ALUNO: Guilherme Gomes de Brites
MATRICULA: 808721

INTRODUÇÃO AOS SOMATÓRIOS

RESOLUÇÃO DE EXERCÍCIOS

1-

Resolva os somatórios:

a) $\sum_{r=1}^{5} r^2 \rightsquigarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55$

b) $\sum_{1}^{5} 3i \rightsquigarrow 3.1 + 3.2 + 3.3 + 3.4 + 3.5 = 45$

c) $\sum_{1}^{5} (3-2i) \rightsquigarrow (3-2.1) + (3-2.2) + (3-2.3) + (3-2.4) +$
$(3-2.5) = -15$

d) $\sum_{1}^{5} (2i+x) \rightsquigarrow (2.1+x) + (2.2+x) + (2.3+x) + (2.4+x) +$
$(2.5+x) = 30 + 5x$

e) $\sum_{0}^{5} i.(i-1).(5-i) \rightsquigarrow 0 + (1.(0).4) + (2(1).3) +$
$(3(2).2) + (4(3).1) + (5(4).0)$
$= 30$

f) $\sum_{n=1}^{5} (3-2i) \rightsquigarrow ?$

2-

Mostre (e justifique) se cada expressão abaixo é verdadeira ou falsa:

a) (F) $\sum_{k=0}^{200} k^3 = \sum_{k=1}^{200} k^3$

b) (V) $\sum_{p=0}^{1000} (3+p) = 3 + \sum_{p=0}^{1000} p$

c) (V) $\sum_{l=1}^{n} 3l = 3.\sum_{l=1}^{n} l$

d) (V) $\sum_{k=0}^{12} k^p = \left(\sum_{k=0}^{12} k\right)^p$

e) (F) $\sum_{t=8}^{32} (3+t) = 75 + \sum_{t=8}^{32} t$

LETRA A: Falso, pois K começa com valores diferentes nos dois exemplos.

LETRA B: Verdadeiro, pois isolou a constante.

LETRA C: Verdadeiro, pois isolou a constante.

LETRA D: Verdadeiro, pois isolou a constante.

LETRA E: Falso, pois isolou um número que não existia anteriormente.

3-

Aplique associatividade para unificar os dois somatórios abaixo:

$$S_n = \sum_{3}^{n} a_i + \sum_{1}^{n} b_i$$

RESPOSTA:

$$S_n = b_1 + b_2 + \sum_{3}^{n} (a_i + b_i)$$

4-

Usando a comutatividade, prove que os somatórios abaixo são iguais:

$$\sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.i) = \sum_{0 \leq i \leq 4} (3 + 2.(4-i))$$

A única diferença é que no segundo somatório nós estamos vindo de “trás para frente”, o que não altera o resultado final, fazendo com que os dois somatórios sejam semelhantes.

5-

Aplique as regras de transformação para obter a fórmula fechada da soma S_n dos elementos de uma Progressão Aritmética (PA):

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} (a + b.i)$$

05- $S_r = \sum\limits_{0 \le i \le r} (a + b.i)$

$\sum [a + b.(r - i)]$

$\downarrow$

$0 \le (r-i) \le r$ $\to$ $\sum\limits_{r=0}^{r \ge (r-i)} a + br - bi$

$2S_r = \sum\limits_{0 \le i \le r} [a + b.i] + \sum\limits_{0 \le i \le r} [a + br - bi]$

$2S_r = \sum\limits_{0 \le i \le r} [a + \cancel{bi} + a + br - \cancel{bi}$

$\to 2a + br$

$\to \sum\limits_{0 \le i \le r} 2a + br \to \sum\limits_{0 \le i \le r} 1 \to = r + 1$

$(2a + br).(r+1) = 2S_r \to S = \frac{(2a+br)(r+1)}{2}$

6-

Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula fechada para o somatório de Gauss:

$$\sum_{0 \le i \le n} i = 0 + 1 + 2 + 3 + \ldots + n$$

06- $\sum_{0 \le i \le n} i = 0+1+2+3+4+\dots+n$

$$\frac{(2 \cdot 0 + 1 \cdot n)(n+1)}{2} \rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$$

