Equações diferenciais

Antonio Carlos Nogueira

1 Introdução às equações diferenciais

Nesta seção introduziremos os conceitos básicos das equações diferenciais e apresentaremos os principais resultados da teoria de equações diferenciais de primeira ordem. Como é de se esperar as palavras diferencial e equação sugerem a resolução de algum tipo de equação que envolva derivadas. Na verdade, é isto mesmo! Porém, antes de iniciarmos a resolução de qualquer coisa do tipo será necessário conhecermos algumas definições e terminologias.

1.1 Terminologias e definições básicas

No curso de Cálculo 1 (ou Cálculo 2) você deve ter aprendido que, dada uma função $y = f(x)$, a sua derivada

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

é também uma função de x e é calculada por regras apropriadas (regras de derivação). Por exemplo, se $y = e^{x^2}$, então

$$\frac{dy}{dx} = 2xe^{x^2} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = 2xy$$

O problema que analisaremos agora não será o de encontrar a derivada de uma dada função $y = f(x)$. Nosso problema será: dada uma equação como $\frac{dy}{dx} = 2xy$ encontrar, de algum modo, uma função $y = f(x)$ que satisfaça a equação. Queremos, então, resolver equações diferenciais.

Definição 1 *Uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes, é chamada uma* ***equação diferencial (ED)****.*

Tais equações podem ser classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

Classificação pelo tipo

Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável independente, ela é chamada equação difercial ordinária (EDO).

Exemplo 1 (Exemplos de EDO)

a) $\frac{dy}{dx} - 5y = 1$

b) $(y - x)dx + 4xdy = 0$

c) $\frac{du}{dx} - \frac{dv}{dx} = x$

d) $y'' - 2y' + 6y = 0$, $y = f(x)$.

Uma equação que envolve as derivadas (parciais) de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentees é chamada de **equação diferencial parcial (EDP)**.

Exemplo 2 (Exemplos de EDP)

a) $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$

b) $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = u$

c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$

Classificação pela ordem

A ordem de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada presente na equação.

Exemplo 3 (Ordem de uma equação)

a) $\frac{dy}{dx} = 5x + 3$ *é uma EDO de* 1^a *ordem.*

b) $e^y \frac{d^2y}{dx^2} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 1$ *é uma equação de* 2^a *ordem.*

c) $4\frac{d^3y}{x^3} + \operatorname{sen} x \frac{d^2}{dx^2} + 5xy = 0$ *é uma EDO de* 3^a *ordem*
y

d) Em geral uma equação diferencial ordinária de ordem n *é denotada pelo símbolo* $F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \cdots, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0$ *ou* $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$

Classificação como linear ou não-linear

Uma equação diferencial é chamada **linear** se pode ser escrita na forma

$$a_n(x)\frac{d^ny}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Em outras palavras as equações diferenciais lineares são caracterizadas pelas propriedades:

(i) a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1 (e também não aparece produto delas);

(ii) cada coeficiente $(a_0, a_1, \cdots, a_n)$ depende apenas da variável independente x.

Exemplo 4 (EDO's lineares)

a) $xdy + ydx = 0$; equação linear de primeira ordem;

b) $y'' - 2y' + y - 0$; equação linear de segunda ordem;

c) $x^3\frac{d^3y}{dx^3} - x^2\frac{d^2y}{dx^2} + 3x\frac{dy}{dx} + 5y = e^x$; equação linear de terceira ordem;

Uma equação que não é linear é chamada de **não-linear**.

Exemplo 5 (EDO's não lineares)

1. $yy'' - 2y' = x$ não é linear pois o coeficiente de y'' depende de y.
2. $\frac{d^3y}{dx^3} + y^2 = 0$ não é linear pois a potência de y no segundo termo é $2 \neq 1$.

Soluções de uma EDO

Como colocado no início dessa seção, nosso objetivo é resolver ou encontrar soluções para equações diferenciais.

Definição 2 *Qualquer função* f *definida em algum intervalo* I*, que, quando substituída na equação diferencial reduz a equação a uma identidade, é chamada de* ***solução*** *para a equação naquele intervalo.*

Em outras palavras, uma solução para uma equação diferencial ordinária

$$F(x, y, y', \cdots, y^{(n)}) = 0$$

é uma função $y = f(x)$ que possui pelo menos n derivadas e satisfaz a equação, ou seja,

$$F(x, f(x), f'(x), \cdots, f^{(n)}(x)] = 0$$

para todo x no intervalo I.

Exemplo 6 *Verifique que $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução para a equação*

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$.

Solução: Uma maneira de comprovar se uma dada função é uma solução é escrever a equação diferencial na forma $\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = 0$ e verificar, após a sunbstituição, se se obtém uma identidade:

$$\frac{dy}{dx} = 4\frac{x^3}{16} = \frac{x^3}{4} \quad \text{e} \quad y^{1/2} = \left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^2}{4},$$

substituindo vemos que

$$\frac{dy}{dx} - xy^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\left(\frac{x^4}{16}\right)^{1/2} = \frac{x^3}{4} - x\frac{x^2}{4} = \frac{x^3}{4} - \frac{x^3}{4} = 0, \quad \text{para todo número real } x$$

Isto comprova que, de fato, $y = \frac{x^4}{16}$ é uma solução da equação diferencial dada. □

Exemplo 7 *Verifique que função $y = xe^x$ é uma solução para a equação linear*

$$y'' - 2y' + y = 0.$$

no intervalo $(-\infty, \infty)$

Solução: Veja que

$$y' = e^x + xe^x \quad \text{e} \quad y'' = e^x + e^x + xe^x = xe^x + 2e^x$$

Assim, substituindo na equação obtemos:

$$\begin{aligned} y'' - 2y' + y &= (xe^x + 2e^x) - 2(e^x + xe^x) + xe^x \\ &= xe^x + 2e^x - 2e^x - 2xe^x + xe^x \\ &= 0 \end{aligned}$$

para todo número real x. □

Exemplo 8 *Mostre que todo membro da família de funções*

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

é uma solução da equação diferencial

$$y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$$

Solução: Primeiro devemos derivar a função y:

$$\begin{aligned} y' &= \frac{(1 - ce^t)(ce^t) - (1 + e^t)(-ce^t}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{ce^t - c^2e^{2t} + ce^t + c^2e^{2t}}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

O lado direito da equação se torna

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(y^2 - 1) &= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}\right)^2 - 1\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{(1 + ce^t)^2 - (1 - ce^t)^2}{(1 - ce^t)^2}\right] \\ &= \frac{1}{2}\frac{4ce^t}{(1 - ce^t)^2} \\ &= \frac{2ce^t}{(1 - ce^t)^2} \end{aligned}$$

Portanto, para todo valor de c, a função dada é solução da equação diferencial. □

Observação 1 Em geral quando resolvemos equações diferenciais, na maioria das vezes, não estamos interessados em encontrar uma família de soluções (que costumamos chamar de **solução geral**) mas sim em encontrar uma solução que satisfaça algumas condições adicionais. Por exemplo, uma condição do tipo $y(t_0) = y_0$. Esta é chamada **condição inicial**, e o problema de achar uma solução de uma equação diferencial que satisfaça a condição inicial dada é donominado **problema de valor inicial**. Geometricamente, quando impomos uma condição inicial, olhamos para uma família de curvas solução e escolhemos uma que passe pelo ponto (t_0, y_0).

Exemplo 9 *Encontre uma solução da equação* $y' = \frac{1}{2}(y^2 - 1)$ *que satisfaça a condição inicial* $y(0) = 2$.

Solução: Substituindo os valores $t = 0$ e $y = 2$ na fórmula

$$y = \frac{1 + ce^t}{1 - ce^t}$$

do exemplo anterior obtemos

$$2 = \frac{1+ce^0}{1-ce^0} = \frac{1+c}{1-c}$$

Resolvendo essa equação para c obtemos

$$2 - 2c = 1 + c$$

e daí

$$c = \frac{1}{3}.$$

Assim, a solução do problema de valor inicial é

$$y = \frac{1+\frac{1}{3}e^t}{1-\frac{1}{3}e^t}$$

Exemplo 10 *Verifique que todo membro da família de funções $y = (\frac{x^2}{4}+c)^2$ é uma solução para a equação $y' = xy^{1/2}$.*

Solução: Primeiro derivamos $y = (\frac{x^2}{4}+c)^2$, obtendo

$$\begin{aligned} y' &= 2(\frac{x^2}{4}+c)\frac{2x}{4} \\ &= 2(\frac{x^2}{4}+c)\frac{x}{2} \\ &= x(\frac{x^2}{4}+c) \\ &= x\sqrt{(\frac{x^2}{4}+c)^2} \\ &= x\sqrt{y} \\ &= xy^{1/2} \end{aligned}$$

Terminologia sobre soluções

Nos exemplos 6 e 7 acima a função constante $y = 0$ também satisfaz a equação diferencial dada para todo $x \in \mathbb{R}$. Uma solução nula para uma equação diferencial será chamada de **solução trivial**.

