CAPÍTULO 1. A LINGUAGEM DA LÓGICA PROPOSICIONAL

1. Considere as concatenações de símbolos do alfabeto da Lógica Proposicional dadas a seguir. Identifique aquelas que são fórmulas da Lógica Proposicional. Considere a forma simplificada de representação de fórmulas, em que os símbolos de pontuação podem ser omitidos.

(a) $(P\ Q \lor P10.000)$
R: não é fórmula

(b) $(P \land Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow P) \lor \neg\neg R)$
R: é fórmula

(c) $\neg\neg P$
R: é fórmula

(d) $\lor Q$
R: não é fórmula

(e) $(P \land Q) \rightarrow ((Q \leftrightarrow \neg R))$
R: é fórmula

2. Responda as questões a seguir, justificando suas respostas.

(a) Existe fórmula sem símbolo de pontuação?
R: sim, por exemplo, as fórmulas P, true, false, etc.

(b) Quantos tipos de símbolos possui o alfabeto da Lógica Proposicional? Quais são esses símbolos?

R: o alfabeto da lógica proposicional possui três tipos de símbolos: conectivos lógicos, proposições atômicas e símbolos auxiliares. São cinco os conectivos lógicos: negação ($\neg$), conjunção ($\land$), disjunção ($\lor$), condicional ($\rightarrow$) e bicondicional ($\leftrightarrow$). Já as proposições atômicas são representadas por letras maiúsculas, como P, Q, R, etc., enquanto os símbolos auxiliares são utilizados para indicar a abertura e o fechamento de parênteses.

(c) Existe fórmula da Lógica Proposicional com algum conectivo, mas sem símbolo de pontuação?
R: não

3. Determine o comprimento e as subfórmulas das fórmulas a seguir.

(a) $((\neg\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \land P10.000$
R: Comprimento: 25; Subfórmulas: $\neg\neg P$, $\neg P$, $\neg\neg P \lor Q$, $P \rightarrow Q$, $\neg(\neg\neg P \lor Q)$, $\neg (P \rightarrow Q)$, $\neg(\neg\neg P \lor Q) \leftrightarrow \neg(P \rightarrow Q)$, $(\neg\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$, $((\neg\neg P \lor Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)) \land P$, P

(b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$
R: Comprimento: 30; Subfórmulas: $Q \rightarrow R$, $P \rightarrow R$, $(Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R))$, $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$, R, Q, P

(c) $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \lor Q$
R: Comprimento: 17; Subfórmulas: $\neg P$, $P \rightarrow \neg P$, $(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P$, Q, $((P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P) \lor Q$, $\neg P \leftrightarrow (P \rightarrow \neg P)$, $(P \rightarrow \neg P) \leftrightarrow \neg P$

(d) $\neg(P \rightarrow \neg P)$
R: Comprimento: 8; Subfórmulas: $\neg P$, $P \rightarrow \neg P$, $\neg(P \rightarrow \neg P)$

4. Elimine o maior número possível de símbolos de pontuação das fórmulas a seguir, mantendo a representação da fórmula original.

(a) $((\neg(\neg P)) \leftrightarrow ((\neg((\neg(\neg(P \lor Q))) \rightarrow R)) \land P))$
R: $((\neg\neg P) \leftrightarrow (\neg(\neg\neg(P \lor Q) \rightarrow R) \land P))$

(b) $(\neg P \rightarrow (Q \lor R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \lor \neg P))$
R: $(\neg P \rightarrow (Q \lor R)) \leftrightarrow ((P \land Q) \leftrightarrow (\neg\neg R \lor \neg P))$

(c) $((P \lor Q) \rightarrow (P \rightarrow (\neg Q)))$
R: $((P \lor Q) \rightarrow (P \rightarrow \neg Q))$

5. Considere as concatenações de símbolos a seguir. A partir da introdução de símbolos de pontuação, identifique quais fórmulas da Lógica Proposicional é possível obter.

