

Equações diferenciais

Antonio Carlos Nogueira

1 Introdução às equações diferenciais

Nesta seção introduziremos os conceitos básicos das equações diferenciais e apresentaremos os principais resultados da teoria de equações diferenciais de primeira ordem. Como é de se esperar as palavras diferencial e equação sugerem a resolução de algum tipo de equação que envolva derivadas. Na verdade, é isto mesmo! Porém, antes de iniciarmos a resolução de qualquer coisa do tipo será necessário conhecermos algumas definições e terminologias.

1.1 Terminologias e definições básicas

No curso de Cálculo 1 (ou Cálculo 2) você deve ter aprendido que, dada uma função $y = f(x)$, a sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

é também uma função de x e é calculada por regras apropriadas (regras de derivação). Por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy$$

O problema que analisaremos agora não será o de encontrar a derivada de uma dada função $y = f(x)$. Nosso problema será: dada uma equação como $\frac{dy}{dx} = 2xy$ encontrar, de algum modo, uma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação. Queremos, então, resolver equações diferenciais.

Definição 1 *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada uma **equação diferencial (ED)**.*

Tais equações podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Classificação pelo tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada equação diferencial ordinária (EDO).

Exemplo 1 (Exemplos de EDO)

a) $\frac{dy}{dx} - 5y = 1$

b) $(y - x)dx + 4xdy = 0$

c) $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$

d) $y'' - 2y' + 6y = 0$, $y = f(x)$.

Uma equação que envolve as derivadas (parciais) de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.

Exemplo 2 (Exemplos de EDP)

a) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

b) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$

Classificação pela ordem

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada presente na equação.

Exemplo 3 (Ordem de uma equação)

- a) $\frac{dy}{dx} = 5x + 3$ é uma EDO de 1ª ordem.
- b) $e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^3 = 1$ é uma equação de 2ª ordem.
- c) $4 \frac{d^3y}{x^3} + \sin x \frac{d^2y}{dx^2} + 5xy = 0$ é uma EDO de 3ª ordem
- d) Em geral uma equação diferencial ordinária de ordem n é denotada pelo símbolo $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ ou $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$

Classificação como linear ou não-linear

Uma equação diferencial é chamada **linear** se pode ser escrita na forma

$$a_n(x) \frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \dots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Em outras palavras as equações diferenciais lineares são caracterizadas pelas propriedades:

- (i) a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1 (e também não aparece produto delas);
- (ii) cada coeficiente (a_0, a_1, \dots, a_n) depende apenas da variável independente x .

Exemplo 4 (EDO's lineares)

- a) $xdy + ydx = 0$; equação linear de primeira ordem;
- b) $y'' - 2y' + y = 0$; equação linear de segunda ordem;
- c) $x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + 3x \frac{dy}{dx} + 5y = e^x$; equação linear de terceira ordem;

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

Exemplo 5 (EDO's não lineares)

1. $yy'' - 2y' = x$ não é linear pois o coeficiente de y'' depende de y .
2. $\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$ não é linear pois a potência de y no segundo termo é $2 \neq 1$.

Soluções de uma EDO

Como colocado no início dessa seção, nosso objetivo é resolver ou encontrar soluções para equações diferenciais.

Definição 2 Qualquer função f definida em algum intervalo I , que, quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, é chamada de **solução** para a equação naquele intervalo.

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$$

é uma função $y = f(x)$ que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, ou seja,

$$F(x, f(x), f'(x), \dots, f^{(n)}(x)) = 0$$

para todo x no intervalo I .

Exemplo 6 Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução: Uma maneira de comprovar se uma dada função é uma solução é escrever a equação diferencial na forma $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$ e verificar, após a substituição, se se obtém uma identidade:

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \quad \text{e} \quad y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4},$$

substituindo vemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0, \quad \text{para todo número real } x$$

Isto comprova que, de fato, $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução da equação diferencial dada. \square

Exemplo 7 Verifique que função $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$

Solução: Veja que

$$y' = e^x + xe^x \quad \text{e} \quad y'' = e^x + e^x + xe^x = xe^x + 2e^x$$

Assim, substituindo na equação obtemos:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= (xe^x + 2e^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x \\ &= xe^x + 2e^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo número real x . \square

Exemplo 8 Mostre que todo membro da família de funções

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

Solução: Primeiro devemos derivar a função y :

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + ce^t)(-ce^t)}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

O lado direito da equação se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y^2 - 1) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t} \right)^2 - 1 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

Portanto, para todo valor de c , a função dada é solução da equação diferencial. \square

Observação 1 Em geral quando resolvemos equações diferenciais, na maioria das vezes, não estamos interessados em encontrar uma família de soluções (que costumamos chamar de **solução geral**) mas sim em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Por exemplo, uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução de uma equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada é denominado **problema de valor inicial**. Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0) .

Exemplo 9 Encontre uma solução da equação $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

Solução: Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do exemplo anterior obtemos

$$2 = \frac{1 + ce^0}{1 - ce^0} = \frac{1 + c}{1 - c}$$

Resolvendo essa equação para c obtemos

$$2 - 2c = 1 + c$$

e daí

$$c = \frac{1}{3}.$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1 + \frac{1}{3}e^t}{1 - \frac{1}{3}e^t}$$

Exemplo 10 Verifique que todo membro da família de funções $y = (\frac{x^2}{4} + c)^2$ é uma solução para a equação $y' = xy^{1/2}$.

Solução: Primeiro derivamos $y = (\frac{x^2}{4} + c)^2$, obtendo

$$\begin{aligned} y' &= 2(\frac{x^2}{4} + c) \frac{2x}{4} \\ &= 2(\frac{x^2}{4} + c) \frac{x}{2} \\ &= x(\frac{x^2}{4} + c) \\ &= x\sqrt{(\frac{x^2}{4} + c)^2} \\ &= x\sqrt{y} \\ &= xy^{1/2} \end{aligned}$$

Terminologia sobre soluções

Nos exemplos 6 e 7 acima a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma solução nula para uma equação diferencial será chamada de **solução trivial**.

Quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y') = 0$, normalmente obtemos uma família de funções $G(x, y, c) = 0$, contendo um parâmetro arbitrário (a constante c) tal que cada membro da família é uma solução da equação diferencial dada (ver o exemplo 8).

Em geral, quando resolvemos uma equação diferencial de ordem n $F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0$, esperamos encontrar, como solução, uma **família a n-parâmetros de soluções** $G(x, y, c_1, c_2, \dots, c_n) = 0$. Esta família de soluções é chamada de **solução geral** da equação diferencial.

Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários (não apresenta constantes) é chamada de solução particular. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para o(s) parâmetro(s) na família de soluções (ver o exemplo 9).

Às vezes, uma equação diferencial possui uma solução que não pode ser obtida escolhendo-se os valores dos parâmetros em uma família de soluções. Uma tal solução será chamada de **solução singular**. Por exemplo, $y = 0$ é uma solução singular da equação $y' = xy^{1/2}$ do exemplo 10 pois ela não pode ser obtida da solução geral por escolha do parâmetro c .

As soluções de uma equação diferencial podem ser ainda divididas em implícitas ou explícitas. Uma solução para uma EDO que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de **solução explícita**. Por exemplo, a função $y = x^4/16$ é uma solução explícita da equação $y' = xy^{1/2}$ (6). Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma EDO em um intervalo I , se ela define uma ou mais funções explícitas em I .

Exemplo 11 Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

De fato, derivando implicitamente a equação com relação a x obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dy}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

□

Observação 2 A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define duas funções explícitas: $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2, 2)$.

Mais alguns exemplos

Exemplo 12 As funções $y = c_1 \cos 4x$ e $y = c_2 \sin 4x$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, são soluções da equação diferencial

$$y'' + 16y = 0$$

Solução: Para $y = c_1 \cos 4x$ as derivadas de primeira e segunda ordem são

$$y' = -4c_1 \sin 4x \quad \text{e} \quad y'' = -16c_1 \cos 4x,$$

então

$$y'' + 16y = -16c_1 \cos 4x + 16(c_1 \cos 4x) = 0$$

Analogamente para $y = c_2 \sin 4x$ temos

$$y'' + 16y = -16c_2 \sin 4x + 16(c_2 \sin 4x) = 0.$$

Exercício 1 Verifique que a soma das soluções do exemplo 12, $y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x$, também é uma solução da equação diferencial $y'' + 16y = 0$.

Exercícios

1. Classifique as equações diferenciais dizendo se elas são lineares ou não-lineares. Informe também a ordem de cada equação.

(a) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

(b) $x \frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{dy}{dx} \right)^4 + y = 0$

(c) $yy' + 2y = 1 + x^2$

(d) $x^3 y^{(4)} - x^2 y'' + 4xy' - 3y = 0$

(e) $x^2 dy + (y - xy - xe^x) dx = 0$

- (f) $\frac{dy}{dx^2} + 9y = \sin y$
2. Verifique se a função dada é uma solução para a equação diferencial (c_1 e c_2 são constantes)
- (a) $2y' + y = 0, y = e^{-x/2}$
- (b) $y' + 4y = 32, y = 8$
- (c) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}, y = e^{3x} + 10e^{2x}$
- (d) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24, y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$
- (e) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}, y = (\sqrt{x} + c_1)^2, x > 0, c_1 > 0$
- (f) $y' + y = \sin x, y = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$
- (g) $x^2dy + 2xydx = 0, y = -\frac{1}{x^2}$
- (h) $y' + 2xy = 1, y = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt + c_1 e^{-x^2}$
- (i) $y'' + y' - 12y = 0, y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$
- (j) $y'' - 6y' + 13y = 0, y = e^{3x} \cos 2x$
- (k) $y'' - 4y' + 4y = 0, y = e^{2x} + x e^{2x}$
- (l) $y'' + 25y = 0, y = c_1 \cos 5x$
- (m) $xy'' + 2y' = 0, y = c_1 + c_2 x^{-1}$
- (n) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0, y = c_1 \sin 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x$
3. Verifique que $y = cx + c^2$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação
- $$y = xy' + (y')^2$$
4. Verifique que $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação
- $$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$
5. Encontre valores de m para que $y = e^{mx}$ seja solução da equação diferencial dada:
- (a) $y'' - 5y' + 6y = 0$
- (b) $y'' + 10y' + 25y = 0$
6. Encontre valores de m para que $y = x^m$ seja solução da equação diferencial dada:
- (a) $x^2 y'' - y = 0$
- (b) $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$
7. Mostre que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ são soluções para
- $$x^2 y'' + 4xy' + 6y = 0.$$

2 Equações diferenciais de primeira ordem

Apresentaremos agora alguns métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem. Equações diferenciais de primeira ordem são as equações que tem a forma $F(x, y, y') = 0$.

2.1 Preliminares

Problema de valor inicial

Estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. O problema

$$\begin{aligned} \text{Resolva :} \quad & \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \text{Sujeito a :} \quad & y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

é chamado de **problema de valor inicial**.

Exemplo 13 *Determine a solução do PVI*

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Solução: $y = ce^x$ é a solução geral da equação $y' = y$, no intervalo $(-\infty, \infty)$. Se especificarmos $y(0) = 3$, então fazendo $x = 0$ e $y = 3$ na solução geral obteremos

$$3 = ce^0 = c.$$

Logo, a função $y = 3e^x$ é a solução procurada.