Quando resolvemos uma equação diferencial de primeira ordem $F(x, y, y') = 0$, normalmente obtemos uma família de funções $G(x, y, c) = 0$, contendo um parâmetro arbitrário (a constante c) tal que cada membro da família é uma solução da equação diferencial dada (ver o exemplo 8).

Em geral, quando resolvemos uma equação diferencial de ordem n $F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)}) = 0$, esperamos encontrar, como solução, uma **família a n-parâmetros de soluções** $G(x, y, c_1, c_2, \cdots, c_n) = 0$. Esta família de soluções é chamada de **solução geral** da equação diferencial.

Uma solução para uma equação diferencial que não depende de parâmetros arbitrários (não apresenta constantes) é chamada de solução particular. Uma maneira de obter uma solução particular é escolher valores específicos para o(s) parâmtero(s) na família de soluções (ver o exemplo 9).

Às vezes, uma equação diferencial possui uma solução que não pode ser obtida escolhendo-se os valores dos parâmetros em uma família de soluções. Uma tal solução será chamada de **solução singular**. Por exemplo, $y = 0$ é uma solução singular da equação $y' = xy^{1/2}$ do exemplo 10 pois ela não pode ser obtida da solução geral por escolha do parâmetro c.

As soluções de uma equação diferencial podem ser ainda divididas em implícitas ou explícitas. Uma solução para uma EDO que pode ser escrita na forma $y = f(x)$ é chamada de **solução explícita**. Por exemplo, a função $y = x^4/16$ é uma solução explícita da equação $y' = xy^{1/2}$ (6). Dizemos que uma relação $G(x, y) = 0$ é uma **solução implícita** de uma EDO em um intervalo I, se ela define uma ou mais funções explícitas em I.

Exemplo 11 *Para $-2 < x < 2$, a relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ é uma solução implícita para a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

De fato, derivando implicitamente a equação com relação a x obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dy}(y^2) - \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$$

□

Observação 2 *A relação $x^2 + y^2 - 4 = 0$ define duas funções explícitas: $y = \sqrt{4 - x^2}$ e $y = -\sqrt{4 - x^2}$ no intervalo $(-2, 2)$.*

Mais alguns exemplos

Exemplo 12 *As funções $y = c_1 \cos 4x$ e $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$, onde c_1 e c_2 são constantes arbitrárias, são soluções da equação diferencial*

$$y'' + 16y = 0$$

Solução: Para $y = c_1 \cos 4x$ as derivadas de primeira e segunda ordem são

$$y' = -4c_1 \operatorname{sen} 4x \quad \text{e} \quad y'' = -16c_1 \cos 4x,$$

então

$$y'' + 16y = -16c_1 \cos 4x + 16(c_1 \cos 4x) = 0$$

Analogamente para $y = c_2 \operatorname{sen} 4x$ temos

$$y'' + 16y = -16c_2 \operatorname{sen} 4x + 16(c_2 \operatorname{sen} 4x) = 0.$$

Exercício 1 *Verifique que a soma das soluções do exemplo 12, $y = c_1 \cos 4x + c_2 \operatorname{sen} 4x$, também é uma solução da equação diferencial $y'' + 16y = 0$.*

Exercícios

1. Classifique as equações diferenciais dizendo se elas são lineares ou não-lineares. Informe também a ordem de cada equação.

   (a) $(1 - x)y'' - 4xy' + 5y = \cos x$

   (b) $x\frac{d^3y}{dx^3} - 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 + y = 0$

   (c) $yy' + 2y = 1 + x^2$

   (d) $x^3y^{(4)} - x^2y'' + 4xy' - 3y = 0$

   (e) $x^2dy + (y - xy - xe^x)dx = 0$

(f) $\frac{d^2y}{dx^2} + 9y = \operatorname{sen} y$

2. Verifique se a função dada é uma solução para a equação diferencial (c_1 e c_2 são constantes)

   (a) $2y' + y = 0$, $y = e^{-x/2}$
   (b) $y' + 4y = 32$, $y = 8$
   (c) $\frac{dy}{dx} - 2y = e^{3x}$, $y = e^{3x} + 10e^{2x}$
   (d) $\frac{dy}{dt} + 20y = 24$, $y = \frac{6}{5} - \frac{6}{5}e^{-20t}$
   (e) $\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{x}}$,
   $y = (\sqrt{x} + c_1)^2$, $x > 0$, $c_1 > 0$
   (f) $y' + y = \operatorname{sen} x$,
   $y = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x - \frac{1}{2}\cos x + 10e^{-x}$
   (g) $x^2 dy + 2xy dx = 0$, $y = -\frac{1}{x^2}$
   (h) $y' + 2xy = 1$,
   $y = e^{-x^2}\int_0^x e^{t^2}dt + c_1 e^{-x^2}$
   (i) $y'' + y' - 12y = 0$, $y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-4x}$
   (j) $y'' - 6y' + 13y = 0$, $y = e^{3x}\cos 2x$
   (k) $y'' - 4y' + 4y = 0$, $y = e^{2x} + xe^{2x}$
   (l) $y'' + 25y = 0$, $y = c_1 \cos 5x$
   (m) $xy'' + 2y' = 0$, $y = c_1 + c_2 x^{-1}$
   (n) $y''' - y'' + 9y' - 9y = 0$,
   $y = c_1 \operatorname{sen} 3x + c_2 \cos 3x + 4e^x$

3. Verifique que $y = cx + c^2$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação

$$y = xy' + (y')^2$$

4. Verifique que $y = cx + \sqrt{1 + c^2}$ é uma família a um parâmetro de soluções para a equação

$$y = xy' + \sqrt{1 + (y')^2}$$

5. Encontre valores de m para que $y = e^{mx}$ seja solução da equação diferncial dada:

   (a) $y'' - 5y' + 6y = 0$
   (b) $y'' + 10y' + 25y = 0$

6. Encontre valores de m para que $y = x^m$ seja solução da equação diferncial dada:

   (a) $x^2 y'' - y = 0$
   (b) $x^2 y'' + 6xy' + 4y = 0$

7. Mostre que $y_1 = x^2$ e $y_2 = x^3$ são soluções para
$$x^2 y'' - 4xy' + 6y = 0.$$

2 Equações diferenciais de primeira ordem

Apresentaremos agora alguns métodos de resolução de equações diferenciais de primeira ordem. Equações difeirenciais de primeira ordem são as equações que tem a forma $F(x, y, y') = 0$.

2.1 Preliminares

Problema de valor inicial

Estamos interessados em resolver uma equação diferencial de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

sujeita à condição inicial $y(x_0) = y_0$, onde $x_0 \in I$ e $y_0 \in \mathbb{R}$. O problema

$$\begin{aligned} \textit{Resolva}: &\quad \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \textit{Sujeito a}: &\quad y(x_0) = y_0 \end{aligned} \tag{1}$$

é chamado de **problema de valor inicial**.

Exemplo 13 *Determine a solução do PVI*

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(0) &= 3 \end{aligned}$$

Solução: $y = ce^x$ é a solução geral da equação $y' = y$, no intervalo $(-\infty, \infty)$. Se especificarmos $y(0) = 3$, então fazendo $x = 0$ e $y = 3$ na solução geral obteremos

$$3 = ce^0 = c.$$

Logo, a função $y = 3e^x$ é a solução procurada.

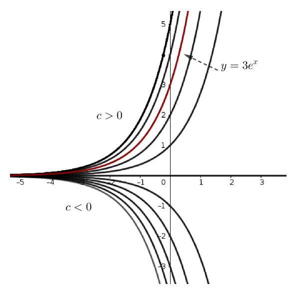

Figura 1: Exemplo 13

Exercício 2 *Determine a solução do PVI*

$$\begin{aligned} y' &= y \\ y(1) &= 3 \end{aligned}$$

A questão fundamental que surge quando consideramos um problema de valor inicial como (1) é: existe uma solução para o problema? Se existe uma solução, ela é única? A resposta à segunda questão é: nem sempre!!!

Exemplo 14 *Verifique que as funções $y = 0$ e $y = \frac{x^4}{16}$ são ambas soluções do problema de valor inicial*

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}, \quad y(0) = 0.$$

Como pode-se ver na figura 2, os gráficos de ambas as funções passam pelo ponto $(0, 0)$.

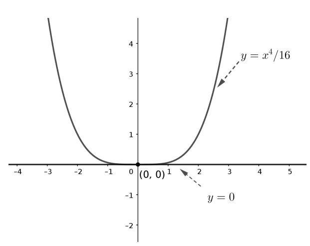

Figura 2

Em geral, deseja-se saber, antes de considerar um problema de valor inicial, se uma solução existe e, quando existe, se a mesma é única. O teorema seguinte, devido a Picard, nos fornece condições suficientes para garantir a existência e a unicidade de soluções.

