Equações diferenciais lineares

Antonio Carlos Nogueira

1 Equações diferenciais lineares de ordem superior

Nesta seção faremos uma discussão sobre equações diferenciais de ordem superior, começando com a noção de problema de valor inicial. Nossa atenção porém será concentrada nas equações lineares (mais precisamente as de segunda ordem)

1.1 Problema de valor inicial e prblema de valor de contorno

Problema de valor de contorno

Para uma equação diferencial (linear) de ordem n o problema

$$\begin{aligned} Resolva: &\quad a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ Sujeito\ \ a: &\quad y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1} \end{aligned} \tag{1}$$

onde $y_0, y_1, \cdots, y_{n-1}$ são constantes arbitrárias, é chamado **prob lema de valor inicial**. Os valores específicos $y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y_1, \cdots, y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}$ são chamados **condições iniciais**. Procuramos solução em algum intervalo I contendo x_0.

No caso de uma equação linear de segunda ordem, uma solução para o problema de valor inicial

$$a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \quad y(x_0) = y_0, y'(x_1) = y_1,$$

é uma função $\phi(x)$ definida em algum intervalo I contendo x_0 e que satisfaça a equação e as condições iniciais, ou seja,

$$a_2(x)\phi''(x) + a_1(x)\phi'(x) + a_0(x)\phi(x) = g(x) \quad \text{e} \quad \phi(x_0) = y_0, \phi'(x_0) = y_1.$$

Teorema 1 (Existência e unicidade) *Sejam* $a_0(x), a_1(x), \cdots, a_n(x)$ *e* $g(x)$ *funções contínuas em um intervalo* I *com* $a_n(x) \neq 0$ *para todo* $x \in I$. *Se* $x = x_0$ *é algum ponto deste intervalo, então existe uma única solução* $y(x)$ *para o problema de valor inicial (1) neste intervalo.*

Exemplo 1

Verifique que a função $y = 3e^{2x} + e^{-2x} - 3x$ é uma solução para o problema de valor inicial

$$y'' - 4y = 12x, \;\; y(0) = 4, \;\; y'(0) = 1.$$

Como a equação diferencial é linear e os coeficientes bem como $g(x) = 12x$ são funções contínuas e $a_2(x) = 1 \neq 0$ em qualquer intervalo contendo $x = 0$, segue do teorema 1 que a função dada é a única solução do PVI. $\square$

Exemplo 2

A função $y = \frac{1}{4}\operatorname{sen} 4x$ é uma solução para o PVI

$$y'' + 16y = 0, \;\; y(0) = 0, \; y'(0) = 1.$$

Segue-se do terorema 1 que, em qualquer intervalo contendo $x = 0$, a solução é única. $\square$

Observação 1 *A continuidade das funções $a_i(x)$, $i = 0, 1, \cdots, n$ e a hipótese $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ são ambas importantes. Especificamente, se $a_n(x) = 0$ para algum x no intervalo, então a solução oara um PVI linear pode não ser única ou nem existir.*

Exemplo 3 *Verifique que a função $y = cx^2 + x + 3$ é uma solução para o PVI*

$$xy'' - 2xy' + 2y = 6, \;\; y(0) = 3, \; y'(0) = 1,$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$ para qualquer escolha do parâmetro c.

Solução: Como $y' = 2cx + 1$ e $y'' = 2c$, segue que

$$\begin{aligned} x^2y'' - 2xy' + 2y &= x^2(2c) - 2x(2cx + 1) + 2(cx^2 + x + 3) \\ &= 2cx^2 - 4cx^2 - 2x + 2cx^2 + 2x + 6 \\ &= 6 \end{aligned}$$

E ainda temos:

$$\begin{aligned} y(0) &= c(0)^2 + 0 + 3 = 3 \\ y'(0) &= 2c(0) + 1 = 1 \end{aligned}$$

Problema de valor de contorno

Um outro tipo de problema consiste em resolver uma equação diferencial de ordem dois ou maior na qual a variável dependente y ou suas derivadas são especificadas em pontos diferentes. Um problema como

$$\begin{aligned} &\textit{Resolva}: \quad a_2(x)\frac{d^2y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \\ &\textit{Sujeito a}: \quad y(a) = y_0, y(b) = y_1, \end{aligned}$$

é chamado de **problema de valor de contorno**. Os valores especificados $y(a) = y_0$ e $y(b) = y_1$ são chamados de **condições de contorno** ou **condições de fronteira**. Uma solução para tal problema é uma função que satisfaça a equação diferencial em algum intervalo I, contendo a e b, cujo gráfico passe pelos pontos (a, y_0) e (b, y_1).

Em contraste com a situação para problemas de valor inicial, um problema de valor de contorno pode ter

(i) várias soluções

(ii) uma única solução

(iii) nenhuma solução

Exemplo 4 *A solução geral para a equação*

$$y'' + 16y = 0$$

é dada por

$$y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x.$$

Detereminar a solução para esta equação que satisfaça as condições de contorno

$$y(0) = 0, y(\pi/2) = 0.$$

Solução: A primeira condição $y(0) = 0$ nos dá

$$0 = c_1 \cos 0 + c_2 \operatorname{sen} 0$$

ou seja

$$c_1 = 0.$$

Logo, $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$. Usando a segunda condição $y(\pi/2) = 0$, obtemos

$$0 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi,$$

e como $\operatorname{sen} 2\pi = 0$, esta condição é satisfeita com qualquer escolha de c_2. Assim, uma solução para o problema

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0,$$

é a família a um parâmetro

$$y = c_2 \operatorname{sen} 4x.$$

Assim, existe uma infinidade de soluções satisfazendo o dado problema de valor de contorno.

Exemplo 5 *O problema de valor de contorno*

$$y'' + 16y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi/2) = 1,$$

não possui solução na família $y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x$.

Solução: De fato, como no exemplo anterior, a condição $y(0) = 0$ imnplica que $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$; e a segunda condição, quando aplicada, nos dá $1 = c_2 \operatorname{sen} 2\pi = 0$ o que é absurdo.

Exercícios

1. Sabendo que $y = c_1 e^x + c_2 e{-}x$ é uma família a dois parâmetros de soluções para $y'' - y = 0$ (no intervalo $(-\infty, \infty)$), encontre um membro dessa família satisfazendo as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

2. Encontre uma solução para a equação diferencial do Problema 1 satisfazendo as condições $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

3. Sabe-se que $c)1e^x \cos x + c_2 e^x \operatorname{sen} x$ é uma família a dois parâmetros de soluções para a equação $y'' - 2y' + 2y = 0$ em $\mathbb{R}$. Determine, se existir, um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais dadas:
   (a) $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.
   (b) $y(0) = 1$, $y(\pi) = -1$.
   (c) $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 1$.
   (d) $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$.

4. Sabe-se que $y = c_1 x^2 + c_2 x^4 + 3$ é uma família a dois parâmetros de soluções para a equação $x^2 y'' - 5xy' + 8y = 24$ em $\mathbb{R}$. Encontre, se existir, um membro dessa família que satisfaça as condições iniciais dadas:
   (a) $y(-1) = 0$, $y(1) = 4$.
   (b) $y(0) = 1$, $y(1) = 2$.
   (c) $y(0) = 3$, $y(1) = 0$.
   (d) $y(0) = 3$, $y(2) = 15$.

1.2 Dependência e independência linear

Os conceitos de dependência e independência linear são fundamentais para o estudo de equações diferenciais lineares.

Definição 1 (Dependência linear) *Dizemos que um conjunto de funções* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *é* ***linearmente dependente (LD)*** *em um intervalo* I *se existem constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *não todas nulas, tais que*

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0$$

para todo x *no intervalo.*

Definição 2 (Independência linear) *Dizemos que um conjunto de funções* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *é* ***linearmente independente (LI)*** *em um intervalo* I *se ele não é linearmente dependente.*

Em outras palavras, um conjunto de funções é linearmente independente em um intervalo se as únicas constantes para as quais

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0,$$

para todo x no intervalo, são $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$.

No caso $n = 2$, duas funções $f_1(x)$ e $f_2(x)$ são LD em um intervalo I se existem constantes, que não são ambas nulas, tais que, para todo $x \in I$,

$$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0.$$

Assim, se por exemplo, $c_1 \neq 0$, segue que

$$f_1(x) = -\frac{c_2}{c_1} f_2(x);$$

ou seja, uma é múltipla da outra. Reciprocamente, se $f_1(x) = c f_2(x)$ para alguma constante c, então

$$1 \cdot f_1(x) - c f_2(x) = 0$$

para todo x em algum intervalo I, ou seja, as funções são LD.

Concluímos asssim que duas funções são linearmente independentes quando nenhuma delas é múltipla da outra em qualquer intervalo.

Exemplo 6 *As funções* $f_1(x) = \operatorname{sen} 2x$ *e* $f_2(x) = \operatorname{sen} \cos x$ *são linearmente dependentes em* $(-\infty, \infty)$ *pois*

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} \cos x.$$

Exercício 1 *Mostre que as funções* $f_1(x) = \cos^x$, $f_2(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $f_3(x) = \sec^2 x$, $f_4(x) = \operatorname{tg}^2 x$ *são linearmente dependentes no intervalo* $(\pi/2, \pi/2)$.

O wronskiano

O próximo teorema proporciona uma condição suficiente para a independência linear de n funções em um dado intervalo.

Teorema 2 (Critério para independência linear de funções) *Suponha que as funções* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *sejam diferenciáveis pelo menos* $n-1$ *vezes. Se o determinante*

$$\begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

for diferente de zero em pelo menos um ponto do intervalo I*, então as funções* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *serão linearmente independentes em* I*.*

O determinante do teorema anterior é denotado por

$$W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x))$$

e é chamado o **Wronskiano** das funções.

Corolário 2.1 *Se* $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)$ *são diferenciáveis pelo menos* $n-1$ *vezes e são linearmente dependentes em* I*, então*

$$W(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x)) = 0$$

para todo x *em* I*.*

Exemplo 7 *As funções* $f_1(x) = \operatorname{sen}^2 x$ *e* $f_2(x) = 1 - \cos 2x$ *são linearmente dependentes em* $\mathbb{R}$ *(Por quê?) Pelo corolário anterior, devemos ter* $W(\operatorname{sen}^2 x, 1-\cos 2x) = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}$*. De fato:*

$$
\begin{aligned}
W(\operatorname{sen}^2 x, 1-\cos 2x) &= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1-\cos 2x \\ 2\operatorname{sen} x\cos x & 2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} \\
&= \\
&= \begin{vmatrix} \operatorname{sen}^2 x & 1-\cos 2x \\ \operatorname{sen} 2x & 2\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} \\
&= \\
&= 2\operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2x\cos 2x \\
&= \operatorname{sen} 2x(2\operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos 2x) \\
&= \operatorname{sen} 2x(2\operatorname{sen}^2 x - 1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \\
&= \operatorname{sen} 2x(\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x - 1) = 0
\end{aligned}
$$

Aqui usamos as identidades trigonométricas $\operatorname{sen} 2x = 2\operatorname{sen} x\cos x$*,* $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$ *e* $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$*.*

Exemplo 8 *As funções* $f_1(x) = e^{mx}$ *e* $f_2(x) = e^{nx}$*,* $m \neq n$*, são linearmente independentes.*

Solução: De fato, o wronskiano é dado por

$$
\begin{aligned}
W(e^{mx}, e^{nx}) &= \begin{vmatrix} e^{mx} & e^{nx} \\ me^{mx} & ne^{nx} \end{vmatrix} \\
&= ne^{nx}e^{mx} - me^{mx}e^{nx} \\
&= ne^{(m+n)x} - me^{(m+n)x} \\
&= (n-m)e^{(m+n)x} \neq 0
\end{aligned}
$$

para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, f_1 e f_2 são linearmente independentes em qualquer intervalo da reta real.

