cos\frac{n\pi t}{L}dt = \begin{cases} L, & se\ m = n \\ 0, & se\ m \neq n \end{cases} \tag{14}$$

$$\int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{m\pi t}{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt = \begin{cases} L, & se\ m = n \\ 0, & se\ m \neq n \end{cases} \tag{15}$$

A prova destas relações se faz usando as relações trigonométricas 10 acima. Segue da proposição acima que o conjunto

$$S = \{\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi t}{L}, \cos\frac{2\pi t}{L}, \cdots, \cos\frac{n\pi t}{L}, \cdots, \operatorname{sen}\frac{\pi t}{L}, \operatorname{sen}\frac{2\pi t}{L}, \cdots, \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}, \cdots\}$$

é um conjunto ortogonal.

Séries de Fourier

Seja f uma função periódica de período 2L. Suponha que existam constantes $a_0, a_1, \cdots, a_n \cdots, b_1, b_2, \cdots$, tais que

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right)$$

Diremos então que esta série é a **série de Fourier** da função f; as constantes $a_0, a_1, \cdots, a_n \cdots, b_1, b_2, \cdots$, são os coeficientes de Fourier.

Exercício 6 *Se* $f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right)$, *mostre que podemos reescrevê-la sob a forma*

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos \left(\frac{n\pi t}{L} - \theta_n \right)$$

onde $\operatorname{tg} \theta_n = \frac{b_n}{a_n}$, $c_0 = \frac{a_0}{2}$ *e* $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$

Assim, dada uma função periódica de período $2L$ surgem então as seguintes questões:

(i) como determinar os coeficientes de Fourier a_0, a_n e b_n de modo a representar a função f na forma acima?

(ii) que condições devemos impor sobre a função f para que tal representação seja possível?

Determinando os coeficientes de Fourier

Dada uma função periódica de período $2L$, queremos determinar os coeficientes de Fourier para essa função particular. Para atingir tal objetivo utilizaremos as relações de ortogonalidade apresentadas no teorema 6.

Suponha então que a função f admita uma representação em série de Fourier dada por

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right) \qquad (16)$$

- **Determinação de a_0:** integramos ambos os membros da equação 16 no intervalo $[-L, L]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(t)dt &= \frac{1}{2}a_0 \int_{-L}^{L} dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \int_{-L}^{L} \cos\frac{n\pi t}{L}dt + b_n \int_{-L}^{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}dt\right) \\
&= \frac{1}{2}a_0 t\Big|_{-L}^{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{L}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\Big|_{-L}^{L} - b_n \frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{L}\Big|_{-L}^{L}\right) \\
&= a_0 L + \\
&\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \frac{L}{n\pi}(\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen}(-n\pi)) - \right. \\
&\quad \left. b_n \frac{L}{n\pi}(\cos(n\pi) - \cos(-n\pi))\right) \\
&= a_0 L
\end{aligned}$$

Segue daí que

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)dt \tag{17}$$

- **Determinação de a_n:** multiplicamos ambos os membros de 16 por $\cos\frac{m\pi t}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integramos sobre o intervalo $[-L, L]$:

$$\begin{aligned}
\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{m\pi t}{L}dt &= \frac{1}{2}a_0\int_{-L}^{L}\cos\frac{m\pi t}{L}dt + \\
&+ \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-L}^{L}\cos\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}dt + \right. \\
&\left. b_n\int_{-L}^{L}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\cos\frac{m\pi t}{L}dt\right)
\end{aligned}$$

De acordo com o teorema 6 a segunda integral no somatório é nula e a primeira integral é nula para $m \neq n$ e vale L para $m = n$. Observando que a integral $\int_{-L}^{L} \cos \frac{m\pi t}{L} dt = 0$, segue que

$$\int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{m\pi t}{L} dt \quad = \quad a_m L$$

e daí

$$a_n \quad = \quad \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \cos \frac{n\pi t}{L} dt$$

