0.1 Soluções para equações lineares homogêneas

Uma equação diferencial linear de ordem n da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = 0 \qquad (2)$$

é chamada de equação **homogênea**, enquanto

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x), \qquad (3)$$

com $g(x)$ não identicamente nula, é chamada de **não homogênea**.

Exemplo 7 *A equação $2y'' + 3y' - 5y = 0$ é uma equação diferencial ordinária linear de segunda ordem homogênea.*

Exemplo 8 *A equação $xy''' + 2xy'' + 5y' + 6y = e^x$ é uma equação diferencial ordinária linear de terceira ordem não homogênea.*

Veremos nas próximas seções que, para resolver uma equação não homogênea (3) devemos primeiro resolver equação homogênea associada (2).

Princípio da superposição

Daqui por diante, para evitar repetições desnecessárias, faremos sempre as mesmas suposições com relação às equações lineares (2) e (3). Em algum intervalo I,

- os coeficientes $a_i(x)$, $i = 0, 1, 2, \cdots, n$ são funções contínuas;
- a função $g(x)$ é contínua;
- $a_n(x) \neq 0$ para todo $x \in I$.

O próximo teorema nos diz que a soma, ou **superposição**, de duas ou mais soluções para uma equação diferencial linear homogênea é também uma solução

Teorema 3 (Princípio da superposição-equações homogêneas) *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_k$ soluções para a equação diferencial linear de ordem n e homogênea (2) em um intervalo I. Então, a combinação linear*

$$y = \underbrace{c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_k y_k}_{},$$

onde os c_i, $i = 1, 2, \cdots, k$, são constantes arbitrárias, é também uma solução no intervalo I.

Prova: $n = k = 2$ $\quad y_1(x)$ e $y_2(x)$ soluções para

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

Seja $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$. Então $a_2(x)[c_1 y_1'' + c_2 y_2''] + a_1(x)[c_1 y_1' + c_2 y_2'] + a_0(x)[c_1 y_1 + c_2 y_2] =$

$$= c_1 \underbrace{[a_2(x)y_1'' + a_1(x)y_1' + a_0(x)y_1]}_{=0} + c_2 \underbrace{[a_2(x)y_2'' + a_1(x)y_2' + a_0(x)y_2]}_{=0} = c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0$$

Corolário 3.1 *(i) Um múltiplo $y = c_1 y_1(x)$ de uma solução $y_1(x)$ para uma equação diferencial linear homogênea também é uma solução.*

(ii) Uma equação diferencial linear homogênea sempre possui a solução trivial $y = 0$.

Exemplo 9 a) As funções $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^2 \ln x$ são soluções da equação $x^3y''' - 2xy' + 4y = 0$ (Verifique!!!) no intervalo $(0, \infty)$. Pelo teorema anterior a combinação linear $y = c_1x^2 + c_2x^2\ln x$ também é solução.

b) As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ são soluções para

$$y''' - 6y'' + 11y' - 6y = 0 \quad \text{(Verifique!!!)}$$

Logo, $y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$ também é solução

Soluções linearmente independentes

Nosso objetivo agora é determinar quando n soluções $\boxed{y_1, y_2, \cdots, y_n}$ para a equação diferencial homogênea 2 são linearmente independentes.

Teorema 4 (Critério para independência linear de soluções) *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$, n soluções para a equação diferencial linear homogênea 2 em um intervalo I. Então, o conjunto de soluções é linearmente independente em I se, e somente se,*

$$\boxed{W(y_1, y_2, \cdots, y_n) \neq 0}$$

para todo $x \in I$.

Do teorema acima segue que quando $y_1, y_2, \cdots, y_n$ são n soluções para a equação (2) em um intervalo I, o Wronskiano é identicamente nulo ou n unca se anula no intervalo.

Definição 3 (Conjunto fundamental de soluções) *Qualquer conjunto $y_1, y_2, \cdots, y_n$ de n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea 2 em um intervalo I é chamado de **conjunto fundamental de soluções** no intervalo I.*

Teorema 5 *Sejam $\boxed{y_1, y_2, \cdots, y_n}$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial linear homogênea (2) em um intervalo I. Então, qualquer solução $Y(x)$ para (2) é uma combinação linear das n soluções linearmente independentes $y_1, y_2, \cdots, y_n$, ou seja, podemos encontrar constantes $C_1, C_2, \cdots, C_n$, tais que*

Soluções

$$Y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + \cdots + C_n y_n(x).$$

Prova:

O seguinte teorema responde a questão básica de existência de um conjunto fundamental de soluções para uma equação linear. Sua demonstração é consequência do teorema 1.

