Equações exatas

Considere a equação

$$d_x(xy)' = y + x\frac{dy}{dx} = y\,dx + x\,dy$$

$$\boxed{ydx + xdy = 0.}$$

Embora esta equação seja homogênea e separável podemos ver facilmente que ela também é equivalente à diferencial do produto xy, isto é

$$\int d(xy) = ydx + xdy = \int 0.$$

Por integração, obtemos imediatamente a solução implícita $xy = c$.

No Cálculo 2 você deve se lembrar que se $z = f(x, y)$ é uma função com derivadas parciais contínuas em uma região R do plano xy, então sua **diferencial total** é dada por

$$dz = \boxed{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy} \tag{13}$$

Assim, se $\boxed{f(x, y) = c,}$ segue de 13 que

$$f(x,y) - c = 0$$

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = 0} \tag{14}$$

Em outras palavras, dada uma família de curvas $\boxed{f(x,y) = c,}$ podemos gerar uma equação diferencial de primeira ordem, calculando a diferencial total de f.

Exemplo 27

Se $x^2 - 5xy + y^3 = c$, então segue da equação 14 que

$f(x,y)$

$$(2x - 5y)dx + (-5x + 3y^2)dy = 0$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}$$

Vamos reverter a lógica acima: dada a equação

$$\frac{dy}{dx} = \frac{5y - 2x}{-5x + 3y^2}$$

(que não é separável nem homogênea) será possível identificar esta equação como sendo equivalente à equação

$$d(x^2 - 5xy + y^3) = 0?$$

Se isto for possível, então as soluções dessa equação são dadas (implicitamente) pelas curvas (de nível) $x^2 - 5xy + y^3 = c$.

Estes comentários nos levam ao seguinte conceito.

Definição 5 (Equação exata) *Uma expressão diferencial*

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = M \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = N$$

é uma ***diferencial exata*** *em uma região R do plano xy se ela corresponde à diferencial total de alguma função $f(x,y)$. Uma equação diferencial da forma*

$$\boxed{M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0}$$

é chamada de uma ***equação exata*** *se a expressão do lado direito é uma diferencial exata.*

Mais especificamente, a forma diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy$ é exata se existe uma função $f(x,y)$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & M(x,y) \text{ e} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & N(x,y) \end{array} \right. \tag{15}$$

para todo $(x,y) \in R$. Assim,devemos ter

$$df(x,y) = M(x,y)dx + N(x,y)dy$$

Observação 4 *Qualquer equação diferencial de primeira ordem* $\boxed{\frac{dy}{dx} = h(x,y)}$ *pode ser escrita (de várias maneiras) na forma diferencial*

$$\underbrace{M(x,y)dx + N(x,y)dy} = 0.$$

dy − h(x,y)dx = 0
h(x,y)dx − dy = 0

Agora, se o lado esquerdo dessa equação puder ser identificado com uma diferencial total,

$$M(x,y)dx + N(x,y)dy = \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy} = df(x,y),$$

então suas soluções são dadas (implicitamente) pela equação $\boxed{f(x,y) = c.}$

Exemplo 28 *Resolva a equação diferencial*

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2+1}{2x^2y}$$

Solução: Algumas das escolhas possíveis de formas diferenciais equivalentes à equação dada são:

$$\overset{\frac{\partial f}{\partial x}}{\underbrace{(2xy^2+1)}_{M}}dx + \overset{\frac{\partial f}{\partial y}}{\underbrace{2x^2y}_{N}}dy = 0, \qquad \frac{\partial M}{\partial y} = 4xy \qquad \frac{\partial N}{\partial x} = 4xy$$

$$\frac{2xy^2+1}{2x^2y}dx + dy = 0,$$

$$dx + \frac{2x^2y}{2xy^2+1}dy = 0.$$

A melhor delas é a primeira pois é a diferencial total da função $f(x,y) = x^2y^2 + x$:

$$d(x^2y^2+x) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2xy^2+1)dx + 2x^2ydy$$

Assim, as soluções da equação são dadas, implicitamente, pela fórmula $\boxed{x^2y^2 + x = c.}$ $\square$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2 + 1$$

$$f(x,y) = \int \frac{\partial f}{\partial x}\,dx + C(y)$$

$$= \int (2xy^2 + 1)\,dx + C(y)$$

$$= 2y^2 \int x\,dx + \int dx + C(y)$$

$$= 2y^2 \frac{x^2}{2} + x + C(y)$$

Resolvendo equações exatas

Veremos agora um procedimento para resolver equações diferenciais exatas. Pelo que vimos no exemplo acima será necessário (i) um teste para determinar se a forma diferencial $M(x,y)dx+N(x,y)dy$ é exata e, se for, (ii) um procedimento para encontrar a própria função $\boxed{f(x,y).}$ O teste que se refere o item (i) é dado pelo seguinte teorema:

Teorema 2 (Teste de exatidão) *Sejam $M(x,y)$ e $N(x,y)$ funções contínuas com derivadas parciais de primeira ordem contínuas em um retângulo R do plano xy. Então a equação*

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$$

é exata se, e somente se,

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}.}$$

$\Longrightarrow$ **Prova** Supor que $Mdx + Ndy = 0$ é exata. Existe $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$. Então $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e

$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$. Pelo teo de Schwartz, como $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são contínuas então $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, isto é, $\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$.