- **Determinação de b_n:** multiplicamos ambos os lados de 16 por sen $\frac{m\pi t}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integramos sobre o intervalo $[-L, L]$; procedendo como anteriormente e utilizando as relaçoes de ortogonalidae do teorema 6 obtemos:

$$b_n \quad = \quad \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} dt$$

Resumindo temos:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}dt, \quad n \geq 0 \tag{18}$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}dt, \quad n \geq 1 \tag{19}$$

Exemplo 41 *Determine a representação em série de Fourier da função onda quadrada mostrada na figura 3.*

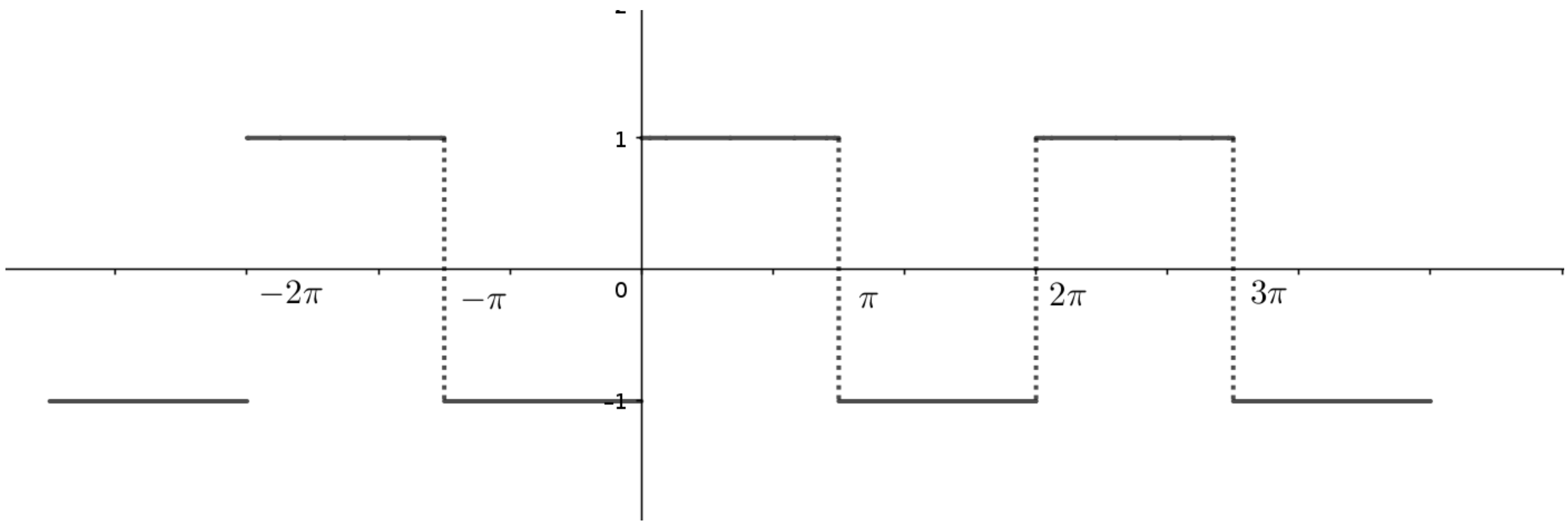

Figura 3: Onda quadrada - período 2π

Solução: O período desta função, chamada de onda quadrada, é 2π; sua forma analítica pode ser dada por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases} , f(t+2\pi) = f(t)$$

Calculando os coeficientes: neste caso, temos $2L = 2\pi$ e portanto $L = \pi$

- **Cálculo de a_0:** usando a equação 17 temos:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)dt + \int_{0}^{\pi} 1dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-t|_{-\pi}^{0} + t|_{0}^{\pi}\right) \\
&= \frac{1}{\pi}(-\pi + \pi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

- **Cálculo de a_n**: usando a equação 18 temos:

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\frac{n\pi t}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\ dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\cos nt\ dt + \int_{0}^{\pi} \cos nt\ dt\right] \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen} nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{n\pi}\left[\operatorname{sen} nt\right]_{0}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{n\pi}\left(\operatorname{sen} 0 - \operatorname{sen}(-n\pi)\right) + \frac{1}{n\pi}\left(\operatorname{sen}(n\pi) - \operatorname{sen} 0\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

- **Cálculo de b_n**: usando a equação 19 temos:

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{sen}\,nt\;dt \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -\mathrm{sen}\,nt\;dt + \int_{0}^{\pi}\ \mathrm{sen}\,nt\;dt\right] \\
&= \frac{1}{n\pi}\left[\cos nt\right]_{-\pi}^{0} - \frac{1}{n\pi}\left[\cos nt\right]_{0}^{\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}\left(\cos 0 - \cos(-n\pi)\right) - \frac{1}{n\pi}\left(\cos(n\pi) - \cos 0\right) \\
&= \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi))
\end{aligned}
$$

Mas, se n é par temos $\cos(n\pi) = 1$ e se n é ímpar, temos $\cos(n\pi) = -1$. Assim, devemos ter

$$b_n = \begin{cases} 0, & \text{se n é par} \\ \frac{4}{n\pi}, & \text{se n é ímpar} \end{cases}$$

Assim, a expansão da série de Fourier de f é dada por

$$f(t) \sim b_1 \operatorname{sen} t + b_3 \operatorname{sen} 3t + b_5 \operatorname{sen} 5t + b_7 \operatorname{sen} 7t \cdots$$

isto é

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \operatorname{sen} t + \frac{4}{3\pi} \operatorname{sen} 3t + \frac{4}{5\pi} \operatorname{sen} 5t + \frac{4}{7\pi} \operatorname{sen} 7t \cdots$$

ou reescrevendo na forma de somatório

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}(2k+1)t}{2k+1}$$

Exemplo 42 *Determine a representação em série de Fourier da função onda triangular mostrada na figura 4.*