(a) $P \lor \neg Q \rightarrow R \leftrightarrow \neg R$
R: $((P \lor \neg Q) \rightarrow R) \leftrightarrow \neg R$

(b) $Q \rightarrow \neg P \land Q$
R: $Q \rightarrow (\neg P \land Q)$

(c) $\neg P \lor Q \leftrightarrow Q$
R: $(\neg P \lor Q) \leftrightarrow Q$

(d) ¬¬P → Q ↔ P ∧ P¬¬R
R: ¬(¬P) → Q ↔ (P ∧ ¬¬R) = P → Q ↔ (P ∧ R)

6. (a) Escreva as fórmulas dos Exercícios 3 e 4 utilizando a notação polonesa.

Exercicio 3:

(a) ((¬¬P ∨ Q) ↔ (P → Q)) ∧ P10.000: ∧ ↔ ∨ ¬¬P Q → P

(b) P → ((Q → R) → ((P → R) → (P → R))): → P → → Q R → → P R P

(c) ((P → ¬P) ↔ ¬P) ∨ Q: ∨ ↔ → P ¬P ¬P Q

(d) ¬(P → ¬P): ¬ → P ¬P

Exercício 4:

(a) ((¬(¬P)) ↔ ((¬((¬(¬(P ∨ Q))) → R)) ∧ P)): ↔ ¬ ¬P ∧ → ¬ ¬ ∨ P Q R P

(b) (¬P → (Q ∨ R)) ↔ ((P ∧ Q) ↔ (¬¬R ∨ ¬P)): ↔ → ¬P ∨ Q R ↔ ↔ P Q ¬¬R ¬P

(c) ((P ∨ Q) → (P → (¬Q))): → ∨ P Q → P ¬Q

(b) Determine quais sequências de símbolos, indicadas a seguir, são fórmulas da Lógica Proposicional que utilizam a notação polonesa. No caso em que a sequência de símbolos é uma fórmula, reescreva-a utilizando a notação convencional.

∨ → P Q ↔ R → ∨P Q¬S: não é uma fórmula bem formada da lógica proposicional, pois há uma falta de parênteses e a ordem de precedência dos operadores não está clara.

→↔ P Q∨ → P Q → ¬RR: é uma fórmula bem formada da lógica proposicional em notação polonesa. Reescrevendo em notação convencional temos: ((P → Q) ↔ (R → (P ∨ Q))) → ¬R

→ ¬P¬QR ∨ ∨P Q ∨ ¬R¬P: é uma fórmula bem formada da lógica proposicional em notação polonesa. Reescrevendo em notação convencional temos: (¬P → (¬Q ∨ R)) ∨ (P ∨ Q ∨ ¬R ∨ ¬P)

↔→ ¬P ∨ QR ↔ ∧P Q ∨ ¬¬R¬P: é uma fórmula bem formada da lógica proposicional em notação polonesa. Reescrevendo em notação convencional temos: ((¬P ∨ Q) ↔ ((P ∧ Q) ∨ (¬¬R ∨ ¬P)))

7. Responda, justificando sua resposta.

(a) É possível encontrar uma fórmula H, da Lógica Proposicional, escrita na notação convencional e que corresponda a duas fórmulas diferentes escritas na notação polonesa?
R: sim, é possível encontrar uma fórmula H da Lógica Proposicional, escrita na notação convencional, que corresponda a duas fórmulas diferentes escritas na notação polonesa. Isso ocorre porque a notação polonesa é uma forma diferente de escrever fórmulas da Lógica Proposicional, mas que possui as mesmas regras e princípios de construção. Portanto, podemos ter diferentes formas de escrever uma mesma fórmula, o que pode levar a fórmulas diferentes em notações distintas. Por exemplo, a fórmula em notação polonesa "ABC^&" pode ser escrita em notação convencional como "(A ^ B) ∧ C" ou como "A ^ (B ∧ C)", que são duas fórmulas diferentes, mas que correspondem à mesma fórmula em notação polonesa.

