Segunda Lista de Exercícios – LC (GSI005)

Aluno: Guilherme Alves Silva (12011BSI230)

1- a) Falsa. A satisfação de uma fórmula não implica a satisfação de sua negação. Por exemplo, a fórmula "p" é satisfatível, mas sua negação, ¬p é insatisfatível .

b) Verdadeira. Se A é tautologia, então todas as interpretações possíveis tornam A verdadeira. Portanto, a negação de A, ¬A, é falsa em todas as interpretações possíveis, o que significa que ¬A é contraditória.

c) Verdadeira. Se A é uma fórmula que é verdadeira em todas as interpretações possíveis, então A é tautologia e, portanto, satisfatível.

d) Verdadeira. Se A é uma fórmula que é falsa em todas as interpretações possíveis, então ¬A é verdadeira em todas as interpretações possíveis e, portanto, satisfatível.

e) Verdadeira. Se A é tautologia e A |= B, então todas as interpretações possíveis que tornam A verdadeira também tornam B verdadeira. Portanto, B é verdadeira em todas as interpretações possíveis e, portanto, B é tautologia.

f) Falsa. Se B é tautologia e A |= B, então A pode ser satisfatível ou não. Por exemplo, se B é a fórmula "p ∨ ¬p" e A é a fórmula "p", então A |= B e B é tautologia, mas A não é tautologia.

2- a) Tautologia. A implicação "P → P" é sempre verdadeira, independentemente do valor de P.

b) Contraditória. Se P é verdadeiro, então ¬P é falso, fazendo com que a implicação "P → ¬P" seja falsa. Se P é falso, então a implicação seria verdadeira, mas isso não é suficiente para torná-la satisfatível, já que a sentença deve ser falsa em todas as interpretações possíveis para ser considerada contraditória.

c) Satisfatível. Se P é verdadeiro, então a implicação "¬P → P" é verdadeira. Se P é falso, então a implicação é verdadeira, pois a sentença "¬P" é verdadeira. Portanto, a sentença é satisfatível.

d) Tautologia. A equivalência "P ↔ P" é sempre verdadeira, independentemente do valor de verdade de P.

e) Tautologia. Se P é verdadeiro, então a sentença "Q → P" é verdadeira, e portanto a implicação "P → (Q → P)" também é verdadeira. Se P é falso, então a implicação é verdadeira, pois a sentença "P" é falsa. Portanto, a sentença é uma tautologia.

f) Tautologia. A sentença "P → (Q v R)" é verdadeira sempre que P é falso, ou quando tanto P quanto Q são verdadeiros. A sentença "(P ∧ (Q→ ¬R))" é verdadeira somente quando P é verdadeiro, Q é verdadeiro e R é falso. Portanto, a implicação "(P → (Q v R)) → (P ∧ (Q→ ¬R))" é sempre verdadeira.

g) Satisfatível. Se R é verdadeiro, então a sentença "(P v R) ∧ (Q v R)" é verdadeira. Se P é verdadeiro e Q é verdadeiro, então a sentença "(P ∧ Q) v R" também é verdadeira. Portanto, a sentença é satisfatível.

h) Tautologia. A sentença "Q → (P ∧ Q)" é verdadeira sempre que P e Q são verdadeiros. Portanto, a implicação "P → Q → (P ∧ Q)" é sempre verdadeira.

i) Contraditória. Se A e B têm o mesmo valor de verdade, então a sentença "A ↔ B" é verdadeira, e portanto "¬(A ↔ B)" é falsa. Se A e B têm valores de verdade diferentes, então a sentença "¬(A ↔ B)" é verdadeira. Em ambos os casos, a sentença não é satisfatível.

```
3-          H
           / \
  (P ∧ Q)  (R ∧ S)
     / \    / \
    P   Q  R   S
     /        \
     ~        ~
     |        |
     ~~       ~~
     ||       ||
     F        F
```

A partir da árvore semântica, podemos ver que a fórmula H é uma tautologia, pois todas as valorações levam a H ser verdadeira.

