MAE5907 - Modelagem Bayesiana - 1º semestre de 2021 -

Profa. Márcia D'Elia Branco

LISTA 3

Os dois exercícios a seguir referem-se ao modelo hierárquico normal/nomal apresentado nas aulas 12 e 13.

1) Se $h(\mu, \tau) \propto 1$, mostrar que a distribuição a posteriori é própria para $J > 2$.

Dicas de solução:

Primeiro vamos fazer uma correção: $h(\mu, \tau^2) \propto I_{(0,\infty)}(\tau^2)$.

Lembrando o modelo normal/normal:

$$\bar{y}_j \mid \theta_j \sim N(\theta_j, \sigma^2/n_j)$$

$$\theta \mid \mu, \tau^2 \sim N(\mu, \tau^2)$$

Considerando a priori uniforme acima, a distribuição a posteriori conjunta é proporcional à

$$f(y \mid \mu, \tau^2) = \prod_{i=1}^{J} \phi(y_j; \mu, (\sigma^2/n_j + \tau^2))$$

Por simplicidade, você pode fazer a prova para o caso especial em que todos n_j são iguais. Em que $\bar{y}$ é a média das médias $\bar{y}_j$.

Uma dica é considerar a seguinte relação

$$\sum_{j=1}^{J} (y_j - \mu)^2 = \sum_{j=1}^{J} (y_j - \bar{y})^2 + J(\bar{y} - \mu)^2$$

Outra dica, é integrar primeiro em μ e depois em τ^2.

2) Considere o conjunto de dados apresentado no exemplo da aula 13.

(a) Refazer a análise considerando uma amostra de MC de tamanho$M = 1000$. Apresente uma tabela com as estimativas a posteriori para os $\theta_j \ \ , j = 1, \ldots, 8$ e outra com as estimativas dos hiperparâmetros μ e τ. Interprete.

Dica: Considere o esquema de simulação apresentado na aula 13 (slide 7).

A simulação que requer mais de esforço é a de τ pois

$$h(\tau \mid y) \propto \frac{\prod_{j=1}^{J} \phi(\bar{y}_j; \mu, \sigma_j^2 + \tau^2)}{\phi(\mu; \hat{\mu}, V_\mu)}$$

Para isso deve-se usar a função $sim.x()$ apresentada no final do livro Turkman et al. (2019).

As demais simulações são de normais.

(b) Obtenha o valor-P bayesiano dado por

$$P_B^j = P(Y_j^{rep} \geq y_j^{obs} \mid y) \ \ , \ j = 1, 2, \ldots, 8.$$

Dica:

Para obter uma amostra de Y_j^{rep} usamos a $rnorm(1, \theta_j^t, \sigma_j^2)$ para $t = 1, 2, \ldots, M$.

Verificar para cada valor simulado se $I(y_j^{rep} \leq y_j) = N_j[t]$.
Fazer a média de $N_j[t]$.

(c) Considere as seguintes priori: $\mu \sim N(0, 10^3)$ e $h(\tau \mid \sigma^2) = \frac{\sigma^2}{(\sigma^2+\tau^2)^2}$ (uniforme nos pesos). Usando o BUGS, ajuste o modelo e obtenha as estimativas dos parâmetros. Compare com o ajuste anterior.

Dica: Aqui deve-se usar o BUGS. As especificações das distribuições a priori:

$$\mu \sim dnorm(0, 10^{-3})$$

$$T \sim dunif(0,1) \qquad T = \frac{\sigma^2}{\sigma^2+\tau^2}.$$

σ^2 pode ser obtida pela médias das variâncias especificadas para cada escola.

(d) Mantendo as mesmas prioris para os hiperparâmetros do item (c), considere agora $\theta_j \mid \mu, \tau \sim T_\nu(\mu, \tau^2)$ com $\nu = 3$ graus de liberdades. Use o DIC e outras medidas para comparar os modelos.

Dica: Codigo do modelo BUGS

$$
\begin{array}{l}
model\{for(j \in 1:8)\{ \\
y[j] \sim dnorm(m[j], pre[j]) \\
pre[j] < -l[j] * [sigma2[j]]^{-1} \\
l[j] \sim dgamma(3/2, 3/2) \\
mu[j] \sim dnorm(\mu, pretau)\} \\
\}
\end{array}
$$

3) Para o exemplo 2.3 da pag.57 de Congdon (2014), ajuste o modelo com priori log-normal para λ_j. Isto é, considere

$$ln(\lambda_j) = ln(E_i) + \lambda_0 + u_j \quad u_j \sim N(0, \sigma^2).$$

(a) Apresente as estimativas a posteriori.

Dica: Os dados são apresentados na Tabela 2.2. e representam:

$y[j]$ casos de hepatite B na j-ésima região e
$E[j]$ número esperado de casos por região ($j = 1, 2, \ldots, 23$).

$$
\begin{array}{l}
model\{for(j \in 1:23)\{ \\
y[j] \sim dpoisson(m[j]) \\
log(mu[j]) < -log(E[j]) + lambda0 + u[j] \\
u[j] \sim dnorm(0, pre) \\
var = 1/pre; lambda = exp(lambda0)\} \\
\text{priori} \\
lambda0 \sim dnorm(0, 0.001) \\
pre \sim dgamma(1, 0.001) \\
\}
\end{array}
$$

(b) Determine os valores-p baseados na posteriori preditiva com a correção para dados de contagem (apresentada no início da pag. 51 do livro), usando dados simulados da posteriori preditiva completa. Determine também a alternativa menos conservadora, dada pela mistura dos valores-P (apresentada no final da pag. 51 do livro).