7-

Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

```
int somatorio(int n){
    int soma = 0;
        for(int i = 1; i <= n; i++){
            soma += i;
        }
    return soma;
}
```

guilherme@debrites: ~/Documentos/Aeds-II/Trabalho Teoric...

```
int somatorio(int n){
        return (n*(n+1))/2;
}
```

8-

O Algoritmo de Seleção realiza $\sum_{0 \le i \le n} (n - i - 1)$ comparações entre registros. Agora, mostre a fórmula fechada para esse somatório

07- $\sum_{0 \le i \le n-2} (n-i-1) \rightsquigarrow \sum n - \sum i - \sum 1$

$\rightsquigarrow n.(n-1)$ $\qquad \frac{(n-2)(n-1)}{2}$ $\qquad 1.(n-1)$

$$n.(n-1) - \frac{(n-2)(n-1)}{2} - 1.(n-1)$$

$$\frac{2n(n-1) - (n-2)(n-1) - 2(n-1)}{2}$$

$$\frac{2n^2 - 2n - [n^2 - n - 2n - 2] - 2n + 2}{2}$$

$$2n^2 - 2n - n^2 - n - 2n - \cancel{2} - 2n + \cancel{2} \rightsquigarrow \Theta(n^2)$$

$$\frac{n^2 - 7n}{2} \rightsquigarrow \frac{n^2}{2} - \frac{7n}{2}$$

9-

Sendo $1 \le m \le n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m} a_i + \sum_{m}^{n} a_i =$$

09- $1 \le m \le n$

$$\sum_{1}^{m} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i + a_m$$

10-

Sendo $1 \leq m \leq n$, aplique a propriedade P1 para unificar os dois somatórios (quase disjuntos) abaixo:

$$\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i =$$

10- $\sum_{1}^{m-3} a_i + \sum_{m}^{n} a_i = \sum_{1}^{n} a_i - a_{m-2} - a_{m-1}$

11-

Aplique P2 para obter a fórmula fechada da soma $S_{\{n\}}$ dos elementos de uma Progressão Geométrica (PG):

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$$

11- $S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^i$

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + \sum_{0 \leq i \leq n} a.x^{i+1}$$

$$\sum_{0 \leq i \leq n} ax^{i+1} \rightsquigarrow \sum a.x^i.x \rightsquigarrow x \sum a.x^i$$

$$S_n + ax^{n+1} = ax^0 + x.S_n$$

$$S_n + ax^{n+1} = a + x.S_n$$

$$S_n - x \cdot S_n = a - ax^{n+1}$$

$$S_n(1-x) = a - ax^{n+1}$$

$$S_n = \frac{a - ax^{n+1}}{(1-x)} \quad \text{PARA } x \neq 1$$

PARA $x = 1 \rightsquigarrow \sum_{0 \leq i \leq n} a \rightsquigarrow a.(n-1)$

12-

Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \leq i \leq n} i.2^i$$

12 - $\sum_{0 \le i \le n} i \cdot 2^i$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = \overset{0}{\cancel{0 \cdot 2^0}} + \sum (i+1)2^{(i+1)}$$

$$\sum i \cdot 2^{i+1} + 1 \cdot 2^{i+1}$$

$$\to S_n + (n+1)2^{n+1} = \sum i \cdot 2^{i+1} + \sum 2^{i+1}$$

$$\to 2\sum i \cdot 2^i + 2\sum 2^i$$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + \frac{1 - 1 \cdot 2^{n+1}}{1-2} \to 2^{n+1} - 1$$

$$S_n + (n+1)2^{n+1} = 2S_n + 2(2^{n+1} - 1)$$

$$2S_n - S_n = (n+1)2^{n+1} - 2(2^{n+1} - 1)$$

$$S_n = n2^{n+1} - 2^{n+1} + 2 \to S_n = (n-1)2^{n+1} + 2$$

13-

Prove por indução que a fórmula abaixo para a soma dos quadrados perfeitos é verdadeira:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2 = \frac{n(n+1)(2.n+1)}{6}, \text{ para } n \ge 0$$