4- a) Para determinar os casos em que $(P \land Q) \rightarrow G$ é tautologia, podemos negar a fórmula e verificar se a negação é uma contradição:

$\neg[(P \land Q) \rightarrow G] \equiv (P \land Q) \land \neg G$

Para que $(P \land Q) \land \neg G$ seja uma contradição, a conjunção de $(P \land Q)$ precisa ser verdadeira enquanto $\neg G$ é falsa em todas as interpretações possíveis. Portanto, podemos dizer que $(P \land Q) \rightarrow G$ é tautologia se e somente se $\neg[(P \land Q) \land \neg G]$ for uma contradição.

b) Para determinar os casos em que $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é tautologia, podemos negar a fórmula e verificar se a negação é uma contradição:

$\neg[(P \rightarrow Q) \rightarrow G] \equiv (P \rightarrow Q) \land \neg G$

Para que $(P \rightarrow Q) \land \neg G$ seja uma contradição, a conjunção de $(P \rightarrow Q)$ precisa ser verdadeira enquanto $\neg G$ é falsa em todas as interpretações possíveis. Portanto, podemos dizer que $(P \rightarrow Q) \rightarrow G$ é tautologia se e somente se $\neg[(P \rightarrow Q) \land \neg G]$ for uma contradição.

c) Para determinar os casos em que (P v Q) |= G, podemos negar a fórmula e verificar se a negação é uma contradição:

¬[(P v Q) |= G] ≡ (P ∧ ¬G) ∧ (Q ∧ ¬G)

Para que (P ∧ ¬G) ∧ (Q ∧ ¬G) seja uma contradição, a conjunção de (P ∧ ¬G) e (Q ∧ ¬G) precisa ser verdadeira em todas as interpretações possíveis. Portanto, podemos dizer que (P v Q) |= G se e somente se ¬[(P ∧ ¬G) ∧ (Q ∧ ¬G)] for uma contradição.

d) Para determinar os casos em que (P ↔ Q) |= G, podemos negar a fórmula e verificar se a negação é uma contradição:

¬[(P ↔ Q) |= G] ≡ [(P ∧ ¬Q) ∨ (¬P ∧ Q)] ∧ ¬G

Para que [(P ∧ ¬Q) ∨ (¬P ∧ Q)] ∧ ¬G seja uma contradição, a conjunção de [(P ∧ ¬Q) ∨ (¬P ∧ Q)] precisa ser verdadeira enquanto ¬G é falsa em todas as interpretações possíveis. Portanto, podemos dizer que (P ↔ Q) |= G se e somente se ¬[[(P ∧ ¬Q) ∨ (¬P ∧ Q)] ∧ ¬G] for uma contradição.

5- a) A comida não é boa ou o serviço não é excelente.

b) A comida não é boa e o serviço não é excelente.

c) A comida não é boa ou o serviço não é excelente ou não está caro.

d) A comida é boa e o serviço é excelente.

e) Não é caro ou a comida não é boa ou o serviço não é excelente.

6- a) J[P] = T, portanto, para que a equivalência seja verdadeira, J[¬P v Q] e J[P → Q] devem ter o mesmo valor. Como J[P] = T, então J[¬P] = F. Dessa forma, J[¬P v Q] = T. Além disso, J[P → Q] = T, pois quando J[P] = T e J[Q] é F ou T, a implicação é sempre verdadeira. Portanto, podemos concluir que J[Q] = T.

b) J[P] = T, portanto, para que a fórmula seja verdadeira, as outras subfórmulas também devem ser verdadeiras. Isso significa que J[Q → R] = T, J[P → R] = T e J[P → R] = T. Como J[P] = T e J[P → R] = T, então

J[R] = T. Além disso, como J[Q → R] = T e J[Q] = T, então J[R] = T. Portanto, podemos concluir que J[Q] = T e J[R] = T.

c) J[P] = T, portanto, para que a equivalência seja verdadeira, J[P → ¬Q] e J[¬P] devem ter o mesmo valor. Como J[P] = T, então J[P → ¬Q] = F somente se J[¬Q] = T. Mas isso implicaria em J[¬P] = T, o que contradiz a hipótese inicial de que J[P] = T. Portanto, J[P → ¬Q] = T e J[¬P] = F, o que implica em J[Q] = F.