Exemplo 9 *Dados os números reais alpha e* β*, com* $\beta \neq 0$*, verifique que as funções* $y_1 = e^{\alpha x}\cos\beta x$ *e* $y_2 = e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ *são linearmente independentes em qualquer intervalo da reta real.*

Exemplo 10 *As funções $f_1(x) = e^x$, $f_2(x) = xe^x$ e $f_3(x) = x^2e^x$ são linearmente independentes em qualquer intervalo da reta real pois*

$$\begin{aligned} W(e^x, xe^x, x^2e^x) &= \begin{vmatrix} e^x & xe^x & x^2e^x \\ e^x & xe^x + x & x^2e^x + 2xe^x \\ e^x & xe^x + 2e^x & x^2e^x + 4xe^x + 2e^x \end{vmatrix} \\ &= 2e^{3x} \end{aligned}$$

não se anula para nenhum valor de x.

Exercícios

1. Verifique se as funções dadas são linearmente dependentes ou linearmente independentes em $\mathbb{R}$.

   (a) $f_1(x) = x, f_2(x) = x^2, f_3(x) = 4x - 3x^2$

   (b) $f_1(x) = 0, f_2(x) = x, f_3(x) = e^x$

   (c) $f_1(x) = 5, f_2(x) = \cos^2 x, f_3(x) = \operatorname{sen}^2 x$

   (d) $f_1(x) = \cos 2x, f_2(x) = 1, f_3(x) = \cos^2 x$

   (e) $f_1(x) = x, f_2(x) = x - 1, f_3(x) = x + 3$

   (f) $f_1(x) = 2 + x, f_2(x) = 2 + |x|$

   (g) $f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$

   (h) $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{-x}, f_3(x) = \operatorname{senh} x$

2. Mostre, calculando o wronskiano, que as funções dadas são linearmente independentes.

   (a) $f_1(x) = x^{1/2}, f_2(x) = x^2$, em $\mathbb{R}$

   (b) $f_1(x) = 1 + x, f_2(x) = x^3$, em $\mathbb{R}$

   (c) $f_1(x) = \operatorname{sen} x, f_2(x) = \operatorname{cosec} x$, em $(0, \pi)$

   (d) $f_1(x) = e^x, f_2(x) = e^{-x}, f_3(x) = e^{4x}$, em $\mathbb{R}$

   (e) $f_1(x) = x, f_2(x) = x \ln x, f_3(x) = x^2 \ln x$, em $(0, \infty)$

1.3 Soluções para equações lineares homogêneas

Uma equação diferencial linear de ordem n da forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \tag{2}$$

é chamada de equação **homogênea**, enquanto

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{3}$$

com $g(x)$ não identicamente nula, é chamada de **não homogênea**.

Exemplo 11 *A equação $2y'' + 3y' - 5y = 0$ é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea.*

Exemplo 12 *A equação $xy'''2xy'' + 5y' + 6y = e^x$ é uma equação diferencial ordinária linear de terceira ordem não homogênea.*

Veremos nas próximas seções que, para resolver uma equação não homogênea (3) devemos primeiro resolver equação homogênea associada (2).

Princípio da superposição

Daqui por diante, para evitar repetições desnecessárias, faremos sempre as mesmas suposições com relação às equações lineares (2) e (3). Em algum intervalo I,

- os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ são funções contínuas;
- a função $g(x)$ é contínua;
- $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

O próximo teorema nos diz que a soma, ou **superposição**, de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução

Teorema 3 (Princípio da superposição-equações homogêneas) *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de ordem n e homogênea (2) em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ky_k,$$

onde os c_i, $i = 1, 2, \cdots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo I.

Prova. Faremos a prova para o caso $n = k = 2$. Sejam $y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0.$$

Definindo $y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, temos

$$a_2(x)[c_1y_1'' + c_2y_2''] + a_1(x)[c_1y_1' + c_2y_2'] + a_0(x)[c_1y_1 + c_2y_2]$$

$$= c_1[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1] + c_2[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]$$

$$= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

□

Corolário 3.1 *(i) Um múltiplo $y = c_1y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea também é uma solução.*

(ii) Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial $y = 0$.

Exemplo 13 *As funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são soluções para a equação homogênea de terceira ordem*

$$x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$$

no intervalo $(0, \infty)$. Pelo princípio da superposição, a combinação linear

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x$$

também é uma solução para a equação no mesmo intervalo.

Exemplo 14 *As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$ satisfazem a equação homogênea*

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2}11\frac{dy}{dx} - 6y = 0$$

em $\mathbb{R}$. Logo,

$$y = c_1e^x + c^2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

também é solução.

Soluções linearmente independentes

Nosso objetivo agora é determinar quando n soluções $y_1, y_2, \cdots, y_n$ para a equação diferencial homogênea 2 são linearmente independentes.

Teorema 4 (Critério para independência linear de soluções) *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$, n soluções para a equação diferencial linear homogênea 2 em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se, e somente se,*

$$W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0$$

para todo $x \in I$.

Do teorema acima segue que quando $y_1, y_2, \cdots, y_n$ são n soluções para a equação (2) em um intervalo I, o Wronskiano é identicamente nulo ou nunca se anula no intervalo.

Definição 3 (Conjunto fundamental de soluções) *Qualquer conjunto $y_1, y_2, \cdots, y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea 2 em um intervalo I é chamado de* ***conjunto fundamental de soluções*** *no intervalo I.*

Teorema 5 *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea (2) em um intervalo I. Então, qualquer solução $Y(x)$ para (2) é uma combinação linear das n soluções linearmente independentes $y_1, y_2, \cdots, y_n$, ou seja, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$, tais que*

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Prova:

O seguinte teorema responde a questão básica de existência de um conjunto fundamental de soluções para uma equação linear. Sua demonstração é consequência do teorema 1.

Teorema 6 *Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea (2) em um intervalo I.*

Com base nos teoremas 5 e 6 podemos fazer a seguinte definição.

Definição 4 (Solução geral - equações homogêneas) *Sejam* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ n *soluções linearmente independentes para a equação diferencial homogênea (2) em um intervalo* I. *A* ***solução geral*** *para a equação no intervalo* I *é dada por*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x),$$

onde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ *são constantes arbitrárias.*

Exemplo 15

A equação de segunda ordem $y'' - 9y = 0$ possui duas soluções

$$y_1(x) = e^{3x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-3x}.$$

Como

$$W(e^{3x}, 3^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para todo valor de x, segue que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. Assim, a solução geral para a equação diferencial é dada por

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x}.$$

□

Exemplo 16

As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ satisfazem a equação de terceira ordem (Verifique!!!)

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

Como

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor de x, segue que y_1, y_2 e y_3 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. Concluimos que

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

é a solução geral para a equação diferencial.

Exercícios

1. (a) Verifique que $y = 1/x$ é uma solução para a equação diferencial não linear $y'' = 2y^3$ no intervalo $(0, \infty)$
   (b) Mostre que $y = c/x$ não é solução para a equação quando $c \neq 0, 1, -1$.

2. Dada a equação não linear $y'' + (y')^2 = 0$:
   (a) Verifique que $y_1 = 1$ e $y_2 = \ln x$ são soluções da equação n o intervalo $(0, \infty)$;
   (b) $y_1 + y_2$ é uma solução para a equação?
   (c) $c_1 y_1 + c_2 y_2$, c_1 e c_2 constantes arbitrárias, é uma solução para a equação?

3. Verifique que as funções dadas formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo indicado. Forme a solução geral em cada caso.
   (a) $y'' - y' - 12y = 0$; e^{-3x}, e^{4x}, $(-\infty, \infty)$
   (b) $y'' - 4y = 0$; $\cosh 2x$, $\operatorname{senh} 2x$, $(-\infty, \infty)$
   (c) $y'' - 2y' + 5y = 0$; $e^x \cos 2x$, $e^x \operatorname{sen} 2x$, $(-\infty, \infty)$
   (d) $4y'' - 4y' + y = 0$; $e^{x/2}$, $xe^{x/2}$, $(-\infty, \infty)$
   (e) $x^2 y'' - 6xy' + 12y = 0$; x^3, x^4, $(0, \infty)$
   (f) $x^3 y''' + 6x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0$, x, x^{-2}, $x^{-2} \ln x$, $(0, \infty)$

4. Considere a equação diferencial de segunda ordem

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \quad (4)$$

onde $a_2(x), a_1(x)$ e $a_0(x)$ são contínuas em um intervalo I e $a_2(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Pelo teoream de existência e unicidade existe uma única solução y_1 para a equação satisfazendo as condições $y(x_0) = 1$ e $y'(x_0) = 0$, onde $x_0 \in I$. Da mesma forma, existe uma única solução y_2 para a equação que satisfaz as condições $y(x_0) = 0$ e $y'(x_0) = 1$. Mostre que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial no intervalo I.

5. Sejam y_1 e y_2 duas soluções para a equação 4.
   (a) Se $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2, mostre que

$$a_2(x)\frac{dW}{dx} + a_1(x)W = 0.$$

   (b) Deduza a **fórmula de Abel**

$$W = ce^{-\int \frac{a_1(x)}{a_2(x)} dx}$$

   onde c é uma constante.
   (c) Usando uma forma alternativa da fórmula de Abel

$$W = ce^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt},$$

   para $x_0 \in I$, mostre que

$$W(y_1, y_2) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} \frac{a_1(t)}{a_2(t)} dt}.$$

   (d) Mostre que, se $W(x_0) = 0$, então $W = 0$ para todo $x \in I$, enquanto que se $W(x_0) \neq 0$, então $W \neq 0$ para todo $x \in I$.

O método da redução de ordem

Um dos fatos mais interessantes no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem é que podemos construir uma segunda solução a partir de uma solução conhecida. O método da redução de ordem é um método para converter uma equação diferencial linear para uma equação diferencial linear de ordem inferior e, em seguida construir a solução geral da equação original usando a solução geral da equação de ordem inferior.

Primeiramente, vamos considerar um exemplo bem simples. Depois generalizaremos. É fácil ver que a função $y_1(x) = e^x$ é uma solução da equação $y'' - y = 0$. Vamos tentar uma solução da forma $y = u(x)e^x$ então:

$$y' = ue^x + u'e^x$$

$$y'' = ue^x + 2u'e^x + u''e^x$$

e assim

$$y'' - y = 2u'e^x + u''e^x = e^x(u'' + 2u') = 0$$

Como $e^x \neq 0$, segue que $u'' + 2u' = 0$.