PROVA: $(n=2)$ Y é solução e y_1 e y_2 soluções l.i. de

$$a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \quad \text{em } I.$$

Seja $t \in I$ tal que $W(y_1(t), y_2(t)) \neq 0$. Sejam $Y(t) = K_1$, $Y'(t) = K_2$.

Considere o sistema

$$S: \begin{cases} C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = K_1 = Y(t) \\ C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = K_2 = Y'(t) \end{cases}$$

S é linear que satisfaz $\begin{vmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1'(t) & y_2'(t) \end{vmatrix} \neq 0$. Logo S possui uma única solução (C_1, C_2).

Seja $G(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$. Observe que:

i) $G(x)$ é solução da eq. diferencial pois ela é combinação linear de y_1 e y_2

ii) $G(x)$ satisfaz as condições $\begin{cases} G(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t) = K_1 = Y(t) \\ G'(t) = C_1 y_1'(t) + C_2 y_2'(t) = K_2 = Y'(t) \end{cases}$

iii) $Y(x)$ satisfaz a mesma eq. linear e as mesmas condições iniciais

Assim $Y(x)$ e $G(x)$ são soluções do PVI

$$\begin{cases} a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0 \\ y(t) = K_1 \quad y'(t) = K_2 \end{cases}$$

- Pela unicidade de soluções para um PVI segue que

$Y(x) = G(x)$ $\therefore$ $\boxed{Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)}$

Teorema 6 *Existe um conjunto fundamental de soluções para a equação diferencial linear homogênea (2) em um intervalo I.*

Com base nos teoremas 5 e 6 podemos fazer a seguinte definição.

Definição 4 (Solução geral - equações homogêneas) *Sejam $y_1, y_2, \cdots, y_n$ n soluções linearmente independentes para a equação diferencial homogênea (2) em um intervalo I. A* ***solução geral*** *para a equação no intervalo I é dada por*

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x),$$

onde $c_1, c_2, \cdots, c_n$ são constantes arbitrárias.

$y' + P(x)y = Q(x)$

0

Exemplo 10

A equação de segunda ordem $y'' - 9y = 0$ possui duas soluções

$$y_1(x) = e^{3x} \quad \text{e} \quad y_2(x) = e^{-3x}.$$ (Verifique!!!)

Como

$$W(e^{3x}, e^{-3x}) = \begin{vmatrix} e^{3x} & e^{-3x} \\ 3e^{3x} & -3e^{-3x} \end{vmatrix} = -6 \neq 0$$

para todo valor de x, segue que y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. Assim, a solução geral para a equação diferencial é dada por

$$y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x}.$$

□

Exemplo 11

As funções $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$ e $y_3 = e^{3x}$ satisfazem a equação de terceira ordem (Verifique!!!)

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ l.i.

$$\frac{d^3y}{dx^3} - 6\frac{d^2y}{dx^2} + 11\frac{dy}{dx} - 6y = 0.$$

$c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$

Como

$$W(e^x, e^{2x}, e^{3x}) = \begin{vmatrix} e^x & e^{2x} & e^{3x} \\ e^x & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ e^x & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{vmatrix} = 2e^{6x} \neq 0$$

para todo valor de x, segue que y_1, y_2 e y_3 formam um conjunto fundamental de soluções em $(-\infty, \infty)$. Concluimos que

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{3x}$$

é a solução geral para a equação diferencial.

O método da redução de ordem

O método da redução de ordem é um método para converter uma equação diferencial linear para uma equação diferencial linear de ordem inferior e, em seguida construir a solução geral da equação original usando a solução geral da equação de ordem inferior. Vamos ilustrar o método para uma equação de ordem 2.

$y_1 \quad y_2$

Primeiramente, vamos considerar um exemplo bem simples. Depois generalizaremos. É fácil ver que a função $\boxed{y_1(x) = e^x}$ é uma solução da equação $\boxed{y'' - y = 0.}$ Vamos tentar uma solução da forma $\boxed{y = u(x)e^x}$ então:

$$y' = ue^x + u'e^x$$

$$y'' = ue^x + 2u'e^x + u''e^x$$

y, y_1 l.i.