(b) É possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa, que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional escritas na notação convencional?
R: não, não é possível encontrar uma fórmula H escrita na notação polonesa que corresponda a duas fórmulas diferentes da Lógica Proposicional escritas na notação convencional. Isso ocorre porque a notação polonesa segue regras e princípios de construção bem definidos, que não permitem ambiguidade ou interpretações diferentes. Portanto, para cada fórmula em notação polonesa, existe apenas uma fórmula correspondente em notação convencional, e vice-versa. Dessa forma, se duas fórmulas em notação convencional são diferentes, elas terão duas fórmulas correspondentes em notação polonesa diferentes também.

10. Seja H uma fórmula que não contém o conectivo ¬ .

(a) Qual a paridade de comp[H]?
R: comp[H] é um número ímpar.

(b) Qual a relação entre comp[H] e o número de conectivos de H?
R: comp(H) é o dobro do número de conectivos de H, mais um.

CAPÍTULO 2. A SEMÂNTICA DA LÓGICA PROPOSICIONAL

2. Comente, do ponto de vista lógico, a diferença entre sintaxe e semântica.

R: a diferença fundamental entre sintaxe e semântica é que a primeira está relacionada à estrutura e formação das fórmulas, enquanto a segunda está relacionada ao significado e interpretação das fórmulas em diferentes contextos. Ambas as dimensões são importantes para a lógica, pois a sintaxe é necessária para garantir a validade dos argumentos, enquanto a semântica é necessária para atribuir significado às proposições e fórmulas.

3. A interpretação do conectivo ∨, na Lógica Proposicional, corresponde ao exato significado da palavra "ou"? Justifique sua resposta. Nessa análise, considere, por exemplo, o significado da sentença: "Vou ao teatro OU ao cinema" como sendo verdadeiro. Desse fato, é possível concluir que irei ao teatro e ao cinema ao mesmo tempo? Faça uma análise análoga para os outros conectivos.

R: não necessariamente a interpretação do conectivo ∨, na lógica proposicional, corresponde ao exato significado da palavra "ou". Enquanto na linguagem natural a palavra "ou" pode ter um sentido exclusivo, a lógica proposicional não possui essa distinção. Na lógica, a disjunção ∨ entre duas proposições é verdadeira se pelo menos uma delas é verdadeira, mas também pode ser verdadeira se ambas forem verdadeiras. No exemplo dado, a sentença "Vou ao teatro OU ao cinema" é verdadeira se eu for ao teatro ou ao cinema, ou seja, pelo menos uma das opções deve ser verdadeira para a sentença ser verdadeira. Entretanto, isso não significa necessariamente que irei ao teatro e ao cinema ao mesmo tempo, pois a sentença não exclui a possibilidade de que eu vá apenas a um dos dois lugares. Analogamente, os outros conectivos da lógica proposicional também podem ter significados diferentes dos termos correspondentes na linguagem natural. Por exemplo, a negação $\neg$ de uma proposição não corresponde necessariamente à negação da ideia expressa pela proposição na linguagem natural. E a conjunção $\wedge$ entre duas proposições é verdadeira apenas se ambas são verdadeiras, independentemente de haver alguma relação lógica ou causal entre elas.

4. Sejam I uma interpretação e a fórmula $H = (P \rightarrow Q)$.

(a) Se $I[H] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[P]$ e $I[Q]$?
R: Não temos a possibilidade: $I[P] = T$ e $I[Q] = F$.