Fazendo a substituição $w = u'$, a equação resultante será uma equação linear de primeira ordem em w, dada por

$$w' + 2w = 0.$$

Multiplicando esta equação pelo respectivo fator integrante, que nesse caso é e^{2x}, obtemos

$$e^{2x}w' + 2we^{2x} = 0$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}w) = 0$$

Segue daí que

$$w = c_1e^{-2x} \quad \text{ou} \quad u' = c_1e^{-2x}$$

Integrando obtemos

$$u = -\frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2$$

e assim

$$y = u(x)e^x = -\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2e^x.$$

Escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = -2$, obteemos a segunda solução $y_2 = e^{-x}$. Como $W(e^x, e^{-x}) = -2 \neq 0$, para todo x, as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$. Logo, as solução geral da equação é a dada por y, ou seja,

$$y = c_1e^{-x} + c_2e^x.$$

Exemplo 17 *Sabendo que $y_1 = x^3$ é uma solução para a equação $x^2y'' - 6y = 0$, use redução de ordem para encontrar uma segunda solução no intervalo $(0, \infty)$.*

Solução: Defina $y = u(x)x^3$. Assim

$$\begin{aligned} y' &= x^3u' + 3x^2u \\ y'' &= x^3u'' + 6x^2u' + 6xu \\ x^2y'' - 6y &= x^2(x^3u'' + 6x^2u' + 6xu) - 6ux^3 \\ &= x^5u'' + 6x^4u' = 0 \end{aligned}$$

de modo que $u(x)$ deve ser uma solução para a equação

$$x^5u'' + 6x^4u' = 0 \quad \text{ou} \quad u'' + \frac{6}{x}u' = 0.$$

Fazendo $w = u'$, obtemos a equação linear de primeira ordem

$$w' + \frac{6}{x}w = 0;$$

o fator integrante para esta equação é dado por

$$e^{\int(6/x)dx} = e^{6\ln x} = x^6.$$

Multiplicando a equação por x^6 obtemos

$$x^6w' + 6x^5w = 0$$

ou seja

$$d(x^6w) = 0$$

e daí

$$x^6w = c_1.$$

Segue que

$$w = u' = \frac{c_1}{x^6}$$

e portanto

$$u = -\frac{c_1}{5x^5} + c_2.$$

Assim

$$y = u(x)x^3 = -\frac{c_1}{5x^2} + c_2x^3.$$

Escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = -5$, obtemos a segunda solução $y_2 = \frac{1}{x^2}$.

Caso geral

Dada a equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0. \tag{5}$$

Vamos supor que as funções $a_i(x)$ são contínuas e que $a_2(x) \neq 0$, para todo x em um intervalo I. Dividindo a equação 5 por $a_2(x)$, esta toma a forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{6}$$

onde $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas em algum intervalo I. Suponha que $y_1(x)$ é uma solução conhecida da equação 20 em I e que $y_1(x) \neq 0$, para todo $x \in I$. Definindo a nova solução como $u(x)y_1(x)$, segue que

$$y' = uy_1' + y_1u'$$

$$y'' = uy_1'' + 2y_1'u' + y_1'u''$$

$$y'' + Py' + Qy = u(y_1'' + Py_1' + Qy_1) + y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

e como y_1 é solução resulta daí que

$$y_1u'' + (2y_1' + Py_1)u' = 0$$

e fazendo $w = u'$ obtemos

$$y_1w' + (2y_1' + Py_1)w = 0, \tag{7}$$

que é uma equação linear e separável. Aplicando esta última técnica obtemos

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{w} + 2\frac{y_1'}{y_1}dx + Pdx &= 0 \\
\ln|w| + 2\ln|y_1| &= -\int Pdx + c \\
\ln|wy_1^2| &= -\int Pdx + c \\
wy_1^2 &= c_1e^{-\int Pdx} \\
w &= u' = c_1\frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}.
\end{aligned}$$

Integrando novamente, obtemos

$$u = c_1\int \frac{e^{-\int Pdx}}{y_1^2}dx + c_2,$$

e portanto

$$y = u(x)y_1(x) = c_1y_1(x)\int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)}dx + c_2y_1(x).$$

Escolendo $c_2 = 0$ e $c_1 = 1$, concluimos que uma segunda solução para a equação 20 é

$$y_2(x) = y_1(x) \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{y_1^2(x)} dx \tag{8}$$

Resta verificar que y_1 e y_2 são linearmente independentes. Para isto basta verificar que o wronskiano $W(y_1, y_2) \neq 0$; mas

$$W(y_1, y_2) = e^{-\int P(x)dx} \quad \text{(Verifique!!!)}$$

que é diferente de zero em qualquer intervalo em que $y_1(x) \neq 0$.

Exemplo 18 *Sabendo que a função $y_1 = x^2$ é uma solução para $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$, encontre a solução geral no intervalo* $(0, \infty)$.

Solução: Dividindo por x^2 a equação pode ser escrita na forma

$$y'' - \frac{3}{x}y' + \frac{4}{x^2}y = 0,$$

onde identificamos $P(x) = -\frac{3}{x}$; daí

$$\int P(x)dx = -3\int \frac{dx}{x} = -3\ln|x| = \ln|x^{-3}|$$

assim uma segunda solução para a equação será dada por

$$\begin{aligned} y_2 &= x^2 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{x^4} dx \\ &= x^2 \int \frac{e^{-\ln|x^{-3}|}}{x^4} dx \\ &= x^2 \int \frac{x^3}{x^4} dx \\ &= x^2 \int \frac{dx}{x} \\ &= x^2 \ln x \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação em $(0, \infty)$ será dada por

$$y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln x.$$

$\square$

Exercícios

1. Encontre uma segunda solução para as equações abaixo usando o método da redução de ordem ou a fórmula deduzida na aula.

   (a) $x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$, $y_1(x) = x^{-1}$ Resp: $y_2 = \frac{\ln x}{x}$

   (b) $(x-1)y'' - xy' + y = 0$, $x > 1$, $y_1(x) = e^x$ Resp: $y_2 = x$

   (c) $y'' + 5y' = 0$, $y_1 = 1$, Resp: $y_2 = -\frac{1}{5}e^{-5x}$

   (d) $y'' - y' = 0$, $y_1 = 1$, Resp: $y_2 = e^x$

   (e) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{2x}$, Resp: $y_2 = xe^{2x}$

   (f) $y'' + 16y = 0$, $y_1 = \cos 4x$, Resp: $y_2 = \operatorname{sen} 4x$

   (g) $y'' - y = 0$, $y_1 = \cosh x$, Resp: $y_2 = \cosh x\left(\frac{\ln(1+e^x)+1}{1+e^x}\right)$

   (h) $9y'' - 12y' + 4y = 0$, $y_1 = e^{\frac{2}{3}x}$, Resp: $y_2 = xe^{\frac{2}{3}x}$

   (i) $x^2y'' - 7xy' + 16y = 0$, $x > 0$, $y_1 = x^4$, Resp: $y_2 = x^4 \ln x$

   (j) $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, $y_1 = x^2 + x^3$, Resp: $y_2 = x^2$

2 Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes

Nesta seção consideraremos equações lineares homogêneas com coeficientes constantes, ou seja, equações da forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são constantes arbitrárias. Nosso objetivo agora é obter as soluções gerais para tais equações. Começamos observaando que a solução geral para a equação linear homogênea de primeira ordem $y' + ay = 0$, onde a é uma constante arbitrária é dada por $y = ce^{-ax}$. Portanto, é natural procurar determinar se existem soluções exponenciais definidas em $\mathbb{R}$ para a equação

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0.$$

O fato interessante aqui é que todas as soluções para esta equação são funções exponenciais ou construídas a partir de funções exponenciais. Consideraremos aqui somente o caso em que $n = 2$.

2.1 Equações lineares homogêneas com coeficientes constantes de segunda ordem

Consideremos então a equação

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{9}$$

onde a, b, c são constantes arbitrárias. Vamos supor que a função $y = e^{\lambda x}$ seja uma solução da equação (9); assim devemos ter

$$\begin{aligned} y' &= \lambda e^{\lambda x} \\ y'' &= \lambda^2 e^{\lambda x} \end{aligned}$$

e substituindo na equação ficamos com

$$\begin{aligned} a(\lambda^2 e^{\lambda x}) + b(\lambda e^{\lambda x}) + c(e^{\lambda x}) &= 0 \\ e^{\lambda x}(a\lambda^2 + b\lambda + c) &= 0 \end{aligned}$$

e, como $e^{\lambda x} \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, concluímos que a função $y = e^{\lambda x}$ é uma solução da equação (9) se, e somente se, λ for uma raiz da equação quadrática

$$a\lambda^2 + b\lambda + c = 0 \tag{10}$$

Esta última equação é chamada **equação auxiliar** o u **equação característica** da equação diferencial (9). No que segue, para determinarmos os valores de λ, consideraremos três casos, a saber:

- Caso 1: as raízes da equação característica são reais e distintas;
- Caso 2: as raízes da equação característica são reais e iguais;
- Caso 3: as raízes da equação característica são complexas conjugadas.

2.1.1 Caso 1: raízes reais e distintas

Suponha que a equação característica $a\lambda^2 + b\lambda + c = 0$ possua duas raízes reais e disitntas, digamos, λ_1 e λ_2. Pelo que vimos acima, as funções $y_1 = e^{\lambda_1 x}$ e $y_2 = e^{\lambda_2 x}$ são soluções da equação diferencial (9). É fácil ver que estas duas soluções são linearmente independentes pois

$$\frac{y_2}{y_2} = \frac{e^{\lambda_2 x}}{e^{\lambda_1 x}} = e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} \neq \text{constante}.$$

Logo, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções e, portanto, a solução geral da equação (9), neste caso, é dada por

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x}.$$

Exemplo 19 *Resolva o problema de valor inicial*

$$y'' + y' - 2y = 0, \;\; y(0) = 1, \;\; y'(0) = 1.$$

Solução: A equação característica é dada por $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ e suas raízes são $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = -2$. Logo, a solução geral para a equação dada é

$$y = c_1 e^{x} + c_2 e^{-2x}.$$

Substituindo as condições iniciais, temos

$$\begin{cases} c_1 + c_2 & = 1 \\ \\ c_1 - 2c_2 & = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema acima, obtemos $c_1 + 1$ e $c_2 = 0$. Logo, a solução do PVI é $y = e^x$. $\square$

Exemplo 20 *Resolva a equação* $2y'' - 5y' - 3y = 0$.

Solução: A equação auxiliar é $2\lambda^2 - 5\lambda - 3 = 0$ e suas raízes são $\lambda_1 = -\frac{1}{2}$ e $\lambda_2 = 3$. Logo, a solução geral da equação dada é

$$y = c_1 e^{-x/2} + c_2 e^{3x}.$$

$\square$

2.1.2 Caso 2: raízes reais e iguais

Suponha agora que a equação característica tenha duas raízes iguais $\lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso, uma das soluções será $y_1 = e^{\lambda_1 x}$. Para obter a outra solução utilizamos o método da redução de ordem discutido anteriormente. Observamos, entretanto, que antes de aplicarmos a fórmula (ou o método em si) precisamos colocar a equação original na forma padrão:

$$y'' + \frac{b}{a}y' + \frac{c}{a}y = 0,$$

e além disso, devemos ter $b^2 - 4ac = 0$, logo $\lambda_1 = -\frac{b}{2a}$ e daí $-\frac{b}{a} = 2\lambda_1$. Assim, aplicando a fórmula para obter uma segunda solução para equação temos

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1^2 \int \frac{e^{-\int (b/a)dx}}{y_1^2} dx \\ &= e^{\lambda_1 x} \int \frac{e^{-(b/a)x}}{e^{2\lambda_1 x}} dx \\ &= e^{\lambda_1 x} \int \frac{e^{2\lambda_1 x}}{e^{2\lambda_1 x}} dx \\ &= e^{\lambda_1 x} \int dx \\ &= xe^{\lambda_1 x} \end{aligned}$$

Logo, a solução geral para a equação é dada por

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x}.$$

Exemplo 21 *Resolva a equação diferencial* $y'' - 10y' + 25 = 0$

Solução: A equação característica é dada por $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$. Neste caso temos $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$. Logo, uma solução é dada por $y_1 = e^{5x}$. Pelo visto acima a outra solução será $y_2 = xe^{5x}$. Assim, a solução geral da equação dada é

$$y = c_1 e^{5x} + c_2 x e^{5x}.$$

□

2.1.3 Caso 3: raízes complexas

Consideraremos agora o caso em que a equação característica tem raízes complexas conjugadas. Nesre caso as raízes podem ser escritas na forma $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i\beta$, onde α e $\beta \neq 0$ são números reais e $i^2 = -1$. Formalmente não há diferença entre esse caso e o caso 1, e assim podemos escrever a solução geral da equação como sendo

$$y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}.$$

Porém, na prática, é preferível trabalhar com soluções reais ao invés de exponenciais complexas. Para fazer esta redução utilizaremos o que chamamos de fórmula de Euler