Teorema 1 (Existência e unicidade de soluções) *Seja R uma região retangular no plano xy definida por $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, que contém o ponto (x_0, y_0) no seu interior. Se $f(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas em R, então existe um intervalo I centrado em x_0 e uma única função $y(x)$ definida em I que satisfaz o problema de valor inicial (1).*

Exemplo 15

Vimos no exemplo 14 que a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = xy^{1/2}$$

possui pelo menos duas soluções cujos gráficos passam pelo ponto $(0,0)$.

Por outro lado, as funções

$$f(x,y) = xy^{1/2} \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{2y^{1/2}}$$

são contínuas no semiplano superior definido por $y > 0$. Logo, segue do teorema 1 que, dado qualquer ponto (x_0, y_0), com $y_0 > 0$, existe algum intervalo em torno de x_0 no qual a equação diferencial dada possui uma única solução $y(x)$, tal que $y(x_0) = y_0$.

Exercícios

1. Determine uma região do plano xy para a qual a equação diferencial dada tem uma única solução passando por um ponto (x_0, y_0) na região.
   (a) $\frac{dy}{dx} = y^{2/3}$
   (b) $x\frac{dy}{dx} = y$
   (c) $(4 - y^2)y' = x^2$
   (d) $(x^2 + y^2)y' = y^2$
   (e) $\frac{dy}{dx} = x^3 \cos y$
2. Determine, por inspeção, pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial dado.
   (a) $y' = 3y^{2/3}$, $y(0) = 0$
   (b) $x\frac{dy}{dx} = 2y$, $y(0) = 0$
3. Verifique que $y = cx$ é uma solução para a equação diferencial $xy' = y$ para todo valor do parâmetro c. Encontre pelo menos duas soluções para o problema de valor inicial
   $$xy' = y, \quad y(0) = 0.$$
4. A função $y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ é uma solução do PVI do problema anterior?
5. Verifique se o teorema 1 garante a unicidade de solução para a equação diferencial $y' = \sqrt{y^2 - 9}$, passando pelo ponto (x_0, y_0) dado .
   (a) $(x_0, y_0) = (1, 4)$
   (b) $(x_0, y_0) = (2, -3)$
   (c) $(x_0, y_0) = (-1, 1)$

2.2 Variáveis separáveis

Uma **equação separável** é uma equação diferencial de primeira ordem na qual a expressão $\frac{dy}{dx}$ pode ser fatorada como uma função de x multiplicada por uma função de y, ou seja, ela pode ser escrita na forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)f(y) \tag{2}$$

O nome separável vem do fato de que a expressão do lado direito pode ser *separada* em uma função de x e uma função de y. Observe que se $f(y) \neq 0$, podemos escrever a equação acima na forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{g(x)}{h(y)} \tag{3}$$

onde $h(y) = \frac{1}{f(y)}$.

Observe que essa equação pode ser expressa na forma

$$h(y)\frac{dy}{dx} = g(x).$$

Agora, se $y = u(x)$ é uma solução para a equação 3, então

$$h(u(x))u'(x) = g(x)$$

e daí integrando membro a membro obtemos

$$\int h(u(x))u'(x)dx = \int g(x)dx + c$$

e observando que $dy = u'(x)dx$, pela fórmula de mudança de variável, vem que

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c \tag{4}$$

Esta equação indica-nos o método de solução para equações diferenciais separáveis. Uma família a 1 parâmetro de soluções (ou seja, a solução geral da equação) é obtida integrando membro a membro os lados de $h(y)dy = g(x)dx$. Na prática, para resolver uma equação separável, a reescrevemos na forma diferencial

$$h(y)dy = g(x)dx$$

e então integramos membro a membro obtendo

$$\int h(y)dy = \int g(x)dx + c$$

A equação 4 define y implicitamente como função de x. Em alguns casos será possível explicitar $y = y(x)$.

Exemplo 16 *Resolva* $(1 + x)dy - ydx = 0$

Solução: A equação dada é equivalente a $(1 + x)dy = ydx$; dividindo tudo por $(1 + x)y$ ficamos com a equação

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{1 + x};$$

integrando membro a membro obtemos

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y} &= \int \frac{dx}{1+x} \\
\ln|y| &= \ln|1+x| + c_1 \\
y &= e^{\ln|1+x|+c_1} \\
y &= e^{\ln|1+x|}e^{c_1} \\
y &= |1+x|e^{c_1} \\
y &= \pm e^{c_1}(1+x) \\
y &= c(1+x), \text{ onde } c = \pm e^{c_1}
\end{aligned}$$

Solução alternativa: Como cada integral resultou em logaritmo, uma escolha conveniente para a constante de integração seria $\ln|c|$ ao invés de c:

$$\begin{aligned}
\ln|y| &= \ln|1+x| + \ln|c| \\
\ln|y| &= \ln|c(1+x)|
\end{aligned}$$

e daí

$$y = c(1+x)$$

Exemplo 17 *(a) Resolva a equação diferencial* $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2}{y^2}$

(b) Encontre a solução dessa equação que satisfaça a condição inicial $y(0) = 2$.

Solução:
(a) Escreva a equação na forma diferencial e integre dos dois lados:

$$\begin{aligned}
y^2 dy &= x^2 dx \\
\int y^2 dy &= \int x^2 dx \\
\frac{y^3}{3} &= \frac{x^3}{3} + c, \text{ onde } c \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

Resolvendo para y obtemos

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 3c}$$

e pondo $k = 3c$ ficamos com

$$y = \sqrt[3]{x^3 + k}$$

(b) Fazendo $x = 0$ e $y = 2$ na solução geral obtida no item (a) ficamos com $2 = \sqrt[3]{k}$ e elevando ao cubo dos dois lados obtemos $k = 8$. Assim, a solução do PVI proposto é

$$y = \sqrt[3]{x^3 + 8}.$$

A figura 3 mostra vários membros da família de soluções. A solução do PVI está mostrada em vermelho.

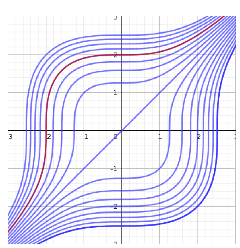

Figura 3

Exemplo 18 *Resolva a equação* $\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y+\cos y}$.

Solução: Escrevendo a equação na forma diferencial e integrando membro a membro obtemos:

$$\begin{aligned} (2y+\cos y)dy &= 6x^2 dx \\ \int (2y+\cos y)dy &= \int 6x^2 dx \\ y^2 + \operatorname{sen} y &= 2x^3 + c, \text{ onde } c \in \mathbb{R} \text{ é uma constante} \end{aligned}$$

Neste caso, a solução dada está na forma implícita, ou seja, não é possível explicitar y como função de x. Na figura 4 podem ser visualizadas algumas curvas da família de soluções.

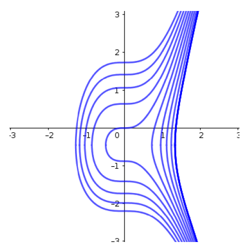

Figura 4

Observação 3 *Uma equação separável pode ter soluções constantes que, porventura, podem não aparecer na família da solução geral da mesma. Observe que se na equação* $\frac{dy}{dx} = g(x)f(y)$ *a função* f *for tal que* $f(a) = 0$ *para algum* $a \in \mathbb{R}$ *e a função* g *não é identicamente nula, então a função constante* $y(x) = a$ *é uma solução da equação pois neste caso teremos* $\frac{dy}{dx} = 0$ *e* $g(x)f(a) = 0$. *Logo, uma função constante* $y(x) = a$ *é uma solução da equação 2 se, e somente se,* $f(a) = 0$.