(b) Se $I[H] = T$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[Q]$?
R: $I[Q] = T$

(c) Se $I[Q] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
R: $I[H] = T$

(d) Se $I[H] = T$ e $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de $I[Q]$?
R: nada podemos concluir a respeito de $I[Q]$

(e) Se $I[Q] = F$ e $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
R: $I[H] = F$

5. Considere as fórmulas a seguir:

(a) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

(b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

(c) $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$

(d) $(Q \rightarrow \neg P)$

(e) $(P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \leftrightarrow ((P \wedge Q) \rightarrow R)$

(f) $(R \wedge \neg P) \leftrightarrow (P \wedge R)$

(g) $(P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))$

(h) $(\text{false} \rightarrow Q) \leftrightarrow R$

(i) $\text{true} \rightarrow Q$

(j) $(P \rightarrow \text{false}) \leftrightarrow R$

(k) $P \rightarrow \text{true}$

- Determine a tabela-verdade associada a cada fórmula

(a) $(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)$

P	Q	¬P	¬P ∨ Q	P → Q	(¬P ∨ Q) ↔ (P → Q)
T	T	F	T	T	T
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T

(b) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow ((P \rightarrow R) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

P	Q	R	Q → R	P → R	(P → R) → (P → R)	(Q → R) → ((P → R) → (P → R))	P → ((Q → R) → ((P → R) → (P → R)))
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	T	T
T	F	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T	T
F	T	F	F	T	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T	T
F	F	F	T	T	T	T	T

(c) $(P \rightarrow \neg Q) \leftrightarrow \neg P$

P	Q	¬Q	P → ¬Q	¬P	(P → ¬Q) ↔ ¬P
T	T	F	F	F	T
T	F	T	T	F	F
F	T	F	T	T	F
F	F	T	T	T	T

(d) $(Q \rightarrow \neg P)$

P	Q	¬P	Q → ¬P
T	T	F	F
T	F	F	T
F	T	T	T

F	F	T	T

(e) (P → (Q → R)) ↔ ((P ∧ Q) → R)

P	Q	R	Q → R	P → (Q → R)	P ∧ Q	(P ∧ Q) → R	(P → (Q → R)) ↔ ((P ∧ Q) → R)
T	T	T	T	T	T	T	T
T	T	F	F	F	T	F	T
T	F	T	T	T	F	T	T
T	F	F	T	T	F	T	T
F	T	T	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	T	T
F	F	T	T	T	F	T	T
F	F	F	T	T	F	T	T

(f) (R ∧ ¬P) ↔ (P ∧ R)

P	R	¬P	R ∧ ¬P	P ∧ R	(R ∧ ¬P) ↔ (P ∧ R)
T	T	F	F	T	F
T	F	F	F	F	T
F	T	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T

(g) (P → Q) → (((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q))

P	Q	P ∧ Q	P ∨ Q	P → Q	(P ∧ Q) ↔ P	(P ∨ Q) ↔ Q	((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q)	(P → Q) → (((P ∧ Q) ↔ P) ∧ ((P ∨ Q) ↔ Q))
T	T	T	T	T	T	T	T	T
T	F	F	T	F	F	F	T	T
F	T	F	T	T	F	T	T	T
F	F	F	F	T	T	T	T	T

(h) (false → Q) ↔ R

Q	R	false → Q	(false → Q) ↔ R
T	T	T	T
T	F	T	F
F	T	T	T
F	F	T	T

(i) true → Q

Q	true → Q
T	T
F	F

(j) $(P \rightarrow \text{false}) \leftrightarrow R$

P	R	¬P	P → false	(P → false) ↔ R
T	T	F	T	F
T	F	F	T	T
F	T	T	F	F
F	F	T	F	T

(k) $P \rightarrow \text{true}$

P	¬P	¬P V true	P → true
T	F	true	true
F	T	true	true

- Seja I uma interpretação tal que I[P] = T, I[Q] = F e I[R] = F, o que podemos concluir a respeito do valor de verdade de cada fórmula?
  R: $I[(\neg P \vee Q) \leftrightarrow (P \rightarrow Q)] = T$

- Seja J uma interpretação que interpreta todas as fórmulas anteriores como sendo verdadeiras. Além disso, J[P] = T. O que podemos concluir a respeito de J[Q] e J[R], em cada um dos casos?
  R: nada podemos concluir a respeito de J[Q] e J[R]