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta$$

onde θ é qualquer número real. Segue desta fórmula que:

$$e^{i\beta x} = \cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x \quad \text{e} \quad e^{-i\beta x} = \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x$$

onde usamos o fato de $\cos(-\beta x) = \cos\beta x$ e $\operatorname{sen}(-\beta x) = -\operatorname{sen}\beta x$. Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} e^{(\alpha+i\beta)x} &= e^{\alpha x + i\beta x} \\ &= e^{\alpha x} e^{i\beta x} \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x) \end{aligned}$$

e da mesma forma

$$e^{(\alpha-i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x)$$

Agora, observe que

$$e^{i\beta x} + e^{-i\beta x} = 2\cos\beta x \quad \text{e} \quad e^{i\beta x} - e^{-i\beta x} = 2i \operatorname{sen}\beta x.$$

Como $y = C_1 e^{(\alpha+i\beta)x} + C_2 e^{(\alpha-i\beta)x}$ é uma solução para qualquer escolha de C_1 e C_2, fazendo primeiro $C_1 = C - 2 = 1$ e em seguida $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$, obtemos, nesta ordem as duas soluções seguintes

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x} + e^{(\alpha-i\beta)x} \quad \text{e} \quad y_2 = e^{(\alpha+i\beta)x} - e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Mas

$$\begin{aligned} y_1 &= e^{\alpha x}(e^{i\beta x} + e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x + \cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x) \\ &= 2e^{\alpha x}\cos\beta x \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} y_2 &= e^{\alpha x}(e^{i\beta x} - e^{-i\beta x}) \\ &= e^{\alpha x}(\cos\beta x + i \operatorname{sen}\beta x - (\cos\beta x - i \operatorname{sen}\beta x)) \\ &= 2ie^{\alpha x} \operatorname{sen}\beta x \end{aligned}$$

Como $y_1 = 2e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $y_2 = 2ie^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ são soluções da equação diferencial, segue que $e^{\alpha x}\cos\beta x$ e $e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ também são soluções. Ainda, como já vimos anteriormente, temos que $W(e^{\alpha x}\cos\beta x, e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x) = \beta e^{2\alpha x} \neq 0$, pois $\beta \neq 0$. Logo, podemos afirmar que essas duas funções formam um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial em $\mathbb{R}$. Assim, a solução geral da equação será dada por

$$y = c_1 e^{\alpha x}\cos\beta x + c_2 e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

ou ainda

$$y = e^{\alpha x}(c_1\cos\beta x + c_2\operatorname{sen}\beta x).$$

Exemplo 22 *Resolva a equação $y'' + y' + y = 0$.*

Solução: A equação característica é dada por $\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$ e tem como raízes os números complexos $\lambda_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ e $\lambda_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Logo, a solução geral da equação diferencial dada é

$$y = c_1 e^{-x/2}\left(c_1\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2\operatorname{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)$$

Exemplo 23

As duas equações

$$y'' + k^2 y = 0 \tag{11}$$
$$y'' - k^2 y = 0 \tag{12}$$

são encontradas frequentemente no estudo de matemática aplicada. Para a primeira equação diferencial, a equação auxiliar $\lambda^2 + k^2 = 0$ tem raízes $\lambda_1 = ki$ e $\lambda_2 = -ki$. Segue que a solução geral para a equação (11) é dada por

$$y = c_1\cos kx + c_2\operatorname{sen} kx. \tag{13}$$

A equação diferencial (12) tem equação auxiliar dada por $\lambda^2 - k^2 = 0$, cujas raízes são $\lambda_1 = K$ e $\lambda_2 = -k$. Daí, a solução geral será dada por

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 e^{-kx}. \tag{14}$$

Observe que escolhendo $c_1 = c_2 = \frac{1}{2}$ em (14), obtemos que

$$y = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{2} = \cosh kx$$

também é uma solução para a equação (12). Ainda, se tomamos $c_1 = 1/2$ e $c_2 = -1/2$, então

$$y = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2} = \operatorname{senh} x$$

também é uma solução para a equação (12). Como $\cosh kx$ e $\operatorname{senh} kx$ são linearmente independedentes em qualquer intervalo da reta real, segue que elas formam um conjunto fundamental de soluções. Logo, uma forma alternativa para a solução geral de (12) é

$$y = c_1 \cosh kx + c_2 \operatorname{senh} kx.$$

□

Equações de ordem superior

No caso geral, para resolver uma equação diferencial de ordem n

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{15}$$

homogênea e de coeficientes constantes, procedemos como no caso $n = 2$. Devemos, neste caso, resolver uma equação polinomial de grau n, a saber,

$$a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_2 \lambda^2 + a_1 \lambda + a_0 = 0 \tag{16}$$

Se todas as raízes dessa equação forem reais e distintas, digamos, $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$, então a solução geral para a equação (15) será dada por

$$y = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \cdots + c_n e^{\lambda_n x} \tag{17}$$

Os casos 2 e 3 são mais trabalhososo porque as raízes de uma equação auxiliar de graun $n > 2$ podem ocorrer com várias combinações. Por exemplo, uma equação de grau cinco pode ter cinco raízes reais e distintas, ou três raízes reais e distintas e duas complexas (conjugadas), ou uma raiz real e quatro cmplexas, ou cinco raízes reais e iguais, ou cinco raízes reais com duas delas sendo iguais, etc. O que sabemos no entanto (e é possíovel de ser provado) é que quando uma raiz λ_1 tem multiplicidade k (isto é, k raízes da equação (16) são iguais a λ_1) então as funções

$$e^{\lambda_1 x}, xe^{\lambda_1 x}, x^2 e^{\lambda_1 x}, \cdots, x^{k-1} e^{\lambda_1 x}$$

são k soluções linearmente independentes da equação (15) e a solução geral deverá conter a combinação linear

$$c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 x e^{\lambda_1 x} + c_3 x^2 e^{\lambda_1 x} + \cdots + c_k x^{k-1} e^{\lambda_1 x}.$$

Destacamos, por último, que quando os coeficientes da equação (16) são números reais, as raízes complexas que essa equação porventura venha a ter sempre aparecem em pares conjugados. Por exemplo, uma tal equação polinomial de grau 3 pode ter no máximo duas raízes complexas. Finalmente, talvez a maior dificuldade na resolução de equações diferenciais homogêneas com coeficientes constantes seja encontrar as raízes das respectivas equações auxiliares.Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 24 *Resolver a equação* $y''' + 3y'' - 4y = 0.$

Solução: A equação auxiliar nesse caso é $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = 0$. Por inspeção, vê-se claramente que $\lambda_1 = 1$ é uma raiz. Dividindo então $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4$ por $\lambda - 1$, encontramos

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4 = (\lambda - 1)(\lambda^2 + 4\lambda + 4) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2,$$

logo as demais raízes são $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. A solução geral, portanto, será dada por

$$y = c_1 e^x + c_2 e^{-2x} + c_3 x e^{-2x}.$$

□

Exemplo 25 *Resolva* $y''' + 5y'' + 10y' - 4y = 0$

Solução: A equação auxiliar nesse caso é dada por $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 10\lambda - 4 = 0$. Você deverá verificar que $\lambda_1 = \frac{1}{3}$ é uma raiz para essa equação. Dividindo $\lambda^3 + 5\lambda^2 + 10\lambda - 4$ por $\lambda - 1/2$ obtemos

$$\lambda^3 + 5\lambda^2 + 10\lambda - 4 = (\lambda - 1/3)(3\lambda^2 + 6\lambda + 12)$$

e portanto a equação auxiliar pode ser escrita na forma

$$(\lambda - 1/3)(3\lambda^2 + 6\lambda + 12) = 0$$

ou

$$(3\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda + 4) = 0$$

Resolvendo a equação $\lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$, encontramos as raízes complexas $\lambda_1 = -1 + \sqrt{3}i$ e $\lambda_2 = -1 - \sqrt{3}i$. Logo, a solução geral para a equação diferencial dada será

$$y = c_1 e^{x/3} + e^{-x}(c_2 \cos \sqrt{3}\, x + c_3 \operatorname{sen} \sqrt{3}\, x)$$

□

Exemplo 26 *Resolva* $\frac{d^4y}{dx^4} + 2\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$

Solução: A equação auxiliar é dada por $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1 = 0$ e a mesma é equivalente a

$$(\lambda^2 + 1)^2 = 0.$$

Logo, as raízes características são $\lambda_1 = \lambda_2 = i$ e $\lambda_3 = \lambda_4 = -i$. A solução geral nesse caso será dada por

$$y = C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix} + C_3 x e^{ix} + C_4 x e^{-ix}.$$

Usando a fórmula de Euler e fazendo uma escolha apropriada de constantes o termo $C_1 e^{ix} + C_2 e^{-ix}$ pode ser reescrito como

$$c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Da mesma forma, o termo $C_3 x e^{ix} + C_4 x e^{-ix}$ pode ser reescrito como

$$c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x.$$

Logo, a soluçãp geral é

$$y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + c_3 x \cos x + c_4 x \operatorname{sen} x.$$

□

Exercícios

1. Encontre a solução geral para cada equação diferencial a seguir.

(a) $4y'' + y' = 0,$

(b) $2y'' - 5y' = 0$

(c) $y'' - 36y = 0,$

(d) $y'' - 8y = 0$

(e) $y'' + 9y = 0,$

(f) $3y'' + y = 0$

(g) $y'' - y' - 6y = 0,$

(h) $y'' - 3y' + 2y = 0$

(i) $y'' + 8y' + 16y = 0,$

(j) $y'' + 10y' + 25y = 0$

(k) $y'' + 3y' - 5y = 0,$

(l) $y'' + 4y' - y = 0$

(m) $12y'' - 5y' - 2y = 0,$

(n) $8y'' + 2y' - y = 0$

(o) $y'' - 4y' + 5y = 0,$

(p) $2y'' - 3y' + 4y = 0$

(q) $3y'' + 2y' + y = 0,$

(r) $2y'' + 2y' + y = 0$

2. Resolva a equação diferencial dada sujeita às condições iniciais indicadas.

(a) $y'' + 16y = 0,\ y(0) = 2, y'(0) = -2$

(b) $y'' - y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 1$

(c) $y'' + 6y' + 5y = 0,\ y(0) = 0, y'(0) = 3$

(d) $y'' - 8y' + 17y = 0,\ y(0) = 4, y'(0) = -1$

(e) $2y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = -1, y'(0) = 0$

(f) $y'' - 2y' + y = 0, y(0) = 5, y'(0) = 10$

(g) $y'' + y' + 2y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 0$

(h) $4y'' - 4y' - 3y = 0,\ y(0) = 1, y'(0) = 5$

(i) $y'' - 3y' + 2y = 0,\ y(1) = 0, y'(1) = 1$

(j) $y'' + y = 0, y(\pi/3) = 0, y'(\pi/3) = 2$

3. Resolva as equações diferenciais sujeitas às condições de contorno indicadas:

(a) $y'' - 10y' + 25y = 0,\ y(0) = 1, y(1) = 0$

(b) $y'' + 4y = 0,\ y(0) = 0, y(\pi) = 0$

(c) $y'' + y = 0,\ y'(0) = 0, y'(\pi/2) = 2$

(d) $y'' - y = 0,\ y(0) = 1, y'(1) = 0$

Respostas

1. (a) $y = c_1 + c_2 e^{-x/4}$

(c) $y = c_1 e^{-6x} + c_2 e^{6x}$

(e) $y = c_1 \cos 3x + c_2 \operatorname{sen} 3x$

(g) $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-2x}$

(i) $y = c_1 e^{-4x} + c_2 x e^{-4x}$

(k) $y = c_1 e^{(-3+\sqrt{29})x/2} + c_2 e^{(-3-\sqrt{29})x/2}$

(m) $y = c_1 e^{2x/3} + c_2 e^{-x/4}$

(o) $y = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$

(p) $y = e^{-x/3}\left(c_1 \cos \frac{\sqrt{2}}{3} x + c_2 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{2}}{3} x\right)$

2. (a) $y = 2\cos 4x - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4x$

   (c) $y = -\frac{3}{4}e^{-5x} + \frac{3}{4}e^{-x}$

   (e) $y = -e^{-x/2}\cos(x/2) + e^{x/2}\operatorname{sen}(x/2)$

   (g) $y = 0$

   (i) $y = e^{2(x-1)} - e^{x-1}$

3. (a) $y = e^{5x} - xe^{5x}$

   (c) $y = -2\cos x$

3 Equações lineares não homogêneas

Nessa seção focaremos nossa atenção na definição de uma solução geral para uma equação linear não homogênea. Uma função y_p, independente de parâmetros, que satisfaça a equação

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \tag{18}$$

é chamada de solução particular para a equação.