Dica:

$$I(y_{new,i}^{(t)} < y_i \mid \theta^{(t)}) + 0.5I(y_{new,i}^{(t)} = y_i \mid \theta^{(t)})$$

Alternativa com mistura:

4) Para o exemplo 2.5 da pag. 66 de Congdon (2014), ajuste o modelo com a alternativa t-Student como priori para os θ_j , $j = 1, \ldots, J$. Considere a seguinte priori para os graus de liberdades $\kappa = 1/\nu \ \sim U_{(0.02,0.5)}$.

5) Considere o seguinte conjunto de dados agregados

y	0	1	2	3	4	5	Total
Frequência	11	37	64	58	45	25	240

Os dados estão associados ao número de produtos comprados pelo i-ésimo cliente, $i = 1, \ldots, 240$, denotada por y_i. Vamos assumir que $y_i \sim Poisson(\lambda)$.

Dica: Sem o uso do BUGS.

Primeiro tem que definir uma priori para λ. A priori de Jeffreys é dada por $h(\lambda) \propto (\lambda)^{-1/2}$.

Obtemos uma forma conhecida para distribuição a posteriori:

$$\lambda \mid y \sim Gama(\sum_{i=1}^{240} y_i + 1/2, 240)$$

Para obter uma amostra de MC, basta simular $rgamma(M, A, B)$.

Usando o BUGS tem que entrar com os dados desagregados: $y = (0, 0, \ldots, 0, 1, 1, \ldots, 5)$.

(b) Obtenha a predição do número de clientes que compram exatamente j produtos, para $j = 0, 1, \ldots, 5.$, via modelo. Compare com os valores observados.

Estimar as frequências: $\hat{f}_j = 240\hat{p}_j$ em que $p_j = P(Y = j \mid y)$.

$$\hat{p}_j = \frac{1}{M} \sum t = 1^M dpoisson(j, \lambda^{(t)})$$

(c) Determine o valor-P associado a cada frequência dado por

$$I(f^{(t)}_{rep,j} < f_{obs,j} \mid \theta^{(t)}) + 0.5I(f^{(t)}_{rep,j} = f_{obs,j} \mid \theta^{(t)})$$

em que $f_{obs,j}$ é o número observado de clientes e $f^{(t)}_{rep,j}$ o número de clientes predito, para $j = 0, 1, \ldots, 5$.

Já temos os valores simulados $\lambda^{(t)}$, $t = 1, \ldots, M$.

Precisamos simular réplicas da amostra: $amostra^{(t)}_{rep} \sim rpoisson(240, \lambda^{(t)})$.

Obter as frequências de vezes que apareceu cada um dos valores $f^{(t)}_{rep,j}$ $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.

6) Considere um modelo de mistura finita de normais, com fdp dada por

$$g(x) = \sum_{j=1}^{J} w_j \phi(x; \mu_j, \sigma^2)$$

tal que $0 < w_j < 1$ e $\sum_{j=1}^{J} w_j = 1$ (os pesos das componentes da mistura).
(a) Considere as variáveis $s_k = j$, se a j-ésima normal é usada, $j = 1, \ldots, J$, e reescreva como um modelo hierárquico. Para o segundo nível de hierarquia, considere $\mu_j \sim N(0, \tau^2)$ e $\gamma = 1/\sigma^2 \sim Gama(a_0, b_0)$.

Dica: Modelo hierárquico para $i = 1, \ldots, n$ e $j = 1, \ldots, J$

$$\begin{aligned}
&x_i \mid s_i = j, \mu_j, \sigma^2 \sim N(\mu_j, \sigma^2_j)\\
&P(s_i = j) = w_j\\
&\mu_j \sim N(0, \tau^2)\\
&\sigma^2 \sim IGama(a_0, b_0).
\end{aligned}$$

Há uma restrição: $\sum_{j=1}^{J} w_j = 1$.

(b) Considere uma priori $Dirichlet(\alpha, \alpha, \ldots, \alpha)$ para os pesos, isto é,

$$h(w_1, w_2, \ldots, w_J) \propto \prod_{j=1}^{J} w_j^{\alpha-1},$$

e determine as distribuições condicionais completas.

Dica: O conjunto de "parâmetros"(quantidades desconhecidas) :
$\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_J)$, σ^2, $w = (w_1, \ldots, w_J)$ e $S = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$.

(i) A primeira condicional completa:

$$P(s_i = j \mid \mu, \sigma^2, w, x) = \frac{f(x_i \mid s_i = j, \mu_j, \sigma^2) w_j}{\sum_{k=1}^{J} f(x_i \mid \mu_k, \sigma^2) w_k} = \frac{\phi(x_i, \mu_j, \sigma^2) w_j}{\sum_{k=1}^{J} \phi(x_i; \mu_k, \sigma^2) w_k}$$

(ii) A segunda condicional completa:

$$h(w \mid \mu, \sigma^2, S, x) = ???$$

(c) Para o conjunto de dados *galaxy* do pacote *MASS* do **R** estime $g(x)$. Use $J = 5$.