6. Seja I uma interpretação tal que: $I[P \rightarrow Q] = T$. O que se pode deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

(a) $I[(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)]$
R: Para a fórmula $(P \vee R) \rightarrow (Q \vee R)$, temos que seu valor lógico só será falso se a primeira parte da implicação $(P \vee R)$ for verdadeira e a segunda parte $(Q \vee R)$ for falsa. Como $I[P \rightarrow Q] = T$, então temos que ou P é falso ou Q é verdadeiro (ou ambos). Se P é falso, a primeira parte da implicação é verdadeira e, portanto, a fórmula toda será verdadeira, independentemente do valor de R. Se P é verdadeiro, então Q também deve ser verdadeiro para que a implicação seja verdadeira. Portanto, a fórmula será verdadeira sempre que P for falso ou tanto P quanto Q forem verdadeiros.

(b) $I[(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)]$
R: Para a fórmula $(P \wedge R) \rightarrow (Q \wedge R)$, temos que seu valor lógico só será falso se a primeira parte da implicação $(P \wedge R)$ for verdadeira e a segunda parte $(Q \wedge R)$ for falsa. Como $I[P \rightarrow Q] = T$, então temos que ou P é falso ou

Q é verdadeiro (ou ambos). Se P é verdadeiro, R também deve ser verdadeiro para que a primeira parte da implicação seja verdadeira. Se Q é falso, a segunda parte da implicação será falsa, independentemente do valor de R. Portanto, a fórmula será verdadeira sempre que P for falso ou tanto P quanto Q e R forem verdadeiros.

(c) $I[(\neg P \lor Q) \rightarrow (P \lor Q)]$
R: Para a fórmula $(\neg P \lor Q) \rightarrow (P \lor Q)$, temos que seu valor lógico só será falso se a primeira parte da implicação $(\neg P \lor Q)$ for verdadeira e a segunda parte $(P \lor Q)$ for falsa. Como $I[P \rightarrow Q] = T$, então temos que ou P é falso ou Q é verdadeiro (ou ambos). Se P é verdadeiro, a segunda parte da implicação será verdadeira, independentemente do valor de Q. Se P é falso, a primeira parte da implicação será verdadeira, independentemente do valor de Q. Portanto, a fórmula será verdadeira sempre que P for verdadeiro ou a disjunção $\neg P \lor Q$ for falsa, o que ocorre somente quando P é falso e Q é falso.

Repita este exercício supondo $I[P \rightarrow Q] = F$.

(a) $I[(P \lor R) \rightarrow (Q \lor R)]$
R: Usando a tabela de verdade do conectivo →, sabemos que a única maneira de a implicação ser falsa é quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Como $I[P \rightarrow Q]$ é falso, $I[P]$ deve ser verdadeiro e $I[Q]$ deve ser falso. Portanto, $I[(P \lor R) \rightarrow (Q \lor R)]$ será falso se $I[P]$ for verdadeiro e $I[R]$ for falso.

(b) $I[(P \land R) \rightarrow (Q \land R)]$
R: Usando a tabela de verdade do conectivo →, sabemos que a única maneira de a implicação ser falsa é quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Como $I[P \rightarrow Q]$ é falso, $I[P]$ deve ser verdadeiro e $I[Q]$ deve ser falso. Portanto, $I[(P \land R) \rightarrow (Q \land R)]$ será verdadeiro se $I[P]$ for falso ou $I[R]$ for verdadeiro.

(c) $I[(\neg P \lor Q) \rightarrow (P \lor Q)]$
R: Usando a tabela de verdade do conectivo →, sabemos que a única maneira de a implicação ser falsa é quando o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso. Como $I[P \rightarrow Q]$ é falso, $I[P]$ deve ser verdadeiro e $I[Q]$ deve ser falso. Portanto, $I[(\neg P \lor Q) \rightarrow (P \lor Q)]$ será verdadeiro se $I[P]$ for falso ou $I[Q]$ for verdadeiro.