Exemplo 27

(a) $y_p = 3$ *é uma solução particular para a equação* $y'' + 9y = 27$. *(Verifique!!!)*

(b) $y_p = x^3 - x$ *é uma solução particular para a equação* $x^2y'' + 2xy' - 8y = 4x^3 + 6x$. *(Verifique!!!)*

Dada uma equação não homogêna Os dois teoremas seguintes caracterizam a solução geral para uma equação diferencial linear não homogênea.

Teorema 7 *Seja* y_p *qualquer solução para a equação não homogênea (18) e sejam* $y_1, y_2, \cdots, y_n$ *soluções para a equação diferencial linear homogênea associada em um intervalo* I. *Então*

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n + y_p$$

é também uma solução para a equação não homogênea no intervalo I *para quaisquer constantes* $c_1, c_2, \cdots, c_n$.

Prova. Vamos provar o teorema para o caso $n = 2$. Considere a equação

$$y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$$

e seja $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$.

$\square$

Podemos agora provar o análogo ao teorema 5 para as equações não homogêneas.

Teorema 8 *Seja* y_p *uma solução para a equação diferencial linear não homogêna (18) em um intervalo* I *e seja* $\{y_1, y_2, \cdots, y_n\}$ *um conjunto fundamental de soluções para a equação homogênea associada no intervalo* I. *Então, para qualquer solução* $Y(x)$ *de (18), existem constantes* $C_1, C_2, \cdots, C_n$ *tais que*

$$Y(x) = C_1y_1 + C_2Y_2 + \cdots + C_ny_n + y_p.$$

Prova. Provaremos o caso $n = 2$. Suponha que Y e y_p sejam soluções para a equação

$$a_2(x)y'' + a_(x)y' + a_0y = g(x).$$

Seja u a função definida por $u(x) = Y(x) - y_p(x)$. Então

$$\begin{aligned} a_2(x)u'' + a_(x)u' + a_0u &= a_2(x)[Y'' - y_p''] + a_1(x)[Y' - y_p'] + a_0(x)[Y - y_p] \\ &= a_2(x)Y'' + a_1(x)Y' + a_0(x)Y - [a_2(x)y_p'' + a_1(x)y' + a_0y_p] \\ &= g(x) - g(x) = 0 \end{aligned}$$

Isto mostra que $u(x)$ é uma solução da equação homogênea associada, logo, de acordo com o teorema 5, existem constantres c_1 e c_2 tais que

$$u(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

e daí

$$Y(x) - y_p(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

ou

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + y_p(x).$$

□

Assim podemos definir:

Definição 5 (Solução geral - Equações não homogêneas) *Seja* y_p *uma solução para a equação diferencial linear não homogênea (18) em um intervalo* I *e seja*

$$y_c = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

a solução geral no intervalo I *para a equação diferencial linear homogênea associada. A* ***solução geral*** *para a equação não homogênea no intervalo* I *é definida por*

$$y = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) + y_p(x) = y_c(x) + y_p(x).$$

Na definição acima a combinação linear

$$y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

é chamada de **solução complementar** e $y_p(x)$ solução particular.

Exercícios

1. Verifique que a família a dois parâmteros dada é a solução geral para a equação diferencial linear não homogênes no intervalo indicado.

   (a) $y'' - 7y' + 10y = 24e^x$,
   $y = c_1e^{2x} + c_2e^{5x} + 6e^x$
   $(-\infty, \infty)$

   (b) $y'' - y = \sec x$,
   $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + x \operatorname{sen} x + \cos s \ln(\cos x)$
   $(-\pi/2, \pi/2)$

   (c) $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + 4x - 12$,
   $y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + x^2e^{2x} + x - 2$
   $(-\infty, \infty)$

   (d) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$,
   $y = c_1x^{-1/2} + c_2x^{-1} + \frac{1}{15}x^2 - \frac{1}{6}x$
   $(0, \infty)$

2. Mostre que se y_1 é uma solução da equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = f(x)$$

e y_2 é uma solução da equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = g(x),$$

então $y_1 + y_2$ é uma solução da equação

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0y = f(x)g(x).$$

3.1 Método dos coeficientes indeterminados

Lembre que para obter a solução geral de uma equação diferencial linear não homogênea temos que fazer duas coisas:

(i) Encontrar a solução complementar y_c.

(ii) Encontrar qualquer solução particular y_p da equação não homogênea.

A solução geral então, em um dado intervalo, será dada por $y = y_c + y_p$.

Nesta seção, vamos introduzir um método para encontrar uma solução particular para uma equação linear não homogênea com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = g(x) \tag{19}$$

Embora o **método dos coeficientes indeterminados** que apresentaremos a seguir não se limite a equações de segunda ordem, ele se limita a equações lineares não homogêneas

- que tem coeficientes constantes, e
- onde $g(x)$ é uma constante k, uma função polinomial, uma função exponencial $e^{\alpha x}$, $\operatorname{sen}\beta x$, $\cos\beta x$, ou somas e produtos dessas funções.

Por exemplo, $g(x)$ pode ser:

$$\begin{aligned}
g(x) &= 10 \\
g(x) &= x^2 + 5x \\
g(x) &= 15x - 6 + 8e^{-4x} \\
g(x) &= \operatorname{sen} 3x - 5x\cos 2x \\
g(x) &= e^x \cos x - (3x^2 - 1)e^{2x}
\end{aligned}$$

Em outras palavras, $g(x)$ será uma combinação linear de funções do tipo

$$k \text{ (constante)}, x^n, x^n e^{\alpha x}, x^n e^{\alpha x}\cos\beta x, x^n e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x,$$

onde n é um inteiro não negativo e α e β são números reais. O método dos coeficientes indeterminados não se aplica a equações da forma (19), quando

$$g(x) = \ln x, \;\; g(x) = \frac{1}{x}, \;\; g(x) = \operatorname{tg} x, \;\; g(x) \operatorname{arccos} x.$$

Uma observação importante é que o conjunto de funções que consiste em constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos, cossenos, tem a seguinte propriedade: derivadas de suas somas e produtos ainda são somas e produtos de constantes, polinômios, exponenciais $e^{\alpha x}$, senos, cossenos. Como a combinação linear derivadas $ay'' + by' + cy$ tem que ser identicamente igual a $g(x)$, parece-nos razoável supor que a solução particular y_p tenha a mesma forma que $g(x)$. Vejamos alguns exemplos.

Exemplo 28 *Resolva a equação* $y'' + 4y' - 2y = 2x^2 - 3x + 6$.

Solução:
Passo 1. Antes de mais nada, resolvemos a equação homogênea associada $y'' + 4y' - 2y = 0$. A equação característica é dada por

$$\lambda^2 + 4\lambda - 2 = 0$$

cujas raízes são $\lambda_1 = -2 - \sqrt{6}$ e $\lambda_2 = -2 + \sqrt{6}$. Assim, a solução complementar é

$$y_c = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x}.$$

Passo 2. Agora, vamos determinar uma solução particular para a equação dada. Como a função $g(x)$ é um polinômio de segundo grau, vamos supor que a solução particular tenha a forma de um polinômio de segundo grau

$$y_p = Ax^2 + Bx + C.$$

Devemos então *determinar os coeficientes específicos* A, B e C para os quais y_p seja uma solução para a equação: substituindo y_p e as derivadas

$$y_p' = 2Ax + B \quad \text{e} \quad y_p'' = 2A$$

na equação diferencial obtemos

$$y_p'' + 4y_p' - 2y_p = 2A + 8Ax + 8B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = 2x^2 - 3x + 6$$

ou seja

$$-2Ax^2 + (8A - 2B)x + (2A + 8B - 2C) = 2x^2 - 3x$$

Como esperamos que a última igualdade seja uma identidade, os coeficientes de potências iguais de x devem ser iguais, ou seja, devemos ter

$$\begin{array}{rcrcrcr} & & - & 2A & = & 2 \\ 8A & - & 2B & & = & -3 \\ 2A & + & 4B & - & 2C & = & 6 \end{array}$$

Resolvendo esse sistema encontramos $A = -1$, $B = -5/2$ e $C = -9$. Logo, uma solução particular será dada por

$$y_p = -x^2 - \frac{5}{2}x - 9.$$

Passo 3. Finalmente, a solução geral da equação dada será

$$y = y_c + y_p = c_1 e^{-(2+\sqrt{6})x} + c_2 e^{(-2+\sqrt{6})x} - x^2 - \frac{5}{2}x - 9$$

□

Exemplo 29 *Encontre uma solução particular para $y'' - y' + y = 2\,\text{sen}\,3x$.*

Solução: Uma tentativa natural para este caso seria $A\,\text{sen}\,3x$. Mas, como derivações sucessivas de $\text{sen}\,3x$ produzem $\text{sen}\,3x$ e $\cos 3x$, vamos procurar uma solução particular que inclua os dois termos

$$y_p = A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x.$$

Derivando y_p e substituindo os resultados nas equação obtemos

$$\begin{aligned}
y_p' &= -3A\,\text{sen}\,3x + 3B\cos 3x \\
y_p'' &= -9A\cos 3x - 9B\,\text{sen}\,3x \\
y_p'' - y_p' + y_p &= (-9A\cos 3x - 9B\,\text{sen}\,3x) - (-3A\,\text{sen}\,3x + 3B\cos 3x) + (A\cos 3x + B\,\text{sen}\,3x) \\
2\,\text{sen}\,3x &= (-9A - 3B + A)\cos 3x + (-9B + 3A + B)\,\text{sen}\,3x \\
2\,\text{sen}\,3x &= (-8A - 3B)\cos 3x + (3A - 8B)\,\text{sen}\,3x
\end{aligned}$$

Da última igualdade devemos ter

$$\begin{cases} -8A - 3B = 0 \\ 3A - 8B = 2 \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema obtemos $A = 6/73$ e $B = -16/73$. Logo, uma solução particular para a equação é dada por

$$y_p = \frac{6}{73}\cos 3x - \frac{16}{73}\,\text{sen}\,3x.$$

$\square$

No próximo exemplo exploraremos o caso em que a função $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$, onde cada função $g_i(x)$ tem um dos tipos básicos listados acima. Neste caso admitiremos como solução particular a função

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$$

onde y_{p_i} é a solução particular associada à função $g_i(x)$.