$\frac{y}{e^x} = u(x)$

e assim

$$y'' - y = 2u'e^x + u''e^x = \underbrace{e^x}\underbrace{(u'' + 2u')} = 0$$

Como $e^x \neq 0$, segue que $\boxed{u'' + 2u' = 0.}$

$u' = w$

$u'' = w'$

$w' + 2w = 0$

$y' + P(x)y = Q(x) \quad e^{\int P(x)dx}$

Fazendo a substituição $w = u'$, a equação resultante será uma equação linear de primeira ordem em w, dada por

$$w' + 2w = 0. \qquad e^{\int 2dx} = e^{2x}$$

Multiplicando esta equação pelo respectivo fator integrante, que nesse caso é e^{2x}, obtemos

$$e^{2x}w' + 2we^{2x} = 0$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}(e^{2x}w) = 0 \qquad e^{2x}w = C_1$$

$$w = C_1 e^{-2x}$$

Segue daí que

$$w = c_1 e^{-2x} \quad \text{ou} \quad u' = c_1 e^{-2x}$$

Integrando obtemos

$$u = -\frac{c_1}{2}e^{-2x} + c_2$$

e assim

$$y = u(x)e^x = \boxed{-\frac{c_1}{2}e^{-x} + c_2 e^x.}$$

Escolhendo $c_2 = 0$ e $c_1 = -2$, obteemos a segunda solução $y_2 = e^{-x}$. Como $W(e^x, e^{-x}) = -2 \neq 0$, para todo x, as soluções y_1 e y_2 são linearmente independentes em $(-\infty, \infty)$. Logo, as solução geral da equação é a dada por y, ou seja,

$$\boxed{y = c_1 e^{-x} + c_2 e^x.}$$

Exemplo: Considere a eq. $x^2y'' + xy' - y = 0$, $x>0$

Encontre a solução geral da eq. sabendo que $y_1 = x$ é uma solução.

Sol: Divida por x^2 para obter $y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 0$ (forma padrão)

Faça $y_2 = u(x)y_1(x) = ux$

$$y_2' = u'y_1 + uy_1' \quad , \quad y_2'' = u''y_1 + u'y_1' + u'y_1' + uy_1''$$

Substituindo $y_1 = x$: $y_2' = u'x + u$ $\quad y_2'' = u''.x + 2u'$

$$u''.x + 2u' + \frac{1}{x}(u'x + u) - \frac{1}{x^2}ux = 0$$

$$xu'' + 2u' + u' + \frac{u}{x} - \frac{u}{x} = 0$$

$$xu'' + 3u' = 0$$

$$u'' + \frac{3}{x}u' = 0$$

• uma maneira

$$u'' = -\frac{3}{x}u' \Rightarrow \int \frac{u''}{u'} = \int -\frac{3}{x} \Rightarrow \ln|u'| = -3\ln|x| = \ln|x^{-3}|$$

$$u' = x^{-3}$$

$$w = u'$$
$$dw = u''\, du$$

$$u = -\frac{x^{-2}}{2} = -\frac{1}{2x^2}$$

$$\therefore y_2 = u(x)\cdot x = -\frac{1}{2x^2}\cdot x = -\frac{1}{2x}$$

$\therefore$ a solução geral será $y = c_1 x + c_2 \frac{1}{2x}$

• outra maneira

$$w = u' \qquad w' + \frac{3}{x}w = 0$$

fator integrante: $e^{\int \frac{3}{x}dx} = e^{3\ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$

$$x^3 w' + \frac{3}{x} w x^3 = 0$$
$$x^3 w' + 3x^2 w = 0$$

$$d(x^3 w) = 0$$
$$x^3 w = c_1$$

$$w = \frac{c_1}{x^3} = u' \Rightarrow u = -\frac{c_1 x^{-2}}{2} + c_2$$

$$y_2 = x\,u(x) = -\frac{c_1}{2} x^{-1} + c_2 x = -\frac{c_1}{2}\frac{1}{x} + c_2 x$$

$$c_2 = 0 \quad , \; c_1 = 2 \qquad y_2 = \frac{1}{x} \qquad\qquad y = c_1 \frac{1}{x} + c_2 x$$

Exemplo 12 *Sabendo que* $y_1 = x^3$ *é uma solução para a equação* $x^2y'' - 6y = 0$, *use redução de ordem para encontrar uma segunda solução no intervalo* $(0, \infty)$.