Física Estatística

Ano lectivo 2023/2024

TPC1 - Teoria de Probabilidades

Atenção:

- Não deve escrever o seu nome nem nenhum código identificador em nenhum sítio.
- Deve entregar ESTE Notebook de Jupyter.
- O trabalho é individual. Podem e devem haver discussões com colegas mas o resultado entregue é individual.
- Não deve acrescentar ou apagar nenhuma célula.
- Todas as explicações devem ser claras e concisas.
- É preferível fazer menos e fazer bem que muito e mal.
- A não verificação de alguma destas regras leva ao anulamento e exclusão da prova.

1. Exercício

Gerador de números aleatórios: Considere a distribuição log-logística cuja densidade de probabilidade é dada por,

$$\rho(x) = \frac{\beta}{\alpha}\frac{(x/\alpha)^{\beta-1}}{\left(1+(x/\alpha)^{\beta}\right)^2}$$

onde x é uma variável aleatória real com suporte em $\mathbb{R}_0^+$. O exponente β limita o número de momentos finitos associados a esta distribuição.

1. Mostre que a distribuição de probabilidade cumulativa é dada por

$$C(x) = \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{-\beta}}$$

2. Implemente o método de inversão e gere amostras para $\alpha = 1$ e $\beta = \{1, 1.5, 2\}$. Compare os histogramas com a densidade de probabilidade exacta.

3. Podemos tentar estimar o valor médio a partir do cálculo do estimador da média,

$$\overline{X}_N = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i.$$

   para uma amostra finita, o estimador é ele próprio uma variável aleatória pelo que tem uma distribuição de probabilidade. Considerando experiências nas quais que gera N eventos e para cada uma calcula o estimador do valor médio, obtenha, um histograma de frequências para cada uma destas experiências, considerando,

(a) $\beta = 1$ e comparando $N = \{1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096\}$.

(b) $\beta = 1.5$ e comparando $N = \{1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096\}$.

(c) $\beta = 2$ e comparando $N = \{1, 4, 16, 64, 256, 1024, 4096\}$.

4. O que conclui da observações que fez? Em quais das situações é possível determinar um valor médio? Porquê?

5. Considerando o caso em que $\beta = 2$, represente como função de N o desvio padrão da amostra de medidas de $\overline{X}_N$. Qual o significado deste comportamento para a medição de um valor médio?

6. Repita a análise anterior para $\beta = 1.5$. O que conclui neste caso? Será possível medir um valor médio? Como compatibiliza com o resultado anterior? Afinal é possível ou não medir este valor médio? Será que uma análise de percentis é útil?

2. Exercício

Amostragem por importância: A função característica da distribuição de probabilidade da média de N variáveis é dada por,

$$\phi(k, N) = \left(\int_0^{+\infty} dx \rho(x) e^{-i\frac{k}{N}x} \right)^N = \phi^N\left(\frac{k}{N}, 1\right),$$

Para estimar o integral é possível calcular usar o método de amostragem por importância para cada valor de k. Considerando $\beta = 1.5$ e $\beta = 2$:

1. Calcule como função de k o integral da função característica de $\rho(x)$ e estime a barra de erro usando 128 medidas. Represente os pontos com as respectivas barras de erro.

2. Sendo $\phi(k)$ uma função complexa, $\phi(k, N)$ também será. Considerando que escreve $\phi = re^{i\Theta}$, ou seja, à custa de uma parte real e uma fase,

$$\phi(k, N) = r^N\left(\frac{k}{N}\right) e^{iN\Theta(k/N)},$$

   represente $R(k, N) = r^N\left(\frac{k}{N}\right)$ e $N\Theta(k/N)$ como função de k para diferentes valores de N. O que observa?

3. A demonstração mais frequente do teorema do limite central é feita através de uma expansão em cumulantes. Contudo nem sempre esta expansão é possível ser feita uma vez que os cumulantes podem ser divergentes. Uma possibilidade é estudar o escalamento da distribuição característica com o tamanho do sistema. Explique como é que com o escalamento destas funções pode caracterizar a distribuição da média $\overline{X}_N$?

   Sugestões:

   - Se o valor médio estiver definido deve existir uma transformação de coordenadas $\overline{X}_N = \langle x \rangle + N^\gamma y$, tal que $\rho(y)$ deverá ser independente de N para N grande.
   - Para caracterizar o escalamento de $R(k, N)$ pode encontrar o expoente β tal que $R(k' N^\beta, N) = f(k')$.

Bom Trabalho