Exemplo 30 *Resolva $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5 + 6xe^{2x}$.*

Solução: Primeiro, encontramos a solução da equação homgênea associada $y'' - 2y' - 3y = 0$; as ráizes da equação característica $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$ são $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 3$ (Verifique!!!). Assim, a solução complementar é dada por

$$y_c = c_1 e^{-x} + c_2 e^{3x}.$$

Para encontrar a solução particular observamos que $g(x)$ contém duas partes $4x-5$ e $6xe^{2x}$. A presença do termos $4x-5$ sugere que a solução particular tenha um polinômio de primeiro grau do tipo $Ax+B$; ainda, como a derivada de xe^{2x} produz xe^{2x} e e^{2x}, vamos supor que a solução particular inclua esses dois termos, xe^{2x} e e^{2x}. Assim, devemos procurar uma solução particular da forma

$$y_p = Ax + B + Cxe^{2x} + De^{2x}.$$

Derivando sucessivamene e substituindo y_p e suas derivadas na equação dada obtemos

$$\begin{aligned} y_p' &= A + Ce^{2x} + 2Cxe^{2x} + 2De^{2x} \\ y_p'' &= 2Ce^{2x} + 2Ce^{2x} + 4Cxe^{2x} + 4De^{2x} \\ y_p'' - 2y_p' - 3y &= -3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} \end{aligned}$$

ou seja

$$-3Ax - 2A - 3B - 3Cxe^{2x} + (2C - 3D)e^{2x} = 4x - 5 + 6xe^{2x}$$

e daí devemos ter

$$\left\{ \begin{array}{rcrcr} & - & 3A & = & 4 \\ -2A & - & 3B & = & -5 \\ & - & 3C & = & 6 \\ 2C & - & 3D & = & 0 \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema encontramos $A = -3/4$, $B = 23/9$, $C = -2$ e $D = -4/3$. Assim,

$$y_p = -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

Portanto, a solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1e^{-x} + c_2e^{3x} + -\frac{4}{3}x + \frac{23}{9} - 2xe^{2x} - \frac{4}{3}e^{2x}.$$

□

Observação 2 *Poderíamos ter resolvido o problema acima dividindo-o em dois problemas mais simples. Substituindo* $y_{p_1} = Ax + B$ *em* $y'' - 2y' - 3y = 4x - 5$ *e* $y_{p_2} = Cxe^{2x} + De^{2x}$ *em* $y'' - 2y' - 3y = 6xe^{2x}$*, encontra-se* $y_{p_1} = -(4/3)x + 23/9$ *e* $y_{p_2} = -(2x + 4/3)e^{2x}$.

Exemplo 31 *Encontre uma solução particular para $y'' - 5y' + 4y = 8e^x$.*

Solução: Procedendo como nos casos anteriores podemos supor uma solução particular da forma

$$y_p = Ae^x.$$

Mas, neste caso, a substituição dessa expressão na equação diferencial conduz à afirmação contraditória

$$0 = 8e^x,$$

e portanto, concluimos que fizemos a escolha errada para y_p.

A dificuldade fica clara depois de analisarmos a solução complementar $y_c = c_1e^x + c_2e^{4x}$. Observe que a nossa escolha Ae^x já faz parte da solução complementar, isso significa que e^x é uma solução da equação diferencial homogênea associada e, portanto, quando Ae^x for substituído na equação necessariamente a anulará. Qual deve ser então a forma de y_p? Examinando o Caso II da resolução da euação diferencial homogênea (caso em que a equação característica tem raízes iguais), vamos tentar encontrar uma solução particular da forma

$$y_p = Axe^x.$$

Temos,

$$y_p' = Axe^x + Ae^x, \quad \text{e} \quad y_p'' = Axe^x + 2Ae^x,$$

e daí

$$y_p'' - 5y_p' + 4y_p = Axe^x + 2Ae^x - 5Axe^x - 5Ae^x + 4Axe^x = 8e^x$$
$$-3Ae^x = 8e^x$$

e assim

$$A = -\frac{8}{3}.$$

Portanto, uma solução particular para a equação é

$$y_p = -\frac{8}{3}e^x.$$

□

A diferença nos procedimentos usados nos exemplos acima sugere-nos considerar dois casos.

- **Caso 1:** Nenhuma função da suposta solução particular é uma solução para a equação diferencial homogênea associada.

- **Caso 2:** Uma função na solução particular escolhida é também uma solução para a equação diferencial homogênea associada

Exemplo 32 *Resolva a equação* $y'' - 2y' + y = e^x$

Solução: A solução para a equação homogênea associada é dada por $y_c = c_1e^x + c_2xe^x$ (Verifique!!!) Como no exemplo anterior, a escolha $y_p = Ae^x$ com certeza não funcionará, pois e^x é uma solução para a equação homogênea associada. Também, neste caso, a escolha $y_p = Axe^x$ não servirá, pois xe^x também faz parte da solução complementar. Assim, devemos escolher

$$y_p = Ax^2e^x.$$

Neste caso, temos

$$y_p' = 2Axe^x + Ax^2e^x \quad \text{e} \quad y_p'' = 2Ae^x + 4Axe^x + Ax^2e^x$$

e, substiuindo na equação ficamos com

$$2Ae^x = e^x$$

e daí

$$A = \frac{1}{2}.$$

Logo, a solução particular será dada por

$$y_p = \frac{1}{2}x^2e^x$$

e a solução geral da equação será

$$y = y_c + y_p = c_1e^x + c_2xe^x + \frac{1}{2}x^2e^x.$$

□

A forma geral de uma solução particular

Em geral podemos escrever a seguinte regra para a forma de uma solução particular:

- **Caso 1:** A forma de y_p é uma combinação linear de todas as funções linearmente independentes que são geradas por repetidas derivações de $g(x)$.

- **Caso 2:** Se algum termo da possível escolha para y_p duplica algum termo na função complementar y_c, este termo de y_p deve ser multilícada por x^n, onde n é o menor número natural que elimina essa duplicação.

Exemplo 33 *Determine a forma de uma solução particular para*

$$y'' - 9y' + 14y = 3x^2 - 5\operatorname{sen} 2x + 7xe^{6x}.$$

Solução: Observemos inicialmente que a solução complementar é dada por $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{7x}$. Assim, podemos escolher $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + y_{p_3}$ onde

$$\begin{aligned} y_{p_1} &= Ax^2 + Bx + C && \text{correspondendo a} \quad 3x^2 \\ y_{p_2} &= D\cos 2x + E\operatorname{sen} 2x && \text{correspondendo a} \quad -5\operatorname{sen} 2x \\ y_{p_3} &= (Fx+G)e^{6x} && \text{correspondendo a} \quad 7xe^{6x} \end{aligned}$$

A escolha para a solução particular é portanto

$$y_p = Ax^2 + Bx + C + D\cos 2x + E\operatorname{sen} 2x + (Fx+G)e^{6x}.$$

Observe que nenhum termo desta escolha duplica algum termo de y_c. □

Exemplo 34 *Determine a forma de uma solução particular para $y'' + 4y = x\cos x$.*

Solução: Como a função $g(x) = x\cos x$, então a forma adequada para a solução particular, segundo o caso 1 acima, será

$$y_p = (AX + B)\cos x + (Cx + D)\operatorname{sen} x.$$

Observe, novamente que não há duplicação de termos entre y_p e a solução complementar $y_c = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x$. □

Exemplo 35 *Resolva o problema de valor inicial $y'' + y = 4x + 10\operatorname{sen} x$, $y(\pi) = 0$, $y'(\pi) = 2$.*

Solução: A solução da equação homogênea associada $y'' + y = 0$ é dada por

$$y_c = c_1\cos x = c_2\operatorname{sen} x.$$

Veja que $g(x)$ é a soma de uma função polinomial de primeiro grau e uma função seno, logo nossa escolha normal para y_p seria a soma de $y_{p_1} = Ax + B$ com $y_{p_2} = C\cos x + D\operatorname{sen} x$:

$$y_p = Ax + B + C\cos x + D\operatorname{sen} x.$$

Mas há uma óbiva duplicação dos termos $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ nesta forma escolhida e os dois termos na solução complementar. Eliminamos a duplicação multiplicando y_{p_2} por x. Usaremos então

$$y_p = Ax + B + Cx\cos x + Dx\operatorname{sen} x$$

Derivamos então e susbtiuimos na equação:

$$y_p' = A + C\cos x - Cx\operatorname{sen} x + D\operatorname{sen} x + Dx\cos x$$

$$y - p'' = -C \operatorname{sen} x - C \operatorname{sen} x - Cx \cos x + D \cos x + D \cos x - Dx \operatorname{sen} x$$

$$\begin{aligned} y'' + y' &= 4x + 10 \operatorname{sen} x \\ Ax + B - 2C \operatorname{sen} x + 2D \cos x &= 4x + 10 \operatorname{sen} x \end{aligned}$$

e daí

$$\begin{aligned} A &= 4 \\ B &= 0 \\ -2C &= 10 \\ 2D &= 0 \end{aligned}$$

ou seja $A = 4$, $B = 0$, $C = -5$ e $D = 0$. Portanto,

$$y_p = 4x - 5x \cos x.$$

A solução geral da equação diferencial é dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

Agora aplicamos as condições inciais prescritas à solução geral da equação.

$$y(\pi) = c_1 \cos \pi + c_2 \operatorname{sen} \pi + 4\pi - 5\pi \cos \pi = 0 \Rightarrow c_1 = 9\pi$$

pois $\cos \pi = -1$ e $\operatorname{sen} \pi = 0$. Assim, ficamos com

$$y = 9\pi \cos x + c_2 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x$$

cuja derivada é

$$y' = -9\pi \operatorname{sen} x + c_2 \cos x + 4 - 5 \cos x + 5x \operatorname{sen} x$$

e então

$$y'(\pi) = -9\pi \operatorname{sen} \pi + c_2 \cos \pi + 4 - 5 \cos \pi + 5\pi \operatorname{sen} \pi = 2$$

nos fornece

$$c_2 = 7.$$

A solução para o problema de valor inicial é dada então por

$$y = 9\pi \cos x + 7 \operatorname{sen} x + 4x - 5x \cos x.$$

□

Resumo do método dos coeficientes indeterminados

Para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$

1. Encontre a solução, $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$, da equação homogênea $a_2y'' + a_1y' + a_0y = 0$.
2. Divida, se necessário, $g(x)$, em partes: $g(x) = g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_k(x)$
3. Para cada $g_i(x)$, escolha a forma da solução particular correspondente y_{p_i} de acordo com a tabela abaixo:

$g_i(x)$	y_{p_i}
$P_n(x) = a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0$	$x^s(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0)$
$e^{\alpha x}$	$Ax^se^{\alpha x}$
$P_n(x)e^{\alpha x}$	$x^s(A_nx^n + \cdots + A_1x + A_0)e^{\alpha x}$
$\operatorname{sen}\beta x$ ou $\cos\beta x$	$x^s(A\operatorname{sen}\beta x + B\cos\beta x)$
$P_n(x)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x$ ou $P_n(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$	$x^s\left[(A_nx^n + \cdots + A_0)e^{\alpha x}\operatorname{sen}\beta x + (B_nx^n + \cdots B_0)e^{\alpha x}\cos\beta x\right]$

onde s é o menor inteiro não negativo para o qual nenhuma parcela da solução particular seja uma solução da equação homogênea associada.