$\Longleftarrow$ Vamos mostrar que se $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ então a eq. é exata; isto significa que devemos mostrar $f(x,y)$ tal que $\frac{\partial f}{\partial x} = M$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = N$.

Determinação de f: $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = M \\ \frac{\partial f}{\partial y} = N \leftarrow \\ \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \end{cases}$

Suponha que $\frac{\partial f}{\partial x} = M(x,y)$. Podemos obter $f(x,y)$ integrando $M(x,y)$ com relação a x (considerando y constante). Assim

$$(*) \quad f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y).$$

Como determinar $g(y)$?

Derivando $(*)$ com relação a y:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx + g'(y) = N(x,y)$$

e daí

$$g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx \qquad (**)$$

$$\int g'(y)\,dy = g(y) + c$$

Integre $(**)$ com relação a y e obtenha a $\boxed{g(y)}$ e substitua em $(*)$. A solução da equação será então $\boxed{f(x,y) = c}$.

A função $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$ onde

$$g'(y) = \boxed{N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx + \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} g(y)}_{=0} = M(x,y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \boxed{\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx} + g'(y) = N(x,y)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\int (2xy^2 + 1)\,dx\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2y^2 + x + c(y)\right)$$

$2xy^2 + 1$

Obs: $g'(y)$ não depende de x:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(g'(y)\right) = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx = \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)\,dx}_{= M(x,y)}\right) =$$

$$= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N(x,y)$$

Obs: poderíamos obter a função $f(x,y)$ começando com $N(x,y)$:

$$f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x) \quad \text{e} \quad h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy$$

Procedimentos para resolução de eq. exatas:

i) Aplicar o teste: $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$

ii) Determinar $f(x,y) = \int M(x,y)\,dx + g(y)$ onde $g'(y) = N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)\,dx$

ou $f(x,y) = \int N(x,y)\,dy + h(x)$ e $h'(x) = M(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\int N(x,y)\,dy$

Exemplos:

1) Resolva $2xy\,dx + (x^2-1)\,dy = 0$

Solução: $M(x,y) = 2xy$ e $N(x,y) = x^2-1$. Temos $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$

A eq. é exata. Existe uma função $f(x,y)$ tal que

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2-1$. Integrando $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy$ em relação a x

obtemos $f(x,y) = \int 2xy\,dx = 2y\int x\,dx = 2y\frac{x^2}{2} + g(y) = x^2y + g(y)$

$f(x,y) = x^2y + g(y)$. Derivando em relação a y e igualando

o resultado a $N(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \cancel{x^2} + g'(y) = \cancel{x^2} - 1 \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow g(y) = -y$$

Obs: A constante de integração não precisa ser incluída pois a solução será $f(x,y) = c$.

$\therefore$ $f(x,y) = x^2y - y$ e a solução da eq. diferencial é

dada por $\boxed{x^2y - y = c}$

$$y(x^2-1) = c$$

$$y = \frac{c}{x^2-1}$$

2) $\underbrace{\left(e^{2y} - y\cos(xy)\right)}_{M(x,y)} dx + \underbrace{\left(2x\,e^{2y} - x\cos(xy) + 2y\right)}_{N(x,y)} dy = 0$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2e^{2y} - \cos xy + xy\,\text{sen}(xy)$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = 2e^{2y} - \cos xy + xy\,\text{sen}(xy)$$

$\therefore \dfrac{\partial M}{\partial y} = \dfrac{\partial N}{\partial x} \quad \therefore$ eq. é exata

Supor $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 2x\,e^{2y} - x\cos xy + 2y$ e daí (integrando em relação a y)

$$f(x,y) = 2x\int e^{2y}\,dy - x\int \cos(xy)\,dy + 2\int y\,dy + h(x)$$

$$\int e^{ay}\,dy = \frac{e^{ay}}{a} + c$$

$$\int \cos(ay)\,dy = \frac{\text{sen}(ay)}{a} + c$$

$$f(x,y) = 2x\,\frac{e^{2y}}{2} - x\,\frac{\text{sen}(xy)}{x} + 2\,\frac{y^2}{2} + h(x)$$

$$f(x,y) = xe^{2y} - \text{sen}(xy) + y^2 + h(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cancel{e^{2y}} - y\cancel{\cos(xy)} + h'(x) = M(x,y) = \cancel{e^{2y}} - y\cancel{\cos(xy)}$$

$\Rightarrow h'(x) = 0 \Rightarrow h(x) = C$

$\Rightarrow h(x) = 0$

Logo uma família de soluções para esta equação é dada por $xe^{2y} - \operatorname{sen}(xy) + y^2 + C = 0$