7. Seja I uma interpretação tal que: $I[P \leftrightarrow Q] = T$. O que podemos deduzir a respeito dos resultados das interpretações a seguir?

(a) $I[\neg P \land Q]$:
R: $I[\neg P \land Q]$: Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é verdadeiro, temos que $I[P] = I[Q]$. Portanto, se $I[\neg P \land Q]$ for verdadeiro, então $I[\neg P] = T$ e $I[Q] = T$. Logo, concluímos que $I[\neg P \land Q] = T$.

(b) $I[P \lor \neg Q]$
R: $I[P \lor \neg Q]$: Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é verdadeiro, temos que $I[P] = I[Q]$. Portanto, se $I[P \lor \neg Q]$ for verdadeiro, então pelo menos uma das proposições deve ser verdadeira. Isso implica que ou $I[P] = T$ ou $I[\neg Q] = T$. Como $I[P] = I[Q]$, concluímos que $I[P \lor \neg Q] = T$.

(c) $I[Q \to P]$
R: $I[Q \to P]$: Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é verdadeiro, temos que $I[P] = I[Q]$. Portanto, se $I[Q \to P]$ for verdadeiro, então ou $I[Q] = F$ ou $I[P] = T$. Mas como $I[P] = I[Q]$, concluímos que $I[Q \to P] = T$.

(d) $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)]$
R: $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)]$: Podemos simplificar essa proposição para $(P \leftrightarrow Q) \land R$. Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é verdadeiro, temos que $I[P] = I[Q]$. Portanto, para que $(P \leftrightarrow Q)$ seja verdadeiro, precisamos ter $I[P] = I[Q] = T$ ou $I[P] = I[Q] = F$. Como a conjunção $(P \leftrightarrow Q) \land R$ é verdadeira se e somente se ambas as proposições forem verdadeiras, concluímos que $I[(P \land R) \leftrightarrow (Q \land R)] = T$ apenas se $I[P] = I[Q] = T$ e $I[R] = T$.

(e) $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)]$
R: $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)]$: Podemos simplificar essa proposição para $(P \leftrightarrow Q) \lor R$. Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é verdadeiro, temos que $I[P] = I[Q]$. Portanto, para que $(P \leftrightarrow Q)$ seja verdadeiro, precisamos ter $I[P] = I[Q] = T$ ou $I[P] = I[Q] = F$. Como a disjunção $(P \leftrightarrow Q) \lor R$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições for verdadeira, concluímos que $I[(P \lor R) \leftrightarrow (Q \lor R)] = T$ independentemente dos valores de $I[P]$, $I[Q]$ e $I[R]$.

Repita este exercício supondo $I[P \leftrightarrow Q] = F$.

(a) $I[\neg P \land Q]$:
R: $I[\neg P \land Q]$: Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é falso, temos que $I[P] \neq I[Q]$. Portanto, se $I[\neg P \land Q]$ for verdadeiro, então $I[\neg P] = T$ e $I[Q] = T$. Mas isso leva a uma contradição com $I[P \leftrightarrow Q] = F$, já que $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Portanto, concluímos que $I[\neg P \land Q] = F$.

(b) $I[P \lor \neg Q]$

R: $I[P \vee \neg Q]$: Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é falso, temos que $I[P] \neq I[Q]$. Portanto, se $I[P \vee \neg Q]$ for verdadeiro, então pelo menos uma das proposições deve ser verdadeira. Isso implica que ou $I[P] = T$ ou $I[\neg Q] = T$. Como $I[P] \neq I[Q]$, não podemos concluir nada sobre $I[P \vee \neg Q]$ apenas com a informação dada.