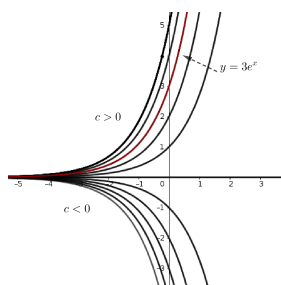


Figura 1: Exemplo 13

Exercício 2 *Determine a solução do PVI*

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(1) &= 3 \end{aligned}$$

A questão fundamental que surge quando consideramos um problema de valor inicial como (1) é: existe uma solução para o problema? Se existe uma solução, ela é única? A resposta à segunda questão é: nem sempre!!!

Exemplo 14 *Verifique que as funções $y = 0$ e $y = \frac{x^4}{16}$ são ambas soluções do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0.$$

Como pode-se ver na figura 2, os gráficos de ambas as funções passam pelo ponto $(0, 0)$.

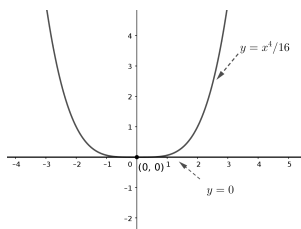


Figura 2

Em geral, deseja-se saber, antes de considerar um problema de valor inicial, se uma solução existe e, quando existe, se a mesma é única. O teorema seguinte, devido a Picard, nos fornece condições suficientes para garantir a existência e a unicidade de soluções.

Teorema 1 (Existência e unicidade de soluções) *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) no seu interior. Se $f(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R , então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (1).*

Exemplo 15

Vimos no exemplo 14 que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

possui pelo menos duas soluções cujos gráficos passam pelo ponto $(0, 0)$.

Por outro lado, as funções

$$f(x, y) = xy^{1/2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

são contínuas no semiplano superior definido por $y > 0$. Logo, segue do teorema 1 que, dado qualquer ponto (x_0, y_0) , com $y_0 > 0$, existe algum intervalo em torno de x_0 no qual a equação diferencial dada possui uma única solução $y(x)$, tal que $y(x_0) = y_0$.

Exercícios

- Determine uma região do plano xy para a qual a equação diferencial dada tem uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) na região.

(a) $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$

(b) $x \frac{dy}{dx} = y$

(c) $(4 - y^2)y' = x^2$

(d) $(x^2 + y^2)y' = y^2$

(e) $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos y$

- Determine, por inspeção, pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial dado.

(a) $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$

(b) $x \frac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 0$

- Verifique que $y = cx$ é uma solução para a equação diferencial $xy' = y$ para todo

valor do parâmetro c . Encontre pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial

$$xy' = y, \quad y(0) = 0.$$

- A função $y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ é uma solução do PVI do problema anterior?

- Verifique se o teorema 1 garante a unicidade de solução para a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$, passando pelo ponto (x_0, y_0) dado .

(a) $(x_0, y_0) = (1, 4)$

(b) $(x_0, y_0) = (2, -3)$

(c) $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

2.2 Variáveis separáveis

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão $\frac{dy}{dx}$ pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y , ou seja, ela pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \quad (2)$$

O nome separável vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser *separada* em uma função de x e uma função de y . Observe que se $f(y) \neq 0$, podemos escrever a equação acima na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \quad (3)$$

onde $h(y) = \frac{1}{f(y)}$.

Observe que essa equação pode ser expressa na forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Agora, se $y = u(x)$ é uma solução para a equação 3, então

$$h(u(x))u'(x) = g(x)$$

e daí integrando membro a membro obtemos

$$\int h(u(x))u'(x)dx = \int g(x)dx + c$$

e observando que $dy = y'(x)dx$, pela fórmula de mudança de variável, vem que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \quad (4)$$

Esta equação indica-nos o método de solução para equações diferenciais separáveis. Uma família a 1 parâmetro de soluções (ou seja, a solução geral da equação) é obtida integrando membro a membro os lados de $h(y)dy = g(x)dx$. Na prática, para resolver uma equação separável, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)dy = g(x)dx$$

e então integramos membro a membro obtendo

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

A equação 4 define y implicitamente como função de x . Em alguns casos será possível explicitar $y = y(x)$.

Exemplo 16 Resolva $(1+x)dy - ydx = 0$

Solução: A equação dada é equivalente a $(1+x)dy = ydx$; dividindo tudo por $(1+x)y$ ficamos com a equação

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1+x};$$

integrando membro a membro obtemos

$$\begin{aligned}\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{1+x} \\ \ln |y| &= \ln |1+x| + c_1 \\ y &= e^{\ln |1+x| + c_1} \\ y &= e^{\ln |1+x|} e^{c_1} \\ y &= |1+x| e^{c_1} \\ y &= \pm e^{c_1} (1+x) \\ y &= c(1+x), \text{ onde } c = \pm e^{c_1}\end{aligned}$$

Solução alternativa: Como cada integral resultou em logaritmo, uma escolha conveniente para a constante de integração seria $\ln |c|$ ao invés de c :

$$\begin{aligned}\ln |y| &= \ln |1+x| + \ln |c| \\ \ln |y| &= \ln |c(1+x)| \\ \text{e daí} \\ y &= c(1+x)\end{aligned}$$

Exemplo 17 (a) Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

Solução:

(a) Escreva a equação na forma diferencial e integre dos dois lados:

$$\begin{aligned}y^2 dy &= x^2 dx \\ \int y^2 dy &= \int x^2 dx \\ \frac{y^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + c, \text{ onde } c \in \mathbb{R}\end{aligned}$$

Resolvendo para y obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3c}$$

e pondo $k = 3c$ ficamos com

$$y = \sqrt[3]{x^3 + k}$$

(b) Fazendo $x = 0$ e $y = 2$ na solução geral obtida no item (a) ficamos com $2 = \sqrt[3]{k}$ e elevando ao cubo dos dois lados obtemos $k = 8$. Assim, a solução do PVI proposto é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}.$$

A figura 3 mostra vários membros da família de soluções. A solução do PVI está mostrada em vermelho.