Exemplo 19 *Resolva o PVI*

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - 4, \quad y(0) = -2.$$

Solução: Primeiro colocamos a equação na forma

$$\frac{dy}{y^2 - 4} = dx.$$

Agora integrando membro membro obtemos

$$\int \frac{dy}{y^2-4} = \int dx = x + c_1 \tag{5}$$

Para calcular a integral do lado esquerdo vamos decompor o integrando $\frac{1}{y^2-4}$ em frações parciais

$$\frac{1}{y^2-4} = \frac{1}{(y-2)(y+2)} = \frac{A}{y-2} + \frac{B}{y+2} = \frac{A(y+2)+B(y-2)}{(y-2)(y+2)} = \frac{(A+B)y+(2A-2B)}{(y-2)(y+2)}$$

Assim, devemos ter, $(A+B)y + (2A-2B) = 1$, para todo $y \in \mathbb{R}$. Em particular, para $y = 2$, obtemos $(A+B)2 + 2A - 2B = 1$, o que nos fornece $4A = 1$, ou seja, $A = 1/4$; fazendo $y = -2$, obtemos $-2A - 2B + (2A - 2B) = 1$, o que nos dá $-4A = 1$, ou seja, $A = -1/4$. Assim, podemos escrever então que

$$\frac{1}{y^2 - 4} = \frac{1/4}{y - 2} + \frac{-1/4}{y + 2}.$$

Portanto

$$\begin{aligned}
\int \frac{dy}{y^2 - 4} &= \int \left(\frac{1}{4} \frac{1}{y - 2} - \frac{1}{4} \frac{1}{y + 2} \right) dy = \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y - 2} - \frac{1}{4} \int \frac{dy}{y + 2} \\
&= \frac{1}{4} \ln |y - 2| - \frac{1}{4} \ln |y + 2| = \frac{1}{4} \left(\ln |y - 2| - \ln |y + 2| \right) \\
&= \frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right|
\end{aligned}$$

Voltando na equação 5 obtemos então

$$\frac{1}{4} \ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| = x + c_1$$

ou

$$\ln \left| \frac{y - 2}{y + 2} \right| = 4x + c_2$$

, onde $c_2 = 4c_1$

Daí segue que

$$\frac{y - 2}{y + 2} = e^{4x + c_2} = e^{4x} e^{c_2}$$

e trocando, finalmente, e^{c_2} por c, ficamos

$$\frac{y - 2}{y + 2} = ce^{4x}$$

Resolvendo para y nessa última equação obtemos

$$y = 2 \frac{1 + ce^{4x}}{1 - ce^{4x}},$$

e esta é a solução geral da equação dada.

Passando à condição inicial, isto é, substituindo $x = 0$ e $y = -2$ na família a 1 parâmetro acima obtemos

$$-2 = 2 \frac{1 + c}{1 - c}$$

e daí

$$-1 + c = 1 + c$$

o que acarreta

$$-1 = 1.$$

O que isso significa? Uma possível resposta seria que o PVI dado não tem solução. Mas, vamos examinar mais cuidadosamente a equação. Veja que a equação

$$\frac{dy}{dx} = (y - 2)(y + 2)$$

é satisfeita por duas funções constantes $y = 2$ e $y = -2$. Estas soluções não são consideradas na resolução acima pois elas anulariam o denominador. Observe no entanto, que a solução $y = 2$ pode ser obtida da solução geral quando fazemos $c = 0$. No entanto, nenhum valor de c fornecerá a solução $y = -2$. Esta solução, $y = -2$, é a única solução do PVI dado.

Exercícios

1. Resolva a equação diferencial.
   (a) $(1-x)ydx+(1+y)xdy=0$
   (b) $xdy=ydx$
   (c) $ydy=x^2dx$
   (d) $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}$
   (e) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$
   (f) $\frac{dy}{dx}=\frac{\operatorname{sen}2x}{e^y}$
   (g) $\frac{dy}{dx}=\frac{e^y}{e^x}$
   (h) $xdx-y^2dy=0$
   (i) $y'=y^2x^3$
   (j) $y'=\frac{x+1}{y^4+1}$
   (k) $xe^xdx+(y^5-1)dy=0$
   (l) $xe^xdx-2ydy=0$
   (m) $y'=\frac{x^2y-y}{y+1}$
   (n) $\frac{dy}{dx}=\frac{1+y^2}{1+x^2}$
   (o) $2xydx+(1+x^2)dy=0$
2. Resolva o provblema de valor inicial dado.
   (a) $e^xdx=ydy$, $y(0)=1$
   (b) $xe^{x^2}dx(y^5-1)dy=0$, $y(0)=0$
   (c) $x\cos xdx+(1-6y^5)dy=0$, $y(\pi)=0$
   (d) $\frac{dy}{dx}=\frac{x}{y}$, $y(0)=-3$
   (e) $\frac{dy}{dx}=\frac{\ln x}{xy}$, $y(1)=2$
   (f) $\frac{du}{dt}=\frac{2t+\sec^2 t}{2u}$, $u(0)=-5$
   (g) $y'=\frac{xy\operatorname{sen}x}{y+1}$, $y(0)=1$
   (h) $\frac{dP}{dt}=\sqrt{Pt}$, $P(1)=2$
3. (a) Resolva a equação diferencial $y'=2x\sqrt{1-y^2}$.
   (b) Resolva o problema de valor inicial $y'=2x\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=0$ e faça um gráfico da dolução.
   (c) O problema de valor inicial $y'=2x\sqrt{1-y^2}$, $y(0)=2$ tem solução? Explique.
4. Resolva o PVI $y'=\frac{\operatorname{sen}x}{\operatorname{sen}y}$, $y(0)=\frac{\pi}{2}$. Trace a solução.
5. Resolva a equação diferencial $y'=x+y$, usando a mudança de coordenadas $u=x+y$.

2.3 Equações homogêneas

Dizemos que uma função $f(x,y)$ é homogênea de grau n se ela satisfaz a seguinte condição

$$f(tx,ty)=t^nf(x,y).$$

Exemplo 20 *1.* $f(x,y)=x^2-3xy+y^2$ *é homogênea de grau 2, pois*

$$\begin{aligned}f(tx,ty) &= (tx)^2-3(tx)(ty)+(ty)^2\\ &= t^2x^2-3t^2xy+t^2y^2\\ &= t^2(x^2-3xy+y^2)\\ &= t^2f(x,y)\end{aligned}$$

2. $f(x,y) = \sqrt[3]{x^2+y^2}$

$$\begin{aligned} f(tx,ty) &= \sqrt[3]{(tx)^2+(ty)^2} \\ &= \sqrt[3]{t^2x^2+t^2y^2} \\ &= \sqrt[3]{t^2(x^2+y^2)} \\ &= \sqrt[3]{t^2}\,\sqrt[3]{x^2+y^2} \\ &= t^{2/3}\sqrt[3]{x^2+y^2} \\ &= t^{2/3}f(x,y) \end{aligned}$$

Portanto, f é homogênea de grau 2/3.

3. $f(x,y) = x^3+y^3+1$.
$f(tx,ty) = t^3x^3+t^3y^3+1 \neq t^3f(x,y) = t^3x^3+t^3y^3+t^3$. *Logo f não é homogênea.* $\square$

Propriedade da homogeneidade: Se $f(x,y)$ é uma função homogênea de grau n, então podemos escrever

$$f(x,y) = x^n f(1, y/x) \quad \text{e} \quad f(y,x) = y^n f(1/y, 1)$$

Exemplo 21 *A função $f(x,y) = x^2-3xy+y^2$ é homogênea de grau 2. Logo*

$$f(x,y) = x^2-3xy+y^2 = x^2\left[1-3\left(\frac{y}{x}\right)+\left(\frac{y}{x}\right)^2\right] = x^2 f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$f(x,y) = y^2-3xy+y^2 = y^2\left[1-3\left(\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{x}{y}\right)^2\right] = y^2 f\left(\frac{x}{y}, 1\right)$$

Definição 3 *Uma equação diferencial da forma*

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0 \tag{6}$$

é chamada de equação homogênea se M e N são funções homogêneas do mesmo grau.

Em outras palavras, $M(x,y)dx+N(x,y)dy = 0$ é homogênea se

$$M(tx,ty) = t^nM(x,y) \quad \text{e} \quad N(tx,ty) = t^nN(x,y).$$

A resolução de uma equação homogênea pode ser feita através de uma substiuição algébrica; especificamente $y = vx$ ou $x = uy$. Essa substituição transformará a equação dada em uma equação ddiferencial de primeira ordem de variáveis separáveis. Para ver isso, seja $y = vx$; então sua diferencial será dada por $dy = vdx + xdv$ (derive $y = vx$ pela regra do produto). Substituindo na equação 6, temos

$$M(x,vx)dx + N(x,vx)(vdx+xdv) = 0$$

e usando a propriedade de homogeneidade acima podemos escrever

$$x^nM(1,v)dx + x^nN(1,v)(vdx+xdv) = 0$$

ou

$$x^n\left[M(1,v) + N(1,v)(vdx+xdv)\right] = 0$$

e daí

$$M(1,v)dx + N(1,v)(vdx + xdv) = 0$$

e rearranjando os termos ficamos com a seguinte equação

$$\left[M(1,v) + vN(1,v)\right]dx + xN(1,v)dv = 0$$

Esta equação é uma equação de variáveis separáveis. Não tente decorar esta fórmula, mas aprenda o processo! Na prática o que faremos é o seguinte:

- Primeiro identificamos o grau de homgeneidade de M e N, digamos que esse grau é n.
- Em seguida dividimos toda a equação por x^n e fazemos a substituição $y = vx$, observando que nesse caso $dy = xdv + vdx$.
- Resolve-se a equação de variáveis separáveis resultante (nas variáveis v e x).
- A solução deve ser dada nas variáveis x e y.