4. Determine $y_p = y_{p_1} + y_{p_2} + \cdots + y_{p_k}$ de modo que cada y_{p_i} seja solução particular da equação $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g_i(x)$
5. A solução da equaçãos será $y = c_1y_1 + c_2y_2 + y_p$

Exercícios

1. Resolva a equação dada pelo método dos coeficientes indeterminados.

   (a) $y'' + 3y' + 2y = 6$
   (b) $4y'' + 9y = 15$
   (c) $y'' - 10y' + 25y = 30x + 3$
   (d) $y'' + y' - 6y = 2x$
   (e) $\frac{1}{4}y'' + y' + y = x^2 - 2x$
   (f) $y'' - 8y' + 20y = 100x^2 - 26xe^x$
   (g) $y'' + 3y = -48x^2e^{3x}$
   (h) $4y'' - 4y' - 3y = \cos 2x$
   (i) $y'' - y' = -3$
   (j) $y'' + 2y' = 2x + 5 - e^{-2x}$
   (k) $y'' - y' + \frac{1}{4}y = 3 + e^{x/2}$
   (l) $y'' - 16y = 2e^{4x}$
   (m) $y'' + 4y = 3\,\mathrm{sen}\, 2x$
   (n) $y'' + 4y = (x^2 - 3)\,\mathrm{sen}\, 2x$
   (o) $y'' + y = 2x\,\mathrm{sen}\, x$
   (p) $y'' - 5y' = 2x^3 - 4x^2 - x + 6$
   (q) $y'' - 2y' + 5y = e^x \cos 2x$
   (r) $y'' - 2y' + 2y = e^{2x}(\cos x - 3\,\mathrm{sen}\, x)$
   (s) $y'' + 2y' + y = \mathrm{sen}\, x + 3\cos 2x$
   (t) $y'' + 2y' - 24y = 16 - (x + 2)e^{4x}$

2. Resolva as equações de ordem mais alta.

   (a) $y''' - 6y'' = 3 - \cos x$
   (b) $y''' - 2y'' - 4y' + 8y = 6xe^{2x}$
   (c) $y''' - 3y'' + 3y' - y = x - 4e^x$
   (d) $y''' - y'' - 4y' + 4y = 5 - e^x + e^{2x}$
   (e) $y^{(4)} + 2y'' + y = (x - 1)^2$
   (f) $y^{(4)} - y'' = 4x + 2e^{-x}$

3. Encontre uma solução particular para a equação diferencial dada

   (a) $y'' + y = 8\,\mathrm{sen}^2 x$
   (b) $y'' + y = \mathrm{sen}\, x \cos 2x$

4. Resolva o problema de valor inicial dado.

   (a) $y'' + 4y = -2$, $y(\pi/8) = 1/2, y'(\pi/8) = 2$
   (b) $2y'' + 3y' - 2y = 14x^2 - 4x - 11$, $y(0) = 0, y'(0) = 0$
   (c) $5y'' + y' = -6x$, $y(0) = 0, y'(0) = -10$
   (d) $y'' + 4y' + 4y = (3 + x)e^{-2x}$, $y(0) = 2, y'(0) = 5$
   (e) $y'' + 4y' + 5y = 35e^{-4x}$, $y(0) = -3, y'(0) = 1$
   (f) $y'' - y = \cosh x$, $y(0) = 2, y'(0) = 12$

3.2 Variação dos parâmetros

Nesta seção apresentaremos o método da variação dos parâmetros que também é usado para obter uma solução particular para a equação linear não homogênea.

Dada a equação diferencial

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x),$$

antes de mais nada, a colocamos na forma padrão

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{20}$$

dividindo a equação dada por $a_2(x)$. Vamos supor que $P(x)$, $Q(X)$ e $f(X)$ são contínuas em algum intervalo I.

Sejam y_1 e y_2 duas soluções linearmente independentes da equação homogênea associada

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Assim, y_1 e y_2 são tais que

$$y_1'' + P(x)y_1' + Q(x)y_1 = 0 \quad \text{e} \quad y_2'' + P(x)y_2' + Q(x)y_2 = 0$$

e a solução da equação homogênea é dada por

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2.$$

Vamos substituir as constantes (ou parâmetros) c_1 e c_2 na expressão de y_c pelas funções arbitrárias $u_1(x)$ e $u_2(x)$; procuraremos então uma solução particular da equação $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ da forma

$$y_p = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x).$$

Esse método é chamado **variação dos parâmetros** porque variamos os parâmetros c_1 e c_2, tornando-os funções.

Derivando a expressão para y_p, obtemos

$$y_p' = u_1'y_1 + u_1y_1' + u_2'y_2 + u_2y_2' = (u_1'y_1 + u_2'y_2) + (u_1y_1' + u_2y_2')$$

Como u_1 e u_2 são funções arbitrárias, podemos impor duas condições sobre elas. Uma condição é que y_p seja solução da equação diferencial e a outra condição será escolhida de modo a simplificar a derivada de y_p. Considerando a expressão acima para y_p', vamos impor a seguinte condição

$$u_1'y_1 + u_2'y_2 = 0 \tag{21}$$

Então

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2'$$

e, consequentemente

$$y_p'' = u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2''.$$

Substituindo y_p e suas derivadas na equação (20) obtemos

$$u_1' y_1' + u_1 y_1'' + u_2' y_2' + u_2 y_2'' + P(u_1 y_1' + u_2 y_2') + Q(u_1 y_1 + y_2 y_2) = f(x)$$

ou

$$(y_1'' + P y_1' + Q y_1) u_1 + (y_2'' + P y_2' + Q y_2) u_2 + u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x)$$

e como $y_1'' + P y_1' + Q y_1 = 0$ e $y_2'' + P y_2' + Q y_2 = 0$, ficamos com

$$u_1' y_1' + u_2' y_2' = f(x) \tag{22}$$

Assim, as equações (21) e (22) formam um sistema linear de duas equações com o qual determinamos as variáveis u_1' e u_2':

$$\begin{cases} u_1' y_1 & + & u_2' y_2 & = & 0 \\ u_1' y_1' & + & u_2' y_2' & = & f(x) \end{cases}$$

que posto na forma matricial fica

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1' \\ u_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f(x) \end{bmatrix}$$

Pela regra de Cramer, a solução para tal sistema pode ser expressa em termos de determinantes, a saber,

$$u_1' = \frac{W_1}{W} \tag{23}$$

$$u_2' = \frac{W_2}{W} \tag{24}$$

onde

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_1 = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ f(x) & y_2' \end{vmatrix}, \quad W_2 = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & f(x) \end{vmatrix}$$

Ou seja, $W = W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2 (que é não nulo para todo $x \in I$, pois y_1 e y_2 são l.i.),

$$u_1' = \frac{-f(x)y_2}{W(y_1,y_2)} \tag{25}$$

$$u_2' = \frac{f(x)y_1}{W(y_1,y_2)} \tag{26}$$

Assim, para determinar as funções u_1 e u_2 basta integrar as expressões (25) e (26).

Resumo do método

Para resolver $a_2y'' + a_1y' + a_0y = g(x)$:

1. Coloque a equação na forma padrão $y'' + Py' + Qy = f(x)$
2. Encontre a solução geral da equação homogênea $y'' + Py' + Qy = 0$, obtendo $y_c = c_1y_1 + c_2y_2$ e calcule o wronskiano $W(y_1, y_2)$.
3. Determine u_1 e u_2 integrando as expressões em (25) e (26), respectivamente.
4. Uma solução particular é dada então por $y_p = u_1y_1 + u_2y_2$.
5. A solução geral da equação é portanto $y = y_c + y_p$.

Exemplo 36 *Resolva a equação* $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$.

Solução: A equação auxiliar é dada por $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ e as raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 2$. Logo, a solução da equação homogênea associada é dada por

$$y_c = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x}.$$

Identificamos então $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = xe^{2x}$ e $f(x) = (x+1)e^{2x}$. O wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W(e^{2x}, xe^{2x}) = \begin{vmatrix} e^{2x} & xe^{2x} \\ 2e^{2x} & e^{2x} + 2xe^{2x} \end{vmatrix} = 2xe^{4x} + e^{4x} - 2xe^{2x} = e^{4x}.$$

Então, das fórmulas (25) e (26) temos

$$u_1' = \frac{-f(x)y_2}{W} = \frac{-(x+1)e^{2x}xe^{2x}}{e^{4x}} = \frac{-(x^2+x)e^{4x}}{e^{4x}} = -(x^2+x)$$

e

$$u_2' = \frac{f(x)y_1}{W} = \frac{(x+1)e^{2x}e^{2x}}{e^{4x}} = x+1.$$

Por integração (sem a adição das constantes de integração) obtemos

$$u_1 = -\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{x^2}{2} + x.$$

Logo,

$$\begin{aligned} y_p &= \left(-\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} + \left(\frac{x^2}{2} + x\right)xe^{2x} \\ &= \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x} \end{aligned}$$

Portanto, a solução geral da equação é dada por

$$c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{2}\right)e^{2x}.$$

Exemplo 37 *Resolva* $4y'' + 36y = \text{cosec}3x$.

Solução: Primeiro, colocamos a equação na forma padrão, dividindo pior 4:

$$y'' + 9y = \frac{1}{4}\text{cosec}3x.$$

As raízes da equação auxiliar $\lambda^2 + 9 = 0$ são $\lambda_1 = 3i$ e $\lambda_2 = -3i$. Logo, a solução da equação homogênea associada é dada por

$$y_c = c_1 \cos 3x + c_2 \,\text{sen}\, 3x.$$

Identificamos então $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \,\text{sen}\, 3x$ e $f(x) = \frac{1}{4}\text{cosec}3x$. Assim, temos

$$W(\cos 3x, \,\text{sen}\, 3x) = \begin{vmatrix} \cos 3x & \text{sen}\, 3x \\ -3\,\text{sen}\, 3x & 3\cos 3x \end{vmatrix} = 3,$$

$$u_1' = -\frac{f(x)y_2}{W} = -\frac{1}{4}\frac{\text{cosec}3x \,\text{sen}\, 3x}{3} = -\frac{1}{12}$$

e

$$u_2' = \frac{f(x)y_1}{W} = \frac{1}{4}\frac{\text{cosec}3x\cos 3x}{3} = \frac{1}{12}\frac{\cos 3x}{\operatorname{sen} 3x}$$

Integrando essas expressões obtemos

$$u_1 = -\frac{x}{12} \quad \text{e} \quad u_2 = \frac{1}{36}\ln|sen3x|.$$

Assim, uma solução particular é dada por

$$y_p = -\frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

A solução geral para a equação é

$$y = y_c + y_p = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x - \frac{1}{12}x\cos 3x + \frac{1}{36}(\operatorname{sen} 3x)\ln|\operatorname{sen} 3x|.$$

A expressão acima representa a solução geral para a equação diferencial no intervalo $(0, \pi/6)$. □

Exercícios

1. Resolva a cada equação diferencial pelo método da variaçãos dos parâmetros. Defina um intervalo no qual a solução geral seja válida.