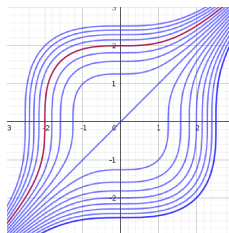


Figura 3

Exemplo 18 Resolva a equação $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$.

Solução: Escrevendo a equação na forma diferencial e integrando membro a membro obtemos:

$$\begin{aligned}(2y + \cos y)dy &= 6x^2 dx \\ \int (2y + \cos y)dy &= \int 6x^2 dx \\ y^2 + \sin y &= 2x^3 + c, \text{ onde } c \in \mathbb{R} \text{ é uma constante}\end{aligned}$$

Neste caso, a solução dada está na forma implícita, ou seja, não é possível explicitar y como função de x . Na figura 4 podem ser visualizadas algumas curvas da família de soluções.

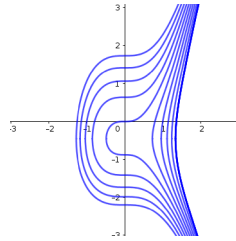


Figura 4

Observação 3 Uma equação separável pode ter soluções constantes que, porventura, podem não aparecer na família da solução geral da mesma. Observe que se na equação $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$ a função f for tal que $f(a) = 0$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e a função g não é identicamente nula, então a função constante $y(x) = a$ é uma solução da equação pois neste caso teremos $\frac{dy}{dx} = 0$ e $g(x)f(a) = 0$. Logo, uma função constante $y(x) = a$ é uma solução da equação 2 se, e somente se, $f(a) = 0$.

Exemplo 19 Resolva o PVI

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \quad y(0) = -2.$$

Solução: Primeiro colocamos a equação na forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx.$$

Agora integrando membro membro obtemos

$$\int \frac{dy}{y^2 - 4} = \int dx = x + c_1 \quad (5)$$

Para calcular a integral do lado esquerdo vamos decompor o integrando $\frac{1}{y^2 - 4}$ em frações parciais

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1}{(y - 2)(y + 2)} = \frac{A}{y - 2} + \frac{B}{y + 2} = \frac{A(y + 2) + B(y - 2)}{(y - 2)(y + 2)} = \frac{(A + B)y + (2A - 2B)}{(y - 2)(y + 2)}$$

Assim, devemos ter, $(A + B)y + (2A - 2B) = 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Em particular, para $y = 2$, obtemos $(A + B)2 + 2A - 2B = 1$, o que nos fornece $4A = 1$, ou seja, $A = 1/4$; fazendo $y = -2$,

obtemos $-2A - 2B + (2A - 2B) = 1$, o que nos dá $-4A = 1$, ou seja, $A = -1/4$. Assim, podemos escrever então que

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1/4}{y - 2} + \frac{-1/4}{y + 2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \int \frac{dy}{y^2 - 4} &= \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{y - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{y + 2} \right) dy = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y - 2} - \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y + 2} \\ &= \frac{1}{4} \ln |y - 2| - \frac{1}{4} \ln |y + 2| = \frac{1}{4} (\ln |y - 2| - \ln |y + 2|) \\ &= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| \end{aligned}$$

Voltando na equação 5 obtemos então

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| = x + c_1$$

ou

$$\ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| = 4x + c_2$$

, onde $c_2 = 4c_1$

Daí segue que

$$\frac{y - 2}{y + 2} = e^{4x + c_2} = e^{4x} e^{c_2}$$

e trocando, finalmente, e^{c_2} por c , ficamos

$$\frac{y - 2}{y + 2} = ce^{4x}$$

Resolvendo para y nessa última equação obtemos

$$y = 2 \frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}},$$

e esta é a solução geral da equação dada.

Passando à condição inicial, isto é, substituindo $x = 0$ e $y = -2$ na família a 1 parâmetro acima obtemos

$$-2 = 2 \frac{1 + c}{1 - c}$$

e daí

$$-1 + c = 1 + c$$

o que acarreta

$$-1 = 1.$$

O que isso significa? Uma possível resposta seria que o PVI dado não tem solução. Mas, vamos examinar mais cuidadosamente a equação. Veja que a equação

$$\frac{dy}{dx} = (y - 2)(y + 2)$$

é satisfeita por duas funções constantes $y = 2$ e $y = -2$. Estas soluções não são consideradas na resolução acima pois elas anulariam o denominador. Observe no entanto, que a solução $y = 2$ pode ser obtida da solução geral quando fazemos $c = 0$. No entanto, nenhum valor de c fornecerá a solução $uy = -2$. Esta solução, $y = -2$, é a única solução do PVI dado.