Exemplo 22 *Resolva* $(x^2 + y^2)dx + (x^2 - xy)dy = 0$

Solução: Primeiro observe que $x^2 + y^2$ e $x^2 - xy$ são homogêneas de grau 2. Dividimos então a equação por x^2:

$$\frac{(x^2 + y^2)}{x^2}dx + \frac{(x^2 - xy)}{x^2}dy = 0$$

$$(1 + \frac{y^2}{x^2})dx + (1 - \frac{y}{x})dy = 0$$

Agora fazemos a substituição $y = vx$ e observando que $dy = xdv + vdx$:

$$(1 + v^2)dx + (1 - v)(xdv + vdx) = 0$$

$$(1 + v^2)dx + xdv - xvdv + vdx - v^2dx = 0$$

$$(1 + v^2 + v - v^2)dx + (x - xv)dv = 0$$

$$(1 + v)dx + x(1 - v)dv = 0$$

$$(1 + v)dx = -x(1 - v)dv$$

e daí

$$\frac{dx}{x} = -\frac{1 - v}{1 + v}dv$$

ou ainda

$$\frac{dx}{x} = -\left(-1 + \frac{2}{1 + v}\right)dv$$

$$\frac{dx}{x} = 1 - \left(\frac{2}{1 + v}\right)dv$$

Integrando membro a membro obtemos:

$$\ln|x| = v - 2\ln|1 + v| + \ln|c|$$

$$v = \ln|x| + 2\ln|1 + v| - \ln|c|$$

$$\frac{y}{x} = 2\ln|1 + \frac{y}{x}| + \ln|x| - \ln|c|$$

$$\frac{y}{x} = 2\ln\left|\frac{x+y}{x}\right| + \ln\left|\frac{x}{c}\right|$$
$$\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{(x+y)^2}{x^2}\right| + \ln\left|\frac{x}{c}\right|$$
$$\frac{y}{x} = \ln\left|\frac{(x+y)^2}{x^2}\frac{x}{c}\right| = \ln\left|\frac{(x+y)^2}{cx}\right|$$

E daí, vem que

$$e^{y/x} = \frac{(x+y)^2}{cx}$$

ou

$$(x+y)^2 = cxe^{y/x}$$

Exercícios

1. Determine se a função dada é homogênea e, em caso afirmativo, especifique o grau de homogeneidade.

   (a) $x^3 + 2xy^2 - \frac{y^4}{x}$

   (b) $\sqrt{x+y}(4x+3y)$

   (c) $\frac{x^3y - x^2y^2}{(x+8y)^2}$

   (d) $\frac{x}{y^2+\sqrt{x^4+y^4}}$

   (e) $\cos\frac{x^2}{x+y}$

   (f) $\ln x^2 - 2\ln y$

   (g) $(x+y+1)^2$

   (h) $x + ye^{y/x}$

   (i) $xe^{y/x}$

2. Resolva a equação diferencial usando uma substituição apropriada.

   (a) $(x-y)dx + xdy = 0$

   (b) $xdx + (y-2x)dy = 0$

   (c) $(y^2+yx)dx - x^2dy = 0$

   (d) $\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{y+x}$

   (e) $-ydx + (x+\sqrt{xy})dy = 0$

   (f) $2x^2ydx = (3x^3+y^3)dy$

   (g) $xdy - ydx = \sqrt{x^2+y^2}dx$

   (h) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \frac{x}{y}$

   (i) $(x^2 - xy + y^2)dx - xydy = 0$

   (j) $(x+y)dx + xdy = 0$

   (k) $ydx = 2(x+y)dy$

   (l) $(y^2+xy)dx + x^2dy = 0$

   (m) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3y}{3x+y}$

   (n) $(x^4+y^4)dx - 2x^3ydy = 0$

3. Resolva o PVI dado.

   (a) $xy^2\frac{dy}{dx} = y^3 - x^3$, $y(1) = 2$

   (b) $2x^2\frac{dy}{dx} = 3xy + y^2$, $y(1) = -2$

   (c) $(x + e^{y/x})dx - xe^{y/x}dy = 0$, $y(1) = 0$

   (d) $(x+\sqrt{xy})\frac{dy}{dx} + x - y = x^{-1/2}y^{3/2}$, $y(1) = 1$

   (e) $y^2dx + (x^2+xy+y^2)dy = 0$, $y(0) = 1$

   (f) $(x^2+2y^2)dx = xydy$, $y(-1) = 1$

   (g) $xydx - x^2dy = y\sqrt{x^2+y^2}$, $y(0) = 1$

   (h) $y^3dx = 2x^3dy - 2x^2ydx$, $y(1) = \sqrt{2}$

   (i) $(\sqrt{x}+\sqrt{y})^2dx = xdy$, $y(1) = 0$

Equações lineares

Como já definimos anteriormente, uma equação linear é uma equação da forma

$$a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x).$$

Linearidade significa que todos os coeficientes são funções de x somente e que y e todas as suas derivadas são elevadas à primeira potência. Qunado $n = 1$ obtemos uma equação linear de primeira ordem.

Definição 4 *Uma equação diferencial da forma*

$$a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x) = g(x)$$

é dita uma equação linear de primeira ordem.

Dividindo por $a_1(x)$ obtemos uma forma mais interessante para a equação linear de primeira ordem a qual chamaremos de forma padrão:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{7}$$

Admitiremos também que as funções $P(x)$ e $Q(x)$ são contínuas em um dado intervalo I.

Exemplo 23 *A equação $xy' + y = 2x$ é uma equação linear. Esta equação pode ser escrita na forma $y' + \frac{1}{x}y = 2$.*

Observe que esta equação não é separável. Mas, podemos resolvê-la observando que, pela regra do produto,

$$xy' + y = (xy)'$$

e assim podemos escrever a equação dada na forma

$$(xy)' = 2x$$

Daí, integrando membro a membro, obtemos

$$xy = x^2 + C \quad \text{ou} \quad y = x + \frac{C}{x}.$$

Se a equação tivesse sido dada na forma $y' + \frac{1}{x}y = 2$ teríamos de fazer uma etapa preliminar multiplicando cada lado da equação por x. Ocorre que toda equação linear de primeira ordem pode ser resolvida por um processo semelhante pela mutliplicação de ambos os lados da equação 7 por uma função $I(x)$, chamada **fator integrante**.

Determinando o fator integrante

Tentamos determinar o fator integrante $I(x)$ de modo que o lado esquerdo da equação 7, quando multiplicado por $I(x)$, torna-se a derivada do produto $I(x)y$:

$$I(x)(y' + P(x)y) = (I(x)y)' \tag{8}$$

Se pudermos encontrar tal função $I(x)$, a equação 7 ficará

$$(I(x)y)' = I(x)Q(x)$$

Integrando ambos os lados, ficamos com

$$I(x)y = \int I(x)Q(x)dx + C$$

de modo que a solução será dada por

$$y = \frac{1}{I(x)}\left[\int I(x)Q(x)dx + C\right] \tag{9}$$

Para determinar $I(X)$, vamos expandir a equação 8 e cancelar termos semelhantes:

$$I(x)y' + I(x)P(x)y = (I(x)y)' = I'(x)y + I(x)y'$$
$$I(x)P(x)y = I'(x)y$$
$$I(x)P(x) = I'(x)$$

Esta última equação é uma equação separável para I que pode ser resolvida como segue:

$$\begin{aligned} \int \frac{I}{dI} &= \int P(x)dx \\ \ln|I| &= \int P(x)dx \\ I &= Ae^{\int P(x)dx} \end{aligned}$$

onde $A = \pm e^C$. Como estamos procurando um fator integrante particular, não o mais geral, tomamos $A = 1$ e usamos

$$I(x) = e^{\int P(x)dx} \tag{10}$$

Assim, a solução geral da equação 7 é dada pela fórmula 9, onde I é dado pela fórmula 10. Em vez de memorizar esta fórmula, contudo, apenas lembremos a forma do fator integrante e o processo paara se obter a solução.

Resolvendo uma equação linear de primeira ordem

(i) Primeiro coloque a equação na forma 7;

(ii) Identifique $P(x)$ e encontre o fator integrante

$$I(x) = e^{\int P(x)dx}$$

(iii) Multiplique a equação em (i) pelo fator integrante.

(iv) O lado esquerdo da equação é igual à derivada do produto do fator integrante pela variável dependente y), isto é, de $I(x)y$.

(v) Integre em ambos os lados.