13 - $\sum_{0 \le i \le n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, PARA $n \ge 0$

1° PASSO: SUBSTITUIR PELO PRIMEIRO VALOR

$\frac{0(0+1)(2.0+1)}{6} \rightsquigarrow 0$ ✓

2° PASSO: $S_n = S_{n-1} + a_n$

$S_n = \frac{n-1(n)(2n-1)}{6} + n^2$

$S_n = \frac{(n^2-n)(2n-1)}{6} + n^2 \rightsquigarrow 2n^3 - n^2 - 2n^2 + n$

$6S_n = 2n^3 - 3n^2 + n + 6n^2$

$6S_n = 2n^3 + 3n^2 + n \rightsquigarrow S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

$S_n = n(2n^2 + 3n + 1) \rightsquigarrow \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

14-

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{0}^{n}(3+i) =$$

$$14 - \sum_{0}^{n}(3+i) \to \sum_{0}^{n} 3 + \boxed{\sum_{0}^{n} i}$$

→ SOMATÓRIO DE GAUSS

$$\to 3(n+1) + \boxed{\frac{n(n+1)}{2}}$$

→ FORMULA DE GAUSS

$$\frac{6n+6+n^2+n}{2} \to \frac{n^2+7n+6}{2}$$

INDUÇÃO: 1º PASSO

$$\to \frac{0^2+7.0+6}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

2º PASSO: $S_n = S_{n-1} + a_n$

$$\to S_n = \frac{(n-1)^2 + 7(n-1) + 6}{2} + 3 + n$$

$$S_n = \frac{n^2 - \cancel{2n} + 1 + 7n - 7 + 6 + 6 + \cancel{2n}}{2}$$

$$S_n = \frac{n^2+7n+6}{2}$$

15-

- Encontre a fórmula fechada do somatório abaixo e, em seguida, prove a usando indução matemática

$$\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2 - (2i)^2] =$$

15- $\sum_{1}^{n} [(2i+1)^2 - (2i)^2]$

$[\cancel{4i^2} + 4i + 1 - \cancel{4i^2}] \to 4i + 1$

$\sum_{1}^{n} 4i + 1 \to 4 \sum_{1}^{n} i + \sum_{1}^{n} 1$

$\cancel{4}^{2} * \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n \to 2n(n+1) + n$

$2n^2 + 2n + n \to 2n^2 + 3n$

INDUÇÃO: 1° PASSO:

$\to 2(1)^2 + 3(1) \to 2 + 3 \to 5$ (V)

2° PASSO: $S_n = S_{n-1} + a_n$

$\to S_n = 2(n-1)^2 + 3(n-1) \to 2(n^2 - 2n + 1) + 3n - 3$

$S_n = 2n^2 - 4n + 2 + 3n - 3 \to 2n^2 - n - 1 + 4n + 1$

$S_n = 2n^2 + 3n$ (V)

16-

Sabendo a fórmula da soma de uma progressão aritmética qualquer, mostre a fórmula fechada para o somatório de Gauss:

$$\sum_{1}^{n} [(5i+1)^2 - (5i-1)^2] =$$

15- $\sum_{1}^{n}[(2i+1)^2-(2i)^2]$

$[\cancel{4i^2}+4i+1-\cancel{4i^2}] \to 4i+1$

$\sum_{1}^{n} 4i+1 \to 4\sum_{1}^{n} i + \sum_{1}^{n} 1$

$\cancel{4}^{2} * \frac{n(n+1)}{\cancel{2}} + n \to 2n(n+1)+n$

$2n^2+2n+n \to 2n^2+3n$

INDUÇÃO: 1° PASSO:

$\to 2(1)^2+3(1) \to 2+3 \to 5$ (V)