Exercícios

1. Resolva a equação diferencial.
 - (a) $(1-x)ydx + (1+y)xdy = 0$
 - (b) $xdy = ydx$
 - (c) $ydy = x^2dx$
 - (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$
 - (e) $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$
 - (f) $\frac{dy}{dx} = \frac{\sin 2x}{e^y}$
 - (g) $\frac{dy}{dx} = \frac{e^y}{e^x}$
 - (h) $x dx - y^2 dy = 0$
 - (i) $y' = y^2 x^3$
 - (j) $y' = \frac{x+1}{y^4+1}$
 - (k) $xe^x dx + (y^5 - 1)dy = 0$
 - (l) $xe^x dx - 2ydy = 0$
 - (m) $y' = \frac{x^2 y - y}{y+1}$
 - (n) $\frac{dy}{dx} = \frac{1+y^2}{1+x^2}$
 - (o) $2xydx + (1+x^2)dy = 0$
2. Resolva o problema de valor inicial dado.
 - (a) $e^x dx = ydy, y(0) = 1$
- (b) $xe^{x^2} dx (y^5 - 1)dy = 0, y(0) = 0$
- (c) $x \cos x dx + (1 - 6y^5)dy = 0, y(\pi) = 0$
- (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y}, y(0) = -3$
- (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{\ln x}{xy}, y(1) = 2$
- (f) $\frac{du}{dt} = \frac{2t + \sec^2 t}{2u}, u(0) = -5$
- (g) $y' = \frac{xy \sin x}{y+1}, y(0) = 1$
- (h) $\frac{dP}{dt} = \sqrt{Pt}, P(1) = 2$
3. (a) Resolva a equação diferencial $y' = 2x\sqrt{1-y^2}$.
 (b) Resolva o problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1-y^2}, y(0) = 0$ e faça um gráfico da solução.
 (c) O problema de valor inicial $y' = 2x\sqrt{1-y^2}, y(0) = 2$ tem solução? Explique.
4. Resolva o PVI $y' = \frac{\sin x}{\sin y}, y(0) = \frac{\pi}{2}$. Trace a solução.
5. Resolva a equação diferencial $y' = x + y$, usando a mudança de coordenadas $u = x + y$.

2.3 Equações homogêneas

Dizemos que uma função $f(x, y)$ é homogênea de grau n se ela satisfaz a seguinte condição

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y).$$

Exemplo 20 1. $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ é homogênea de grau 2, pois

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= (tx)^2 - 3(tx)(ty) + (ty)^2 \\ &= t^2 x^2 - 3t^2 xy + t^2 y^2 \\ &= t^2 (x^2 - 3xy + y^2) \\ &= t^2 f(x, y) \end{aligned}$$

$$2. f(x, y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$$

$$\begin{aligned} f(tx, ty) &= \sqrt[3]{(tx)^2 + (ty)^2} \\ &= \sqrt[3]{t^2x^2 + t^2y^2} \\ &= \sqrt[3]{t^2(x^2 + y^2)} \\ &= \sqrt[3]{t^2} \sqrt[3]{x^2 + y^2} \\ &= t^{2/3} \sqrt[3]{x^2 + y^2} \\ &= t^{2/3} f(x, y) \end{aligned}$$

Portanto, f é homogênea de grau $2/3$.

$$3. f(x, y) = x^3 + y^3 + 1.$$

$$f(tx, ty) = t^3x^3 + t^3y^3 + 1 \neq t^3f(x, y) = t^3x^3 + t^3y^3 + t^3. \text{ Logo } f \text{ não é homogênea.} \quad \square$$

Propriedade da homogeneidade: Se $f(x, y)$ é uma função homogênea de grau n , então podemos escrever

$$f(x, y) = x^n f(1, y/x) \quad \text{e} \quad f(y, x) = y^n f(1/y, 1)$$

Exemplo 21 A função $f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2$ é homogênea de grau 2. Logo

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + y^2 = x^2 \left[1 - 3 \left(\frac{y}{x} \right) + \left(\frac{y}{x} \right)^2 \right] = x^2 f \left(1, \frac{y}{x} \right)$$

$$f(x, y) = y^2 - 3xy + y^2 = y^2 \left[1 - 3 \left(\frac{x}{y} \right) + \left(\frac{x}{y} \right)^2 \right] = y^2 f \left(\frac{x}{y}, 1 \right)$$

Definição 3 Uma equação diferencial da forma

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \quad (6)$$

é chamada de equação homogênea se M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Em outras palavras, $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ é homogênea se

$$M(tx, ty) = t^n M(x, y) \quad \text{e} \quad N(tx, ty) = t^n N(x, y).$$

A resolução de uma equação homogênea pode ser feita através de uma substituição algébrica; especificamente $y = vx$ ou $x = uy$. Essa substituição transformará a equação dada em uma equação diferencial de primeira ordem de variáveis separáveis. Para ver isso, seja $y = vx$; então sua diferencial será dada por $dy = vdx + xdv$ (derive $y = vx$ pela regra do produto). Substituindo na equação 6, temos

$$M(x, vx)dx + N(x, vx)(vdx + xdv) = 0$$

e usando a propriedade de homogeneidade acima podemos escrever

$$x^n M(1, v)dx + x^n N(1, v)(vdx + xdv) = 0$$

ou

$$x^n [M(1, v) + N(1, v)(vdx + xdv)] = 0$$

e daí

$$M(1, v)dx + N(1, v)(vdx + xdv) = 0$$

e rearranjando os termos ficamos com a seguinte equação

$$[M(1, v) + vN(1, v)]dx + xN(1, v)dv = 0$$

Esta equação é uma equação de variáveis separáveis. Não tente decorar esta fórmula, mas aprenda o processo! Na prática o que faremos é o seguinte:

- Primeiro identificamos o grau de homogeneidade de M e N , digamos que esse grau é n .
- Em seguida dividimos toda a equação por x^n e fazemos a substituição $y = vx$, observando que nesse caso $dy = xdv + vdx$.
- Resolve-se a equação de variáveis separáveis resultante (nas variáveis v e x).
- A solução deve ser dada nas variáveis x e y .