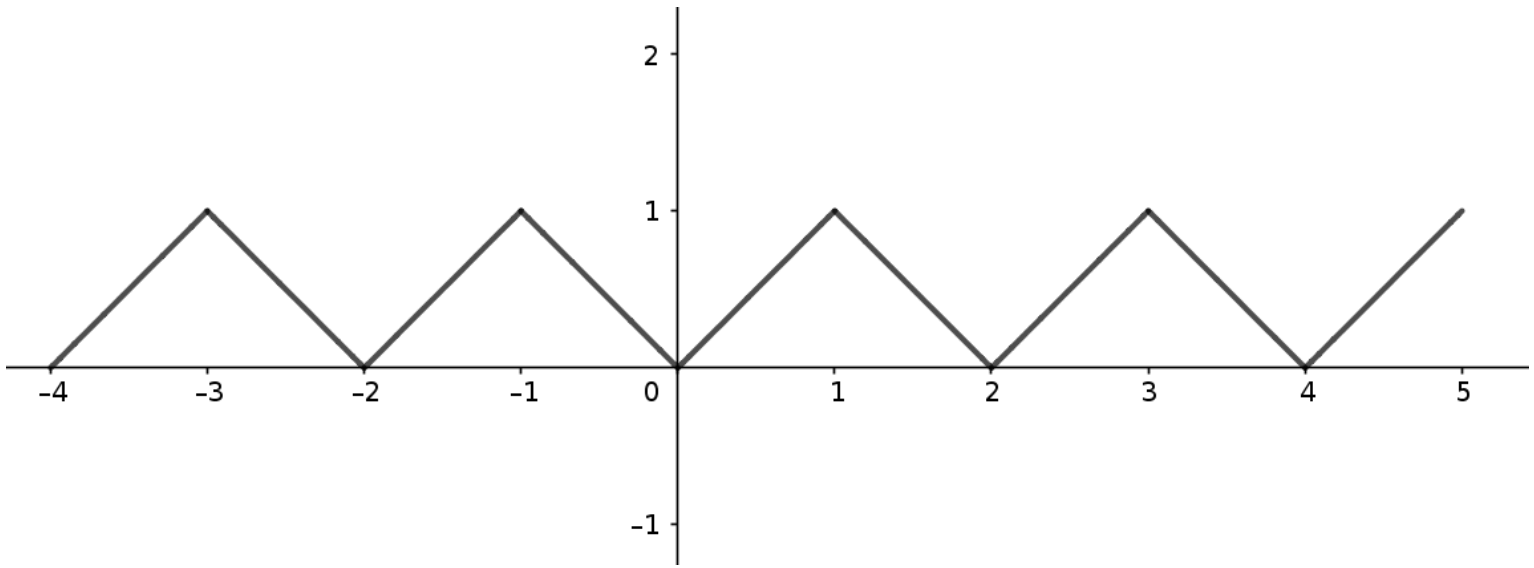

Figura 4: Onda triangular - período 2

Solução:

A série de Fourier de f é dada por

$$f(t) \sim \frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{(2k+1)^2}$$

Condições para convergência da série de Fourier

Dada uma função periódica de período 2L, vimos na seção anterior como calcular os coeficientes de Fourier de modo a obter a série de Fourier de f, e podemos então escrever

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right) \tag{20}$$

e isso significa que a expressão do lado direito é a série de Fourier de f. No que segue estabeleceremos condições para que a série de Fourier 20 convirja para a própria função f, isto é, para que a função f seja igual à sua série de Fourier.

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita seccionalmente contínua (ou contínua por partes) se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades (todas de primeira espécie) em qualquer intervalo limitado. Em outras palavras, dados $a < b$, exitem $a \leq a_1 \leq a_2 \leq \cdots \leq a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada intervalo aberto (a_j, a_{j+1}), $j = 1, 2, \cdots, n-1$, e existem os limites laterais

$$\lim_{t \to a_j^+} f(t) = f(a_j+) \quad \text{e} \quad \lim_{t \to a_j^-} f(t) = f(a_j-)$$

É claro que toda função contínua é seccionalmente contínua. A função $f(t) = \frac{1}{t}$, $t \neq 0$, não é seccionalmente contínua pois sua descontinuidade em $x = 0$ é de segunda espécie (neste caso $\lim_{t \to 0} f(t) = \infty$).

Exemplo 43 *As seguintes funções são seccionalmente contínuas (ou contínuas por partes).*

1. A função *sinal* de x, definida por

$$sign(t) = \begin{cases} +1, & \text{se} \quad t > 0 \\ 0, & \text{se} \quad t = 0 \\ -1, & \text{se} \quad t < 0 \end{cases}$$

2. A função da onda quadrada do exemplo **??** dada por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & , \quad -\pi \leq t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \leq t < \pi \end{cases} \quad , f(t + 2\pi) = f(t)$$

3. A função da onda triangular do exemplo **??** dada por

$$f(t) = \begin{cases} -t & , \quad -1 \leq t < 0 \\ t & , \quad 0 \leq t < 1 \end{cases} \quad , f(t + 2) = f(t)$$

O próximo teorema estabelece condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f.

Teorema 12 (Teorema de Fourier) *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ contínua por partes tal sua derivada f' também é contínua por partes . Então a série de Fourier de $f(t)$ converge, em* *cada valor de t, para* $\frac{1}{2}(f(t+)+f(t-))$. *Em outras palavras:*

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L}+b_n\,\mathrm{sen}\,\frac{n\pi t}{L}\right)=\begin{cases} f(t) & \text{se } f \text{ é contínua em } t \\ \frac{f(t+)+f(t-)}{2} & \text{se } f \text{ é descontínua em } t \end{cases} \tag{21}$$