d) Como J[P] = T e a fórmula é Q → ¬P, podemos concluir que J[Q] = F.

e) J[P] = T, portanto, para que a equivalência seja verdadeira, J[P → (Q → R)] e J[(P ∧ Q) → R] devem ter o mesmo valor verdade. Como J[P] = T, então J[Q → R] = T e J[P ∧ Q] = T. Portanto, J[R] = T, já que J[Q] = T. Além disso, J[Q → R] = T implica que J[¬Q v R] = T, o que significa que J[R] = T, pois J[¬Q] é F. Portanto, podemos concluir que J[Q] = T e J[R] = T.

f) J[P] = T, portanto, para que a implicação seja verdadeira, J[(P ∧ Q) ↔ P] ∧ J[(P ∨ Q) ↔ Q] deve ser verdadeira. Como J[P] = T, então J[(P ∧ Q) ↔ P] é verdadeira somente se J[Q] = T. Além disso, J[(P ∨ Q) ↔ Q] é verdadeira somente se J[P ∨ Q] é verdadeira e J[Q ∨ P] é verdadeira. Como J[P] = T, então J[P ∨ Q] = T. Como J[Q] = T, então J[Q ∨ P] = T. Portanto, podemos concluir que J[Q] = T.

7- a) Começamos simplificando a primeira parte da disjunção:

(p ∧ (¬p V q)) = (p ∧ ¬p) V (p ∧ q) (Distributividade do ∧ sobre o ∨ e Lei de De Morgan)

= F V (p ∧ q) (Identidade do ∧)

= (p ∧ q) (Identidade do ∨)

Substituindo na fórmula original, temos:

(p ∧ (¬p V q)) V (p ∧ q) = (p ∧ q) V (p ∧ q) = (p ∧ q)

Portanto, a simplificação lógica da fórmula é (p ∧ q).

8- a) Vamos começar expandindo a implicação na primeira fórmula: (R → P) ∧ (R → Q) ≡ (¬R ∨ P) ∧ (¬R ∨ Q) (equivalência da implicação) ≡ ¬R ∨ (P ∧ Q) (distributividade da disjunção sobre a conjunção)

Agora vamos trabalhar com a segunda fórmula: (¬P ∨ ¬Q) → ¬R ≡ ¬(¬P ∨ ¬Q) ∨ ¬R (equivalência da implicação) ≡ (P ∧ Q) ∨ ¬R (lei de De Morgan)

Portanto, temos que as duas fórmulas são equivalentes: $(R \rightarrow P) \land (R \rightarrow Q) \equiv \neg R \lor (P \land Q) \equiv (P \land Q) \lor \neg R \equiv (\neg P \lor \neg Q) \rightarrow \neg R$

b) Primeiro, vamos expandir a implicação na primeira fórmula: $\neg(P \rightarrow Q) \lor S \equiv \neg(\neg P \lor Q) \lor S$ (equivalência da implicação) $\equiv (P \land \neg Q) \lor S$ (lei de De Morgan)

Agora, vamos trabalhar com a segunda fórmula: $(P \lor S) \land ((Q \rightarrow S) \land \neg P) \equiv (P \land (Q \rightarrow S) \land \neg P) \lor (S \land (Q \rightarrow S) \land \neg P)$ (distributividade da conjunção sobre a disjunção) $\equiv (P \land (\neg Q \lor S) \land \neg P) \lor (S \land (\neg Q \lor S) \land \neg P)$ (equivalência da implicação) $\equiv (\neg P \land P \land \neg Q) \lor (\neg P \land S) \lor (S \land \neg Q \land \neg P)$ (distributividade da conjunção sobre a disjunção) $\equiv (\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land S) \lor (S \land \neg Q \land \neg P)$ (idempotência da conjunção)

Portanto, temos que as duas fórmulas são equivalentes: $\neg(P \rightarrow Q) \lor S \equiv (P \land \neg Q) \lor S \equiv (\neg P \land \neg Q) \lor (\neg P \land S) \lor (S \land \neg Q \land \neg P) \equiv (P \lor S) \land ((Q \rightarrow S) \land \neg P)$