Exemplo 22 Resolva $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

Solução: Primeiro observe que $x^2 + y^2$ e $x^2 - xy$ são homogêneas de grau 2. Dividimos então a equação por x^2 :

$$\begin{aligned}\frac{(x^2 + y^2)}{x^2}dx + \frac{(x^2 - xy)}{x^2}dy &= 0 \\ (1 + \frac{y^2}{x^2})dx + (1 - \frac{y}{x})dy &= 0\end{aligned}$$

Agora fazemos a substituição $y = vx$ e observando que $dy = xdv + vdx$:

$$\begin{aligned}(1 + v^2)dx + (1 - v)(xdv + vdx) &= 0 \\ (1 + v^2)dx + xdv - xvdv + vdx - v^2dx &= 0 \\ (1 + v^2 + v - v^2)dx + (x - xv)dv &= 0 \\ (1 + v)dx + x(1 - v)dv &= 0 \\ (1 + v)dx &= -x(1 - v)dv\end{aligned}$$

e daí

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1-v}{1+v}dv$$

ou ainda

$$\begin{aligned}\frac{dx}{x} &= -\left(-1 + \frac{2}{1+v}\right)dv \\ \frac{dx}{x} &= 1 - \left(\frac{2}{1+v}\right)dv\end{aligned}$$

Integrando membro a membro obtemos:

$$\begin{aligned}\ln|x| &= v - 2\ln|1+v| + \ln|c| \\ v &= \ln|x| + 2\ln|1+v| - \ln|c| \\ \frac{y}{x} &= 2\ln\left|1 + \frac{y}{x}\right| + \ln|x| - \ln|c|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{y}{x} &= 2 \ln \left| \frac{x+y}{x} \right| + \ln \left| \frac{x}{c} \right| \\ \frac{y}{x} &= \ln \left| \frac{(x+y)^2}{x^2} \right| + \ln \left| \frac{x}{c} \right| \\ \frac{y}{x} &= \ln \left| \frac{(x+y)^2}{x^2} \frac{x}{c} \right| = \ln \left| \frac{(x+y)^2}{cx} \right|\end{aligned}$$

E daí, vem que

$$e^{y/x} = \frac{(x+y)^2}{cx}$$

ou

$$(x+y)^2 = cxe^{y/x}$$

Exercícios

- Determine se a função dada é homogênea e, em caso afirmativo, especifique o grau de homogeneidade.
 - $x^3 + 2xy^2 - \frac{y^4}{x}$
 - $\sqrt{x+y}(4x+3y)$
 - $\frac{x^3y-x^2y^2}{(x+8y)^2}$
 - $\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$
 - $\cos \frac{x^2}{x+y}$
 - $\ln x^2 - 2 \ln y$
 - $(x+y+1)^2$
 - $x + ye^{y/x}$
 - $xe^{y/x}$
 - $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$
 - $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$
 - $(x+y)dx + xdy = 0$
 - $ydx = 2(x+y)dy$
 - $(y^2 + xy)dx + x^2dy = 0$
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$
 - $(x^4 + y^4)dx - 2x^3ydy = 0$
- Resolva a equação diferencial usando uma substituição apropriada.
 - $(x-y)dx + xdy = 0$
 - $x dx + (y-2x)dy = 0$
 - $(y^2 + yx)dx - x^2dy = 0$
 - $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$
 - $-ydx + (x + \sqrt{xy})dy = 0$
 - $2x^2ydx = (3x^3 + y^3)dy$
 - Resolva o PVI dado.
 - $xy^2 \frac{dy}{dx} = y^3 - x^3, y(1) = 2$
 - $2x^2 \frac{dy}{dx} = 3xy + y^2, y(1) = -2$
 - $(x + e^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0, y(1) = 0$
 - $(x + \sqrt{xy}) \frac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2}, y(1) = 1$
 - $y^2dx + (x^2 + xy + y^2)dy = 0, y(0) = 1$
 - $(x^2 + 2y^2)dx = xydy, y(-1) = 1$
 - $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2+y^2}, y(0) = 1$
 - $y^3dx = 2x^3dy - 2x^2ydx, y(1) = \sqrt{2}$
 - $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^2dx = xdy, y(1) = 0$

Equações lineares

Como já definimos anteriormente, uma equação linear é uma equação da forma

$$a_n(x) \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Quando $n = 1$ obtemos uma equação linear de primeira ordem.

Definição 4 *Uma equação diferencial da forma*

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x)$$

é dita uma equação linear de primeira ordem.

Dividindo por $a_1(x)$ obtemos uma forma mais interessante para a equação linear de primeira ordem a qual chamaremos de forma padrão:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \quad (7)$$

Admitiremos também que as funções $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas em um dado intervalo I .

Exemplo 23 *A equação $xy' + y = 2x$ é uma equação linear. Esta equação pode ser escrita na forma $y' + \frac{1}{x}y = 2$.*

Observe que esta equação não é separável. Mas, podemos resolvê-la observando que, pela regra do produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação dada na forma

$$(xy)' = 2x$$

Daí, integrando membro a membro, obtemos

$$xy = x^2 + C \quad \text{ou} \quad y = x + \frac{C}{x}.$$

Se a equação tivesse sido dada na forma $y' + \frac{1}{x}y = 2$ teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x . Ocorre que toda equação linear de primeira ordem pode ser resolvida por um processo semelhante pela multiplicação de ambos os lados da equação 7 por uma função $I(x)$, chamada **fator integrante**.

Determinando o fator integrante

Tentamos determinar o fator integrante $I(x)$ de modo que o lado esquerdo da equação 7, quando multiplicado por $I(x)$, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \quad (8)$$

Se pudermos encontrar tal função $I(x)$, a equação 7 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Integrando ambos os lados, ficamos com

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$$

de modo que a solução será dada por

$$y = \frac{1}{I(x)} \left[\int I(x)Q(x)dx + C \right] \quad (9)$$

Para determinar $I(X)$, vamos expandir a equação 8 e cancelar termos semelhantes:

$$\begin{aligned} I(x)y' + I(x)P(x)y &= (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y' \\ I(x)P(x)y &= I'(x)y \\ I(x)P(x) &= I'(x) \end{aligned}$$

Esta última equação é uma equação separável para I que pode ser resolvida como segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{I}{dI} &= \int P(x)dx \\ \ln |I| &= \int P(x)dx \\ I &= Ae^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

onde $A = \pm e^C$. Como estamos procurando um fator integrante particular, não o mais geral, tomamos $A = 1$ e usamos

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} \quad (10)$$

Assim, a solução geral da equação 7 é dada pela fórmula 9, onde I é dado pela fórmula 10. Em vez de memorizar esta fórmula, contudo, apenas lembremos a forma do fator integrante e o processo paara se obter a solução.