Exemplo 44

A função da onda quadrada do exemplo **??** dada por

$$f(t)=\begin{cases} -1 & , \quad -\pi \le t < 0 \\ 1 & , \quad 0 \le t < \pi \end{cases} \;, f(t+2\pi)=f(t)$$

satisfaz as condições do teorema de Fourier; assim, em todos os pontos t onde f é contínua podemos escrever

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{sen}\,(2k+1)t}{2k+1}$$

Observe que para $t = 0$, f é descontínua e $f(0+) \lim_{t\to 0^+} f(t) = 1$ e $f(0-) = \lim_{t\to 0^-} f(t) = -1$; logo para $t = 0$, a série acima converge para $\frac{1}{2}[f(0+) + f(0-)] = \frac{1}{2}[1 + (-1)] = 0$.

Exemplo 45 *Use a série do exemplo anterior para obter uma expressão em série para π.*

Solução: No ponto $t = \pi/2$ a função f é contínua, logo sua série de Fourier será igual a 1, em $t = \pi/2$:

$$1 = f(\pi/2) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\,\mathrm{sen}\,(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

e daí

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\,\mathrm{sen}\,(2k+1)\frac{\pi}{2}$$

ou seja

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}$$

que é conhecida como **série de Leibniz**.

Exemplo 46 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função $2\pi-$periódica e tal que $f(t) = t^2$, para $0 < t < \pi$.*

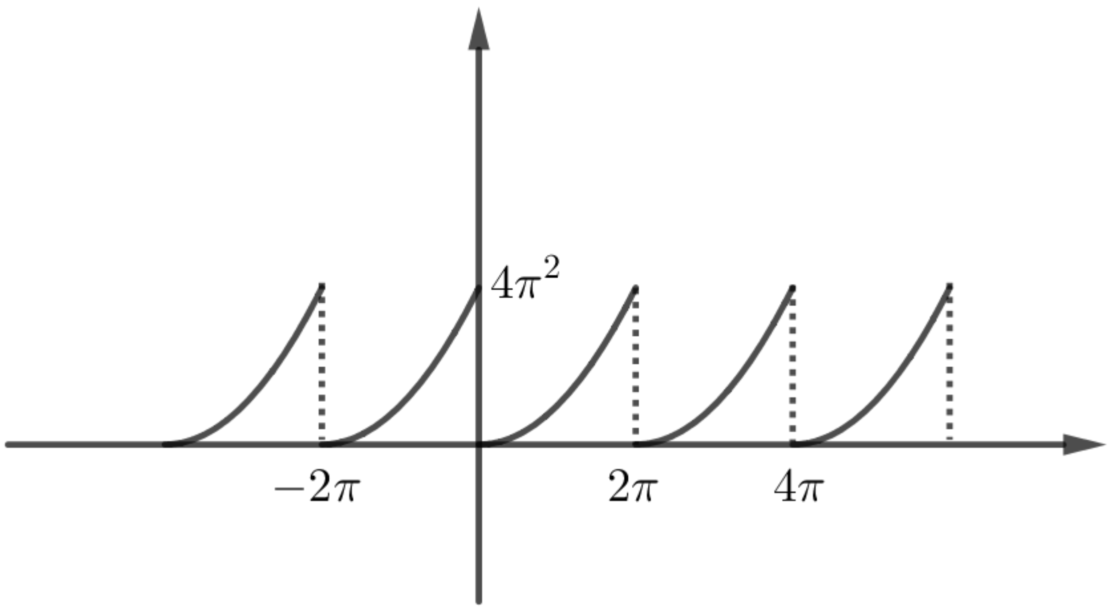

Figura 5

A série de Fourier de f será dada por

$$f(t) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Para calcular os coeficientes a_n deveríamos calcular a integral

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)dt$$

Como $f(t) = t^2$, para $0 < t < \pi$, mas tem uma definição diferente para $-\pi < t < 0$, teríamos que decompor esta integral na soma de duas integrais, uma para t entre 0 e π e outra para t entre $-\pi$ e 0. Ao invés disso, fica mais fácil deslocar o intervalo e calcular

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos(nt)dt$$