2° PASSO: $S_n = S_{n-1} + a_n$

$\to S_n = 2(n-1)^2+3(n-1) \to 2(n^2-2n+1)+3n-3$

$S_n = 2n^2-4n+2+3n-3 \to 2n^2-n-1+4n+1$

$S_n = 2n^2+3n$ (V)

17- Dada a fórmula fechada do somatório dos ***n*** primeiros números inteiros, mostre um algoritmo mais eficiente que o apresentado abaixo:

$$\sum_{0 \le i \le n} i.2^i = (n-1).2^{n+1} + 2$$

17- $(n-1).2^{n+1}+2$

$(0-1)2^{0+1}+2 \to -2+2=0$ (V)

$(n-1-1).2^{(n-1)+1}+2 \to (n-2)2^n+2+n2^n$

$(2n-2)2^n+2 \to (n-1)2^n2+2$

$(n-1)2^{n+1}+2$ (V)

18-

Aplique perturbação para encontrar a fórmula do somatório abaixo:

$$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$$

18- P2 $\rightarrow S_n + a_{n+1} = a_0 + \sum_{0 \le i \le n} a_{i+1}$

$S_n = \sum_{0 \le i \le n} i^2$

$\rightarrow S_n + (n+1)^2 = 0^2 + \sum (i+1)^2$

$S_n + (n+1)^2 = \sum (i^2 + 2i + 1)$

$S_n + (n+1)^2 = S_n + n(n+1) + n+1$

$\rightarrow \sum i^2 + \sum 2i + \sum 1$

$S_n + \frac{\cancel{2} n(n+1)}{\cancel{2}} + n+1$

19-

Perturbe o somatório dos cubos para encontrar a fórmula fechada do somatório dos quadrados:

$$S\text{CUBO}_n = \sum_{0 \le i \le n} i^3$$

19- $S_{cubo_n} = \sum_{0 \le i \le n} i^3$

$S_{cubo} + (n+1)^3 = \sum (i+1)^3$

$i^3 + i^2 1 + 2i^2 1 + 2i 1^2 + 1^2 i + 1^3$

$i^3 + 3i^2 1 + 3i 1^2 + 1^3 \rightsquigarrow \underbrace{i^3} + \underbrace{3i^2} + \underbrace{3i} + \underbrace{1}$

$S_{cubo} + (n+1)^3 = \sum i^3 + \sum 3i^2 + \sum 3i + \sum 1$

$\cancel{S_{cubo}} + (n+1)^3 = \cancel{S_{cubo}} + 3S_n + \frac{3n(n+1)}{2} + (n+1)$

$2(n+1)^3 = 6S_n + 3n(n+1) + 2(n+1)$

$6S_n = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$

$6S_n = 2(n^3 + 3n^2 + 3n + 1) - 3n^2 - 3n - 2n - 2$

$= 2n^3 + 6n^2 + 6n + 2 - 3n^2 - 3n - 2n - 2$

$6S_n = 2n^3 + 3n^2 + n \rightsquigarrow S_n = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6}$

EXERCÍCIOS NÃO RESOLVIDOS

01-

- Faça um método *int somatorioPA(double a, double b, int n)* que retorna o somatório dos n primeiros termos de uma PA com termo inicial *a* e razão *b*.

int somatorioPA (double a, double b, int n) {

$\sum_{a}^{n} b.a \rightsquigarrow b \sum_{a}^{n} a \rightsquigarrow b.\frac{n(n+1)}{2}$

return b * ((n(n+1))/2);

}

PUC Minas Virtual

02-

- Um algoritmo de ordenação tradicional é o Inserção. Faça a análise de complexidade desse algoritmo para os números de comparações e movimentações entre registros no pior e melhor caso

Algoritmo de Inserção

```
for (int i = 1; i < n; i++) {
    int tmp = array[i];
    int j = i - 1;
    while ( (j >= 0) && (array[j] > tmp) ){
        array[j + 1] = array[j];
        j--;
    }
    array[j + 1] = tmp;
}
```


No pior caso o algoritmo de inserção faz $\Theta(n)$ comparações, no melhor faz 1 comparação, quando se encontra um numero maior realiza 3 movimentações.