Resolvendo uma equação linear de primeira ordem

- (i) Primeiro coloque a equação na forma 7;
- (ii) Identifique $P(x)$ e encontre o fator integrante

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

- (iii) Multiplique a equação em (i) pelo fator integrante.
- (iv) O lado esquerdo da equação é igual à derivada do produto do fator integrante pela variável dependente y), isto é, de $I(x)y$.
- (v) Integre em ambos os lados.

Exemplo 24 Resolva a equação $x \frac{dy}{dx} - 4y = x^6 e^x$

Solução: Primeiro vamos colocar a equação na forma padrão (divida por x):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} = x^5 e^x \quad (11)$$

Identificamos então $P(x) = -\frac{4}{x}$, logo

$$\int P(x)dx = -\int \frac{4}{x}dx = -4 \ln|x|$$

e, portanto, o fator integrante será dado por

$$e^{-4 \ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

Agora, multiplicamos a equação 11 por x^{-4} :

$$x^{-4} \frac{dy}{dx} - x^{-4} \frac{4}{x} y = x^{-4} x^5 e^x$$

$$x^{-4} \frac{dy}{dx} - 4x^{-5} y = x e^x$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-4} y) = x e^x$$

Agora integramos dos dois lados obtendo:

$$x^{-4} y = \int x e^x dx + C$$

ou seja,

$$x^{-4} y = x e^x - e^x + C$$

e daí

$$y = x^5 e^x - x^4 e^x + C x^4.$$

Exemplo 25 Resolva a equação diferencial $\frac{dy}{dx} + 3x^2 y = 6x^2$

Exemplo 26 Encontre a solução para o PVI

$$x^2 y' + xy = 1, \quad x > 0, \quad y(1) = 2$$

Solução: Inicialmente colocamos a equação dada na forma padrão dividindo ambos os lados da equação por x^2 ficando com

$$y' + \frac{1}{x} y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0 \quad (12)$$

O fator integrante é dado por $I(x) = e^{\int (1/x) dx} = e^{\ln x} = x$. Multiplicando os dois lados da equação por x obtemos:

$$xy' + y = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Daí

$$xy = \int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

e portanto

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Posto que $y(1) = 2$, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo, a solução para o PVI dado será

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

Equações exatas

Em preparação!!!

Equações especiais (tópico adicional)

Apresentaremos nesta seção duas equações clássicas que podem ser transformadas em equações já estudadas nas seções anteriores.

Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \quad (13)$$

onde n é um número real qualquer, é chamada de **equação de Bernoulli**. Para $n = 0$ e $n = 1$, a equação 13 é linear em y . Agora, se $y \neq 0$, a equação 13 pode ser escrita como

$$y^{-n} \frac{dy}{dx} + P(x)y^{1-n} = Q(x). \quad (14)$$

Fazendo a mudança de variável $w = y^{1-n}$, $n \neq 0$, $n \neq 1$, e daí

$$\frac{dw}{dx} = (1-n)y^{-n} \frac{dy}{dx};$$

a equação 14 se transforma em uma equação linear

$$\frac{dw}{dx} + (1-n)P(x)w = (1-n)Q(x) \quad (15)$$

Resolvendo a equação 15 e depois fazendo $y^{1-n} = w$, obtemos uma solução para a equação 13.

Exemplo 27 Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2.$$

Solução: A equação $\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = xy^2$ é uma equação de Bernoulli com $n = 2$, $P(x) = \frac{1}{x}$ e $Q(x) = x$. Logo, fazendo a mudança de variável $w = y^{2-1} = y^{-1}$ a equação dada se transforma na equação linear

$$\frac{dw}{dx} - \frac{1}{x}w = -x \quad (16)$$

Resolvemos agora essa equação linear: o fator integrante para essa equação, no intervalo $(0, \infty)$ será dado por

$$e^{\int (-\frac{1}{x})dx} = e^{-\ln|x|} = e^{\ln|x|^{-1}} = x^{-1}.$$

Multiplicando 16 por x^{-1} ficamos com

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}w) = -1$$

e integrando membro a membro obtemos

$$x^{-1}w = -x + C \quad \text{ou} \quad w = -x^2 + Cx.$$

Como $w = y^{-1}$, então $y = 1/w$ ou

$$y = \frac{1}{-x^2 + Cx}$$

Equação de Ricatti

A equação diferencial não-linear

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \quad (17)$$

é chamada de **equação de Ricatti**. Para resolver tal equação vamos supor que y_1 seja uma solução particular de (17). Fazendo a mudança de variável $y = y_1 + u$ e, portanto $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$, a equação 17 se transforma em

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2 \quad (18)$$

que é uma equação de Bernoulli com $n = 2$. Logo, podemos resolver a equação 18, reduzindo-a à forma linear

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1R)w = -R \quad (19)$$

através da substituição $w = u^{-1}$

Exercício 3 a) Mostre que a substituição $y = y_1 + u$ transforma a equação 17 na equação 18.

b) Mostre que a substituição $w = u^{-1}$ transforma a equação 18 na equação 19.