   (a) $y'' + y = \sec x$

   (b) $y'' + y = \operatorname{sen} x$

   (c) $y'' + y = \cos x$

   (d) $y'' - y = \cosh x$

   (e) $y'' - 4y = \frac{e^{2x}}{x}$

   (f) $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{1+e^x}$

   (g) $y'' + 3y' + 2y = \operatorname{sen}(e^x)$

   (h) $y'' - 2y' + y = \frac{e^{-x}}{1+x^2}$

   (i) $y'' - 2y' + y = e^{-x}\ln x$

   (j) $3y'' - 6y' + 30y = e^x \operatorname{tg} 3x$

2. Sabendo que $y_1 = x$ e $y_2 = x\ln x$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação $x^2y'' - xy' + y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para a equação
$$x^2y'' - xy' + y = 4x\ln x.$$

3. Sabendo que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$ em $(0, \infty)$, encontre a solução geral para a equação
$$x^2y'' - 4xy' + 6y = \frac{1}{x}.$$

4. Sabendo que $y_1 = x^{-1/2}\cos x$ e $y_2 = x^{-1/2}\,\mathrm{sen}\,x$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação $x^2y'' + xy' + (x^2 - \frac{1}{4})y = 0$ em $(0,\infty)$, encontre a solução geral para a equação

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right)y = x^{3/2}.$$

5. Sabendo que $y_1 = \cos(\ln x)$ e $y_2 = \mathrm{sen}\,(\ln x)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação $x^2y'' + xy' + y = 0$ em $(0,\infty)$:

   (a) Encontre uma solução particular para $x^2y'' + xy' + y = \sec(\ln x)$.

   (b) Dê a solução geral para a equação do item (a) e determine um intervalo onde a mesma seja válida. (*OBS: Não é* $(0,\infty)$. *Por quê?*)

3.3 Equação de Cauchy-Euler

Qualquer equação diferencial da forma

$$a_n x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1 x \frac{dy}{dx} + a_0 y = g(x),$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_n$ são constantes, é chamada de **equação de Cauchy-Euler**. A característica deste tipo de equação é que o grau de cada coeficiente monomial coincide com a ordem de derivação.

No que segue vamos apresentar o método de resolução para a equação homogênea de segunda ordem

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = 0.$$

A solução para equações de ordem superior é análoga. Ainda, podemos resolver a equação não homogênea

$$ax^2 y'' + bxy' + cy = g(x)$$

pelo método dad variação dos parâmetros, desde que tenhamos determinado a solução complementar y_c (solução da homogênea).

Começamos observando que para $x = 0$ o coeficiente de y'' é zero; então para garantir que os resultados fundamentais do teorema (1) possam ser aplicados à equação de Cauchy-Euler, devemos procurar a solução geral no intervalo $(0, \infty)$.

Para resolver a equação vamos fazer a seguinte mudança de variável:

$$x = e^t.$$

Assim, devemos ter $t = \ln x$, $x > 0$ e então pela regra da cadeia

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}\frac{dy}{dt}$$

e aplicando novamente a regra da cadeia e regra do produto obtemos

$$\begin{aligned}
y'' = \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right) \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2 y}{dt^2}\frac{dt}{dx} \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x}\frac{d^2 y}{dt^2}\frac{1}{x} \\
&= -\frac{1}{x^2}\frac{dy}{dt} + \frac{1}{x^2}\frac{d^2 y}{dt^2} \\
&= \frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2 y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)
\end{aligned}$$

Substituindo essas expressões na equação diferencial $ax^2y''+bxy'+cy=0$ ficamos com:

$$ax^2\left(\frac{1}{x^2}\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)\right)+bx\left(\frac{1}{x}\frac{dy}{dt}\right)+cy=0$$

$$a\left(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt}\right)+b\frac{dy}{dt}+cy=0$$

$$a\frac{d^2y}{dt^2}+(b-a)\frac{dy}{dt}+cy=0$$

Assim, a equação original, após a mudança de variável, se transforma em uma equação homogênea com coeficientes constantes nas variáveis y e t

$$ay''+(b-a)y'+cy=0.$$

Exemplo 38 *Resolva a equação* $x^2y''-2xy'+2y=0$.

Solução: A mudança de variável $x=e^t$ ou $t=\ln x$ transforma a equação original na equação

$$y''-3y'+2y=0.$$

A equação característica é

$$\lambda^2-3\lambda+2=0$$

e as raízes desta equação são $\lambda_1=1$ e $\lambda_2=2$. Logo, a solução geral é dada por

$$y=c_1e^t+c_2e^{2t}=c_1x+c_2x^2$$

pois $e^t=x$. □

Exemplo 39 *Resolva a equação* $x^2y''-xy'+y=\ln x$.

Solução: A mudança de variável $x=e^t$ ou $t=\ln x$ transforma a equação dada em

$$y''-2y'+y=t.$$

A equação caracterísitca dessa equação é

$$\lambda^2-2\lambda+1=0,$$

e suas raízes são $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$. Logo, solução da equação homogênea associada é dada por

$$y_c = c_1 e^t + c_2 txe^t.$$

Procuramos agora, pelo método dos coeficientes indeterminados, uma solução particular do tipo $y_p = A + Bt$. Temos $y_p' = A$ e $y_p'' = 0$ e, substituindo na equação obtemos

$$-2B + A + Bt = t,$$

e assim $A = 2$ e $B = 1$; logo $y_p = 2 + t$ e assim a solução geral da equação é dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 e^t + c_2 te^t + 2 + t = c_1 x + c_2 x \ln x + 2 + \ln x.$$

□

Exemplo 40 *Resolva a equação não homogênea* $x^2 y'' - 3xy' + 3y = 2x^4 e^x$

Solução: Começamos resolvendo a equação homogênea associada

$$x^2 y'' - 3xy' + 3y = 0$$

que, após a substituição $x = e^t$, é transformada na equação com coeficientes constantes

$$y'' - 4y' + 3y = 0.$$

A equação característica $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ possui as raízes $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Logo, a solução complementar é dada por

$$y_c = c_1 e^t + c_2 e^{3t} = c_1 x + c_2 x^3.$$

Agora, vamos usar o método da variação dos parâmetros para obter uma solução particular da forma

$$u_1 y_1 + u_2 y_2$$

para a equação dada, onde $y_1 = x$ e $y_2 = x^3$. Antes, porém colocamos a equação na forma padrão dividindo-a por x^2:

$$y'' - \frac{3}{x} y' + \frac{3}{x^2} y = 2x^2 e^x.$$

Para determinar u_1 e u_2 usamos as fórmulas (25) e (26), com $y_1 = x$, $y_2 = x^3$ e $f(x) = 2x^2 e^x$ e o wronskiano de y_1 e y_2 é dado por

$$W(x, x^3) = \begin{vmatrix} x & x^3 \\ 1 & 3x^2 \end{vmatrix} = 2x^3.$$

Assim, temos:

$$u_1' = -\frac{y_2 f(x)}{W} = -\frac{x^3 2x^2 e^x}{2x^3} = -x^2 e^x$$

e

$$u_2' = \frac{y_1 f(x)}{W} = \frac{x 2x^2 e^x}{2x^3} = e^x.$$

Obtemos u_1 e u_2 integrando as expressões acima; a integral da última função é imediata, mas no caso de u_1', integramos por partes duas vezes. Assim,

$$u_1 = -x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x \quad \text{e} \quad u_2 = e^x.$$

Logo

$$\begin{aligned} u_1 &= u_1 y_1 + u_2 y_2 \\ &= (-x^2 e^x + 2xe^x - 2e^x)x + e^x x^3 \\ &= 2x^2 e^x - 2xe^x \end{aligned}$$

A solução geral então será dada por

$$y = y_c + y_p = c_1 x + c_2 x^3 + 2x^2 e^x - 2xe^x$$

□

3.3.1 Um método alternativo de solução

Uma equação de Cauchy-Euler $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ pode também ser resolvida pelo método descrito a seguir. Vamos procurar soluções do tipo $y = x^m$, onde o número m deve ser determinado. Veja que

$$y' = mx^{m-1} \quad \text{e} \quad y'' = m(m-1)x^{m-2}.$$

Substiutindo na equação ficamos com

$$\begin{aligned} ax^2y'' + bxy' + cy &= ax^2(m(m-1)x^{m-2}) + bx(mx^{m-1}) + cx^m \\ &= am(m-1)x^m + bmx^{m-1} + cx^m \\ &= x^m(am(m-1) + bm + c) \\ &= x^m(am^2 + (b-a)m + c) \end{aligned}$$

e assim, $y = x^m$ será uma solução para a equação de Cauchu-Euler (homogênea) $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ quando o número m for uma solução da equação auxiliar

$$am^2 + (b-a)m + c = 0 \tag{27}$$

Consideraremos três casos distintos, dependendo das raízes dessa equação: raízes reais e distintas, reais e iguais ou complexas. Neste último caso, as raízes são conjugadas.

CASO 1: Raízes reais e distintas

Se m_1 e m_2 são as raízes reais da equação (27), com $m_1 \neq m_2$, então $y_1 = x^{m_1}$ e $y_2 = x^{m_2}$ formam um conjunto fundamental de soluções, e a solução geral é dada por

$$y = c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_2}.$$

CASO 2: Raízes reais e iguais

Se as raízes de (27) são iguais, isto é, $m_1 = m_2$, então obtemos apenas uma solução: $y_1 = x^{m_1}$; neste caso, como o discriminante da equação auxiliar é zero, segue que $m_1 = -(b-a)/2a$.

Para construir uma segunda solução y_2 usamos o método de redução de ordem. Primeiro escrevemos a equação na forma padrão dividindo-as por ax^2:

$$y'' + \frac{b}{ax} y' + \frac{c}{ax^2} y = 0$$

e identificamos $P(x) = \frac{b}{ax}$. Logo,

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1 \int \frac{e^{-\int P(x)dx}}{(y_1)^2} dx \\
&= x^{m_1} \int \frac{e^{\int (b/ax)dx}}{x^{2m_1}} dx \\
&= x^{m_1} \int \frac{e^{-(b/a)\ln x}}{x^{2m_1}} dx \\
&= x^{m_1} \int x^{-b/a} x^{-2m_1} dx \\
&= x^{m_1} \int x^{-b/a} x^{(b-a)/a} dx \\
&= x^{m_1} \int x^{-1} dx \\
&= x^{m_1} \ln x
\end{aligned}$$

A solução geral será dada então por

$$c_1 x^{m_1} + c_2 x^{m_1} \ln x.$$

CASO 3: Raízes complexas conjugadas

Se as raízes da equação auxiliar (27) são complexas

$$m_1 = \alpha + \beta i, \quad m_2 = \alpha - \beta i,$$

onde α e $\beta > 0$ são números reais, pode-se mostrar que a solução geral será dada por

$$y = c_1 x^\alpha \cos(\beta \ln x) + c_2 x^\alpha \operatorname{sen}(\beta \ln x).$$

Exemplo 41 *Resolva a equação* $x^2y'' + 3xy' + 3y = 0$

Solução: A equação auxiliar nesse caso é dada por $m^2 + 2m + 3 = 0$ e suas raízes são $m_1 = -1 + \sqrt{2}i$ e $m_2 = -1 - \sqrt{2}i$. Fazendo as identificações $\alpha = -1$ e $\beta = \sqrt{2}$, segue que a solução geral para a equação é dada por

$$y = c_1 x^{-1} \cos(\sqrt{2} \ln x) + c_2 x^{-1} \operatorname{sen}(\sqrt{2} \ln x).$$

Exercícios

1. Resolva a equação diferencial dada.

   (a) $x^2y'' - 2y = 0$

   (b) $xy'' + y' = 0$

   (c) $x^2y'' + xy' + 4y = 0$

   (d) $x^2y'' - 3xy' - 2y = 0$

   (e) $25x^2y'' + 25xy' + y = 0$

   (f) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$

   (g) $x^2y'' - xy' + 2y = 0$

   (h) $3x^2y'' + 6xy' + y = 0$

2. Resolva as equações dadas usando o método da variação dos parâmetros.

   (a) $xy'' + y' = x$

   (b) $xy'' - 4y' = x^4$

   (c) $2x^2y'' + 5xy' + y = x^2 - x$

   (d) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^4 - e^x$

   (e) $x^2y'' - xy' + y = 2x$

   (f) $x^2y'' - 2xy' + 2y = x^3 \ln x$