Exemplo 24 *Resolva a equação* $x\frac{dy}{dx} - 4y = x^6e^x$

Solução: Primeiro vamos colocar a equação na forma padrão (divida por x):

$$\frac{dy}{dx} - \frac{4}{x} \quad = \quad x^5 e^x \tag{11}$$

Identificamos então $P(x) = -\frac{4}{x}$, logo

$$\int P(x)dx = -\int \frac{4}{x}dx = -4\ln|x|$$

e, portanto, o fator integrante será dado por

$$e^{-4\ln|x|} = e^{\ln x^{-4}} = x^{-4}$$

Agora, multiplicamos a equação 11 por x^{-4}:

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - x^{-4}\frac{4}{x}y = x^{-4}x^5e^x$$

$$x^{-4}\frac{dy}{dx} - 4x^{-5}y = xe^x$$

$$\frac{d}{dx}(x^{-4}y) = xe^x$$

Agora integraamos dos dois lados obtendo:

$$x^{-4}y = \int xe^x dx + C$$

ou seja,

$$x^{-4}y = xe^x - e^x + C$$

e daí

$$y = x^5e^x - x^4e^x + Cx^4.$$

Exemplo 25 *Resolva a equação diferencial* $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$

Exemplo 26 *Encontre a solução para o PVI*

$$x^2y' + xy = 1, \quad ,x > 0, \quad y(1) = 2$$

Solução: Inicialmente colocamos a equação dada na forma padrão dividindo ambos os lados da equação por x^2 ficando com

$$y' + \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^2}, \quad x > 0 \tag{12}$$

O fator integrante é dado por $I(x) = e^{\int(1/x)dx} = e^{\ln x} = x$ Multiplicando os dois lados da equação por x obtemos:

$$xy' + y = \frac{1}{x} \quad \text{ou} \quad (xy)' = \frac{1}{x}$$

Daí

$$xy = \int \frac{1}{x}dx = \ln x + C$$

e portanto

$$y = \frac{\ln x + C}{x}$$

Posto que $y(1) = 2$, temos

$$2 = \frac{\ln 1 + C}{1} = C$$

Logo,a solução para o PVI dado será

$$y = \frac{\ln x + 2}{x}.$$

Exercícios

1. Encontre a solução geral para a equação dada.
   (a) $y' = 5y$
   (b) $3\frac{dy}{dx} + 12y = 4$
   (c) $\frac{dy}{dx} + y = e^{3x}$
   (d) $y' + 3x^2y = x^2$
   (e) $x^2y' + xy = 1$
   (f) $(x + 4y^2)dy + 2ydx = 0$
   (g) $(1 + e^x)\frac{dy}{dx} + e^xy = 0$
   (h) $\cos x\frac{dy}{dx} + y \operatorname{sen} x = 0$
   (i) $x\frac{dy}{dx} + 4y = x^3 - x$
   (j) $x^2y' + x(x + 2)y = e^x$
   (k) $ydx + (xy + 2x - ye^y)dy = 0$
   (l) $x\frac{dy}{dx} + (3x + 1)y = e^{-3x}$
   (m) $\frac{dy}{dx} + y = \frac{1-e^{-2x}}{e^x+e^{-x}}$
   (n) $\frac{dy}{dx} + 2y = 0$
   (o) $\frac{dy}{dx} = y + e^x$
   (p) $y' + 2xy = x^3$
   (q) $y' = 2y + x^2 + 5$

2. Resolva o PVI dado.
   (a) $\frac{dy}{dx} + 5y = 20, y(0) = 2$
   (b) $y' + (\operatorname{tg} x)y = \cos^2 x, y(0) = -1$
   (c) $\frac{dT}{dt} = k(T - 50); k$ constante $, T(0) = 200$
   (d) $(x + 1)\frac{dy}{dx} + y = \ln x, y(1) = 10$
   (e) $\frac{dy}{dx} = \frac{y}{y-x}, y(5) = 2$
   (f) $xy' + y = e^x, y(1) = 2$

Equações exatas

Considere a equação

$$ydx + xdy = 0.$$

Embora esta equação seja homogênea e separável podemos ver facilmente que ela também é equivalente à diferencial do produto xy, isto é

$$d(xy) = ydx + xdy = 0.$$

Por integração, obtemos imediatamente a solução implícita $xy = c$.

No Cálculo 2 você deve se lembrar que se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região R do plano xy, então sua **diferencial total** é dada por

$$dz = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \tag{13}$$

Assim, se $f(x, y) = c$, segue de 13 que

$$\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0 \tag{14}$$

Em outras palavras, dada uma família de curvas $f(x, y) = c$, podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total de f.

Exemplo 27

Se $x^2 - 5xy + y^3 = c$, então segue da equação 14 que

$$(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}$$

Vamos reverter a lógica acima: dada a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}$$

(que não é separável nem homogênea) será possível identificar esta equação como sendo equivalente à equação

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0?$$

Se isto for possível, então as soluções dessa equação são dadas (implicitamente) pelas curvas (de nível) $x^2 - 5xy + y^3 = c$.

Estes comentários nos levam ao seguinte conceito.

Definição 5 (Equação exata) *Uma expressão diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

*é uma **diferencial exata** em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x, y)$. Uma equação diferencial da forma*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

*é chamada de uma **equação exata** se a expressão do lado direito é uma diferencial exata.*

Mais especificamente, a forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é exata se existe uma função $f(x, y)$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= M(x, y) \text{ e} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= N(x, y) \end{aligned} \tag{15}$$

para todo $(x, y) \in R$. Assim,devemos ter

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

Observação 4 *Qualquer equação diferencial de primeira ordem* $\frac{dy}{dx} = h(x, y)$ *pode ser escrita (de várias maneiras) na forma diferencial*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0.$$

Agora, se o lado esquerdo dessa equação puder ser identificado com uma diferencial total,

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = df(x, y),$$

então suas soluções são dadas (implicitamente) pela equação $f(x, y) = c$.

Exemplo 28 *Resolva a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2 + 1}{2x^2 y}$$

Solução: Algumas das escolhas possíveis de formas diferenciais equivalentes à equação dada são:

$$(2xy^2 + 1)dx + 2x^2 y dy = 0,$$

$$\frac{2xy^2 + 1}{2x^2 y}dx + dy = 0,$$

$$dx + \frac{2x^2 y}{2xy^2 + 1}dy = 0.$$

A melhor delas é a primeira pois é a diferencial total da função $f(x, y) = x^2y^2 + x$:

$$d(x^2y^2 + x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2xy^2 + 1)dx + 2x^2 y dy$$

Assim, as soluções da equação são dadas, implicitamente, pela fórmula $x^2y^2 + x = c$. □

Resolvendo equações exatas

Veremos agora um procedimento para resolver equações diferenciais exatas. Pelo que vimos no exemplo acima será necessário (i) um teste para determinar se a forma diferencial $M(x, y)dx + N(x, y)dy$ é exata e, se for, (ii) um procedimento para encontrar a própria função $f(x, y)$. O teste que se refere o item (i) é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (Teste de exatidão) *Sejam* $M(x, y)$ *e* $N(x, y)$ *funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um retângulo* R *do plano* xy. *Então a equação*

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é exata se, e somente se,

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Prova: A demonstração do teorema tem duas partes. Na primeira, vamos mostrar que se se a equação diferencial

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

é exata então
$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$
Supohnha então que $M(x,y)$ e $N(x,y)$ tenham derivadas parciais contínuas em todo o plano xy. Se a $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é exata então existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

para todo (x,y) na região R. Logo,

$$M(x,y) = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad N(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y},$$

e daí

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial N}{\partial x}.$$
A igualdade das duas derivadas parciais mistas é consequência da continuidade das derivadas parciais de primeira ordem de M e N.

Na segunda parte da demonstração vamos mostrar que se

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

então a equação diferencial
$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$$
é exata. A demonstração desta parte consiste em mostrar então que existe uma função $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$. A construção de tal função na verdade nos indicará um procedimento básico para a resolução de equações exatas.