Exemplo 28 Resolva a equação

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2.$$

Solução: Observe inicialmente que a equação dada é uma equação de Ricatti, com $P(x) = 2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = 1$. Para resolver essa equação seguindo o método acima, precisamos encontrar uma solução particular y_1 da mesma. É fácil verificar que $y_1 = 2x$. Assim, fazendo a substituição $y = y_1 + u$ a equação se transforma na equação diferencial de Berenoulli

$$\frac{du}{dx} - (-2x + 2(2x)1)u = 1u^2$$

ou seja

$$\frac{du}{dx} - 2xu = u^2$$

Fazendo agora a substituição $w = u^{-1}$ obtemos a equação linear

$$\frac{dw}{dx} + 2xw = -1 \quad (20)$$

O fator integrante para esta equação é e^{x^2} . Logo, sua solução será obtida integrando-se ambos os lados da equação

$$(e^{x^2}w)' = -e^{x^2}$$

ou seja

$$e^{x^2}w = -\int e^{x^2}dx + C$$

Entretanto, a integral $\int e^{x^2}dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares¹ (em outras palavras, a função e^{x^2} não possui uma primitiva). Assim, escreveremos essa integral na forma de uma integral definida, a saber,

$$\int_{x_0}^x e^{t^2}dt.$$

Assim, a solução para a equação linear 20 será dada por

$$e^{x^2}w = -\int_{x_0}^x e^{t^2}dt + C$$

ou

$$e^{x^2}\frac{1}{u} = -\int_{x_0}^x e^{t^2}dt + C,$$

e daí

$$u = \frac{e^{x^2}}{C - \int_{x_0}^x e^{t^2}dt}$$

Portanto, uma solução para a equação original será

$$y = y_1 + u = 2x + \frac{e^{x^2}}{C - \int_{x_0}^x e^{t^2}dt}$$

¹Quando uma integral $\int f(x)dx$ não pode ser resolvida em termos de funções elementares, ela é normalmente escrita como $\int_{x_0}^x f(t)dt$, onde x_0 é uma constante qualquer. Quando uma condição inicial é especificada, torna-se imperativo que essa forma seja usada.

Sobre substituições

Nas seções anteriores vimos vários exemplos de equações diferenciais que puderam ser resolvidas após uma simples mudança de coordenadas. Às vezes, a solução de uma dada equação pode parecer sem saída, mas após uma mudança de variável, talvez o que parecia um problema difícil possa ser resolvido facilmente ou, pelo menos, de uma maneira que já tenhamos o domínio da técnica. Na sequência apresentaremos mais alguns exemplos onde esse tipo de ação pode ser utilizada.

Exemplo 29 *Resolva*

$$y(1 + 2xy)dx + x(1 - 2xy)dy = 0$$

Solução: A equação diferencial

$$y(1 + 2xy)dx + x(1 - 2xy)dy = 0$$

não é de nenhum dos tipos vistos anteriormente (separável, homogênea, linear ou Bernoulli). No entanto, se olharmos bem a equação, uma substituição natural pode ser feita:

$$u = 2xy \quad \text{ou} \quad y = \frac{u}{2x},$$

com

$$dy = \frac{xdu - udx}{2x^2}.$$

Veja que com essa substituição, e após as simplificações, a equação se torna

$$2u^2dx + (1 - u)xdu = 0$$

que é uma equação separável:

$$2\frac{dx}{x} + \frac{1 - u}{u^2}du = 0$$

e daí

$$2 \ln |x| - \frac{1}{u} - \ln |u| = C$$

ou

$$\ln x^2 - \ln |2xy| = \frac{1}{2xy} + C$$

$$\ln \left| \frac{x^2}{2xy} \right| = C + \frac{1}{2xy}$$

$$\ln \left| \frac{x}{2y} \right| = C + \frac{1}{2xy}$$

e daí

$$\frac{x}{2y} = e^C e^{1/2xy}$$

ou

$$x = 2C_1 y e^{1/2xy}$$

onde $C_1 = e^C$.

Exemplo 30 *Resolva*

$$2y \frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$$

Solução: A presença do termo $2y \frac{dy}{dx}$ nos leva a pensar na substituição $u = y^2$, pois nesse caso,

$$\frac{du}{dx} = 2y \frac{dy}{dx}.$$

Assim, a equação, após a substituição fica:

$$x \frac{du}{dx} + 2u = 3x - 6$$

Dividindo tudo por x obtemos uma equação linear na forma padrão

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 3 - \frac{6}{x}.$$

Agora, aplicamos o método de resolução de uma equação linear. O fator integrante para esta equação é dado por

$$e^{\int (2/x) dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Multiplicando a equação por x^2 ficamos com

$$x^2 \frac{du}{dx} + 2xu = 3x^2 - 6x$$

ou seja

$$\frac{d}{dx} [x^2 u] = 3x^2 - 6x$$

Integrando dos dois lados obtemos

$$x^2 u = x^3 - 6x^2 + c \quad \text{ou} \quad x^2 y^2 = x^3 - 3x^2 + c$$

No próximo exemplo, veremos que, às vezes, é possível reduzir equações diferenciais de ordem mais altas a equações de primeira ordem por uma substituição conveniente.

Exemplo 31 *Resolva*

$$y'' = 2x(y')^2.$$

Solução: Faça $u = y'$; então $\frac{du}{dx} = y''$ e fazendo a substituição a equação fica assim:

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2$$

que é uma equação separável de primeira ordem:

$$\frac{du}{u^2} = 2x dx$$

Integrando dos dois lados obtemos

$$\int \frac{du}{u^2} = \int 2x dx$$

ou

$$-u^{-1} = x^2 + c^2$$

Obs: já vamos entender o porquê de utilizar a constante c^2 (mera conveniência). Precisamos agora obter a solução y da equação original. Como $u = y'$, então $y' = \frac{1}{u^{-1}} = -\frac{1}{x^2+c^2}$. Assim, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c^2} \quad \text{ou} \quad dy = -\frac{dx}{x^2 + c^2}$$

Daí integrando membro a membro ficamos com

$$\int dy = - \int \frac{dx}{x^2 + c^2}$$

ou seja

$$y + c_1 = -\frac{1}{c} \arctan \frac{x}{c}$$