(c) $I[Q \rightarrow P]$
R: $I[Q \rightarrow P]$: Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é falso, temos que $I[P] \neq I[Q]$. Portanto, se $I[Q \rightarrow P]$ for verdadeiro, então ou $I[Q] = F$ ou $I[P] = T$. Mas como $I[P] \neq I[Q]$, não podemos concluir nada sobre $I[Q \rightarrow P]$ apenas com a informação dada.

(d) $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)]$
R: $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)]$: Podemos simplificar essa proposição para $(P \leftrightarrow Q) \wedge R$. Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é falso, temos que $I[P] \neq I[Q]$. Portanto, para que $(P \leftrightarrow Q)$ seja falso, precisamos ter $I[P] = T$ e $I[Q] = F$ ou $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Como a conjunção $(P \leftrightarrow Q) \wedge R$ é falsa se pelo menos uma das proposições for falsa, concluímos que $I[(P \wedge R) \leftrightarrow (Q \wedge R)] = F$ independentemente do valor de $I[R]$.

(e) $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)]$
R: $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)]$: Podemos simplificar essa proposição para $(P \leftrightarrow Q) \vee R$. Como $I[P \leftrightarrow Q]$ é falso, temos que $I[P] \neq I[Q]$. Portanto, para que $(P \leftrightarrow Q)$ seja falso, precisamos ter $I[P] = T$ e $I[Q] = F$ ou $I[P] = F$ e $I[Q] = T$. Como a disjunção $(P \leftrightarrow Q) \vee R$ é verdadeira se pelo menos uma das proposições for verdadeira, concluímos que $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)] = T$ se $I[R] = T$ e $I[P] \neq I[Q]$, e $I[(P \vee R) \leftrightarrow (Q \vee R)] = F$ caso contrário.

8. Seja H a fórmula a seguir e I uma interpretação.

$$H = ((P \rightarrow Q) \rightarrow (((P \wedge Q) \leftrightarrow P) \wedge ((P \vee Q) \leftrightarrow Q))) \rightarrow P$$

(a) Se $I[P] = F$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
R: a) $I[H] = F$

(b) Se $I[P] = T$, o que se pode concluir a respeito de $I[H]$?
R: $I[H] = T$

10. Escreva as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional.

Utilize símbolos proposicionais para representar proposições.

(a) José virá à festa e Maria não gostará, ou José não virá à festa e Maria gostará da festa.

R: P = "José virá à festa"

Q = "Maria gostará da festa"

¬Q = "Maria não gostará da festa"

A proposição pode ser escrita como: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

(b) A novela será exibida, a menos que seja exibido o programa político.

R: P = "A novela será exibida"

Q = "O programa político será exibido"

¬P = "A novela não será exibida"

A proposição pode ser escrita como: $\neg P \vee Q$

(c) Se chover, irei para casa, caso contrário, ficarei no escritório.

R: P = "Vai chover"

Q = "Irei para casa"

R = "Ficarei no escritório"

A proposição pode ser escrita como: $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow R)$

(d) Se Maria é bonita, inteligente e sensível e se Rodrigo ama Maria, então ele é feliz.

R: P = "Maria é bonita"

Q = "Maria é inteligente"

R = "Maria é sensível"

S = "Rodrigo ama Maria"

T = "Rodrigo é feliz"

A proposição pode ser escrita como: $(P \wedge Q \wedge R \wedge S) \rightarrow T$

(e) Se sr. Oscar é feliz, sra. Oscar é infeliz, e se sra. Oscar é feliz, sr. Oscar é infeliz.

R: P = "sr. Oscar é feliz"

Q = "sra. Oscar é infeliz"

R = "sra. Oscar é feliz"

S = "sr. Oscar é infeliz"

A proposição pode ser escrita como: $(P \rightarrow Q) \wedge (R \rightarrow S)$

(f) Maurício virá à festa e Kátia não virá ou Maurício não virá à festa e Kátia ficará infeliz.