Dada a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ suponha que exista $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ e vamos determinar f. Da primeira dessas equações

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$$

podemos encontrar f, integrando $M(x,y)$ com relação a x, considerando y constante. Assim, escrevemos

$$f(x,y) \quad = \quad \int M(x,y)dx + g(y), \tag{16}$$

onde a função arbitrária $g(y)$ é a constante de integração. Derivando a equação 16 com relação a y e supondo que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$, ficamo com a seguinte igualdade:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + g'(y) = N(x,y)$$

e daí

$$g'(y) \quad = \quad N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx. \tag{17}$$

Agora, integrando a equação 17 com relação a y podemos determinar $g(y)$, a menos de uma constante, e, portanto podemos determinar a função $f(x,y)$, a menos de uma constante numérica, a partir das funções $M(x,y)$ e $N(x,y)$. Para completar a demonstração do teorema, devemos mostrar que a condição $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ implica que $Mdx + ndy = 0$ é uma equação exata. Fazemos isso exibindo uma função $f(x,y)$ que satisfaça $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$ Basta então definirmos, como acima,

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y),$$

onde $g(y)$ é determinada pela equação

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx.$$

Observe que é importante que se tenha certeza que a expressão $N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx$ é independente de y; para isto basta verificar que a sua derivada com relação a x é identicamente nula:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

□

Observação 5 *A segunda parte da demonstração do teorema acima nos fornece um procedimento para resolver equações exatas. Convém também observar que no procedimento descrito no teorema para encontrar a função $f(x,y)$ podemos começar supondo primeiro que $\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$; depois integrando N com relação a y e derivando o resultado com relação a x obtemos*

$$f(x,y) = \int N(x,y)dy + h(x), \quad \textit{onde} \quad h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)dy.$$

Exemplo 29 *Resolva a equação $2xydx + (x^2-1)dy = 0$*

Solução: Tome $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = (x^2-1)$. Então $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$. Logo, a equação é exata e, pelo teorema anterior, existe uma função $f(x,y)$, tal que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1$$

Da primeira equação, obtemos

$$f(x,y) = \int 2xydx + g(y) = x^2y + g(y).$$

Derivando, com relação a y e igualando a $N(x,y)$, obtemos

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1.$$

Segue daí que

$$g'(y) = -1,$$

e como a escolha da constante de integração não é importante, podemos considerar

$$g(y) = -y.$$

Assim, $f(x, y) = x^2y - y$, e a solução da equação diferencial é dada implicitamente por

$$x^2y - y = c.$$

□

Exemplo 30 *Resolva*

$$(e^{2y} - y\cos(xy))dx + (2xe^{2y} - x\cos(xy) + 2y)dy = 0.$$

Solução:

Exemplo 31 *Resolva o problema de valor inicial*

$$\cos x \operatorname{sen} x - xy^2)dx + y(1 - x^2)dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

Fator integrante

Às vezes, é possível converter uma equação diferencial não exata em uma equação exata multiplicando-a por uma função $\mu(x, y)$ chamada **fator integrante**. Porém, a equação exata resultante pode não ser equivalente à equação original (no sentido de que a solução para uma é também solução para a outra). A multiplicação pode acarretar *perdas* ou *ganhos* de soluções.

Exemplo 32 *Resolva* $(x + y)dx + x\ln x dy = 0$*, usando* $\mu(x, y) = \frac{1}{x}$ *em* $(0, \infty)$*.*

Solução:

Exemplo 33 *Mostre que* $(x + 3x^3 \operatorname{sen} y)dx + x^4 \cos y dy = 0$ *não é exata, mas se torna exata multiplicada por* x^{-1}*. Em seguida resolva a equação.*

Solução:

Exemplo 34 *Mostre que* $\mu(x, y) = x^2y$ *é um fator integrante para*

$$(2y - 6x)dx + (3x - 4x^2y^{-1})dy = 0.$$

Use esse fator para resolver a equação.

Como descobrir um fator integrante?

Se $\mu(x, y)$ for um fator integrante da equação

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0 \tag{18}$$

ou seja,

$$\mu(x, y)M(x, y)dx + \mu(x, y)N(x, y)dy = 0 \tag{19}$$

é exata, então devemos ter (de acordo com o teorema de exatidão)

$$\frac{\partial}{\partial y}[\mu(x, y)M(x, y)] = \frac{\partial}{\partial x}[\mu(x, y)N(x, y)].$$

Derivando, através da regra do produto, devemos ter então

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} - N\frac{\partial \mu}{\partial x} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu. \qquad (20)$$

Mas resolver a equação diferencial (parcial) acima para determinar μ costuma ser mais difícil do que resolver a equação diferencial original. Existem, porém, duas exceções importantes.

Vamos supor que a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tenha um fator integrante que dependa apenas de x, digamos $\mu = \mu(x)$. Nesse caso a equação 20 se reduz à equação separável

$$\frac{d\mu}{dx} = \left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right)\mu, \qquad (21)$$

onde presumimos que $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ depende apenas de x. De modo análogo, se a equação $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$ tem um fator integrante que depende apenas de y, então a equação 20 se reduz à equação separável

$$\frac{d\mu}{dy} = \left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right)\mu, \qquad (22)$$

onde $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ depende apenas de y.

O argumento acima pode ser revertido: em particular, se $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ depende apenas de x, então podemos resolver a equação separável 21 para obter o fator integrante para a equação 18.

$$\mu(x) = exp\left[\int \left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right) dx\right]$$

Teorema 3 *Se $(\partial M/\partial y - \partial N/\partial x)/N$ é contínua e depende apenas de x, então*

$$\mu(x) = exp\left[\int \left(\frac{\partial M/\partial y - \partial N/\partial x}{N}\right) dx\right]$$

é um fator integrante para a equação 18.

Se $(\partial N/\partial x - \partial M/\partial y)/M$ é contínua e depende apenas de y, então

$$\mu(y) = exp\left[\int \left(\frac{\partial N/\partial x - \partial M/\partial y}{M}\right) dy\right]$$

é um fator integrante para a equação 18.

Exemplo 35 *Resolva $(2x^2 + y)dx + (x^2y - x)dy = 0$.*

Solução:

Exercícios

1. Verifique se a equação é exata. Se for, resolva.

   (a) $(2x-1)dx+(3y+7)dy=0$
   (b) $(5x+4y)dx+(4x-8y^3)dy=0$
   (c) $(2y^2x-3)dx+(2yx^2+4)dy=0$
   (d) $(x+y)(x-y)dx+x(x-2y)dy=0$
   (e) $(y^3-y^2\operatorname{sen}x-x)dx+(3xy^2+2y\cos x)dy=0$
   (f) $(y\ln y-e^{-xy})dx+(\frac{1}{y}+x\ln y)dy=0$
   (g) $(xy'=2xe^x-y+6x^2$
   (h) $\left(1-\frac{3}{x}+y\right)dx+\left(1-\frac{3}{y}+x\right)dy=0$
   (i) $(x^2y^3-\frac{1}{1+9x^2})\frac{dx}{dy}+x^3y^2=0$
   (j) $(\operatorname{tg}x-\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y)dx+\cos x\cos y dy=0$
   (k) $(1-2x^2-2y^2)\frac{dy}{dx}=4x^3+4xy$
   (l) $(4x^3y-15x^2-y)dx+(x^4+3y^2-x)dy=0$

2. Resolva a equação diferencial dada sujeita à condição inicial indicada.

   (a) $(x+y)^2dx+(2xy+x^2-1)dy=0,\ \ y(1)=1$
   (b) $(4y+2x-5)dx+(6y+4x-1)dy=0,\ \ y(-1)=2$
   (c) $(y^2\cos x-3x^2y-2x)dx+(2y\operatorname{sen}x-x^3+\ln y)dy=0,\ \ y(0)=e$

3. Determine o valor de k para que a equação diferencial dada seje exata.

   (a) $(y^3+kxy^4-2x)dx+(3xy^2+20x^2y^3)dy=0$
   (b) $(2xy^2+ye^x)dx+(2x^2y+ke^x-1)dy=0$

4. Resolva a equação diferencial dada, verificando que a função $\mu(x,y)$ indicada é um fator integrante.

   (a) $6xydx+(4y+9x^2)dy=0,\ \ \mu(x,y)=y^2$
   (b) $(-xy\operatorname{sen}x+2y\cos x)dx+2x\cos xdy=0,\ \ \mu(x,y)=xy$
   (c) $(2y^2+3x)dx+2xydy=0,\ \ \mu(x,y)=x$

Equações especiais (tópico adicional)

Apresentaremos nesta seção duas equações clássicas que podem ser transformadas em equações já estudadas nas seções anteriores.

Equação de Bernoulli

A equação diferencial

$$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x)y^n \tag{23}$$

onde n é um número real qualquer, é chamada de **equação de Bernoulli**. Para $n=0$ e $n=1$, a equação 23 é linear em y. Agora, se $y\neq 0$, a equação 23 pode ser escrita como

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}+P(x)y^{1-n}=Q(x). \qquad (24)$$

Fazendo a mudança de variável $w=y^{1-n}$, $n\neq 0$, $n\neq 1$, e daí

$$\frac{dw}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx};$$

a equação 24 se transforma em uma equação linear

$$\frac{dw}{dx}+(1-n)P(x)w=(1-n)Q(x) \qquad (25)$$

Resolvendo a equação 25 e depois fazendo $y^{1-n}=w$, obtemos uma solução para a equação 23.