R: P = "Maurício virá à festa"

Q = "Kátia virá à festa"

¬Q = "Kátia não virá à festa"

R = "Kátia ficará infeliz"

A proposição pode ser escrita como: $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge R)$

12. A sentença “Todo homem é mortal” pode ser representada na Lógica Proposicional, simplesmente fazendo: P = “Todo homem é mortal”. Assim, nesse caso, a sentença é representada pelo símbolo P. Entretanto, podemos dizer que essa não é uma representação que considera os detalhes da sentença, pois ela representa a sentença como um todo.

Represente as sentenças a seguir utilizando a linguagem da Lógica Proposicional. Em cada caso, a sua representação considera elementos internos da sentença? Nos casos em que não for, justifique.

(a) Possivelmente, irei ao cinema.

(b) Fui gordo, hoje sou magro.

(c) Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos.

(d) Existe um aluno em minha sala que não gosta de nenhum colega.

(e) Existe aluno de Ciência da Computação que é detestado por seus colegas.

(f) Necessariamente algum político é desonesto.

(g) Amanhã irei ao cinema e depois irei ao teatro.

(h) Quase todo político é desonesto.

(i) Adalton sempre foi amigo de João Augusto.

(j) Toda regra tem exceção.

(k) Quase todo funcionário da Sigma é um talento.

(l) Poucos funcionários da Sigma não são empreendedores.

(m) O presidente da Sigma é admirado por seus colaboradores.

Respostas questão número 12:

(a) P = "Irei ao cinema"
A proposição não considera a possibilidade de não ir ao cinema, portanto não considera elementos internos da sentença.

(b) P = "Fui gordo"
Q = "Sou magro"
A proposição pode ser escrita como: P → Q. Essa representação considera elementos internos da sentença.

(c) P = "Existe no curso de Ciência da Computação um aluno admirado por todos."
A proposição não considera a possibilidade de não existir um aluno admirado por todos, portanto não considera elementos internos da sentença.

(d) $P(x)$ = "O aluno x não gosta de nenhum colega."
A proposição pode ser escrita como: $\exists x(P(x))$. Essa representação considera elementos internos da sentença.

(e) $P(x)$ = "O aluno x é detestado por seus colegas."
A proposição pode ser escrita como: $\exists x(P(x))$. Essa representação considera elementos internos da sentença.

(f) $P(x)$ = "O político x é desonesto."
A proposição pode ser escrita como: $\exists x(P(x))$. Essa representação considera elementos internos da sentença.

(g) P = "Irei ao cinema"
Q = "Irei ao teatro"
A proposição pode ser escrita como: $P \wedge Q$. Essa representação considera elementos internos da sentença.

(h) P = "Quase todo político é desonesto."
Essa representação não considera elementos internos da sentença, pois a palavra "quase" não é especificada. Então, a sentença poderia ser representada como "A maioria dos políticos é desonesta", por exemplo.

(i) P = "Adalton sempre foi amigo de João Augusto."
Essa sentença não pode ser representada na Lógica Proposicional, pois não é uma proposição. Ela descreve uma relação entre duas pessoas, mas não afirma nada de fato.

(j) P = "Toda regra tem exceção."
Essa sentença pode ser representada como P = "Para toda regra, há uma exceção." Essa representação considera elementos internos da sentença, pois a palavra "toda" é especificada.

(k) P = "Quase todo funcionário da Sigma é um talento."
Essa representação não considera elementos internos da sentença, pois a palavra "quase" não é especificada. Então, a sentença poderia ser representada como "A maioria dos funcionários da Sigma são talentosos", por exemplo.

(l) P = "Poucos funcionários da Sigma não são empreendedores."
Essa sentença pode ser representada como P = "Existem poucos funcionários da Sigma que não são empreendedores." Essa representação considera elementos internos da sentença, pois a palavra "poucos" é especificada.

(m) P = "O presidente da Sigma é admirado por seus colaboradores."
Essa sentença pode ser representada como P = "Os colaboradores da Sigma admiram o presidente." Essa representação não considera elementos internos da sentença, pois a palavra "por" é omitida.