Exemplo 36 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2.$$

Solução: A equação $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{x}y=xy^2$ é uma equação de Bernoulli com $n=2$, $P(X)=\frac{1}{x}$ e $Q(x)=x$. Logo, fazendo a mudança de variável $w=y^{2-1}=y^{-1}$ a equação dada se transforma na equação linear

$$\frac{dw}{dx}-\frac{1}{x}w \quad = \quad -x \qquad (26)$$

Resolvemos agora essa equação linear: o fator integrante para essa equação, no intervalo $(0,\infty)$ será dado por

$$e^{\int(-\frac{1}{x})dx}=e^{-\ln|x|}=e^{\ln|x|^{-1}}=x^{-1}.$$

Multiplicando 26 por x^{-1} ficamos com

$$\frac{d}{dx}(x^{-1}w)=-1$$

e integrando membro a membro obtemos

$$x^{-1}w=-x+C \quad \text{ou } w=-x^2+Cx.$$

Como $w=y^{-1}$, então $y=1/w$ ou

$$y=\frac{1}{-x^2+Cx}$$

Exercícios

1. Resolva a equação de Bernoulli dada:
   (a) $x\frac{dy}{dx}+y=\frac{1}{y^2}$
   (b) $\frac{dy}{dx}-y=e^xy^2$
   (c) $\frac{dy}{dx}=y(xy^3-1)$
   (d) $x\frac{dy}{dx}-(1+x)y=xy^2$

Equação de Ricatti

A equação diferencial não-linear

$$\frac{dy}{dx} = P(x) + Q(x)y + R(x)y^2 \tag{27}$$

é chamada de **equação de Ricatti**. Para resolver tal equação vamos supor que y_1 seja uma solução particular de (27). Fazendo a mudança de variável $y = y_1 + u$ e, portanto $\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} + \frac{du}{dx}$, a equação 27 se transforma em

$$\frac{du}{dx} - (Q + 2y_1R)u = Ru^2 \tag{28}$$

que é uma equação de Bernoulli com $n = 2$. Logo, podemos resolver a equação 28, reduzindo-a à forma linear

$$\frac{dw}{dx} + (Q + 2y_1R)w = -R \tag{29}$$

através da susbtituição $w = u^{-1}$

Exercício 3 *a) Mostre que a substiuição $y = y_1 + u$ transforma s equação 27 na equação 28.*

b) Mostre que a substituição $w = u^{-1}$ transforma a equação 28 na equação 29.

Exemplo 37 *Resolva a equação*

$$\frac{dy}{dx} = 2 - 2xy + y^2.$$

Solução: Observe inicialmente que a equação dada é uma equação de Ricatti, com $P(x) = 2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = 1$. Para resolver essa equação seguindo o método acima, precisamos encontrar uma solução paraticular y_1 da mesma. É fácil verificar que $y_1 = 2x$. Assim, fazendo a substituição $y = y_1 + u$ a equação se transforma na equação diferencial de Berenoulli

$$\frac{du}{dx} - (-2x + 2(2x)1)u = 1u^2$$

ou seja

$$\frac{du}{dx} - 2xu = u^2$$

Fazendo agora a substituição $w = u^{-1}$ obtemos a equação linear

$$\frac{dw}{dx} + 2xw = -1 \tag{30}$$

O fator integrante para esta equação é e^{x^2}. Logo, sua solução será obtida integrando-se ambos os lados da equação

$$(e^{x^2}w)' = -e^{x^2}$$

ou seja

$$e^{x^2}w = -\int e^{x^2}dx + C$$

Entretanto, a integral $\int e^{x^2} dx$ não pode ser expressa em termos de funções elementares[1] (em outras palavras, a função e^{x^2} não possui uma primitiva). Assim, escreveremos essa integral na forma de uma integral definida, a saber,

$$\int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt.$$

Assim, a solução para a equação linear 30 será dada por

$$e^{x^2} w = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt + C$$

ou

$$e^{x^2} \frac{1}{u} = -\int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt + C,$$

e daí

$$u = \frac{e^{x^2}}{C - \int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt}$$

Portanto, uma solução para a equação original será

$$y = y_1 + u = 2x + \frac{e^{x^2}}{C - \int_{x_0}^{x} e^{t^2} dt}$$

Exercícios

1. Resolva a equação de Ricatti dada, onde y_1 é uma solução conhecida.

   (a) $\frac{dy}{dx} = -2 - y + y^2$, $y_1 = 2$

   (b) $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{x^2} - \frac{1}{x}y + y^2$, $y_1 = \frac{2}{x}$

   (c) $\frac{dy}{dx} = 1 - x - y + xy^2$, $y_1 = 1$

   (d) $\frac{dy}{dx} = 2x^2 + \frac{1}{x}y - 2y^2$, $y_1 = x$.

[1]Quando uma integral $\int f(x)dx$ não pode ser resolvida em termos de funções elementares, ela é normalmente escrita como $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$, onde x_0 é uma constante qualquer. Quando uma condição inicial é especificada, torna-se imperativo que essa forma seja usada.

Sobre substituições

Nas seções anteriores vimos vários exemplos de equações diferenciais que puderam ser resolvidas após uma simples mudança de coordenadas. Às vezes, a solução de uma dada equação pode parecer sem saída, mas após uma mudança de variável, talvez o que parecia um problema difícil possa ser resolvido facilmente ou, pelo menos, de uma maneira que já tenhamos o domínio da técnica. Na sequência apresentaremos mais alguns exemplos onde esse tipo de ação pode ser utilizada.

Exemplo 38 *Resolva*

$$y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0$$

Solução: A equação diferencial

$$y(1+2xy)dx + x(1-2xy)dy = 0$$

não é de nenhum dos tipos vistos anteriormente (separável, homogênea, linear ou Bernoulli). No entanto, se olharmos bem a equação, uma substituição natural pode ser feita:

$$u = 2xy \quad \text{ou} \quad y = \frac{u}{2x},$$

com

$$dy = \frac{xdu - udx}{2x^2}.$$

Veja que com essa substituição, e após as simplificações, a equação se torna

$$2u^2dx + (1-u)xdu = 0$$

que é uma equação separável:

$$2\frac{dx}{x} + \frac{1-u}{u^2}du = 0$$

e daí

$$2\ln|x| - \frac{1}{u} - \ln|u| = C$$

ou

$$\ln x^2 - \ln|2xy| = \frac{1}{2xy} + C$$

$$\ln\left|\frac{x^2}{2xy}\right| = C + \frac{1}{2xy}$$

$$\ln\left|\frac{x}{2y}\right| = C + \frac{1}{2xy}$$

e daí

$$\frac{x}{2y} = e^C e^{1/2xy}$$

ou

$$x = 2C_1 y e^{1/2xy}$$

onde $C_1 = e^C$.

Exemplo 39 *Resolva*

$$2y\frac{dy}{dx} + 2y^2 = 3x - 6$$

Solução: A presença do termo $2y\frac{dy}{dx}$ nos leva a pensar na substituição $u = y^2$, pois nesse caso,

$$\frac{du}{dx} = 2y\frac{dy}{dx}.$$

Assim, a equação, após a substituição fica:

$$x\frac{du}{dx} + 2u = 3x - 6$$

Dividindo tudo por x obtemos uma equação linear na forma padrão

$$\frac{du}{dx} + \frac{2}{x}u = 3 - \frac{6}{x}.$$

Agora, aplicamos o método de resolução de uma equação linear. O fator integrante para esta equação é dado por

$$e^{\int (2/x)dx} = e^{\ln x^2} = x^2.$$

Multiplicando a equação por x^2 ficamos com

$$x^2\frac{du}{dx} + 2xu = 3x^2 - 6x$$

ou seja

$$\frac{d}{dx}\left[x^2u\right] = 3x^2 - 6x$$

Integrando dos dois lados obtemos

$$x^2u = x^3 - 6x^2 + c \quad \text{ou} \quad x^2y^2 = x^3 - 3x^2 + c$$

No próximo exemplo, veremos que, às vezes, é possível reduzir equações diferenciais de ordem mais altas a equações de primeira ordem por uma substituição conveniente.

Exemplo 40 *Resolva*

$$y'' = 2x(y')^2.$$

Solução: Faça $u = y'$; então $\frac{du}{dx} = y''$ e fazendo a substituição a equação fica assim:

$$\frac{du}{dx} = 2xu^2$$

que é uma equação separável de primeira ordem:

$$\frac{du}{u^2} = 2xdx$$

Integrando dos dois lados obtemos

$$\int \frac{du}{u^2} = \int 2x dx$$

ou

$$-u^{-1} = x^2 + c^2$$

Obs: já vamos entender o porquê de utilizar a constante c^2 (mera conveniência). Precisamos agora obter a solução y da equação original. Como $u = y'$, então $y' = \frac{1}{u^{-1}} = -\frac{1}{x^2+c^2}$. Assim, podemos escrever

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{x^2 + c^2} \quad \text{ou} \quad dy = -\frac{dx}{x^2 + c^2}$$

Daí integrando membro a membro ficamos com

$$\int dy = -\int \frac{dx}{x^2 + c^2}$$

ou seja

$$y + c_1 = -\frac{1}{c} \arctan \frac{x}{c}$$